

DÉFINITION AXIOMATIQUE DES ESPACES LINÉAIRES ET LEUR ORIENTATION

Introduction

La définition axiomatique des espaces linéaires, exposée dans cet article, facilite par son caractère constructif l'étude de l'orientation de ces espaces.

Nous nous servons de sept axiomes répartis en deux groupes :

- (I) les quatre axiomes de la demi-droite, et
- (II) les trois axiomes des espaces linéaires.

Dès le début, la droite est présentée comme un ensemble satisfaisant aux axiomes de la demi-droite, où les éléments de cet ensemble s'appellent des points. Ces axiomes définissent des parties de la droite, ayant des propriétés bien déterminées. Dans tout notre système d'axiomes (1), la notion de la demi-droite est fondamentale. Les axiomes de la demi-droite sont équivalents dans leur ensemble aux trois premiers axiomes du groupe II du système de Hilbert (2).

Les axiomes des espaces linéaires nous permettent de nous élever de la droite successivement à d'autres espaces. Les droites sont des parties de ces espaces et leur donnent ainsi une structure linéaire. Le premier espace linéaire défini, après la droite, est le plan satisfaisant en particulier à l'axiome du plan. Cet axiome permet de concevoir le plan comme engendré par des droites, procédé qui trouve ensuite une généralisation. Ce procédé constructif nous conduit d'une façon naturelle à la notion de l'orientation des espaces linéaires.

Pour orienter ces espaces, nous définissons d'abord des relations d'équivalence d'orientation ; ces relations nous permettent de définir l'orientation d'un espace linéaire comme une classe d'équivalence.

Si, malgré le caractère abstrait de cette géométrie, nous dessinons des figures, il faut éviter dans les démonstrations l'appel à l'intuition. Nous avons donné quelques démonstrations complètes ; d'autres sont indiquées plus rapidement ; dans tous les cas, nous avons essayé de mettre le domaine de causalité en évidence.

Nous avons défini le plus sommairement les espaces linéaires à n dimensions et leur orientation pour n plus grand que trois. Il est remarquable qu'au point de vue axiomatique, nous ne rencontrons plus de nouvelles difficultés pour ces généralisations, tandis que notre intuition peut être arrêtée momentanément par l'habitude de ramener le concept de l'espace à son origine expérimentale. Cependant, nous ne voulons pas éliminer l'intuition, mais seulement la contrôler et, ce faisant, la consolider et la développer.

(1) Voir *Bull. de l'A.P.M.*, mai 1951, notre résumé : sur un exposé axiomatique de la géométrie élémentaire.

(2) Voir D. HILBERT : *Grundlagen der Geometrie*, 7^e édit., 1930, Leipzig et Berlin.

Définition axiomatique des espaces linéaires

LA DROITE

La droite est un ensemble non vide d'éléments, appelés des points. Cet ensemble de points doit d'abord satisfaire aux axiomes de la demi-droite.

Ensuite, la droite est aussi une partie d'un espace linéaire. Comme telle, elle doit satisfaire aux axiomes des espaces linéaires.

LES AXIOMES DE LA DEMI-DROITE

AXIOME I, 1 : Tout point A d'une droite détermine sur cette droite deux parties (demi-droites), ayant le point A (origine) pour seul point commun ; chaque point de la droite appartient à l'une des parties.

AXIOME I, 2 : Sur chaque demi-droite, il y a au moins un point autre que l'origine.

AXIOME I, 3 : Etant donné deux points A et B sur une droite, la demi-droite d'origine A contenant B contient entièrement la demi-droite d'origine B ne contenant pas A.

NOTATIONS : Nous écrivons :

$\overrightarrow{AB}$ pour la demi-droite d'origine A contenant B.

$-\overrightarrow{AB}$ pour la demi-droite d'origine A ne contenant pas B.

Ces deux demi-droites d'origine commune A sont dites opposées l'une à l'autre.

Avec ces notations, nous pouvons écrire le dernier axiome :

$$\text{I, 3} \quad \overrightarrow{AB} \supset -\overrightarrow{BA}$$

DÉFINITION : Le *segment de droite* AB d'extrémités A et B est la partie commune à la demi-droite de sommet A contenant B et à la demi-droite de sommet B contenant A. Ou encore :

$$\text{segment AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$$

Les deux extrémités du segment de droite jouent le même rôle :

$$\text{segment AB} = \text{segment BA}$$

$-\overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{BA}$ sont les prolongements du segment AB.

L'axiome I, 3 est équivalent à la

PROPRIÉTÉ : Les prolongements d'un segment de droite n'ont pas de point commun.

Par définition, les *points intérieurs* d'un segment de droite sont les points du segment autres que les extrémités.



Considérons sur une droite un point I et sur chacune des deux demi-droites opposées d'origine I respectivement un point A et un point B autres que I.

Nous nous proposons de démontrer que I appartient au segment de droite AB.

En effet, $\text{segment AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, par définition.

D'après l'axiome I, 3 : $\overline{AI} \supset \overline{IA}$, mais par hypothèse : $\overline{IA} = \overline{IB}$,
donc : $\overline{AI} \supset \overline{IB}$ d'où : $\overline{AI} = \overline{AB}$

et pour des raisons analogues : $\overline{BI} = \overline{BA}$

donc I appartient aux deux demi-droites $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ et par suite au segment AB.

Réciproquement, il est impossible de démontrer à l'aide des axiomes I, 1, 2, 3 que si I est un point intérieur du segment de droite AB, les demi-droites $\overline{IA}$ et $\overline{IB}$ sont opposées.

Nous admettons cette réciproque sous la forme :

AXIOME I, 4 : Les demi-droites ayant pour origine commune un point intérieur d'un segment de droite, et qui passent respectivement par l'une et l'autre extrémité du segment, sont opposées.

Autrement, si I est un point intérieur au segment AB, on a :

$$\overline{IA} = \overline{IB}$$

CONSÉQUENCES de cet axiome :

I étant un point intérieur du segment AB, les segments AI et IB n'ont pas d'autre point commun que I.

L'ensemble des points des segments AI et IB est le même que l'ensemble des points du segment AB. Ou :

$$\text{segt AB} = \text{segt AI} \cup \text{segt IB}$$

LES AXIOMES DES ESPACES LINÉAIRES

Un ensemble de points satisfaisant aux axiomes suivants s'appelle un *espace linéaire*. En plus, un point s'appelle encore *espace à zéro dimension* ou E^0 ; une droite est un *espace linéaire à une dimension* ou E^1 .

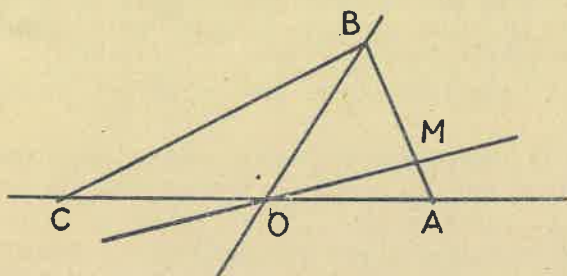
AXIOME DE LA DROITE : II, 1 : Par deux points d'un espace linéaire, il passe une droite et une seule, dont tous les points sont situés dans cet espace.

AXIOME D'EXTENSION DES ESPACES LINÉAIRES : II, 2 : Etant donné un espace linéaire E^n , il y a encore un point non situé dans cet espace. Tous les points de l'espace E^n et ce point non situé dans E^n appartiennent à un même espace linéaire.

Appliquons d'abord l'axiome II, 2 pour $n = 1$, c'est-à-dire au cas où l'espace donné est une droite. Cela nous permettra de définir un espace E^2 auquel nous pouvons encore appliquer le même axiome pour définir un espace E^3 , et ainsi de suite.

Soit une droite OA, O et A étant deux points de cette droite, et soit un point B non situé sur cette droite. Considérons un point C de la demi-droite $\overline{OA}$. D'après l'axiome II, 1 : tout espace linéaire contenant la droite OA et le point B contient nécessairement tous les points des droites AB et BC et en particulier tous les points M d'un des segments AB et BC. Toujours d'après le même axiome, un tel espace contient tous les points d'une droite OM.

DÉFINITION : L'ensemble des droites OM passant par le point O et un point M du segment de droite AB s'appelle le *segment de plan* (O, AB). Les segments de plan (O, AB) et (O, BC) sont par définition des *segments de plan supplémentaires*.



Les droites OM sont les *éléments génériques* de ces segments de plan et les points de ces mêmes droites sont les points des segments de plan. Le point O s'appelle le *sommet* de ces deux segments de plan. Les droites OA et OB sont les *extrémités* du segment de plan (O, AB) et aussi de son segment de plan supplémentaire.

Revenons aux espaces linéaires contenant la droite OA et le point B. D'après l'axiome de la droite, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME : Chaque espace linéaire contenant la droite OA et le point B, non situé sur la droite, contient *nécessairement* tous les points du segment de plan (O, AB), ainsi que de son segment de plan supplémentaire (O, BC).

Nous admettons qu'il existe un espace linéaire qui ne contient pas d'autre point. Cet espace, nous l'appelons un *espace linéaire à deux dimensions* ou E^2 ou un *plan*.

AXIOME DU PLAN : II, 3 : Il existe un espace linéaire, contenant trois points non alignés O, A, B, qui ne contient *pas d'autre point* que les points du segment de plan (O, AB) et de son segment de plan supplémentaire (O, AC).

Conséquences de l'axiome du plan. — Le choix du point C sur la demi-droite $\overrightarrow{OA}$ a été arbitraire. Remplaçons-le par un autre point C' sur la même demi-droite, pour définir d'une façon analogue encore un plan passant par les trois points O, A, B. Mais chaque espace linéaire passant par les trois points donnés contient nécessairement chacun des plans ainsi définis. Donc, en particulier, chacun des deux plans passant par les trois points donnés contient l'autre. Donc, ces deux plans sont identiques.

En intervertissant le rôle des trois points O, A, B, nous pouvons appliquer le même raisonnement pour arriver à des résultats analogues.

Le raisonnement qui a montré qu'il est possible de remplacer le point C par un point C' de $\overrightarrow{OC}$ peut aussi s'appliquer aux points A, B et O.

Soit B' un point du plan défini précédemment, non situé sur la droite OA. Le point B' est alors sur un élément générique OM d'un des deux segments de plan supplémentaires, soit par exemple de (O, AB).

M est alors un point du segment de droite AB. Mais alors nous avons le droit de remplacer B par M, en définissant le plan par les segments de plan de sommet A. En revenant au sommet O pour définir le plan passant par O, A, M, nous pouvons remplacer le point M par B'. Finalement, nous concluons que les plans passant par O, A, B et par O, A, B' sont identiques. Le même procédé de remplacement peut s'appliquer aux deux autres points. Nous concluons en résumant :

THÉORÈME I : Par trois points non colinéaires, il passe *un seul* plan.

THÉORÈME II : Tout espace linéaire passant par trois points non colinéaires contient tous les points du plan passant par ces trois points.

Enrichissement de la droite. — Montrons que la droite s'enrichit, du fait d'être placée dans le plan, par les axiomes des espaces linéaires. Nous utilisons les mêmes points O, A, B, C que plus haut. Soit D un point d'un des prolongements du segment de droite BC. La droite OD n'a donc pas de points communs avec le segment BC, mais elle appartient entièrement au plan OAB, donc elle passe nécessairement par un point intérieur du segment AB. D'où :

THÉORÈME : Tout segment de droite admet toujours au moins un point autre que ses extrémités.

Sécante d'un triangle. — Nous restons dans le plan avec les notations précédentes. Les points A, B, C sont les sommets d'un triangle ABC. La droite OM coupe le côté BC de ce triangle au point O. D'après l'axiome du plan, il n'y a pas d'autres droites dans le plan, passant par le point O, que les droites OM ayant au moins avec l'un des côtés AB ou BC du triangle ABC un point M commun. D'où une propriété connue sous le nom d'*axiome de Pasch*.

THÉORÈME : Si une droite située dans le plan d'un triangle, et ne passant par aucun des sommets, coupe un côté du triangle, elle coupe encore un autre côté du triangle.

COROLLAIRE : Si une droite du plan d'un triangle coupe un côté du triangle et l'un des prolongements d'un autre côté, elle coupe le troisième côté du triangle.

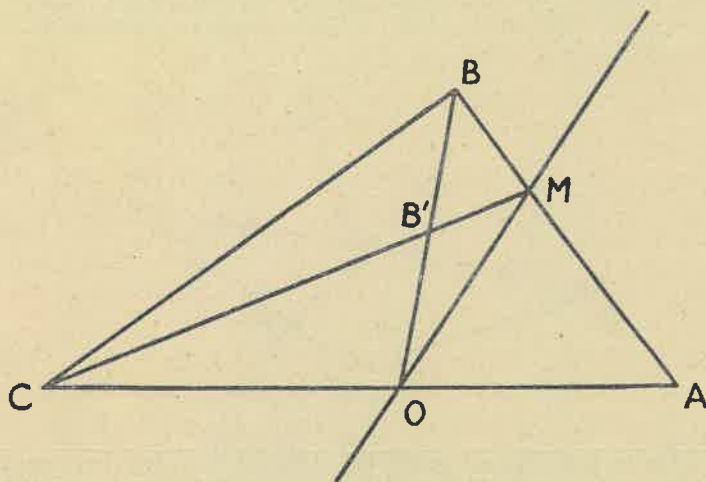
APPLICATION : Soit un segment de plan (O, AB). Considérons un point A' sur la demi-droite $\overrightarrow{OA}$ et une droite OM passant par le point O et un point M du segment de droite AB. D'après le corollaire, la droite OM coupe le côté A'B du triangle BAA' en un point M'. Réciproquement à M' sur A'B correspond M sur AB. Nous concluons :

Dans la définition d'un segment de plan (O, AB), nous avons le droit de remplacer le point A par un point A' situé sur la demi-droite $\overrightarrow{OA}$. Un remplacement analogue peut ensuite se faire pour le point B.

Nous pouvons maintenant démontrer que deux segments de plan supplémentaires n'ont pas d'autre élément générique commun que leurs deux extrémités.

En effet, soit M un point intérieur du segment de droite AB. Il s'agit de démontrer que la droite OM n'a pas de point commun avec le seg-

ment de droite BC. La droite CM coupe le côté OB du triangle OAB en un point B'. La droite OB coupe le côté CM du triangle CAM aussi en B'. Donc, le point B' est un point intérieur du côté CM, et, comme conséquence de l'axiome I, 4, le point M est sur un prolongement du segment B'C. Donc, la droite OM ne coupe pas ce dernier segment. La droite OM n'est donc pas un élément générique du segment de plan (O, B'C).



Mais ce segment de plan est identique au segment de plan (O, BC), puisque le point B' se trouve sur la demi-droite $\overrightarrow{OB}$, comme point du segment OB.

Cette propriété des éléments génériques de deux segments de plan supplémentaires peut encore s'interpréter :

THÉORÈME DE LA SÉCANTE D'UN TRIANGLE : Si dans le plan d'un triangle une droite coupe un côté du triangle, sans passer par aucun des sommets de ce triangle, elle coupe encore *un seul* des deux autres côtés.

Une telle droite est une *sécante du triangle*.

Si le triangle est dégénéré, ce théorème très important reste encore vrai et se démontre grâce à l'axiome I, 4.

Première application : Dans la définition du segment de plan (O, AB), nous avons le droit de remplacer les points A et B par des points A' et B', situés respectivement, soit sur les demi-droites $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, soit sur les prolongements $-\overrightarrow{OA}$ et $-\overrightarrow{OB}$ de ces demi-droites.

La dernière de ces deux possibilités se met en évidence en considérant la sécante commune OM des deux triangles : ABA' et BA'B'.

Deuxième application : Le théorème fournit une justification de la *séparation du plan en deux régions par une de ses droites*.

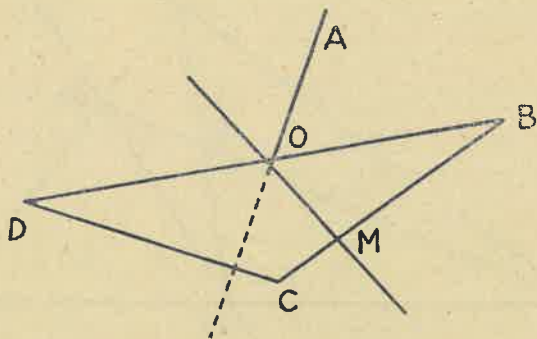
DÉFINITION : 1) Deux points A et B sont situés d'un même côté de la droite (D), si le segment AB ne coupe pas la droite (D).

2) Deux points A et C sont situés de part et d'autre de la droite (D), si le segment AC coupe la droite (D).

D'où aussi la notion de demi-plan, dont la droite limite est l'arête.

DÉFINITION DE L'ESPACE LINÉAIRE A TROIS DIMENSIONS

Soit un point A non situé dans le plan OBC défini par les trois points non alignés O, B, C. D'après l'axiome II, 2, il existe un espace linéaire contenant le plan OBC et le point A. Nous appelons espace E un espace linéaire répondant à la question.



Considérons un élément générique OM de l'un des deux segments de plan supplémentaires (O, BC) et (O, CD) définissant le plan OBC. Alors tout espace E contient la droite OM et le point A, donc E contient nécessairement tous les points du plan OAM.

DÉFINITION : Si le point M prend toutes les positions possibles sur le segment de droite BC, l'ensemble des plans OAM correspondants est par définition le *segment d'espace à trois dimensions* (OA, BC). Les plans OAM en sont les *éléments génériques* qui correspondent d'une façon biunivoque aux éléments génériques du segment de plan (O, BC). De la même façon, nous définissons son *segment d'espace supplémentaire* (OA, CD). Aux extrémités des segments de plan correspondent les *extrémités* des segments d'espace. Les points des éléments génériques d'un segment d'espace sont par définition les *points* du segment d'espace. Grâce à ces définitions, nous pouvons nous résumer :

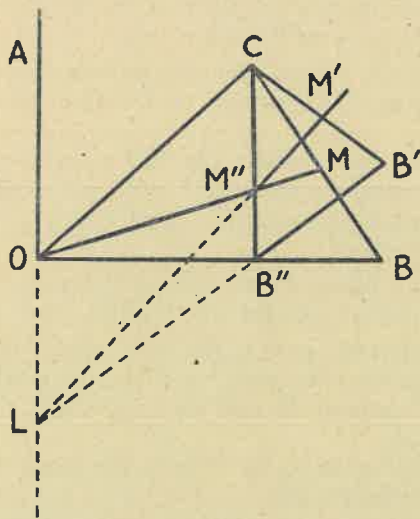
THÉORÈME : Tout espace linéaire E contenant le plan OBC et le point A non situé dans ce plan contient *nécessairement* l'ensemble E^3 des points des deux segments d'espaces supplémentaires (OA, BC) et (OA, CD).

L'ensemble E^3 peut se définir d'une façon équivalente comme l'ensemble des points des plans passant par la droite OA et une droite variable OM du plan OBC.

Nous nous proposons de démontrer que E^3 est un espace linéaire. Pour cela, il faut et il suffit de démontrer que si P et Q sont deux points de E^3 , tous les points de la droite PQ appartiennent à E^3 et que E^3 est contenu dans d'autres espaces linéaires (cette dernière condition sera établie plus loin).

Dans ce but, nous allons d'abord démontrer que nous avons le droit de remplacer dans la définition du segment d'espace (OA, BC) les points B et C par des points B' et C' situés respectivement dans les demi-plans d'arête OA et passant par B et C . Ces remplacements peuvent se faire successivement ; il suffit donc de démontrer que tout plan passant par la droite OA , et coupant le segment BC en un point M , coupe aussi le segment $B'C$ en un point M' et réciproquement. Nous excluons le cas déjà évident où B' est sur $\overline{OB}$.

En effet, soit L un point situé sur la droite OA dans le demi-plan limité par la droite OB et ne contenant pas le point B' . Dans ces conditions, le segment $B'L$ coupe $\overline{OB}$ en un point B'' . Mais $\overline{OM}$ coupe le segment CB'' en un point M'' et $\overline{LM''}$ coupe le segment CB' en M' . Tout cela d'après le théorème de la sécante d'un triangle. Remarquons encore que le plan MOA est unique pour M donné, donc B' ne dépend pas du choix arbitraire de L .



Le point M' ainsi construit est le point d'intersection du plan AOM avec le segment de droite CB' . Le rôle des points B et B' peut être échangé pour mettre ainsi en évidence la réciproque. D'où la légitimité de remplacer B par B' .

Soient P et Q deux points de E^3 . Si P et Q sont situés dans un même plan avec la droite OA , il est évident que la droite PQ fait entièrement partie de E^3 . Supposons donc ces deux points dans deux demi-plans différents limités par la droite OA et coupant le plan OBC suivant $\overline{OP'}$ et $\overline{OQ'}$. Les segments de plan supplémentaires $(O, P'Q')$ et $(O, Q'R')$ peuvent définir le plan $OP'Q'$ identique au plan OBC . D'après ce qui précède, les segments d'espace supplémentaires $(OA, P'Q')$ et $(OA, Q'R')$ définissant E^3 sont respectivement identiques aux deux segments d'espaces supplémentaires (OA, PQ) et (OA, QR) , définissant ainsi le même

ensemble de points E^3 . Mais cette dernière façon de voir met en évidence que le plan OPQ est contenu entièrement dans E^3 et en particulier tout point de la droite PQ de ce plan est contenu entièrement dans E^3 . Nous concluons :

THÉORÈME : E^3 est un espace linéaire.

Nous appelons E^3 un *espace linéaire à trois dimensions*.

En intervertissant le rôle des quatre points O, A, B, C , nous arrivons d'une façon analogue à définir des espaces linéaires à trois dimensions passant par ces quatre points. Mais ces espaces doivent se contenir nécessairement l'un l'autre et réciproquement, donc ces espaces sont identiques. Dans la détermination de l'espace E^3 , nous avons reconnu la liberté de remplacer les points B et C par les points P et Q , non coplanaires avec O et A . En répétant cette opération de remplacement, tout en intervertissant le rôle des quatre points donnés, nous arrivons à remplacer les points O, A, B, C par quatre autres points non coplanaires de E^3 qui définissent à leur tour le même espace E^3 . En résumé :

THÉORÈME I : Par quatre points non coplanaires passe un espace linéaire à trois dimensions ou E^3 et un seul.

THÉORÈME II : Tout espace linéaire passant par quatre points non coplanaires contient nécessairement le E^3 déterminé par ces quatre points.

Etudions encore deux plans de E^3 , ayant un point O commun. Soient un plan passant par la droite OA , et le plan OBC . Tout point de E^3 étant situé dans un plan passant par OA et coupant le plan OBC suivant une droite, nous concluons.

THÉORÈME : Deux plans d'un espace à trois dimensions qui ont un point commun se coupent suivant une droite. D'où on peut déduire le :

THÉORÈME GÉNÉRALISÉ DE LA SÉCANTE D'UN TRIANGLE : Dans un espace linéaire à trois dimensions : un plan, ne passant par aucun sommet d'un triangle et coupant un côté de ce triangle, coupe encore un seul des deux autres côtés.

D'où la justification de la définition des *deux régions déterminées par un plan dans un espace E^3* .

DÉFINITION : Deux points A et B sont d'un même côté du plan donné, si le segment AB n'a pas de point commun avec ce plan. Deux points A et C sont dans des régions différentes (ou de part et d'autre du plan), si le segment AC coupe le plan.

De là, nous sommes encore conduits à la notion de demi-espace à trois dimensions ou demi- E^3 . Ce demi-espace étant l'ensemble des points d'une des régions et des points du plan limite.

DÉFINITION DE L'ESPACE LINÉAIRE A n DIMENSIONS

DÉFINITION : Un *espace linéaire à n dimensions* ou E^n est l'espace linéaire minimum qui contient un espace linéaire à $n-1$ dimensions ou E^{n-1} et un point non situé dans ce dernier espace.

Soient un espace E^{n-1} , O un de ses points et A un point non situé dans E^{n-1} . Tout espace linéaire contenant E^{n-1} et A contient *nécessai-*

rement l'ensemble E^n des points des plans passant par la droite OA et une droite OX de E^{n-1} .

Considérons deux points P et Q de E^n . S'ils sont dans un même plan AOX, la droite PQ est entièrement dans E^n . Si P et Q appartiennent à des plans différents AOX et AOX', la droite PQ appartient entièrement à l'espace à trois dimensions AOXX'. Mais le plan OXX' appartient à E^{n-1} , donc l'espace AOXX' appartient aussi entièrement à E^n . Donc, tous les points de la droite PQ sont des points de E^n .

CONCLUSION : L'ensemble de points E^n que nous venons de définir est bien un espace linéaire. Nous l'appelons l'espace linéaire à n dimensions.

THÉORÈME : Tout espace linéaire qui contient l'espace E^{n-1} et le point A, non contenu dans E^{n-1} , contient l'espace E^n .

DÉFINITION : Nous appelons *simplexe à n dimensions* ou S^n , un ensemble de $n + 1$ points non situés dans un même E^{n-1} .

On démontre de proche en proche le :

THÉORÈME : Un simplexe à n dimensions définit un espace à n dimensions et un seul.

De la définition du E^n , nous pouvons aussi déduire le :

THÉORÈME : Dans le E^n : tout plan ayant un point commun avec un E^{n-1} coupe ce E^{n-1} suivant une droite.

D'où une dernière *généralisation du théorème de la sécante d'un triangle*.

THÉORÈME : Dans le E^n : tout E^{n-1} ne passant par aucun côté d'un triangle, et coupant un des côtés du triangle, coupe encore un seul des deux autres côtés.

D'où encore la notion sur la *séparation de l'espace E^n en deux régions par un de ses E^{n-1}* .

Les définitions à donner sont analogues aux définitions correspondantes dans l'espace à trois dimensions.

AUTRE DÉFINITION DU E^n , utile pour l'étude de son orientation : Le E^n est l'ensemble des points des éléments génériques de deux segments d'espace supplémentaires à n dimensions. Dans la définition correspondante du E^3 , nous remplaçons la droite OA par un E^{n-2} ayant avec le plan OBC le seul point O commun. Le plan AOM se remplace par l'espace à $n-1$ dimensions E^{n-1} , contenant E^{n-2} et un point M du segment de droite BC. Les espaces E^{n-1} correspondant ainsi aux points M sont les éléments génériques d'un segment d'espace à n dimensions.

Orientation des espaces linéaires

ORIENTATION DE LA DROITE

DÉFINITION : Sur une même droite, deux demi-droites sont de *même orientation* ou encore d'*orientation équivalente*, si une de ces demi-droites contient l'autre.

Dans le cas contraire, nous disons que les demi-droites sont d'*orientations opposées*.

Nous écrivons les relations d'orientation entre deux demi-droites :

$$\vec{a} \rightarrow \vec{b} \quad (\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ de même orientation}) ;$$

$$\vec{a} \not\rightarrow \vec{b} \quad (\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ d'orientations opposées}).$$

Nous nous proposons de démontrer que, sur une droite, toutes les demi-droites de même orientation qu'une demi-droite donnée forment une classe d'équivalence.

En comparant les quatre demi-droites d'origine A ou B deux à deux, nous constatons à l'aide de l'axiome I, 3 que deux demi-droites sont toujours liées par l'une ou l'autre relation d'orientation.

Pour démontrer que la relation $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$ est une relation d'équivalence, nous constatons d'abord d'après sa définition que la relation est *réflexive* : $\vec{a} \rightarrow \vec{a}$ et qu'elle est *symétrique*, c'est-à-dire : si $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$, on a aussi : $\vec{b} \rightarrow \vec{a}$.

Il nous reste à démontrer la *transitivité* de la relation, ce qui peut s'exprimer : si $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$ et $\vec{b} \rightarrow \vec{c}$, on a aussi : $\vec{a} \rightarrow \vec{c}$.

En effet : $\vec{AB} \rightarrow \vec{BA}$ (axiome I, 3), C étant un point de la droite AB, il faut démontrer qu'une même demi-droite d'origine C est de même orientation que les deux demi-droites $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$. Pour cela, nous examinons les trois cas possibles, en utilisant les axiomes I, 3 et 4.

1) C se trouve sur $\vec{BA}$:



D'après l'axiome I, 3 :

$$\vec{AB} \supset \vec{BA} = \vec{BC} \quad (\text{le signe } = \text{ exprimant ici l'identité})$$

$$\text{et } \vec{BC} \supset \vec{CB} \quad \text{donc :}$$

$$\vec{AB} \supset \vec{BA} \supset \vec{CB}$$

de la transitivité de la relation d'appartenance, il résulte aussi la transitivité de la relation d'orientation :

$$\vec{AB} \rightarrow \vec{BA} \rightarrow \vec{CB}$$

2) C se trouve sur $\vec{AB}$:



$$\vec{CA} \supset \vec{AC} = \vec{AB} \quad \text{d'autre part :}$$

$$\vec{CA} \supset \vec{AB} \supset \vec{BA} \quad \text{donc :}$$

$$\vec{CA} \rightarrow \vec{AB} \rightarrow \vec{BA}$$

3) C se trouve sur le segment $AB = \vec{AB} \cap \vec{BA}$.



D'après l'axiome I, 4 : $\vec{CB} = \vec{CA}$

$$\text{Or : } \vec{AB} = \vec{AC} \supset \vec{CA} = \vec{CB}$$

et : $\bar{C}\bar{B} \supset -\bar{B}\bar{C} = -\bar{B}\bar{A}$

D'où : $\bar{A}\bar{B} \rightarrow \bar{C}\bar{B} \rightarrow -\bar{B}\bar{A}$

La transitivité étant vérifiée dans tous les cas, nous concluons :

THÉORÈME : Sur la droite, deux demi-droites de même orientation qu'une même troisième sont d'orientation équivalente.

La relation d'orientation étant une relation d'équivalence, elle définit sur l'ensemble des demi-droites d'une droite *deux classes d'équivalence* ; chacune des classes est définie par l'une des deux demi-droites opposées d'origine arbitraire.

Nous disons que ces deux classes d'équivalence sont opposées ; elles définissent des *orientations opposées* sur la droite.

La droite est orientée par le choix de l'une de ces deux orientations que nous désignons alors par l'*orientation positive*, l'orientation opposée s'appelant l'*orientation négative*.

Relations d'ordre entre les points d'une droite orientée

DÉFINITION : Sur une droite orientée, nous exprimons que la demi-droite positive d'origine A contient le point B par la *relation d'ordre* :

$$(1) \quad A \leq B \quad (A \text{ avant } B).$$

Si B se trouve sur la demi-droite négative d'origine A, nous écrivons la *relation d'ordre opposée* :

$$(2) \quad A \geq B \quad (A \text{ après } B).$$

Les deux relations (1) et (2) sont vérifiées simultanément si les deux points A et B sont confondus et seulement dans ce cas. Si les deux points sont distincts, ils vérifient toujours l'une des deux relations d'ordre. Dans ce dernier cas, nous avons des *relations d'ordre strictes* :

$$(1') \quad A < B \quad \text{ou :}$$

$$(2') \quad A > B.$$

Ces deux relations s'excluent toujours mutuellement.

TRANSITIVITÉ DE LA RELATION D'ORDRE

Il nous reste à démontrer la *transitivité* de la relation d'ordre ; cette propriété s'énonce :

THÉORÈME : Si A avant B et B avant C, alors on a aussi A avant C.

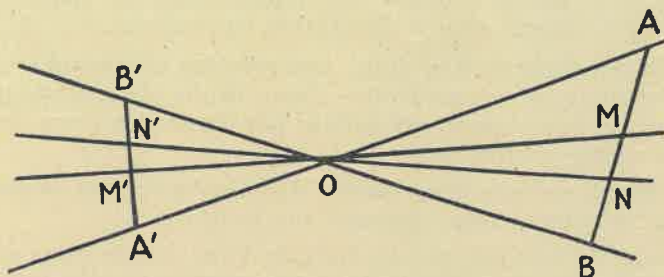
En effet, nous nous ramenons aux propriétés des demi-droites en traduisant les hypothèses : la demi-droite positive d'origine A contient B et la demi-droite positive d'origine B contient C.

Mais alors la demi-droite positive d'origine A contient la demi-droite positive d'origine B qui, elle, contient C. Finalement, la transitivité de la relation d'appartenance entraîne la transitivité de la relation d'ordre.

REMARQUE : Sur toute partie d'une droite orientée, il y a un *ordre induit*, c'est-à-dire nous pouvons toujours dire laquelle des deux rela-

tions (1) et (2) est vérifiée par deux points quelconques. Nous disons encore qu'une droite orientée ou une de ces parties est *totale* *ment ordonnée*.

L'orientation d'une droite peut aussi être définie par une relation d'ordre entre deux points distincts.



Correspondances projectives. Ordre cyclique

Considérons un segment de plan (O, AB) , défini également par $(O, A'B')$ tel que toute droite passant par le point O coupe les deux segments de droite AB et $A'B'$ respectivement en M et M' ou ne coupe aucun des deux segments. Entre les deux points M et M' , il y a une correspondance biunivoque que nous appelons une *correspondance projective*.

Nous nous proposons de démontrer que la correspondance projective entre deux segments conserve l'ordre défini par $A < B$ correspondant à $A' < B'$.

Soient deux points M et N sur AB et les points correspondants M' et N' sur $A'B'$. Si $M < N$, cela veut dire que N se trouve sur le segment MB qui est en correspondance projective avec le segment $M'B'$, donc N' est sur ce dernier segment ; d'où : $M' < N'$.

THÉORÈME : Si deux segments de droite sont en correspondance projective, cette correspondance conserve l'ordre.

Ce théorème nous permet d'appliquer la relation d'ordre aux éléments génériques du segment de plan (O, AB) .

En effet, l'élément générique OM est en correspondance biunivoque avec le point M du segment AB . Dans ce cas, nous disons encore qu'il y a *correspondance projective*. Par définition, l'ordre $OM < ON$ correspond à l'ordre $M < N$ qui est indépendant du segment de droite servant à définir le segment de plan. D'où :

THÉORÈME : Une correspondance projective entre un segment de droite et un segment de plan conserve l'ordre.

Ordre cyclique

Au point de vue local, la relation d'ordre s'applique de la même façon aux éléments génériques d'un segment de plan ou aux points d'un segment de droite.

Mais, au point de vue global, si nous considérons l'ensemble des droites d'un plan passant par un point fixe O et l'ensemble des points

d'une droite, il y a une *différence fondamentale* ; sur la droite, deux points A et B déterminent un *segment* de droite *unique*, tandis que deux droites du plan passant par le point O, soient OA et OB, sont toujours les extrémités de *deux segments* de plan supplémentaires.

En prolongeant un segment de plan orienté par son segment de plan supplémentaire, nous arrivons à établir un ordre sur l'ensemble des droites passant par O, avec cette *particularité* qu'un même élément, qui d'ailleurs peut être choisi arbitrairement, est *simultanément premier et dernier élément*. L'ordre ainsi défini sur cet ensemble s'appelle un *ordre cyclique*. Nous pouvons ramener l'ordre cyclique à l'*ordre linéaire* (= ordre sur la droite ou sur un segment de droite), soit par la suppression de l'élément qui intervient comme premier et comme dernier élément, soit par dédoublement de ce même élément.

Un *dédoublement* de toutes les droites du plan passant par le point fixe O peut se faire en orientant chacune de ces droites des deux façons possibles, soit en considérant les demi-droites d'origine commune O. Le nouvel ensemble obtenu par dédoublement est encore susceptible d'être orienté comme l'ensemble initial par un des deux ordres cycliques possibles. Nous disons que ce choix d'un des deux ordres cycliques *oriente le plan autour du point O*.

Précisons encore les *façons pratiques qui déterminent cette orientation*.

1) Il suffit d'orienter une droite du plan ne passant pas par le point O, il y a un ordre cyclique correspondant.

2) Par la relation d'ordre entre deux droites : $OA < OB$, en précisant le segment de plan, auquel nous appliquons cette relation d'ordre.

3) En donnant un angle saillant orienté.

4) En donnant un élément d'orientation à deux dimensions.

Eléments d'orientation

I. SUR LA DROITE : Une demi-droite permettant d'orienter une droite, nous l'appelons encore un *élément d'orientation à une dimension* ou O^1 .

II. DANS LE PLAN : Un *élément d'orientation à deux dimensions* ou O^2 est l'ensemble d'une droite orientée (l'arête) et d'un demi-plan positif limité par l'arête.

Nous disons qu'un élément d'orientation passe par un point, si son arête passe par ce point.

Une droite du plan est dite une sécante d'un O^2 , si elle coupe son arête. Le demi-plan positif détermine une demi-sécante positive située dans lui et oriente ainsi la sécante.

Orientation du plan autour d'un point O par un O^2 passant par ce point : Soient $\overrightarrow{OA}$ la demi-arête positive, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ des demi-droites situées respectivement dans le demi-plan positif et le demi-plan négatif, l'ordre défini par le O^2 s'exprime par les relations : $\overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC}$.

L'ensemble des éléments d'orientation du plan passant par le point O se sépare en deux classes correspondant aux deux orientations possibles autour du point O.

ORIENTATION DU PLAN

DÉFINITION : Deux orientations du plan respectivement autour de deux points sont dites équivalentes si elles peuvent être définies par un même élément d'orientation, dont l'arête passe nécessairement par les deux points. D'où une autre forme de la définition :

Les deux orientations autour de deux points A et B sont équivalentes si elles correspondent à une même orientation sur une droite ne coupant pas le segment de droite AB, ou encore si elles correspondent à des orientations opposées sur une droite coupant le segment AB.

Nous en déduisons encore une façon de caractériser l'équivalence d'orientation autour de deux points :

Deux orientations du plan autour de deux points sont équivalentes si les éléments d'orientation définissant ces deux orientations déterminent sur une sécante commune une même orientation dans le cas où les demi-arêtes positives limitées par la sécante se trouvent d'un même côté de la sécante, ou si les orientations déterminées sur la sécante sont opposées dans le cas où les demi-arêtes positives se trouvent de part et d'autre de la sécante.

Désignons par $O(A)$ une orientation déterminée autour de A. Alors l'équivalence de deux orientations s'écrit :

$$O(A) \sim O(B).$$

D'après la définition, nous avons :

$O(A) \sim O(A)$ la relation est *réflexive*,
et $O(A) \sim O(B)$ entraîne $O(B) \sim O(A)$,
ce qui exprime que la relation est *symétrique*.

Démontrons encore que la relation est *transitive* :

THÉORÈME : Si (1) $O(A) \sim O(B)$ et (2) $O(B) \sim O(C)$, alors on a aussi (3) $O(A) \sim O(C)$.

En effet, si nous considérons une droite, ne coupant aucun des trois segments déterminés par les points A, B, C pris deux à deux, les orientations correspondantes sur la droite mettent en évidence la propriété à démontrer.

Nous concluons finalement que les orientations autour des points d'un plan qui sont équivalentes à l'une de ces orientations forment une *classe d'équivalence*. Cette classe définit l'*orientation du plan*.

Il y a deux orientations opposées du plan qui correspondent aux deux orientations opposées autour d'un même point.

Correspondance projective entre les éléments génériques d'un segment d'espace à trois dimensions et d'un segment de plan

Une section plane d'un segment d'espace coupant l'arête lui fait correspondre un segment de plan et il y a correspondance biunivoque entre les éléments génériques. L'ordre défini par cette *correspondance projective* sur l'ensemble des éléments génériques du segment d'espace est indépendant du plan de section choisi.

Finalement, nous ramenons la notion d'ordre cyclique dans le E^3

autour d'une droite (D) à l'ordre cyclique d'un plan sécant de (D) autour de son point d'intersection avec (D).

DÉFINITION : Une orientation d'un E^3 autour d'une de ses droites orientées est l'ensemble de cette droite orientée et de l'un des deux ordres cycliques possibles autour de cette droite.

Façons pratiques de définir cette orientation

- 1) Il suffit d'orienter un plan coupant la droite (D).
- 2) Il suffit aussi d'orienter une droite non coplanaire avec (D).
- 3) Orienter un segment d' E^3 (ou encore un angle dièdre).
- 4) En donnant un élément d'orientation à trois dimensions ou O^3 .

Elément d'orientation O^3

Dans l'espace linéaire à trois dimensions : Un élément d'orientation à trois dimensions ou un O^3 est l'ensemble d'un O^2 placé dans un plan E^2 de E^3 et d'un demi- E^3 positif limité par le plan E^2 .

L'arête du O^2 s'appelle encore *l'arête du O^3* . Un plan sécant d'un O^3 est un plan coupant l'arête en un point, il coupe par suite le O^3 suivant un O^2 .

ORIENTATION DE L'ESPACE LINÉAIRE A TROIS DIMENSIONS

DÉFINITION : Deux éléments d'orientation à trois dimensions sont équivalents, si un plan sécant commun les coupe suivant deux O^2 équivalents, lorsque les demi-arêtes positives se trouvent d'un même côté du plan sécant. Ou :

Si un plan sécant commun les coupe suivant deux O^2 opposés, lorsque les demi-arêtes positives se trouvent de part et d'autre du plan sécant.

Pour justifier cette définition, il faut démontrer que cette équivalence ne dépend pas du plan sécant commun choisi. Cette indépendance se démontre successivement dans les cas suivants :

1^{er} cas : Les deux plans sécants (P) et (P') ont une droite (D) commune, (D) ne coupant aucune des arêtes.

Supposons d'abord que les demi-arêtes positives limitées par (P) sont d'un même côté de (P) et que la droite (D) ne coupe pas le segment AB, A et B désignant les traces des arêtes sur (P). Alors, les orientations équivalentes des O^3 et d'autre part des O^2 correspondants peuvent se définir par une même orientation de la droite (D).

a) Les traces A' et B' des arêtes sur le plan (P') sont supposées de se trouver d'un même côté du plan (P). Alors, les demi-arêtes positives limitées par (P') se trouvent aussi d'un même côté de (P') et la droite (D) ne coupe pas le segment A'B'. Par conséquent, l'orientation déjà choisie sur la droite (D) définit encore des orientations équivalentes dans le plan (P').

b) Si A' et B' se trouvent de part et d'autre de (P'), il faut vérifier que les demi-arêtes positives limitées par (P') se trouvent aussi de part et d'autre de (P'). Les O^2 déterminés par (P') sont d'orientations opposées, la droite (D) coupant dans ces conditions le segment A'B'.

Si la droite (D) sépare les points A et B et de même les points A' et B', nous arrivons à des conclusions analogues.

2° cas : Les plans (P) et (P') n'ont pas de point commun.

Dans ce cas, nous pouvons toujours trouver un plan (P'') coupant les deux plans (P) et (P'), chacun suivant une droite, de sorte que ces deux droites ne coupent pas les arêtes. Le plan (P'') peut être défini pour cela par ses traces A'' et B'' sur les arêtes et un troisième point. Il suffit de prendre ces trois points dans des régions convenablement choisies déterminées par (P) et (P').

La comparaison des sections des deux O^3 par (P) et (P') se fait alors par l'intermédiaire de la section par (P''), ce qui nous ramène au premier cas.

3° cas : Les plans (P) et (P') ont un point commun sur l'une des arêtes. Ce cas peut être traité comme le cas précédent.

DÉFINITION : Les orientations équivalentes de E^3 autour de deux droites orientées sont définies par le fait que les deux O^3 correspondants sont équivalents.

Les O^3 équivalents à un O^3 donné forment une classe d'équivalence. En effet, pour démontrer la réflexivité, la symétrie et la transitivité de la relation d'équivalence, nous sommes ramenés, grâce à la définition des O^3 équivalents, aux propriétés correspondantes dans le plan.

Finalement, il y a deux orientations opposées du E^3 correspondant aux deux orientations opposées autour d'une droite orientée.

Détermination d'un O^3 par un trièdre orienté ou par un tétraèdre orienté

Soit l'ensemble de trois demi-droites (les arêtes) de même origine O, non situées dans un même plan et placées dans l'ordre : $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$. Cet ensemble définit le trièdre orienté O.ABC. Nous convenons de lui faire correspondre l'élément O^3 d'arête $\vec{OA}$, le demi-plan positif contient $\vec{OB}$ et le demi- E^3 positif contient $\vec{OC}$. Donc :

Un trièdre orienté définit une orientation de l'espace E^3 .

Considérons maintenant quatre points placés dans l'ordre O, A, B, C. Cet ensemble ordonné définit le tétraèdre orienté $O \longleftrightarrow ABC$. Nous faisons encore correspondre à ce tétraèdre orienté le trièdre orienté O.ABC et par conséquent une orientation de l'espace à trois dimensions.

Application à l'orientation mutuelle de deux vecteurs

PROBLÈME : Etant donnés deux segments orientés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ non coplanaires, comparer les orientations définies par les deux segments d'espaces orientés : $(\vec{AB}, \vec{CD})$ et $(\vec{CD}, \vec{AB})$.

Soient K et L deux points respectivement sur $-\vec{CA}$ et $-\vec{DB}$. On a :

$$\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{CD}) &\longrightarrow (\vec{AB}, \vec{KL}), \\ (\vec{CD}, \vec{AB}) &\longrightarrow (\vec{CD}, \vec{KL}). \end{aligned}$$

Le plan sécant AKL laisse les demi-arêtes positives $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ d'un même côté. Par conséquent, les orientations dans ce plan autour de A et C correspondant aux orientations dans l'espace E^3 sont équivalentes,

puisque la droite KL ne coupe pas le segment AC. Donc, les deux orientations à comparer sont équivalentes.

L'orientation définie par ces deux segments d'espace est nommée encore l'orientation mutuelle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

ORIENTATION DE L'ESPACE LINÉAIRE A n DIMENSIONS

DÉFINITION : Dans le E^n , un *élément d'orientation à n dimensions* ou O^n est l'ensemble d'un O^{n-1} situé dans un E^{n-1} , et d'un demi- E^n positif, limité par ce E^{n-1} .

En remontant de proche en proche, nous rencontrons un O^2 , dont l'arête est par définition aussi l'arête du O^n . Un espace sécant E^{n-1} du O^n est un espace à $n-1$ dimensions toujours dans E^n , ayant un seul point commun avec l'arête. L'intersection d'un E^{n-1} sécant d'un O^n avec cet élément d'orientation est un O^{n-1} .

DÉFINITION : Deux O^n sont équivalents, si les intersections avec un espace sécant commun sont des O^{n-1} équivalents, lorsque les demi-arêtes positives des deux O^n se trouvent d'un même côté du E^{n-1} sécant. Ou :

Si les O^{n-1} sont opposés, lorsque les demi-arêtes positives sont de part et d'autre du E^{n-1} sécant.

La justification se fait d'une façon analogue comme dans le cas des éléments d'orientation à trois dimensions.

Cette définition nous permet de mettre en évidence que les O^n équivalents à un O^n donné forment une classe d'équivalence. Finalement, il y a deux classes opposées, définissant deux orientations opposées de l'espace linéaire à n dimensions.

SIMPLEXE ORIENTÉ ET ÉTOILE ORIENTÉE

Soit un simplexe dont les sommets $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ sont placés dans l'ordre des indices, par cet ordre le S^n est orienté. Il lui correspond l'ensemble des demi-droites d'origine commune A_0 et placées dans l'ordre correspondant : $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$. Cet ensemble ordonné définit une étoile orientée. A l'étoile orientée correspond à son tour le O^n d'arête $\overrightarrow{A_0A_1}$ limitant le demi-plan contenant $\overrightarrow{A_0A_2}$, ce dernier plan limitant le demi- E^3 contenant $\overrightarrow{A_0A_3}$, et ainsi de suite.

Un simplexe orienté, ou une étoile orientée, définissent donc un espace linéaire orienté.

La comparaison d'un simplexe orienté à un autre simplexe orienté de même dimension peut se faire par l'intermédiaire des éléments d'orientation correspondants, en effectuant si possible le remplacement des sommets successivement.

En particulier :

Un échange de deux sommets consécutifs entraîne un changement d'orientation.

L'effet d'une permutation circulaire des sommets dépend de la parité de la dimension de l'espace.

R. NEUMEISTER,

Lycée Fustel de Coulanges à Strasbourg.