

BULLETIN de l'**ASSOCIATION** des **PROFESSEURS** de **MATHÉMATIQUES** de l'**Enseignement Public**

SOMMAIRE

I. ETUDES.

P. DUBREIL : Anneaux, congruences, corps	377
G. CHOQUET : Espaces vectoriels	388
R. NEUMEISTER : Définition axiomatique des espaces linéaires et leur orientation	400

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS.

J. ITARD : Un peu de biographie	418
---------------------------------------	-----

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

J. SIROS : L'enseignement des mathématiques et le langage	422
MARCHAND et L. FÉLIX : La racine carrée en classe de Troisième	428
C. DELAPIERRE : Quelques exemples de constructions géométriques	433
Pour le stage de Sèvres (novembre 56)	437
C. GATTEGNO : Première contribution	440
Trois enquêtes de la C.I.E.M.	441

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.

A. HUISMAN : L'enseignement des mathématiques en Allemagne occidentale	443
G. W. : Eléments d'algèbre moderne (par Lentin et Rivaud) ; La géométrie de Descartes (par J. Itard) ; <i>L'Enseignement mathématique</i> ; La mesure des grandeurs (par H. Lebesgue) ; Initiation au calcul matriciel (par Monjallon)	449

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.

J. DESFORGE : Rapport sur l'Agrégation féminine de Mathématiques, session de 1955	453
---	-----

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

Compte rendu de l'Assemblée Générale du 25 mars 1956	484
Réunion du Comité du 19 avril 1956	495
Le bloc-notes de l'A.P.M.	497

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
 20, rue d'Ulm, Paris (5^e)
 Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ...	300 F
Prix de l'abonnement au <i>Bulletin</i>	1 000 F
Prix du numéro	200 F

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

<i>Président :</i>	M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11 ^e). OBE. 56-95.
<i>Vice-Présidents :</i>	Mlle AFFRE, 5, rue Gustave-Le-Bon, Paris (14 ^e). M. BIGUENET, 41, rue M.-Michelis, Neuilly-sur-Seine. M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14 ^e). M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5 ^e). M. THÉRON, 38, rue Lacépède, Paris (5 ^e).
<i>Secrétaires :</i>	Mlle FÉLIX, 3, rue Pierre-Berland, Versailles (S.-et-O.) (Conférences). M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16 ^e). M. HUISMAN, 11, rue J.-Cœur, Paris (4 ^e) (Bibliothèque et « Bulletin »). M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14 ^e) (Bibliographie). M. ROSTOLLAND, 19, rue des Ursulines, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.). M. SIROS, 13, avenue J.-Racine, Sceaux (Seine) (Programmes).
<i>Trésorier :</i>	M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).
<i>Comité de rédaction du « Bulletin » :</i>	Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, GIRARD, ITARD, SIROS ; Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (Nice) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (*Compiègne*) ; M. WALUSINSKI (*Voltaire*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; REEF (*Chaptal*) ; SIROS (*Lakanal*) ; THÉRON (*Louis-le-Grand*).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (*Montpellier*) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (*Strasbourg, Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOD (Lyon, *Marie-Vadaland*) ; M. POUX (Saint-Cloud) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Breuvet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (*Montpellier*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (*Casablanca, Lyautey*) ; *Tunis :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

ANNEAUX, CONGRUENCES, IDÉAUX *

1. Rappel de définitions et de quelques propriétés simples

Nous donnerons le nom d'*anneau* à tout ensemble A d'éléments $a, b, \dots$ sur lesquels sont définies deux opérations ou lois de composition internes, nommées *addition* et *multiplication*, représentées par les notations habituelles et soumises aux axiomes suivants :

I. A est un *groupe abélien par rapport à l'addition*, c'est-à-dire l'addition est *associative* : $a + (b + c) = (a + b) + c$, *commutative* : $a + b = b + a$ (propriété exprimée par le mot « abélien ») ; il existe un *élément neutre* appelé *zéro* et désigné par 0 : $a + 0 = a$, et, pour tout élément a un *élément opposé* $-a$: $a + (-a) = 0$ (ce qui s'écrit plus brièvement : $a - a = 0$).

II. La *multiplication* est *associative* : $a(bc) = (ab)c$.

III. La *multiplication* est *distributive* par rapport à l'addition :

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca.$$

Ces différentes propriétés sont, bien entendu, supposées vraies, quels que soient a, b, c dans A .

Si la multiplication est commutative, l'anneau est dit *commutatif*. C'est essentiellement aux anneaux commutatifs que nous nous intéresserons aujourd'hui.

Dans les axiomes définissant un anneau, nous n'avons pas fait figurer l'existence d'un *élément-unité* e ou 1 (élément-neutre pour la multiplication : $ea = ae = a$, quel que soit $a \in A$) (1). Si un tel élément existe, A est dit *anneau avec élément-unité*. Dans un anneau qui se composerait

(*) Conférence prononcée le 15 mars 1956 à l'Institut Henri-Poincaré, seconde conférence du cycle sur l'Algèbre organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs de Mathématiques.

(1) Cette définition diffère donc, sur ce point, de celle qui a été donnée par Henri Cartan dans sa conférence sur les structures algébriques, et est un peu plus générale. C'est d'ailleurs la définition classique, voir par exemple [3], p. 35 et 38, [1], p. 115, [2], p. 138 ; les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

du seul élément zéro, zéro serait élément-unité (pour la multiplication), mais on exclut généralement ce cas quand on parle d'un anneau avec élément-unité.

On voit immédiatement que, dans tout anneau A , la multiplication est distributive par rapport à la soustraction et que 0 est élément permis : $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ (quel que soit $a \in A$). *Un produit est nul dès qu'au moins un des facteurs l'est.* Cette condition suffisante n'est nécessaire que dans des anneaux particuliers : nous rencontrerons des anneaux très simples où des éléments différents de zéro peuvent avoir un produit nul.

Un anneau K ayant plus d'un élément, $K \neq \{0\}$, ne peut jamais être un groupe par rapport à la multiplication ; cette propriété est en effet incompatible avec :

$$a \neq 0, \quad a \cdot 0 = 0 \cdot 0 (= 0).$$

Mais il peut arriver que $K - \{0\}$ soit un groupe par rapport à la multiplication (c'est-à-dire que le produit, dans K , de deux éléments non nuls soit différent de zéro, qu'il existe un élément-unité e et que tout $a \neq 0$ admette un inverse a^{-1} : $aa^{-1} = a^{-1}a = e$). On dit alors que K est un *corps*.

2. Exemples

L'ensemble $C = \{ \dots, -m, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}$ des entiers relatifs (c'est-à-dire ≥ 0) est un anneau ; il en est de même de l'ensemble des entiers relatifs pairs, puisque nous ne nous bornons pas à considérer des anneaux avec élément-unité.

L'ensemble des nombres rationnels Γ , celui des nombres réels P , celui des nombres complexes Ω sont des corps (contenant C). L'ensemble Σ des *nombres algébriques*, c'est-à-dire des nombres (réels ou complexes), solutions d'équations algébriques à coefficients rationnels ou, ce qui revient au même, à coefficients entiers, est également un corps (2).

Étant donné un anneau A , par exemple l'un des précédents, on sait définir (3) l'anneau $A[X]$ des *polynômes* en X à coefficients dans A , puis l'anneau $A[X][Y]$ des polynômes en Y ayant leurs coefficients dans

$A[X]$; ces polynômes s'écrivent $\sum_{ij} a_{ij} X^i Y^j$, $a_{ij} \in A$ (avec, dans cha-

que somme, seulement un nombre fini de coefficients a_{ij} non nuls), la symétrie en X et Y est évidente, et nous avons là ce qu'on appelle l'anneau des polynômes en X et Y à coefficients dans A , désigné par la notation $A[X, Y]$. De proche en proche, on définit l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes en n indéterminées $X_1, \dots, X_n$ à coefficients dans A .

Un autre exemple important d'anneau est celui des *entiers modulo m* , m étant un entier donné (cf. *Structures algébriques*, § 8). Il est

(2) Cette proposition peut se rattacher facilement à la théorie des fonctions symétriques. Voir par exemple [2], chapitre VII, p. 396.

(3) Voir la conférence sur les Structures algébriques, par Henri Cartan. La lettre X , « pur symbole », reçoit aussi le nom d'*indéterminée* et joue le rôle de générateur d'un demi-groupe cyclique, [3], p. 50, [2], p. 326. Dans un anneau avec élément-unité, c'est un polynôme particulier ($a_1 = e$, $a_i = 0$ pour $i \neq 1$).

défini à partir de la congruence arithmétique R par rapport au module m , avec laquelle l'addition et la multiplication sont compatibles (nous dirons aussi, dans le même sens, que cette congruence est une relation d'équivalence *régulière* par rapport à l'addition et à la multiplication de l'anneau C des entiers) : c'est l'ensemble-quotient C/R ou $C/(m)$ de C par cette équivalence, et on peut le représenter par l'ensemble $\{0, 1, \dots, m-1\}$ des m restes possibles dans la division par m . Les tables d'addition et de multiplication, faciles à construire pour chaque valeur numérique de m , font apparaître une possibilité remarquable. Pour $m=4$, on a : $2 \cdot 2 = 0$; pour $m=6$, on a : $2 \cdot 3 = 0$. D'une façon générale, toutes les fois que le module m n'est pas premier, $C/(m)$ n'est pas un domaine (ou anneau) d'intégrité ; $C/(p)$, au contraire, pour p premier, en est un ; c'est même un corps (nous y reviendrons dans un instant).

Dans le corps Ω des nombres complexes, portons notre attention sur les nombres de la forme $\alpha + \beta i$ où α et β sont *rationnels* : $\alpha, \beta \in \Gamma$. L'ensemble de ces nombres est, visiblement, un corps, désigné par $\Gamma(i)$. Cette notation exprime que c'est le plus petit sous-corps de Ω contenant à la fois le corps Γ et le nombre i ; on dit qu'il se déduit de Γ par l'*adjonction* de i . On peut, sans utiliser Ω , construire directement ce corps $\Gamma(i)$ à partir de Γ , par la méthode suivante, qui est un cas particulier de l'*adjonction symbolique* que nous étudierons plus loin.

Dans l'anneau de polynômes $\Gamma[x]$, considérons le polynôme $x^2 + 1$ et faisons-lui jouer le rôle que jouait plus haut, dans l'anneau C des entiers, le module m ; soit donc R la relation entre deux polynômes $\varphi(x), \psi(x)$ de $\Gamma[x]$ vérifiée si, et seulement si, $\varphi - \psi$ est un multiple de $x^2 + 1$. R est une relation d'équivalence, régulière par rapport à l'addition et à la multiplication des polynômes. Les classes de polynômes équivalents s'ajoutent et se multiplient comme les polynômes qu'elles contiennent, donc forment un *anneau*, appelé anneau quotient, ou anneau des classes résiduelles, et désigné par $\Gamma[x]/R$ ou $\Gamma[x]/(x^2 + 1)$. Les différents éléments de Γ appartiennent à des classes différentes, avec lesquelles on peut les identifier. Chaque classe contient un polynôme du premier degré, $\alpha x + \beta$, reste commun de la division des différents polynômes de la classe par $x^2 + 1$; et si l'on désigne par i la classe contenant le polynôme x , la classe contenant $\alpha x + \beta$ est $\alpha i + \beta$ (en raison de la régularité). Comme $x^2 + 1$ et 0 sont deux polynômes équivalents, on a : $i^2 + 1 = 0$. Enfin, si α et β ne sont pas tous deux nuls, $\alpha + \beta i (\neq 0)$ a l'inverse : $\alpha - \beta i$

— ; notre anneau quotient est bien un *corps* contenant Γ et un élément i solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ (et il n'existe visiblement pas de corps plus petit ayant ces propriétés).

En remplaçant le corps des rationnels Γ par le corps des réels P , on construit le corps des nombres complexes $\Omega = P(i)$ par cette méthode purement algébrique, qui remonte à Cauchy. On peut aussi remplacer -1 par un entier d non carré parfait et construire, toujours par cette méthode, les corps $\Gamma(\sqrt{d}) = \Gamma[x]/x^2 - d$, en particulier définir par un

procédé purement algébrique des nombres irrationnels de la forme $\sqrt{d}$. Nous verrons plus loin comment la méthode, sous le nom d'adjonction symbolique, s'étend à la définition de nombres algébriques quelconques. Dès maintenant, notons l'importance des *relations d'équivalence régulières par rapport à l'addition et à la multiplication dans un anneau* : pour simplifier le langage et rappeler l'origine arithmétique de la notion, nous leur donnerons le nom de *congruences*.

Dans un des corps $\Gamma(\sqrt{d})$ ainsi construits, on voit apparaître un anneau simple et remarquable : celui des nombres $a + b\sqrt{d}$, où a, b sont des entiers (relatifs) : $a, b \in \mathbb{C}$. En particulier, les nombres $a + bi$ sont les *entiers de Gauss* ; l'anneau qu'ils constituent est représenté par le « réseau des points entiers » du plan, c'est-à-dire des points à coordonnées entières.

Bien que nous nous limitons aux anneaux commutatifs, mentionnons que les matrices carrées d'ordre n (avec les règles classiques d'addition et de multiplication), à éléments dans un anneau A (qui peut en particulier être un corps), forment un anneau (non commutatif pour $n > 1$).

3. Domaines d'intégrité

Un domaine (ou anneau) d'intégrité est, rappelons-le, un anneau commutatif D dans lequel un produit xy ne peut être nul que si l'un au moins des facteurs x, y est nul. Autrement dit : *deux éléments de $D - \{0\}$ ont leur produit dans $D - \{0\}$* , $D - \{0\}$ est « *multiplicativement fermé* ». En outre, $ab = ac$ et $a \neq 0$ entraînent $b = c$; toute égalité de la forme $ab = ac$ dans $D - \{0\}$ peut être *simplifiée*. Si $D - \{0\}$ est fini et si l'on écrit sa table de multiplication, on voit qu'un élément figure au plus une fois dans chaque ligne ou chaque colonne, donc exactement une fois ; cela signifie que l'équation $ax = b$ a toujours une solution, ce qui entraîne que $D - \{0\}$ est un groupe multiplicatif (abélien bien entendu) : D est donc un corps : *tout domaine d'intégrité fini est un corps*. Tel est le cas pour $\mathbb{C}/(p)$, p premier.

Si D est un domaine d'intégrité non fini, la considération des fractions (a, b) ou $\frac{a}{b}$ ($a, b \in D, b \neq 0$) permet de construire un corps (minimum) contenant D et appelé *corps des quotients* du domaine d'intégrité D : les éléments de ce corps sont les classes de fractions équivalentes (4).

(4) Voir la conférence sur les structures algébriques, par Henri Cartan, § 7 et 8. L'existence d'un élément-unité dans D n'est pas nécessaire (on considérera les fractions $\frac{m}{m}$ au lieu de $\frac{1}{1}$, $\frac{am}{m}$ au lieu de $\frac{a}{1}$). La construction du corps des quotients d'un domaine d'intégrité dérive de la construction, plus simple, du plus petit groupe contenant un *semi-groupe abélien* donné S (c'est-à-dire un ensemble S muni d'une opération associative, commutative et satisfaisant à la règle de simplification : $ab = ac$ entraîne $b = c$, dans la notation multiplicative). Cette dernière construction a l'intérêt de s'appliquer aussi bien à la définition des entiers relatifs à partir des entiers naturels, ou des nombres réels de signe quelconque à partir des nombres réels positifs, l'opération considérée étant alors l'addition. Voir [2], chap. V, § 2 et 3, p. 224 (on peut, très facilement, éviter l'utilisation du § 1).

Soit K un corps (commutatif) ; si $x, y \in K$ et si l'on a $xy = 0$, $x \neq 0$, x admet dans K un inverse x^{-1} et on a :

$$0 = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = y.$$

Par suite, *tout anneau contenu dans K , en particulier le corps K lui-même, est un domaine d'intégrité.*

Si l'on considère l'anneau de polynômes $D[x]$, où D est un domaine d'intégrité, le produit d'un polynôme $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de degré n ($a_n \neq 0$) par un polynôme $g(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p$ de degré p ($b_p \neq 0$) est un polynôme $a_0b_0 + \dots + a_nb_pX^{n+p}$ de degré $n+p$ exactement, puisque a_nb_p est différent de 0. Si A est un anneau quelconque, dans l'anneau $A[n]$, le produit d'un polynôme de degré n par un polynôme de degré p est *au plus* de degré $n+p$; et si A n'est pas un domaine d'intégrité, il existe effectivement des cas où le degré du produit s'abaisse. Autre accident très remarquable, quand A n'est pas un domaine d'intégrité : on ne peut plus affirmer qu'un polynôme $f(x) \in A[x]$, nul pour $x=a$ et $x=b$, $a, b \in A$, $b \neq a$, est divisible par $(x-a)(x-b)$; et un polynôme $f(x)$ de degré n peut très bien s'annuler pour plus de n valeurs distinctes de x : ainsi, prenons $A = \mathbb{C}/(4)$; le polynôme $2x$, du premier degré, s'annule pour $x=0$ et $x=2$.

4. Caractéristique

Soit A un anneau, possédant un élément-unité e . Soit n un entier relatif. Si n est positif et si $x \in A$, on pose :

$$nx = x + \dots + x \quad (n \text{ fois}).$$

Si $n = 0$ ($\in \mathbb{C}$), on pose $0x = 0$ ($\in A$). Si n est négatif, on pose :

$$nx = -(|n|x).$$

Puisque $x = ex$, on a :

$$nx = (ne)x.$$

Si donc il existe des entiers n non nuls tels que :

$$(1) \quad ne = 0$$

on aura :

$$nx = 0 \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Parmi de tels entiers, il y en a de positifs, et, parmi ceux-ci, il y en a un plus petit que tous les autres, soit n_0 ; on dit, dans ce cas, que l'anneau A est de caractéristique n_0 .

S'il n'existe aucun entier n vérifiant l'équation (1), A est dit de caractéristique nulle (parce que 0 est le seul entier tel que $0e = 0$, $0x = 0$ pour tout $x \in A$).

La caractéristique d'un domaine d'intégrité D est ou bien 0, ou bien un nombre premier p . Si l'on avait en effet $n_0 = n'_0n''_0$ avec $n'_0, n''_0 \neq 0, 1$, on aurait $n'_0e = a \neq 0$, $n''_0e = b \neq 0$, et $ab = n_0e = 0$, D ne serait pas un domaine d'intégrité.

Notons bien que ce qu'on appelle dans l'enseignement, à tort je crois, les « règles du calcul algébrique » sont les règles de calcul valables dans les domaines d'intégrité de caractéristique nulle.

Examinons quelques particularités intéressantes dans les domaines d'intégrité de caractéristique $p \neq 0$.

Dans tout anneau commutatif, la formule du binôme :

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

$$\text{avec : } C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

est valable. [Dans un anneau non commutatif, on peut seulement écrire par exemple : $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$].

Prenons, dans la formule du binôme $n = p$, caractéristique du domaine D considéré : pour $k \neq 0, p$, C_p^k est multiple de p , on a donc :

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

En remplaçant a par $a - b$, il vient :

$$(a - b)^p = a^p - b^p.$$

Ces formules entraînent, de proche en proche :

$$(a_1 + \dots + a_r)^p = a_1^p + \dots + a_r^p$$

$$(a + b)^{p^f} = a^{p^f} + b^{p^f} \quad (\text{quel que soit l'entier naturel } f).$$

$$(a - b)^{p^f} = a^{p^f} - b^{p^f}$$

En supposant que D possède un élément-unité e , en prenant $a_1 = a_2 = \dots = a_r = e$ et en écrivant r pour re , il vient :

$$r^p = r,$$

quel que soit l'entier naturel r .

Cette relation est valable en particulier dans le corps des entiers modulo p , $C/(p)$. En revenant à l'anneau des entiers C , on voit qu'on a, pour tout nombre naturel x :

$$x^p \equiv x \quad (p)$$

(théorème de Fermat).

A étant un anneau commutatif quelconque, on peut définir d'une façon purement algébrique, dans l'anneau de polynômes $A[x]$, la dérivée d'un polynôme $f(x)$ comme le coefficient de h dans $f(x + h)$ ordonné suivant les puissances de h :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h^2(\dots), \quad f(x + h) \in A[x, h].$$

Les règles de calcul des dérivées s'obtiennent aisément ; si

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

on a :

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

et $f'(x)$ est de degré $n - 1$ au plus ; exactement de degré $n - 1$ lorsque A est un anneau de caractéristique 0, mais, dans le cas contraire, le degré de f' est certainement inférieur à n si A est de caractéristique n_0 et si n est multiple de n_0 . En particulier, si A est un domaine d'intégrité avec élément-unité ou un corps de caractéristique p , tout polynôme en x^p :

$$f(x) = a_r x^{pr} + \dots + a_1 x^p + a_0$$

a une dérivée nulle (au sens de « identiquement nulle »). Cette circonstance, on le conçoit, n'est pas sans apporter des perturbations notables dans la théorie des équations algébriques ; si l'on prend pour A certains corps de caractéristique p , elle n'est pas incompatible avec l'irréductibi-

lité de $f(x)$ dans $A[x]$. Exemple (5) : A est le corps $k(t)$ des fractions rationnelles d'une indéterminée t à coefficients dans le corps $k = C/(p)$; et $f(x) = x^p - t$.

5. Idéaux

Dans un anneau commutatif A , soit R une congruence (c'est-à-dire une relation d'équivalence régulière pour l'addition et la multiplication de A). L'ensemble des classe d'équivalence ou ensemble quotient A/R est, comme on l'a vu dans la conférence sur les structures algébriques, un anneau, désignons-le plus simplement par $\bar{A}$. Soit $\bar{x}$ la classe contenant l'élément x de A . L'application $x \rightarrow \bar{x}$ est une application de A sur $\bar{A}$ (tout élément $\bar{x}$ de $\bar{A}$ est obtenu comme image d'au moins un élément de A) ; de plus, elle respecte l'addition et la multiplication des anneaux $A, \bar{A}$, c'est-à-dire :

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} \qquad \overline{xy} = \bar{x} \bar{y}.$$

On donne le nom d'*homomorphisme* (d'anneaux) à toute application $A \rightarrow \bar{A}$ ayant les propriétés précédentes ; l'anneau $\bar{A}$ est dit *homomorphe* à A , ou *image homomorphe* de A , on écrit :

$$A \sim \bar{A}.$$

Toute congruence R dans A fournit donc un anneau homomorphe $\bar{A}$, qui n'est autre que l'anneau-quotient A/R .

Considérons la classe d'équivalence $\bar{0}$ à laquelle appartient l'élément 0 de A ; c'est manifestement l'élément zéro de l'anneau A/R . Mais c'est aussi un sous-ensemble M de A doué de deux propriétés remarquables :

1° M est un sous-groupe additif de A ; en effet, M contient 0 par définition, $x + y$ en même temps que x et y , — x en même temps que x . (On peut, plus rapidement, dire que M contient $x - y$ en même temps que x et y et utiliser une proposition simple caractérisant les sous-groupes d'un groupe) (6).

2° M est multiplicativement permis dans A , puisque $m \in M$ et $a \in A$ entraînent $am = a0 = 0$ (R).

Puisque R est régulière par rapport à l'addition, les relations $x \equiv y$ (R) et $x - y \equiv 0$ (R), c'est-à-dire $x - y \in M$, sont vraies en même temps : si l'on connaît la classe-zéro, M , la congruence R en résulte.

On donne le nom d'*idéal* à tout sous-ensemble de l'anneau commutatif A possédant les propriétés 1° et 2° ; d'après ce qui précède, toute classe-zéro par rapport à une congruence est un idéal. Mais il est immédiat que si, inversement, nous nous donnons *à priori* un idéal M dans A

(5) L'étude de cet exemple repose sur des propositions que nous ne pouvons donner ici.

(6) Voir par exemple [2], p. 108.

et si nous considérons la relation R vérifiée par les couples d'éléments x, y de A tels que $x - y \in M$, et ceux-là seulement, R est une relation d'équivalence, et que cette relation est régulière pour l'addition et la multiplication : R est donc une congruence, et sa classe-zéro est précisément M .

Ainsi, on a une correspondance biunivoque entre les congruences R et les idéaux M d'un anneau commutatif A . Pour cette raison, l'anneau-quotient A/R s'écrit également A/M .

Partons maintenant d'un homomorphisme d'anneaux :

$$A \rightarrow \bar{A}$$

dans lequel l'élément x de A admet pour image l'élément $\bar{x}$ de $\bar{A}$. Considérons la relation R portant sur les éléments x, y de A et vérifiée par les couples (x, y) tels que $\bar{x} = \bar{y}$, et ceux-là seulement. R est une équivalence (appelée *équivalence d'homomorphisme*), et on vérifie aisément que c'est une congruence. Mais alors on peut former l'anneau-quotient A/R et, par construction, les classes suivant l'équivalence R , éléments de A/R , correspondent *biunivoquement* aux éléments de $\bar{A}$. Comme cette correspondance biunivoque respecte l'addition et la multiplication, c'est un *isomorphisme* : $\bar{A}$ est donc isomorphe à l'anneau-quotient $A/R = A/M$. L'idéal M , classe-zéro modulo R , est ici l'ensemble des éléments de A que l'homomorphisme applique sur le zéro de A (on dit que M est le *noyau* de l'homomorphisme).

On voit donc qu'à des isomorphismes près, les *congruences* ou, ce qui revient au même, les *idéaux* de A fournissent tous les anneaux homomorphes à A .

6. Cas particuliers et exemples

On définit, sur les idéaux d'un anneau commutatif A , des *opérations* qui sont l'*intersection* (au sens de la théorie des ensembles) ou p.p.c.m., la *somme* ou p.g.c.d., et le *produit*. La somme $a + b$ de deux idéaux a, b de A est l'ensemble des éléments $a + b$ où a décrit a , b décrit b : c'est visiblement un idéal contenant a et b . Le produit ab est l'idéal engendré par les produits ab , c'est-à-dire l'ensemble des sommes $a_1b_1 + \dots + a_rb_r$ (r non fixé) où $a_i \in a$, $b_i \in b$. Pour ne pas alourdir cet exposé, nous n'insisterons pas davantage sur ce *calcul des idéaux*, à vrai dire fort important (7), et dans lequel on définit également un quotient ou, mieux, une résiduation.

Bornons-nous à étudier un mode de génération fondamental ; pour simplifier un peu, nous supposons que l'anneau A possède un *élément-unité* e .

Si nous nous donnons dans l'anneau A , h éléments fixes $a_1, \dots, a_h$ l'ensemble des éléments $a = x_1a_1 + \dots + x_ha_h$, où les x_i décrivent A ,

(7) Voir par exemple [2], chap. IV, § 11, p. 188, [3], § 17, p. 57-59, et § 85, t. 2, p. 22-25.

est, comme on le vérifie sans peine, un idéal a , qu'on désigne par la notation :

$$a = (a_1, \dots, a_h)$$

On dit que a est engendré par les a_i , qu'il admet la base (finie) $a_1, \dots, a_h$. Tout idéal engendré par un seul élément, $a = (a)$, est dit *principal*. L'idéal (e) engendré par l'élément-unité coïncide avec l'anneau A : on lui donne souvent le nom d'*idéal-unité*. L'idéal engendré par l'élément 0 se réduit à cet élément : on l'appelle *idéal-zéro*.

Dans un corps K , il n'y a pas d'autres idéaux que l'idéal-zéro et l'idéal unité. Soit en effet M un idéal de K ; supposons $M \neq 0$. Alors M contient au moins un élément $a \neq 0$; cet élément a possède un inverse a^{-1} , puisque K est un corps, et nous avons $e = a^{-1}a \in M$, $K = (e)$ est donc contenu dans M , d'où $M = K = (e)$.

Dans l'anneau C des entiers, dans l'anneau $k[x]$ des polynômes en x à coefficients dans un corps k , tout idéal est principal.

Montrons-le pour l'anneau $A = k[x]$ par exemple. L'idéal-zéro est bien un idéal principal. Si maintenant a est un idéal $\neq (0)$, soit f un des polynômes non nuls de degré minimum appartenant à a ; g désignant maintenant un polynôme quelconque appartenant à a , divisons g par f : $g = qf + r$, où le degré de r est inférieur à celui de f . Le polynôme r appartient à l'idéal a , il est donc nécessairement nul, et g appartient à l'idéal principal (f) , qui coïncide par conséquent avec a .

Raisonnement analogue pour l'anneau C des entiers : on voit que, dans cet anneau, n'existent pas d'autres congruences que les congruences arithmétiques, définies par un module m ; m est le générateur de l'idéal principal associé à la congruence.

On donne le nom d'*anneau euclidien* à un anneau dans lequel existe un algorithme de division avec reste ; d'*anneau à idéaux principaux* (plus brièvement, d'*anneau principal*), à un anneau dans lequel tout idéal est principal. Le raisonnement précédent s'étend sans peine : tout anneau euclidien est principal. L'anneau des entiers de Gauss est également un anneau euclidien (pour définir la division avec reste, on utilise la norme $N(a)$ d'un élément $a = a + ib$, qui est par définition $N(a) = a^2 + b^2$, et on lui fait jouer le rôle du degré dans la division des polynômes à une indéterminée).

Un anneau de polynômes A à plus d'une indéterminée, par exemple un anneau tel que $\Gamma[x, y]$, $\Omega[x, y]$, n'est plus un anneau principal : l'idéal (x, y) n'admet pas, en effet, un générateur unique ; notons que cet idéal a une signification géométrique simple : c'est l'ensemble des polynômes de A qui sont nuls à l'origine. La génération des idéaux dans les anneaux de polynômes à n variables $K[x_1, \dots, x_n]$, où K est un corps quelconque, obéit cependant encore à une loi simple : dans un tel anneau, tout idéal admet une base finie. Les anneaux ayant cette propriété sont dits *noëthériens* (du nom de la mathématicienne Emmy NOETHER, qui en a donné d'autres définitions axiomatiques au moyen de la « condition maximale » et de l'« axiome des chaînes de diviseurs », et a donné les résultats fondamentaux de la théorie des idéaux dans de tels anneaux).

C'est à HILBERT qu'est dû le théorème qui vient d'être cité : l'anneau $K[x_1, \dots, x_n]$ est noëthérien. En fait, le théorème de Hilbert, un peu plus précis, prend la forme d'un « théorème de transfert » : si un anneau A , possédant un élément-unité, est noëthérien, l'anneau $A[x]$ est, lui aussi, noëthérien (8).

7. Idéaux remarquables

Il est naturel de distinguer, parmi les idéaux M d'un anneau commutatif A , ceux pour lesquels l'anneau-quotient ou anneau des classes résiduelles A/M a des propriétés remarquables. Etudions les cas dans lesquels A/M est un corps ou un domaine d'intégrité.

L'idéal M est dit *sans diviseurs* ou *maximal* si A est le seul idéal contenant strictement M . On a le théorème suivant :

Pour que A/M soit un corps, il faut que l'idéal M soit sans diviseurs. Si A possède un élément-unité, cette condition nécessaire est aussi suffisante.

Démonstration.

1° Supposons que A/M soit un corps.

Soit M' un idéal contenant strictement M : $M \subset M'$. Soit $a \in M' \setminus M$. Désignons par $\bar{a}$ la classe contenant a : $\bar{a}$ est différent de la classe-zéro $M = \bar{0} \in A/M$. Si x est un élément quelconque de A et $\bar{x}$ la classe contenant x , il existe $\bar{y} (= \bar{a}^{-1}\bar{x})$, tel que $\bar{x} = \bar{a}\bar{y}$, d'où, y désignant un élément de A situé dans la classe y :

$$x = ay \pmod{M}$$

c'est-à-dire :

$$x = ay + m \quad m \in M \subset M'$$

Comme $a \in M'$, nous avons $x \in M'$, donc $A = M'$; M est sans diviseurs.

2° Supposons que A possède un élément-unité e et que M soit sans diviseurs. Pour établir que A/M est un corps, il suffit de montrer que toute classe $\bar{a}$ différente de $\bar{0} = M$ admet un inverse. Un élément a situé dans la classe $\bar{a}$ n'appartient pas à M : l'idéal $M + (a)$ contient strictement M , d'où :

$$M + (a) = A.$$

En particulier, l'élément-unité e appartient au premier membre :

$$e = m + ra, \quad m \in M, r \in A,$$

d'où, en passant aux classes modulo M :

$$\bar{ra} = \bar{e}, \quad \text{c'est-à-dire } \bar{r} = \bar{a}^{-1}.$$

Une application importante de ce résultat est la suivante. Considérons un corps K et un polynôme irréductible $f(x)$ de l'anneau $K[x] = A$, c'est-à-dire un polynôme qui n'est pas le produit de deux polynômes du même anneau ayant des degrés au moins égaux à 1. L'idéal principal (f) est, dans A , un idéal sans diviseurs ; $A/(f)$ est donc un corps, K' . Les

(8) Voir par exemple [2], chap. VI, § 5, p. 331.

(*) Le signe $\notin$ a été utilisé à la place du signe $\in$ barré. $\notin$ signifie donc « n'appartient pas à ».

classes contenant les éléments de K correspondent biunivoquement à ces éléments, car deux éléments distincts de K ne peuvent pas être congrus modulo f ; ces classes forment un corps isomorphe à K , que nous identifions avec K ; K' est donc un sur-corps de K .

Si α est la classe qui contient le polynôme x , la classe contenant $f(x)$ est celle qui contient le polynôme $f(x)$ [en raison de l'homomorphisme $A \sim A/(f)$] ; mais la classe contenant $f(x)$ est l'élément zéro de K' . Donc, on a, dans K' , $f(x) = 0$, et on a construit un corps K' dans lequel l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine : telle est, réduite à l'essentiel, la méthode de l'adjonction symbolique.

Un idéal $\mathfrak{p}$ d'un anneau A tel que l'anneau $A/\mathfrak{p}$ soit un *domaine d'intégrité* est, par définition, un idéal premier. Il faut et il suffit que, dans $A/\mathfrak{p} = \bar{A}$, les relations :

$$\bar{x} \neq \bar{0}, \quad \bar{y} \neq \bar{0} \quad \text{entraînent} \quad \bar{x}\bar{y} \neq \bar{0},$$

donc que, dans A , les relations :

$$x \notin \mathfrak{p}, \quad y \notin \mathfrak{p} \quad \text{entraînent} \quad xy \notin \mathfrak{p},$$

ce qui signifie que l'ensemble complémentaire $A - \mathfrak{p}$ est multiplicativement fermé.

Cette notion d'idéal premier a une importance capitale, aussi bien dans les théories algébriques elles-mêmes que dans les applications arithmétiques ou géométriques.

Bornons-nous à constater que, dans un anneau A possédant un élément-unité, tout idéal sans diviseurs M est premier (A/M est en effet un corps, donc un domaine d'intégrité).

Pour terminer, prenons comme exemple l'anneau $\Omega[x, y, z] = A$ des polynômes à trois variables, à coefficients complexes, et considérons les idéaux :

$$\alpha_1 = (x, y, z) \quad \alpha_2 = (x, y) \quad \alpha_3 = (x).$$

A/α_1 est isomorphe à Ω , donc est un corps ; A/α_2 est isomorphe à l'anneau de polynômes $\Omega[z]$ qui est un domaine d'intégrité ; A/α_3 est isomorphe à l'anneau de polynômes $\Omega[y, z]$, c'est aussi un domaine d'intégrité. Les idéaux $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, qui vérifient les relations d'inclusion :

$$\alpha_3 \subset \alpha_2 \subset \alpha_1 \subset A = (1),$$

sont tous premiers, α_1 est sans diviseurs.

Paul DUBREIL,
Professeur à la Sorbonne.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI. — *Algèbre*, chap. I (Hermann, Paris, 1942).
- [2] P. DUBREIL. — *Algèbre*, t. I, 2^e éd. (Gauthier-Villars, Paris, 1954).
- [3] B. L. van der WAERDEN. — *Moderne Algebra*, 2^e éd. (Springer, Berlin).

ESPACES VECTORIELS. FORMES ET ÉQUATIONS LINÉAIRES *

La notion de vecteur se rencontre à diverses occasions dans l'enseignement secondaire : composition de translations, de vitesses, de forces ; produit scalaire, produit vectoriel, moment d'un vecteur par rapport à un point, puis plus tard sous des formes algébriques plus cachées à propos des polynômes, des formes linéaires. Le mot vecteur n'est pas alors toujours utilisé avec le même sens : c'est tantôt un vecteur lié, tantôt un vecteur glissant, tantôt un vecteur libre.

Il ne s'agira ici que de vecteurs libres.

Bien que l'image géométrique couramment utilisée : un segment de droite muni d'une flèche à une de ses extrémités, puisse laisser croire que l'on peut parler d'un vecteur isolé, indépendamment de la considération d'autres vecteurs, nous verrons bientôt qu'un être mathématique ne peut s'appeler vecteur que s'il appartient à un ensemble d'êtres analogues sur lesquels on peut effectuer certaines opérations que nous préciserons.

C'est la nature de ces opérations et non pas le caractère individuel de chacun de ces êtres qui leur donne la qualité de vecteur. C'est ainsi qu'un polynôme, une fonction continue, un carré peuvent être dotés de la qualité de vecteur.

De façon vague, on peut dire qu'un ensemble d'êtres mathématiques est un ensemble de vecteurs si l'on peut y ajouter deux vecteurs et si l'on peut multiplier tout vecteur par un nombre arbitraire.

De façon plus précise, nous donnerons la définition suivante :

DEFINITION : On appelle *espace vectoriel* sur le corps R des nombres réels, tout ensemble E muni :

1) d'une loi de composition interne (1) appelée *addition*, et pour laquelle E est un groupe commutatif ;

2) d'une loi de composition externe qui, à tout nombre $\lambda \in R$ et à tout $x \in E$, associe un élément de E noté λx , et telle que :

- a) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$,
- b) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$,
- c) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$,
- d) $1 \cdot x = x$.

Les éléments de E sont dits *des vecteurs* ; les éléments de R sont dits *des scalaires*.

On dénote par 0 à la fois le 0 de R et le zéro du groupe E , bien qu'il ne s'agisse pas des mêmes éléments.

Des relations a, b, c, d , on déduit aisément les relations suivantes :

$$0x = 0 ; \quad \lambda 0 = 0 ; \quad (-\lambda)x = \lambda(-x) = -\lambda x$$

Les relations a, b, c, d font intervenir simplement l'existence d'une

(*) Conférence prononcée à l'Institut Henri-Poincaré, le 8 mars 1956.

(1) Voir exposé de Henri Cartan dans le Bulletin n° 176. Le groupe E étant commutatif, on notera $(x + y)$ le composé de x et y , et $-x$ le symétrique de x .

addition et d'une multiplication sur R ; il semble donc que l'on pourrait définir de même des espaces vectoriels sur un anneau A qui jouerait le rôle que joue R dans la définition précédente. En fait, ce n'est que lorsque cet anneau est un corps que l'on obtient une théorie analogue à celle des espaces vectoriels sur R . Ceci tient en grande partie à ce que la relation $\lambda x = 0$ entraîne $\lambda = 0$ ou $x = 0$, si A est un corps, mais ne l'entraîne pas nécessairement si A est seulement un anneau.

Les corps les plus utilisés sont R et le corps C des nombres complexes.

Le fait que le corps R est muni d'une structure d'ordre n'est pas intervenu dans la définition précédente. Il n'intervient que si l'on veut définir dans l'espace vectoriel (sur R) une notion de demi-droite, d'intervalle ; on peut alors parler d'ensemble convexe dans E . C'est ce fait qui donne aux espaces vectoriels sur R un rôle privilégié. Je ne parlerai pas ici des notions de demi-droite et de convexité.

Exemples d'espaces vectoriels :

1) L'ensemble des suites de n nombres réels : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, est un espace vectoriel sur R si l'on pose :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Cet espace est l'espace euclidien R^n .

Le cas particulier $n=1$ montre que R peut être lui-même considéré comme un espace vectoriel.

2) L'ensemble des fonctions numériques définies sur $[0,1]$ est un espace vectoriel sur R si l'on définit $h=f+g$ et $k=\lambda f$ par les relations :

$$\left. \begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) \\ k(x) &= \lambda f(x) \end{aligned} \right\} \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Il en est de même des sous-ensembles suivants de cet espace :

L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.

L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $[0,1]$.

L'ensemble des polynômes (resp. des polynômes de degré n).

L'ensemble des polynômes trigonométriques, etc...

3) L'ensemble des fonctions analytiques régulières dans le plan complexe C est un espace vectoriel sur le corps C .

Il n'est pas toujours aussi facile de reconnaître si un ensemble est un espace vectoriel. Considérons par exemple l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, dont la courbe représentative a une longueur finie ; il n'est pas immédiat que la somme de deux telles fonctions possède la même propriété. De même, soit E l'ensemble des suites infinies $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de nombres réels, telles que :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \dots < +\infty ;$$

il n'est pas immédiat que la somme $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$ de deux telles suites soit une suite de même nature.

Notion d'isomorphisme :

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré $< n$ à coefficients réels. Si $p = (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n)$ est un tel polynôme, on voit

qu'il est caractérisé par la suite $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de ses coefficients, d'où une correspondance biunivoque entre E et R^n , définie par :

$$p \longleftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Cette correspondance conserve l'addition et la multiplication par les scalaires. On peut donc considérer que E et R^n sont deux réalisations différentes d'une même structure algébrique ; on traduit ce fait en disant que ces espaces sont isomorphes. Plus généralement :

DEFINITION : Soient E et E' deux espaces vectoriels sur un même corps. On appelle isomorphisme de E sur E' toute application biunivoque f de E sur E' telle que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

quel que soient x, y, λ .

Il est immédiat que l'application réciproque f^{-1} de E' sur E possède les mêmes propriétés.

Si un tel isomorphisme f existe, on dit que E et E' sont isomorphes.

Notons que de la condition $f(x + y) = f(x) + f(y)$, on peut déduire que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout nombre λ rationnel ; mais on ne saurait en déduire la même relation pour tout scalaire λ . Aussi la seconde relation est-elle essentielle.

Exemples d'isomorphismes :

1) Soit E un espace vectoriel et soit λ un scalaire $\neq 0$. L'application $x \rightarrow \lambda x$ de E sur lui-même est un isomorphisme. On l'appelle *homothétie* de centre O et de rapport λ .

2) Soit E_1 l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ et soit E_2 l'espace vectoriel des fonctions numériques continûment dérivables sur $[0, 1]$ et nulles pour $x = 0$. Il résulte d'un théorème d'analyse élémentaire que ces deux espaces sont isomorphes.

3) Toute fonction linéaire définie sur R^2 est de la forme $(a_1 x_1 + a_2 x_2)$. Il est donc immédiat que l'ensemble de ces fonctions est un espace vectoriel isomorphe à R^2 .

4) L'espace des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ est isomorphe à l'espace des fonctions numériques f continues sur $]-\infty, +\infty[$ telles que $f(x)$ tende vers une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

5) L'espace des fonctions numériques continues et périodiques de période 1 sur R est isomorphe à l'espace des fonctions numériques continues définies sur une circonférence.

Produit d'espaces vectoriels :

Le procédé qui nous a permis de définir R^n à partir de R peut se généraliser et permet de construire de nouveaux espaces à partir d'espaces connus.

Par exemple, soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur R . Désignons par $E_1 \times E_2$ l'ensemble des couples $x = (x_1, x_2)$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, on pose :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) ; \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

L'espace $E_1 \times E_2$ muni de ces opérations devient un espace vectoriel sur R , qu'on appelle le produit de X_1 et X_2 .

On définirait de même le produit d'une famille finie quelconque d'espaces vectoriels, et même le produit d'une famille infinie de tels espaces.

Exemples : 1) L'espace vectoriel des fonctions numériques $h(x_1, x_2)$ définies sur R^2 et de la forme $h(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$, avec de plus $h(0,0) = 0$, est isomorphe au carré de l'espace des fonctions numériques f définies sur R et telles que $f(0) = 0$.

2) L'espace des fonctions numériques continûment dérivables sur $[0,1]$ est isomorphe au produit de R par l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$.

Sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie :

Dans R^3 , les sous-espaces vectoriels non réduits à 0 sont les droites et les plans passant par l'origine.

Dans l'espace des polynômes à une variable, l'ensemble des polynômes de degré n , l'ensemble des polynômes divisibles par un polynôme donné, l'ensemble des polynômes à termes de degré pair, sont des sous-espaces vectoriels. De façon plus générale :

DEFINITION : Soit E un espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble A de E tel que, si x et $y \in A$, on ait aussi $x + y \in A$ et $\lambda x \in A$ pour tout scalaire λ .

Il est immédiat que tout sous-espace vectoriel de E est un sous-groupe additif de E .

D'autre part, si (A_i) désigne une famille de sous-espaces vectoriels de E , l'ensemble des éléments communs à tous les A_i , c'est-à-dire leur intersection, est encore un sous-espace vectoriel de E .

En particulier, soit X une partie quelconque de E . Il existe des sous-espaces vectoriels de E contenant X ; ne serait-ce que E lui-même ; leur intersection $A(X)$ contient X et c'est évidemment le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X . On dit que $A(X)$ est l'espace vectoriel engendré par X .

Nous allons préciser la nature des éléments de X en introduisant une notion nouvelle :

DEFINITION : Soit X une partie d'un espace vectoriel E . On appelle combinaison linéaire d'éléments de X tout élément de E de la forme

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \text{ où } (x_i)_{i \in I} \text{ est une famille finie d'éléments de } X \text{ et où les } \lambda_i \text{ sont des scalaires.}$$

Toute combinaison linéaire d'éléments de X appartient à tout sous-espace vectoriel contenant X , donc en particulier à $A(X)$; d'autre part, les combinaisons linéaires constituent évidemment un sous-espace vectoriel de X ; ce sous-espace contient X , donc aussi $A(X)$; comme d'autre part il est contenu dans $A(X)$, il lui est identique. Autrement dit :

Le sous-espace $A(X)$ engendré par une partie X de E est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

Exemple : Soit E l'espace des fonctions numériques définies sur R . Soit X le sous-ensemble de E constitué par les monômes $1, x, \dots, x^n, \dots$. L'espace $A(X)$ engendré par X est l'ensemble des polynômes quelconques.

Sous-espaces supplémentaires :

Dans R^3 , un plan et une droite issus de O et ne se rencontrant qu'en O sont un exemple de sous-espaces supplémentaires.

DEFINITION : On dit que deux sous-espaces X_1 et X_2 d'un espace E sont supplémentaires si tout point x de E peut s'écrire d'une façon et d'une seule sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{où} \quad x_1 \in X_1 \quad \text{et} \quad x_2 \in X_2.$$

Ces conditions reviennent à dire que $(X_1 \cup X_2)$ engendre E et que $X_1 \cap X_2$ se réduit au point O ; la vérification en est immédiate.

On dit que x_1 est la composante de x dans E ou encore que x_1 est la projection de x sur E_1 parallèlement à E_2 .

Si l'on note $x_1 = pr_1.x$, on vérifie que l'on a :

$$pr_1(x + y) = pr_1.x + pr_1.y \quad \text{et} \quad pr_1(\lambda x) = \lambda pr_1.x$$

Exemples : 1) E est l'ensemble des polynômes en x à coefficients réels ; X_1 est l'ensemble des polynômes divisibles par $(x^2 + 1)$; X_2 est l'ensemble des polynômes de degré 1 au plus.

2) E est l'espace des fonctions numériques sur R ; X_1 est le sous-espace des fonctions paires ($f(-x) = f(x)$) ; X_2 est le sous-espace des fonctions impaires ($f(-x) = -f(x)$).

Dans l'espace R^3 , les sous-espaces supplémentaires d'un plan sont tous des droites, c'est-à-dire des sous-espaces tous isomorphes ; c'est là un cas particulier de la proposition générale suivante :

PROPOSITION : Si dans un espace vectoriel E , X_2 et X'_2 désignent deux sous-espaces supplémentaires d'un même sous-espace X_1 , la projection faite parallèlement à X_1 définit un isomorphisme de X_2 et X'_2 .

En effet, pour tout $x'_2 \in X'_2$, on a : $x'_2 = x_2 + x_1$, où x_2 est la projection de x'_2 sur X_2 parallèlement à X_1 . Mais cette égalité s'écrit aussi $x_2 = x'_2 + (-x_1)$, donc x'_2 est la projection de x_2 sur X'_2 parallèlement à X_1 .

Cette application $x_2 \rightarrow x'_2$ est donc une application biunivoque de X_2 sur X'_2 ; comme c'est une projection, on a aussi :

$$(x_2 + y_2)' = x'_2 + y'_2 \quad \text{et} \quad (\lambda x_2)' = \lambda.x'_2.$$

Donc c'est bien un isomorphisme.

INDÉPENDANCE LINÉAIRE. BASES

La notion d'indépendance linéaire se rencontre en géométrie dès que l'on cherche à décomposer un vecteur de R^3 suivant trois vecteurs proportionnels à des vecteurs donnés, ou en algèbre lorsqu'on cherche les conditions de résolubilité d'un système linéaire. Nous allons montrer

comment on peut en faire une étude indépendante de la nature des vecteurs étudiés, et sans faire appel à un système de coordonnées privilégié.

DEFINITION : On dit qu'une famille finie $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un

espace vectoriel E est libre si toute relation $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0$ entraîne

$\lambda_i = 0$ quel que soit i .

On dit qu'une famille quelconque est libre si chacune de ses sous-familles finies est libre.

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Si une famille est liée, il existe une relation de la forme :

$$\sum_{i \in J} \lambda_i a_i = 0, \text{ où l'un des } \lambda_i, \text{ disons } \lambda_0, \text{ est } \neq 0; \text{ on en déduit : } a_0 = \sum_{i \in J-0} \mu_i a_i$$

Inversement, une telle relation entraîne que la famille soit liée. Donc :

Dire qu'une famille est liée équivaut à dire qu'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres éléments.

Les éléments d'une famille libre sont dits *linéairement indépendants* ; ceux d'une famille liée sont dits *linéairement dépendants*.

On définirait de même la notion de *partie* libre ou liée d'un espace vectoriel.

Exemples : Dans l'espace des fonctions numériques sur R , la suite des monômes $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ est libre ; il en est de même de la suite : $\sin x, \dots, \sin nx, \dots$

DEFINITION D'UNE BASE : On appelle base d'un espace vectoriel E toute partie libre de E qui engendre E .

Si $B = (a_i)_{i \in I}$ est une base de E , tout $x \in E$ s'écrit d'une façon et

d'une seule $x = \sum_{i \in I} x_i a_i$, où tous les scalaires x_i sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux ; x_i s'appelle la *coordonnée* de x d'indice i , et $x_i a_i$ la *composante* de x d'indice i .

Par exemple, dans R^n , l'ensemble des n éléments a_i de la forme $x = (x_j)$, où l'un des x_j vaut 1 et les autres 0, est une base. Dans l'espace des polynômes, l'ensemble des monômes $1, x, \dots, x^n, \dots$ constitue une base.

On peut démontrer que tout espace vectoriel possède au moins une base ; nous ne le ferons ici que pour les espaces de dimension finie.

Bases des espaces de dimension finie :

Nous dirons qu'un espace E est de dimension finie s'il contient un sous-ensemble fini qui l'engendre, autrement dit un système fini de générateurs.

L'étude de ces espaces est dominée par les théorèmes suivants :

THEOREME 1 : Si G est un système fini de générateurs d'un espace vectoriel E et si L est une partie libre de G , il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.

Posons $L = L_0$ et supposons définie la partie libre L_p de G . Si L_p n'engendre pas E , il existe un élément x_{p+1} de G qui n'est pas combinaison linéaire d'éléments de L_p . La partie $L_p \cup \{x_{p+1}\}$ de G est évidemment libre ; nous la désignerons par L_{p+1} .

Nous avons $L_0 \subset L_1 \dots \subset L_p \subset L_{p+1}$, et cette suite est strictement croissante ; comme $L_p \subset G$ et que G est fini, cette suite est finie. Il existe donc un L_n qui n'a pas de successeur L_{n+1} ; autrement dit, L_n engendre E ; donc, L_n est la base cherchée B .

THEOREME 2 : Si G est un système fini de générateurs de E , et L une partie libre de E (pas nécessairement contenue dans G), il existe une base B de E contenant L et contenue dans $G \cup L$.

C'est une application immédiate du théorème précédent à la partie libre L et au système de générateurs $(G \cup L)$. En particulier, tout système fini de générateurs de E contient une base.

Donc, tout espace de dimension finie possède une base finie. Il n'est d'ailleurs pas évident qu'un tel espace ne peut pas posséder une base infinie ; toutefois, ce résultat est exact. Plus précisément, on démontre par récurrence, en utilisant le théorème 2, que, dans un espace de dimension finie, toutes les bases sont finies et ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre commun s'appelle la *dimension de l'espace*. Remarquons que ce résultat est valable pour les espaces vectoriels E sur un corps quelconque K . Mais il est important de préciser ce corps : en effet, soit E un espace de dimension n sur le corps C ; cet espace E peut aussi être considéré comme un espace vectoriel sur le corps R , mais sur le corps R sa dimension n'est plus n , mais $2n$; par exemple, C est de dimension 1 sur C lui-même, mais de dimension 2 sur R .

Ces résultats sont riches de conséquences immédiates dont nous énumérerons les plus importantes :

1) Pour que deux espaces vectoriels E et E' de dimension finie sur R soient isomorphes, il faut et il suffit que leurs dimensions soient égales. En particulier, tout espace de dimension n est isomorphe à R^n .

2) Soit E un espace vectoriel de dimension n .

- a) Tout système de générateurs de E a au moins n éléments ; s'il a exactement n éléments, c'est une base.
- b) Toute partie libre de E a au plus n éléments ; si elle a exactement n éléments, c'est une base.
- c) Tout sous-espace vectoriel V de E a au plus n dimensions ; s'il a n dimensions, il est identique à E .
- d) Tout sous-espace de E distinct de E admet un sous-espace supplémentaire ; la somme des dimensions de deux sous-espaces supplémentaires est égale à n .

APPLICATIONS LINÉAIRES

La notion de fonction linéaire est une de celles qui dominent l'analyse, aussi bien l'analyse classique que l'analyse moderne. Elle ne prend tout son sens que dans le cadre des espaces vectoriels.

DEFINITION : Si E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps K , on appelle application linéaire de E dans F toute application f de E dans F telle que :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

quels que soient x et $y \in E$, et $\lambda \in K$.

Par exemple, un isomorphisme de E sur F n'est autre qu'une application linéaire biunivoque de E sur F .

Exemples d'applications linéaires :

1) E est le produit des espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_n$. Pour tout $x = (x_i)$ de E , l'application $x \rightarrow x_i$ de E sur E_i est linéaire.

2) Si X_1 et X_2 sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace E , l'application $x \rightarrow pr_1 \cdot x$ de E sur X_1 est linéaire.

3) Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes $p(x)$ de degré n à une variable. Si $f(p)$ désigne le terme de degré n de p , l'application f de P_n dans P_n est linéaire.

4) Soit E l'espace des fonctions numériques réelles $x(t)$ dérivables sur $[0,1]$; désignons par x' la dérivée de la fonction x :

a) L'application $x \rightarrow x'(0)$ de E dans R est linéaire.

b) L'application $x \rightarrow x'$ de E dans l'espace des fonctions numériques sur $[0,1]$ est linéaire.

5) Soit E l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$:

a) L'application $x \rightarrow X$ de E dans E qui à x fait correspondre X défini par $X(t) = \int_0^t x(u)du$ est linéaire.

b) L'application $x \rightarrow \int_0^1 x(u)du$ de E dans R est linéaire.

6) Soit E l'espace des fonctions numériques continues sur le disque plan $x^2 + y^2 \leq 1$; soit F l'espace des fonctions numériques continues sur la circonférence du même disque.

L'application de E dans F qui à un élément φ de E fait correspondre la restriction de φ à la circonférence est linéaire.

Propriétés immédiates : Signalons les plus importantes de ces propriétés :

1) *Transitivité :* Si f applique E dans F ; si g applique F dans G , l'application $h = g \circ f$ définie par $h(x) = g(f(x))$ est linéaire si f et g le sont.

2) Si f est une application linéaire de E dans F , l'image $f(E)$ de E est un sous-espace vectoriel de F , et l'image réciproque $f^{-1}(V)$ d'un sous-espace vectoriel quelconque de F est un sous-espace vectoriel de E .

Rang d'une application linéaire :

On appelle *rang* d'une application linéaire de E dans F la dimension de l'image $f(E)$ de E . On peut déterminer souvent ce rang grâce à la proposition suivante :

Le rang de f est égal à la dimension des sous-espaces de E supplémentaires de $f^{-1}(0)$.

En effet, soit G un sous-espace supplémentaire de $f^{-1}(0)$ (qui n'est autre que l'ensemble des racines de $f(x) = 0$).

Pour tout $x \in E$, on a une décomposition unique $x = x_0 + x_1$ où $x_0 \in f^{-1}(0)$ et $x_1 \in G$.

On a $f(x) = f(x_0) + f(x_1) = f(x_1)$; donc $f(G) = f(E)$.

Or, pour tout $x \in G$ on a $f(x) \neq 0$, sauf si $x = 0$. Donc, la restriction de f à G est une application biunivoque de G sur $f(E)$; cette restriction est donc un isomorphisme de G et $f(E)$, d'où la proposition.

COROLLAIRE : Une application linéaire n'accroît jamais la dimension : lorsque E est de dimension finie, pour que $f(E)$ ait même dimension que E , il faut et il suffit que f soit biunivoque.

Ce corollaire souligne une propriété importante des applications linéaires que ne possèdent pas toutes les applications continues, puisque certaines applications continues augmentent la dimension.

Image d'un système de générateurs :

Soit f une application linéaire de E dans F , et soit X une partie de E .

Il est immédiat que $f(X)$ engendre l'image $f(A(X))$ de l'espace $A(X)$ engendré par X ; et que lorsque X engendre E , f est entièrement caractérisée par sa restriction à E . En particulier, si X est une base de E , f est connue dès que l'on connaît $f(x)$ pour tout élément x de cette base.

FORMES LINÉAIRES. ESPACE DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL

On appelle *forme linéaire* sur un espace vectoriel E (sur un corps K) toute application linéaire de E dans K .

L'ensemble des formes linéaires sur E peut être muni d'une façon naturelle d'une structure d'espace vectoriel (sur K) grâce aux définitions suivantes :

Soient f et g deux telles formes ; on définit les formes $h = f + g$ et $k = \lambda f$ (où $\lambda \in K$) par les relations :

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad k(x) = \lambda f(x)$$

pour tout $x \in E$.

On appelle cet espace vectoriel l'espace *dual* de E et on le note E^* .

Pour tout $x' \in E^*$, $x'(x)$ est un scalaire que l'on note en général par $\langle x, x' \rangle$.

Pour tout x' fixe, $\langle x, x' \rangle$ est une forme linéaire sur E . Pour tout x fixe, $\langle x, x' \rangle$ est une forme linéaire sur E^* . Aussi dit-on que $\langle x, x' \rangle$ est la forme *bilinéaire canonique* définie sur $E \times E^*$.

Formes coordonnées. Base duale :

Nous allons nous restreindre maintenant à l'étude des espaces de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et soit $(a_i)_{i \in I}$ une base de E . Tout x de E s'écrit d'une façon unique $x = \sum \xi_i a_i$.

L'application $x \rightarrow \xi_i$ de E dans K est linéaire ; c'est donc une forme linéaire qu'on note a'_i et qu'on appelle *forme coordonnée d'indice i relative à la base choisie*.

Les $(a'_i)_{i \in I}$ constituent une base de E^* , dite duale de la base de E . En effet, pour tout $x' \in E^*$, on a :

$$(1) \quad x'(x) = \sum x'(\xi_i a_i) = \sum \xi_i x'(a_i) = \sum a'_i(x) x'(a_i) \quad \text{ou encore :}$$

$$x' = \sum x'(a_i) a'_i.$$

Ceci exprime que les a'_i engendrent E^* ; d'autre part, elles sont bien indépendantes, car une relation $\sum \lambda_i a'_i = 0$ équivaut à $\sum \lambda_i \xi_i = 0$ pour toutes les familles $(\xi_i)_{i \in I}$, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i .

Si l'on pose $x'(a_i) = \xi'_i$, c'est-à-dire $x' = \sum \xi'_i a'_i$, les formules (1) montrent que :

$$(2) \quad \langle x, x' \rangle = \sum \xi_i \xi'_i.$$

C'est la forme canonique de $\langle x, x' \rangle$ lorsqu'on prend dans E et E^* deux bases duales. Ce n'est pas là autre chose que la forme bien connue des fonctions linéaires sur un espace euclidien. Ex. : $f = ax + by$. Nous pouvons donc énoncer :

Si E est de dimension n , il en est de même de E^* et si l'on choisit dans E et E^* deux bases duales, on a $\langle x, x' \rangle = \sum \xi_i \xi'_i$.

EQUATIONS LINÉAIRES

Le formalisme très général que nous avons construit permet de ramener à un type simple de nombreux problèmes d'algèbre et d'analyse.

DEFINITION : Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K . On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme $f(x) = y_0$, où f est une application linéaire de E dans F , et y_0 un élément connu de F .

Tout élément x de E tel que $f(x) = y_0$ est appelé *solution de cette équation*.

L'équation $f(x) = 0$ est dite *l'équation homogène associée à l'équation donnée* ; et y_0 est le *second membre de l'équation donnée*.

Toute équation linéaire dont le second membre est 0 s'appelle *équation linéaire homogène*.

Exemples : 1) E est l'espace des fonctions numériques définies dans le disque ouvert plan $u^2 + v^2 \leq 1$ et possédant des dérivées partielles de tous les ordres. L'espace F est identique à E . L'application f est un opérateur différentiel ; par exemple, f est le laplacien $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$. L'équation $f(x) = y_0$ n'est autre ici qu'une équation linéaire aux dérivées partielles avec second membre.

2) E est l'espace des fonctions numériques continues sur le disque fermé $u^2 + v^2 \leq 1$, et qui sont harmoniques à l'intérieur du disque. L'espace F est l'espace des fonctions continues sur la circonférence de ce disque.

Et l'application f est celle qui associe à toute $\varphi \in E$ sa restriction à la circonférence du disque.

Rechercher les fonctions φ telles que $f(\varphi) = y_0$ où $y_0 \in F$, c'est résoudre le problème de Dirichlet pour la fonction y_0 .

3) L'espace E est l'espace des fonctions numériques $x(t)$ continues sur $[0, 1]$ et $F = E$. Si $\Phi(u, v)$ désigne une fonction numérique continue sur le carré $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$, soit f l'application de E dans E définie par :

$$f(x)(t) = \int_0^1 \Phi(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

L'équation $f(x) = b$ où $b \in F$ n'est autre que l'équation intégrale :

$$\int_0^1 \Phi(t, \tau) x(\tau) d\tau = b(t).$$

Forme des solutions d'une équation linéaire :

THEOREME : Soit $f(x) = y_0$ une équation linéaire. Si x_0 est une solution quelconque de cette équation, on obtient toutes les solutions en ajoutant à x_0 une solution quelconque de l'équation homogène associée. L'ensemble des solutions est donc la variété affine $x_0 + f^{-1}(0)$ déduite par la translation x_0 du sous-espace vectoriel $f^{-1}(0)$ de E .

Pour que l'équation ait au plus une solution, il faut et il suffit que $f^{-1}(0) = \{0\}$, donc que f soit un isomorphisme de E sur $f(E)$.

La démonstration de cet énoncé est immédiate.

Système d'équations : Une équation linéaire se présente souvent sous la forme d'un système d'équations linéaires :

Soit E un espace vectoriel, $(F_i)_{i \in I}$ une famille, finie ou infinie, d'espaces vectoriels, et, pour tout $i \in I$, soit f_i une application linéaire de E dans F_i .

Toute famille d'équations $(f_i(x) = b_i)_{i \in I}$ où $b_i \in F_i$, s'appelle un système d'équations linéaires. Une solution de ce système est une solution commune à toutes les équations du système.

Un tel système équivaut à une seule équation linéaire. En effet, soit F le produit des F_i ; soit $b = (b_i)$ et soit f l'application de E dans F dont les composantes sont les f_i . L'équation $f(x) = b$ équivaut au système donné.

Inversement, il peut être commode de remplacer une équation linéaire par un système. Par exemple, supposons F de dimension q et soit $(b_j)_{j \in J}$ une base de F ; pour tout $y \in F$, on a $y = \sum \beta_j b_j$.

Se donner une application linéaire d'un espace E dans F équivaut alors à se donner les n formes linéaires f_j telles que :

$$f(x) = \sum f_j(x) b_j \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Toute équation $f(x) = y$ équivaut donc au système des q équations $f_j(x) = \beta_j$ qui peuvent encore s'écrire $\langle x, x'_j \rangle = \beta_j$.

Un tel système s'appelle un *système scalaire*.

Nous allons supposer de plus maintenant que E est aussi de dimension finie.

Systèmes scalaires sur un espace de dimension finie :

THEOREME : Soit E un espace vectoriel de dimension n ; soit $(x'_i)_{i \in I}$ une famille libre de r éléments de E^* (c'est-à-dire de r formes linéaires sur E).

Quels que soient les scalaires η_i , le système scalaire

$$\langle x, x'_i \rangle = \eta_i \quad (i \in I)$$

possède une solution.

L'ensemble des solutions est de la forme $x_0 + V$, où V est un sous-espace vectoriel de E , de dimension $(n - r)$.

En effet, les x'_i appartiennent à une base B^* de E^* , qui est la duale d'une base B de E .

Par rapport à B^* , chaque x'_i a toutes ses coordonnées nulles, sauf une ; donc $\langle x, x'_i \rangle$ repéré par rapport aux bases duales B et B^* se réduit à ξ_i . Le système s'écrit donc :

$$\xi_i = \eta_i \quad (i \in I).$$

Il a pour solutions $\xi_i = \eta_i$ pour $i \in I$ et ξ_i quelconque pour $i \in I$. L'espace V du théorème est donc le sous-espace de E dont les coordonnées $(\xi_i)_{i \in I}$ sont nulles ; sa dimension est bien $(n - r)$.

Pour étudier les systèmes scalaires quelconques, introduisons une définition :

On appelle **rang du système scalaire** $\langle x, x'_i \rangle = \eta_i \quad (i \in I)$ la dimension du sous-espace de E^* engendré par la famille $(x'_i)_{i \in I}$ (c'est-à-dire encore le nombre maximum des x'_i linéairement indépendants).

En utilisant le théorème précédent, on démontre alors :

THEOREME : Soit $\langle x, x'_i \rangle = \eta_i \quad (i \in I)$ un système scalaire de rang r sur un espace vectoriel E de dimension n . Pour que ce système ait au moins une solution, il faut et il suffit que pour toute combinaison linéaire

$$\text{nulle } \sum \lambda_i a'_i = 0, \text{ on ait aussi } \sum \lambda_i \eta_i = 0.$$

Lorsque ce système a une solution x_0 , l'ensemble des solutions est de la forme $x_0 + V$, où V est un sous-espace de E de dimension $(n - r)$.

COROLLAIRES : 1) Pour qu'un système scalaire homogène sur un espace E de dimension n admette des solutions non nulles, il faut et il suffit que son rang r soit $< n$.

2) Pour qu'un système scalaire de n équations sur un espace de dimension n ait une solution et une seule (système de Cramer), il faut et il suffit que le système homogène associé n'ait que la solution nulle.

Pour aller plus loin dans l'étude des systèmes scalaires, et pour donner en particulier des critères commodes permettant de déterminer leur rang, il faut utiliser la théorie des déterminants, ce que nous ne ferons pas ici.

G. CHOQUET,

Professeur à la Sorbonne.

DÉFINITION AXIOMATIQUE DES ESPACES LINÉAIRES ET LEUR ORIENTATION

Introduction

La définition axiomatique des espaces linéaires, exposée dans cet article, facilite par son caractère constructif l'étude de l'orientation de ces espaces.

Nous nous servons de sept axiomes répartis en deux groupes :

- (I) les quatre axiomes de la demi-droite, et
- (II) les trois axiomes des espaces linéaires.

Dès le début, la droite est présentée comme un ensemble satisfaisant aux axiomes de la demi-droite, où les éléments de cet ensemble s'appellent des points. Ces axiomes définissent des parties de la droite, ayant des propriétés bien déterminées. Dans tout notre système d'axiomes (1), la notion de la demi-droite est fondamentale. Les axiomes de la demi-droite sont équivalents dans leur ensemble aux trois premiers axiomes du groupe II du système de Hilbert (2).

Les axiomes des espaces linéaires nous permettent de nous élever de la droite successivement à d'autres espaces. Les droites sont des parties de ces espaces et leur donnent ainsi une structure linéaire. Le premier espace linéaire défini, après la droite, est le plan satisfaisant en particulier à l'axiome du plan. Cet axiome permet de concevoir le plan comme engendré par des droites, procédé qui trouve ensuite une généralisation. Ce procédé constructif nous conduit d'une façon naturelle à la notion de l'orientation des espaces linéaires.

Pour orienter ces espaces, nous définissons d'abord des relations d'équivalence d'orientation ; ces relations nous permettent de définir l'orientation d'un espace linéaire comme une classe d'équivalence.

Si, malgré le caractère abstrait de cette géométrie, nous dessinons des figures, il faut éviter dans les démonstrations l'appel à l'intuition. Nous avons donné quelques démonstrations complètes ; d'autres sont indiquées plus rapidement ; dans tous les cas, nous avons essayé de mettre le domaine de causalité en évidence.

Nous avons défini le plus sommairement les espaces linéaires à n dimensions et leur orientation pour n plus grand que trois. Il est remarquable qu'au point de vue axiomatique, nous ne rencontrons plus de nouvelles difficultés pour ces généralisations, tandis que notre intuition peut être arrêtée momentanément par l'habitude de ramener le concept de l'espace à son origine expérimentale. Cependant, nous ne voulons pas éliminer l'intuition, mais seulement la contrôler et, ce faisant, la consolider et la développer.

(1) Voir *Bull. de l'A.P.M.*, mai 1951, notre résumé : sur un exposé axiomatique de la géométrie élémentaire.

(2) Voir D. HILBERT : *Grundlagen der Geometrie*, 7^e édit., 1930, Leipzig et Berlin.

Définition axiomatique des espaces linéaires

LA DROITE

La droite est un ensemble non vide d'éléments, appelés des points. Cet ensemble de points doit d'abord satisfaire aux axiomes de la demi-droite.

Ensuite, la droite est aussi une partie d'un espace linéaire. Comme telle, elle doit satisfaire aux axiomes des espaces linéaires.

LES AXIOMES DE LA DEMI-DROITE

AXIOME I, 1 : Tout point A d'une droite détermine sur cette droite deux parties (demi-droites), ayant le point A (origine) pour seul point commun ; chaque point de la droite appartient à l'une des parties.

AXIOME I, 2 : Sur chaque demi-droite, il y a au moins un point autre que l'origine.

AXIOME I, 3 : Etant donné deux points A et B sur une droite, la demi-droite d'origine A contenant B contient entièrement la demi-droite d'origine B ne contenant pas A.

NOTATIONS : Nous écrivons :

$\overrightarrow{AB}$ pour la demi-droite d'origine A contenant B.

$-\overrightarrow{AB}$ pour la demi-droite d'origine A ne contenant pas B.

Ces deux demi-droites d'origine commune A sont dites opposées l'une à l'autre.

Avec ces notations, nous pouvons écrire le dernier axiome :

$$\text{I, 3} \quad \overrightarrow{AB} \supset -\overrightarrow{BA}$$

DÉFINITION : Le *segment de droite* AB d'extrémités A et B est la partie commune à la demi-droite de sommet A contenant B et à la demi-droite de sommet B contenant A. Ou encore :

$$\text{segment AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$$

Les deux extrémités du segment de droite jouent le même rôle :

$$\text{segment AB} = \text{segment BA}$$

$-\overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{BA}$ sont les prolongements du segment AB.

L'axiome I, 3 est équivalent à la

PROPRIÉTÉ : Les prolongements d'un segment de droite n'ont pas de point commun.

Par définition, les *points intérieurs* d'un segment de droite sont les points du segment autres que les extrémités.



Considérons sur une droite un point I et sur chacune des deux demi-droites opposées d'origine I respectivement un point A et un point B autres que I.

Nous nous proposons de démontrer que I appartient au segment de droite AB.

En effet, $\text{segment AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, par définition.

D'après l'axiome I, 3 : $\overline{AI} \supset \overline{IA}$, mais par hypothèse : $\overline{IA} = \overline{IB}$,
donc : $\overline{AI} \supset \overline{IB}$ d'où : $\overline{AI} = \overline{AB}$

et pour des raisons analogues : $\overline{BI} = \overline{BA}$

donc I appartient aux deux demi-droites $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ et par suite au segment AB.

Réciproquement, il est impossible de démontrer à l'aide des axiomes I, 1, 2, 3 que si I est un point intérieur du segment de droite AB, les demi-droites $\overline{IA}$ et $\overline{IB}$ sont opposées.

Nous admettons cette réciproque sous la forme :

AXIOME I, 4 : Les demi-droites ayant pour origine commune un point intérieur d'un segment de droite, et qui passent respectivement par l'une et l'autre extrémité du segment, sont opposées.

Autrement, si I est un point intérieur au segment AB, on a :

$$\overline{IA} = \overline{IB}$$

CONSÉQUENCES de cet axiome :

I étant un point intérieur du segment AB, les segments AI et IB n'ont pas d'autre point commun que I.

L'ensemble des points des segments AI et IB est le même que l'ensemble des points du segment AB. Ou :

$$\text{segt AB} = \text{segt AI} \cup \text{segt IB}$$

LES AXIOMES DES ESPACES LINÉAIRES

Un ensemble de points satisfaisant aux axiomes suivants s'appelle un *espace linéaire*. En plus, un point s'appelle encore *espace à zéro dimension* ou E^0 ; une droite est un *espace linéaire à une dimension* ou E^1 .

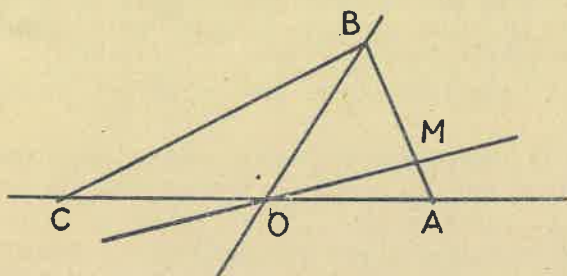
AXIOME DE LA DROITE : II, 1 : Par deux points d'un espace linéaire, il passe une droite et une seule, dont tous les points sont situés dans cet espace.

AXIOME D'EXTENSION DES ESPACES LINÉAIRES : II, 2 : Etant donné un espace linéaire E^n , il y a encore un point non situé dans cet espace. Tous les points de l'espace E^n et ce point non situé dans E^n appartiennent à un même espace linéaire.

Appliquons d'abord l'axiome II, 2 pour $n = 1$, c'est-à-dire au cas où l'espace donné est une droite. Cela nous permettra de définir un espace E^2 auquel nous pouvons encore appliquer le même axiome pour définir un espace E^3 , et ainsi de suite.

Soit une droite OA, O et A étant deux points de cette droite, et soit un point B non situé sur cette droite. Considérons un point C de la demi-droite $\overline{OA}$. D'après l'axiome II, 1 : tout espace linéaire contenant la droite OA et le point B contient nécessairement tous les points des droites AB et BC et en particulier tous les points M d'un des segments AB et BC. Toujours d'après le même axiome, un tel espace contient tous les points d'une droite OM.

DÉFINITION : L'ensemble des droites OM passant par le point O et un point M du segment de droite AB s'appelle le *segment de plan* (O, AB). Les segments de plan (O, AB) et (O, BC) sont par définition des *segments de plan supplémentaires*.



Les droites OM sont les *éléments génériques* de ces segments de plan et les points de ces mêmes droites sont les points des segments de plan. Le point O s'appelle le *sommet* de ces deux segments de plan. Les droites OA et OB sont les *extrémités* du segment de plan (O, AB) et aussi de son segment de plan supplémentaire.

Revenons aux espaces linéaires contenant la droite OA et le point B. D'après l'axiome de la droite, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME : Chaque espace linéaire contenant la droite OA et le point B, non situé sur la droite, contient *nécessairement* tous les points du segment de plan (O, AB), ainsi que de son segment de plan supplémentaire (O, BC).

Nous admettons qu'il existe un espace linéaire qui ne contient pas d'autre point. Cet espace, nous l'appelons un *espace linéaire à deux dimensions* ou E^2 ou un *plan*.

AXIOME DU PLAN : II, 3 : Il existe un espace linéaire, contenant trois points non alignés O, A, B, qui ne contient *pas d'autre point* que les points du segment de plan (O, AB) et de son segment de plan supplémentaire (O, AC).

Conséquences de l'axiome du plan. — Le choix du point C sur la demi-droite $\overrightarrow{OA}$ a été arbitraire. Remplaçons-le par un autre point C' sur la même demi-droite, pour définir d'une façon analogue encore un plan passant par les trois points O, A, B. Mais chaque espace linéaire passant par les trois points donnés contient nécessairement chacun des plans ainsi définis. Donc, en particulier, chacun des deux plans passant par les trois points donnés contient l'autre. Donc, ces deux plans sont identiques.

En intervertissant le rôle des trois points O, A, B, nous pouvons appliquer le même raisonnement pour arriver à des résultats analogues.

Le raisonnement qui a montré qu'il est possible de remplacer le point C par un point C' de $\overrightarrow{OC}$ peut aussi s'appliquer aux points A, B et O.

Soit B' un point du plan défini précédemment, non situé sur la droite OA. Le point B' est alors sur un élément générique OM d'un des deux segments de plan supplémentaires, soit par exemple de (O, AB).

M est alors un point du segment de droite AB. Mais alors nous avons le droit de remplacer B par M, en définissant le plan par les segments de plan de sommet A. En revenant au sommet O pour définir le plan passant par O, A, M, nous pouvons remplacer le point M par B'. Finalement, nous concluons que les plans passant par O, A, B et par O, A, B' sont identiques. Le même procédé de remplacement peut s'appliquer aux deux autres points. Nous concluons en résumant :

THÉORÈME I : Par trois points non colinéaires, il passe *un seul* plan.

THÉORÈME II : Tout espace linéaire passant par trois points non colinéaires contient tous les points du plan passant par ces trois points.

Enrichissement de la droite. — Montrons que la droite s'enrichit, du fait d'être placée dans le plan, par les axiomes des espaces linéaires. Nous utilisons les mêmes points O, A, B, C que plus haut. Soit D un point d'un des prolongements du segment de droite BC. La droite OD n'a donc pas de points communs avec le segment BC, mais elle appartient entièrement au plan OAB, donc elle passe nécessairement par un point intérieur du segment AB. D'où :

THÉORÈME : Tout segment de droite admet toujours au moins un point autre que ses extrémités.

Sécante d'un triangle. — Nous restons dans le plan avec les notations précédentes. Les points A, B, C sont les sommets d'un triangle ABC. La droite OM coupe le côté BC de ce triangle au point O. D'après l'axiome du plan, il n'y a pas d'autres droites dans le plan, passant par le point O, que les droites OM ayant au moins avec l'un des côtés AB ou BC du triangle ABC un point M commun. D'où une propriété connue sous le nom d'*axiome de Pasch*.

THÉORÈME : Si une droite située dans le plan d'un triangle, et ne passant par aucun des sommets, coupe un côté du triangle, elle coupe encore un autre côté du triangle.

COROLLAIRE : Si une droite du plan d'un triangle coupe un côté du triangle et l'un des prolongements d'un autre côté, elle coupe le troisième côté du triangle.

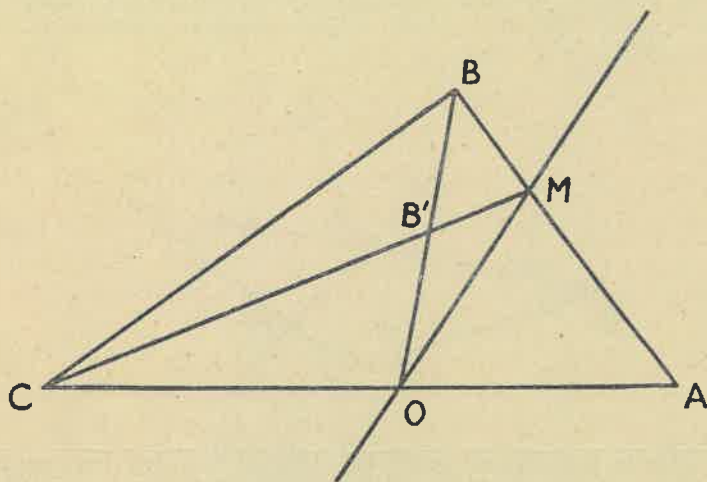
APPLICATION : Soit un segment de plan (O, AB). Considérons un point A' sur la demi-droite $\overrightarrow{OA}$ et une droite OM passant par le point O et un point M du segment de droite AB. D'après le corollaire, la droite OM coupe le côté A'B du triangle BAA' en un point M'. Réciproquement à M' sur A'B correspond M sur AB. Nous concluons :

Dans la définition d'un segment de plan (O, AB), nous avons le droit de remplacer le point A par un point A' situé sur la demi-droite $\overrightarrow{OA}$. Un remplacement analogue peut ensuite se faire pour le point B.

Nous pouvons maintenant démontrer que deux segments de plan supplémentaires n'ont pas d'autre élément générique commun que leurs deux extrémités.

En effet, soit M un point intérieur du segment de droite AB. Il s'agit de démontrer que la droite OM n'a pas de point commun avec le seg-

ment de droite BC. La droite CM coupe le côté OB du triangle OAB en un point B'. La droite OB coupe le côté CM du triangle CAM aussi en B'. Donc, le point B' est un point intérieur du côté CM, et, comme conséquence de l'axiome I, 4, le point M est sur un prolongement du segment B'C. Donc, la droite OM ne coupe pas ce dernier segment. La droite OM n'est donc pas un élément générique du segment de plan (O, B'C).



Mais ce segment de plan est identique au segment de plan (O, BC), puisque le point B' se trouve sur la demi-droite $\overrightarrow{OB}$, comme point du segment OB.

Cette propriété des éléments génériques de deux segments de plan supplémentaires peut encore s'interpréter :

THÉORÈME DE LA SÉCANTE D'UN TRIANGLE : Si dans le plan d'un triangle une droite coupe un côté du triangle, sans passer par aucun des sommets de ce triangle, elle coupe encore *un seul* des deux autres côtés.

Une telle droite est une *sécante du triangle*.

Si le triangle est dégénéré, ce théorème très important reste encore vrai et se démontre grâce à l'axiome I, 4.

Première application : Dans la définition du segment de plan (O, AB), nous avons le droit de remplacer les points A et B par des points A' et B', situés respectivement, soit sur les demi-droites $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, soit sur les prolongements $-\overrightarrow{OA}$ et $-\overrightarrow{OB}$ de ces demi-droites.

La dernière de ces deux possibilités se met en évidence en considérant la sécante commune OM des deux triangles : ABA' et BA'B'.

Deuxième application : Le théorème fournit une justification de la *séparation du plan en deux régions par une de ses droites*.

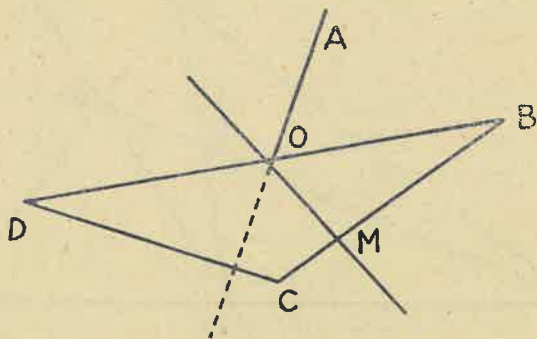
DÉFINITION : 1) Deux points A et B sont situés d'un même côté de la droite (D), si le segment AB ne coupe pas la droite (D).

2) Deux points A et C sont situés de part et d'autre de la droite (D), si le segment AC coupe la droite (D).

D'où aussi la notion de demi-plan, dont la droite limite est l'arête.

DÉFINITION DE L'ESPACE LINÉAIRE A TROIS DIMENSIONS

Soit un point A non situé dans le plan OBC défini par les trois points non alignés O, B, C. D'après l'axiome II, 2, il existe un espace linéaire contenant le plan OBC et le point A. Nous appelons espace E un espace linéaire répondant à la question.



Considérons un élément générique OM de l'un des deux segments de plan supplémentaires (O, BC) et (O, CD) définissant le plan OBC. Alors tout espace E contient la droite OM et le point A, donc E contient nécessairement tous les points du plan OAM.

DÉFINITION : Si le point M prend toutes les positions possibles sur le segment de droite BC, l'ensemble des plans OAM correspondants est par définition le *segment d'espace à trois dimensions* (OA, BC). Les plans OAM en sont les *éléments génériques* qui correspondent d'une façon biunivoque aux éléments génériques du segment de plan (O, BC). De la même façon, nous définissons son *segment d'espace supplémentaire* (OA, CD). Aux extrémités des segments de plan correspondent les *extrémités* des segments d'espace. Les points des éléments génériques d'un segment d'espace sont par définition *les points* du segment d'espace. Grâce à ces définitions, nous pouvons nous résumer :

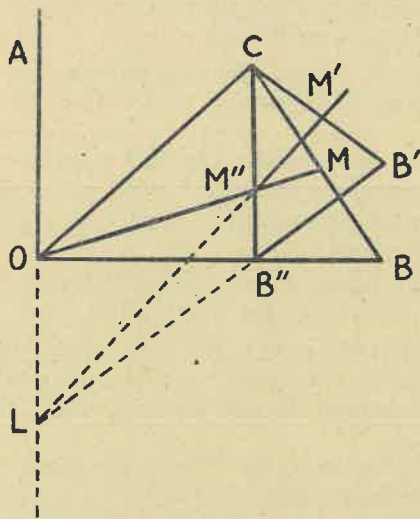
THÉORÈME : Tout espace linéaire E contenant le plan OBC et le point A non situé dans ce plan contient *nécessairement* l'ensemble E^3 des points des deux segments d'espaces supplémentaires (OA, BC) et (OA, CD).

L'ensemble E^3 peut se définir d'une façon équivalente comme l'ensemble des points des plans passant par la droite OA et une droite variable OM du plan OBC.

Nous nous proposons de démontrer que E^3 est un espace linéaire. Pour cela, il faut et il suffit de démontrer que si P et Q sont deux points de E^3 , tous les points de la droite PQ appartiennent à E^3 et que E^3 est contenu dans d'autres espaces linéaires (cette dernière condition sera établie plus loin).

Dans ce but, nous allons d'abord démontrer que nous avons le droit de remplacer dans la définition du segment d'espace (OA, BC) les points B et C par des points B' et C' situés respectivement dans les demi-plans d'arête OA et passant par B et C . Ces remplacements peuvent se faire successivement ; il suffit donc de démontrer que tout plan passant par la droite OA , et coupant le segment BC en un point M , coupe aussi le segment $B'C$ en un point M' et réciproquement. Nous excluons le cas déjà évident où B' est sur $\overline{OB}$.

En effet, soit L un point situé sur la droite OA dans le demi-plan limité par la droite OB et ne contenant pas le point B' . Dans ces conditions, le segment $B'L$ coupe $\overline{OB}$ en un point B'' . Mais $\overline{OM}$ coupe le segment CB'' en un point M'' et $\overline{LM''}$ coupe le segment CB' en M' . Tout cela d'après le théorème de la sécante d'un triangle. Remarquons encore que le plan MOA est unique pour M donné, donc B' ne dépend pas du choix arbitraire de L .



Le point M' ainsi construit est le point d'intersection du plan AOM avec le segment de droite CB' . Le rôle des points B et B' peut être échangé pour mettre ainsi en évidence la réciproque. D'où la légitimité de remplacer B par B' .

Soient P et Q deux points de E^3 . Si P et Q sont situés dans un même plan avec la droite OA , il est évident que la droite PQ fait entièrement partie de E^3 . Supposons donc ces deux points dans deux demi-plans différents limités par la droite OA et coupant le plan OBC suivant $\overline{OP'}$ et $\overline{OQ'}$. Les segments de plan supplémentaires $(O, P'Q')$ et $(O, Q'R')$ peuvent définir le plan $OP'Q'$ identique au plan OBC . D'après ce qui précède, les segments d'espace supplémentaires $(OA, P'Q')$ et $(OA, Q'R')$ définissant E^3 sont respectivement identiques aux deux segments d'espaces supplémentaires (OA, PQ) et (OA, QR) , définissant ainsi le même

ensemble de points E^3 . Mais cette dernière façon de voir met en évidence que le plan OPQ est contenu entièrement dans E^3 et en particulier tout point de la droite PQ de ce plan est contenu entièrement dans E^3 . Nous concluons :

THÉORÈME : E^3 est un espace linéaire.

Nous appelons E^3 un *espace linéaire à trois dimensions*.

En intervertissant le rôle des quatre points O, A, B, C , nous arrivons d'une façon analogue à définir des espaces linéaires à trois dimensions passant par ces quatre points. Mais ces espaces doivent se contenir nécessairement l'un l'autre et réciproquement, donc ces espaces sont identiques. Dans la détermination de l'espace E^3 , nous avons reconnu la liberté de remplacer les points B et C par les points P et Q , non coplanaires avec O et A . En répétant cette opération de remplacement, tout en intervertissant le rôle des quatre points donnés, nous arrivons à remplacer les points O, A, B, C par quatre autres points non coplanaires de E^3 qui définissent à leur tour le même espace E^3 . En résumé :

THÉORÈME I : Par quatre points non coplanaires passe un espace linéaire à trois dimensions ou E^3 et un seul.

THÉORÈME II : Tout espace linéaire passant par quatre points non coplanaires contient nécessairement le E^3 déterminé par ces quatre points.

Etudions encore deux plans de E^3 , ayant un point O commun. Soient un plan passant par la droite OA , et le plan OBC . Tout point de E^3 étant situé dans un plan passant par OA et coupant le plan OBC suivant une droite, nous concluons.

THÉORÈME : Deux plans d'un espace à trois dimensions qui ont un point commun se coupent suivant une droite. D'où on peut déduire le :

THÉORÈME GÉNÉRALISÉ DE LA SÉCANTE D'UN TRIANGLE : Dans un espace linéaire à trois dimensions : un plan, ne passant par aucun sommet d'un triangle et coupant un côté de ce triangle, coupe encore un seul des deux autres côtés.

D'où la justification de la définition des *deux régions déterminées par un plan dans un espace E^3* .

DÉFINITION : Deux points A et B sont d'un même côté du plan donné, si le segment AB n'a pas de point commun avec ce plan. Deux points A et C sont dans des régions différentes (ou de part et d'autre du plan), si le segment AC coupe le plan.

De là, nous sommes encore conduits à la notion de demi-espace à trois dimensions ou demi- E^3 . Ce demi-espace étant l'ensemble des points d'une des régions et des points du plan limite.

DÉFINITION DE L'ESPACE LINÉAIRE A n DIMENSIONS

DÉFINITION : Un *espace linéaire à n dimensions* ou E^n est l'espace linéaire minimum qui contient un espace linéaire à $n-1$ dimensions ou E^{n-1} et un point non situé dans ce dernier espace.

Soient un espace E^{n-1} , O un de ses points et A un point non situé dans E^{n-1} . Tout espace linéaire contenant E^{n-1} et A contient *nécessai-*

rement l'ensemble E^n des points des plans passant par la droite OA et une droite OX de E^{n-1} .

Considérons deux points P et Q de E^n . S'ils sont dans un même plan AOX, la droite PQ est entièrement dans E^n . Si P et Q appartiennent à des plans différents AOX et AOX', la droite PQ appartient entièrement à l'espace à trois dimensions AOXX'. Mais le plan OXX' appartient à E^{n-1} , donc l'espace AOXX' appartient aussi entièrement à E^n . Donc, tous les points de la droite PQ sont des points de E^n .

CONCLUSION : L'ensemble de points E^n que nous venons de définir est bien un espace linéaire. Nous l'appelons l'espace linéaire à n dimensions.

THÉORÈME : Tout espace linéaire qui contient l'espace E^{n-1} et le point A, non contenu dans E^{n-1} , contient l'espace E^n .

DÉFINITION : Nous appelons *simplexe à n dimensions* ou S^n , un ensemble de $n + 1$ points non situés dans un même E^{n-1} .

On démontre de proche en proche le :

THÉORÈME : Un simplexe à n dimensions définit un espace à n dimensions et un seul.

De la définition du E^n , nous pouvons aussi déduire le :

THÉORÈME : Dans le E^n : tout plan ayant un point commun avec un E^{n-1} coupe ce E^{n-1} suivant une droite.

D'où une dernière *généralisation du théorème de la sécante d'un triangle*.

THÉORÈME : Dans le E^n : tout E^{n-1} ne passant par aucun côté d'un triangle, et coupant un des côtés du triangle, coupe encore un seul des deux autres côtés.

D'où encore la notion sur la *séparation de l'espace E^n en deux régions par un de ses E^{n-1}* .

Les définitions à donner sont analogues aux définitions correspondantes dans l'espace à trois dimensions.

AUTRE DÉFINITION DU E^n , utile pour l'étude de son orientation : Le E^n est l'ensemble des points des éléments génériques de deux segments d'espace supplémentaires à n dimensions. Dans la définition correspondante du E^3 , nous remplaçons la droite OA par un E^{n-2} ayant avec le plan OBC le seul point O commun. Le plan AOM se remplace par l'espace à $n-1$ dimensions E^{n-1} , contenant E^{n-2} et un point M du segment de droite BC. Les espaces E^{n-1} correspondant ainsi aux points M sont les éléments génériques d'un segment d'espace à n dimensions.

Orientation des espaces linéaires

ORIENTATION DE LA DROITE

DÉFINITION : Sur une même droite, deux demi-droites sont de *même orientation* ou encore *d'orientation équivalente*, si une de ces demi-droites contient l'autre.

Dans le cas contraire, nous disons que les demi-droites sont *d'orientations opposées*.

Nous écrivons les relations d'orientation entre deux demi-droites :

$$\vec{a} \rightarrow \vec{b} \quad (\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ de même orientation}) ;$$

$$\vec{a} \not\rightarrow \vec{b} \quad (\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ d'orientations opposées}).$$

Nous nous proposons de démontrer que, sur une droite, toutes les demi-droites de même orientation qu'une demi-droite donnée forment une classe d'équivalence.

En comparant les quatre demi-droites d'origine A ou B deux à deux, nous constatons à l'aide de l'axiome I, 3 que deux demi-droites sont toujours liées par l'une ou l'autre relation d'orientation.

Pour démontrer que la relation $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$ est une relation d'équivalence, nous constatons d'abord d'après sa définition que la relation est *réflexive* : $\vec{a} \rightarrow \vec{a}$ et qu'elle est *symétrique*, c'est-à-dire : si $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$, on a aussi : $\vec{b} \rightarrow \vec{a}$.

Il nous reste à démontrer la *transitivité* de la relation, ce qui peut s'exprimer : si $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$ et $\vec{b} \rightarrow \vec{c}$, on a aussi : $\vec{a} \rightarrow \vec{c}$.

En effet : $\vec{AB} \rightarrow \vec{BA}$ (axiome I, 3), C étant un point de la droite AB, il faut démontrer qu'une même demi-droite d'origine C est de même orientation que les deux demi-droites $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$. Pour cela, nous examinons les trois cas possibles, en utilisant les axiomes I, 3 et 4.

1) C se trouve sur $\vec{BA}$:



D'après l'axiome I, 3 :

$$\vec{AB} \supset \vec{BA} = \vec{BC} \quad (\text{le signe } = \text{ exprimant ici l'identité})$$

$$\text{et } \vec{BC} \supset \vec{CB} \quad \text{donc :}$$

$$\vec{AB} \supset \vec{BA} \supset \vec{CB}$$

de la transitivité de la relation d'appartenance, il résulte aussi la transitivité de la relation d'orientation :

$$\vec{AB} \rightarrow \vec{BA} \rightarrow \vec{CB}$$

2) C se trouve sur $\vec{AB}$:



$$\vec{CA} \supset \vec{AC} = \vec{AB} \quad \text{d'autre part :}$$

$$\vec{CA} \supset \vec{AB} \supset \vec{BA} \quad \text{donc :}$$

$$\vec{CA} \rightarrow \vec{AB} \rightarrow \vec{BA}$$

3) C se trouve sur le segment $AB = \vec{AB} \cap \vec{BA}$.



D'après l'axiome I, 4 : $\vec{CB} = \vec{CA}$

$$\text{Or : } \vec{AB} = \vec{AC} \supset \vec{CA} = \vec{CB}$$

et : $\bar{C}\bar{B} \supset -\bar{B}\bar{C} = -\bar{B}\bar{A}$

D'où : $\bar{A}\bar{B} \rightarrow \bar{C}\bar{B} \rightarrow -\bar{B}\bar{A}$

La transitivité étant vérifiée dans tous les cas, nous concluons :

THÉORÈME : Sur la droite, deux demi-droites de même orientation qu'une même troisième sont d'orientation équivalente.

La relation d'orientation étant une relation d'équivalence, elle définit sur l'ensemble des demi-droites d'une droite deux classes d'équivalence ; chacune des classes est définie par l'une des deux demi-droites opposées d'origine arbitraire.

Nous disons que ces deux classes d'équivalence sont opposées ; elles définissent des *orientations opposées* sur la droite.

La droite est orientée par le choix de l'une de ces deux orientations que nous désignons alors par l'*orientation positive*, l'orientation opposée s'appelant l'*orientation négative*.

Relations d'ordre entre les points d'une droite orientée

DÉFINITION : Sur une droite orientée, nous exprimons que la demi-droite positive d'origine A contient le point B par la *relation d'ordre* :

$$(1) \quad A \leq B \quad (A \text{ avant } B).$$

Si B se trouve sur la demi-droite négative d'origine A, nous écrivons la *relation d'ordre opposée* :

$$(2) \quad A \geq B \quad (A \text{ après } B).$$

Les deux relations (1) et (2) sont vérifiées simultanément si les deux points A et B sont confondus et seulement dans ce cas. Si les deux points sont distincts, ils vérifient toujours l'une des deux relations d'ordre. Dans ce dernier cas, nous avons des *relations d'ordre strictes* :

$$(1') \quad A < B \quad \text{ou :}$$

$$(2') \quad A > B.$$

Ces deux relations s'excluent toujours mutuellement.

TRANSITIVITÉ DE LA RELATION D'ORDRE

Il nous reste à démontrer la *transitivité* de la relation d'ordre ; cette propriété s'énonce :

THÉORÈME : Si A avant B et B avant C, alors on a aussi A avant C.

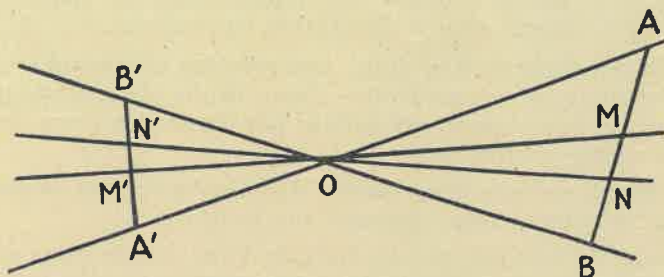
En effet, nous nous ramenons aux propriétés des demi-droites en traduisant les hypothèses : la demi-droite positive d'origine A contient B et la demi-droite positive d'origine B contient C.

Mais alors la demi-droite positive d'origine A contient la demi-droite positive d'origine B qui, elle, contient C. Finalement, la transitivité de la relation d'appartenance entraîne la transitivité de la relation d'ordre.

REMARQUE : Sur toute partie d'une droite orientée, il y a un *ordre induit*, c'est-à-dire nous pouvons toujours dire laquelle des deux rela-

tions (1) et (2) est vérifiée par deux points quelconques. Nous disons encore qu'une droite orientée ou une de ces parties est *totale* *ment ordonnée*.

L'orientation d'une droite peut aussi être définie par une relation d'ordre entre deux points distincts.



Correspondances projectives. Ordre cyclique

Considérons un segment de plan (O, AB) , défini également par $(O, A'B')$ tel que toute droite passant par le point O coupe les deux segments de droite AB et $A'B'$ respectivement en M et M' ou ne coupe aucun des deux segments. Entre les deux points M et M' , il y a une correspondance biunivoque que nous appelons une *correspondance projective*.

Nous nous proposons de démontrer que la correspondance projective entre deux segments conserve l'ordre défini par $A < B$ correspondant à $A' < B'$.

Soient deux points M et N sur AB et les points correspondants M' et N' sur $A'B'$. Si $M < N$, cela veut dire que N se trouve sur le segment MB qui est en correspondance projective avec le segment $M'B'$, donc N' est sur ce dernier segment ; d'où : $M' < N'$.

THÉORÈME : Si deux segments de droite sont en correspondance projective, cette correspondance conserve l'ordre.

Ce théorème nous permet d'appliquer la relation d'ordre aux éléments génériques du segment de plan (O, AB) .

En effet, l'élément générique OM est en correspondance biunivoque avec le point M du segment AB . Dans ce cas, nous disons encore qu'il y a *correspondance projective*. Par définition, l'ordre $OM < ON$ correspond à l'ordre $M < N$ qui est indépendant du segment de droite servant à définir le segment de plan. D'où :

THÉORÈME : Une correspondance projective entre un segment de droite et un segment de plan conserve l'ordre.

Ordre cyclique

Au point de vue local, la relation d'ordre s'applique de la même façon aux éléments génériques d'un segment de plan ou aux points d'un segment de droite.

Mais, au point de vue global, si nous considérons l'ensemble des droites d'un plan passant par un point fixe O et l'ensemble des points

d'une droite, il y a une *différence fondamentale* ; sur la droite, deux points A et B déterminent un *segment* de droite *unique*, tandis que deux droites du plan passant par le point O, soient OA et OB, sont toujours les extrémités de *deux segments* de plan supplémentaires.

En prolongeant un segment de plan orienté par son segment de plan supplémentaire, nous arrivons à établir un ordre sur l'ensemble des droites passant par O, avec cette *particularité* qu'un même élément, qui d'ailleurs peut être choisi arbitrairement, est *simultanément premier et dernier élément*. L'ordre ainsi défini sur cet ensemble s'appelle un *ordre cyclique*. Nous pouvons ramener l'ordre cyclique à l'*ordre linéaire* (= ordre sur la droite ou sur un segment de droite), soit par la suppression de l'élément qui intervient comme premier et comme dernier élément, soit par dédoublement de ce même élément.

Un *dédoublement* de toutes les droites du plan passant par le point fixe O peut se faire en orientant chacune de ces droites des deux façons possibles, soit en considérant les demi-droites d'origine commune O. Le nouvel ensemble obtenu par dédoublement est encore susceptible d'être orienté comme l'ensemble initial par un des deux ordres cycliques possibles. Nous disons que ce choix d'un des deux ordres cycliques *oriente le plan autour du point O*.

Précisons encore les *façons pratiques qui déterminent cette orientation*.

1) Il suffit d'orienter une droite du plan ne passant pas par le point O, il y a un ordre cyclique correspondant.

2) Par la relation d'ordre entre deux droites : $OA < OB$, en précisant le segment de plan, auquel nous appliquons cette relation d'ordre.

3) En donnant un angle saillant orienté.

4) En donnant un élément d'orientation à deux dimensions.

Eléments d'orientation

I. SUR LA DROITE : Une demi-droite permettant d'orienter une droite, nous l'appelons encore un *élément d'orientation à une dimension* ou O^1 .

II. DANS LE PLAN : Un *élément d'orientation à deux dimensions* ou O^2 est l'ensemble d'une droite orientée (l'arête) et d'un demi-plan positif limité par l'arête.

Nous disons qu'un élément d'orientation passe par un point, si son arête passe par ce point.

Une droite du plan est dite une sécante d'un O^2 , si elle coupe son arête. Le demi-plan positif détermine une demi-sécante positive située dans lui et oriente ainsi la sécante.

Orientation du plan autour d'un point O par un O^2 passant par ce point : Soient $\overrightarrow{OA}$ la demi-arête positive, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ des demi-droites situées respectivement dans le demi-plan positif et le demi-plan négatif, l'ordre défini par le O^2 s'exprime par les relations : $\overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC}$.

L'ensemble des éléments d'orientation du plan passant par le point O se sépare en deux classes correspondant aux deux orientations possibles autour du point O.

ORIENTATION DU PLAN

DÉFINITION : Deux orientations du plan respectivement autour de deux points sont dites équivalentes si elles peuvent être définies par un même élément d'orientation, dont l'arête passe nécessairement par les deux points. D'où une autre forme de la définition :

Les deux orientations autour de deux points A et B sont équivalentes si elles correspondent à une même orientation sur une droite ne coupant pas le segment de droite AB, ou encore si elles correspondent à des orientations opposées sur une droite coupant le segment AB.

Nous en déduisons encore une façon de caractériser l'équivalence d'orientation autour de deux points :

Deux orientations du plan autour de deux points sont équivalentes si les éléments d'orientation définissant ces deux orientations déterminent sur une sécante commune une même orientation dans le cas où les demi-arêtes positives limitées par la sécante se trouvent d'un même côté de la sécante, ou si les orientations déterminées sur la sécante sont opposées dans le cas où les demi-arêtes positives se trouvent de part et d'autre de la sécante.

Désignons par $O(A)$ une orientation déterminée autour de A. Alors l'équivalence de deux orientations s'écrit :

$$O(A) \sim O(B).$$

D'après la définition, nous avons :

$O(A) \sim O(A)$ la relation est *réflexive*,
et $O(A) \sim O(B)$ entraîne $O(B) \sim O(A)$,
ce qui exprime que la relation est *symétrique*.

Démontrons encore que la relation est *transitive* :

THÉORÈME : Si (1) $O(A) \sim O(B)$ et (2) $O(B) \sim O(C)$, alors on a aussi (3) $O(A) \sim O(C)$.

En effet, si nous considérons une droite, ne coupant aucun des trois segments déterminés par les points A, B, C pris deux à deux, les orientations correspondantes sur la droite mettent en évidence la propriété à démontrer.

Nous concluons finalement que les orientations autour des points d'un plan qui sont équivalentes à l'une de ces orientations forment une *classe d'équivalence*. Cette classe définit l'*orientation du plan*.

Il y a deux orientations opposées du plan qui correspondent aux deux orientations opposées autour d'un même point.

Correspondance projective entre les éléments génériques d'un segment d'espace à trois dimensions et d'un segment de plan

Une section plane d'un segment d'espace coupant l'arête lui fait correspondre un segment de plan et il y a correspondance biunivoque entre les éléments génériques. L'ordre défini par cette *correspondance projective* sur l'ensemble des éléments génériques du segment d'espace est indépendant du plan de section choisi.

Finalement, nous ramenons la notion d'ordre cyclique dans le E^3

autour d'une droite (D) à l'ordre cyclique d'un plan sécant de (D) autour de son point d'intersection avec (D).

DÉFINITION : Une orientation d'un E^3 autour d'une de ses droites orientées est l'ensemble de cette droite orientée et de l'un des deux ordres cycliques possibles autour de cette droite.

Façons pratiques de définir cette orientation

- 1) Il suffit d'orienter un plan coupant la droite (D).
- 2) Il suffit aussi d'orienter une droite non coplanaire avec (D).
- 3) Orienter un segment d' E^3 (ou encore un angle dièdre).
- 4) En donnant un élément d'orientation à trois dimensions ou O^3 .

Elément d'orientation O^3

Dans l'espace linéaire à trois dimensions : Un élément d'orientation à trois dimensions ou un O^3 est l'ensemble d'un O^2 placé dans un plan E^2 de E^3 et d'un demi- E^3 positif limité par le plan E^2 .

L'arête du O^2 s'appelle encore *l'arête du O^3* . Un plan sécant d'un O^3 est un plan coupant l'arête en un point, il coupe par suite le O^3 suivant un O^2 .

ORIENTATION DE L'ESPACE LINÉAIRE A TROIS DIMENSIONS

DÉFINITION : Deux éléments d'orientation à trois dimensions sont équivalents, si un plan sécant commun les coupe suivant deux O^2 équivalents, lorsque les demi-arêtes positives se trouvent d'un même côté du plan sécant. Ou :

Si un plan sécant commun les coupe suivant deux O^2 opposés, lorsque les demi-arêtes positives se trouvent de part et d'autre du plan sécant.

Pour justifier cette définition, il faut démontrer que cette équivalence ne dépend pas du plan sécant commun choisi. Cette indépendance se démontre successivement dans les cas suivants :

1^{er} cas : Les deux plans sécants (P) et (P') ont une droite (D) commune, (D) ne coupant aucune des arêtes.

Supposons d'abord que les demi-arêtes positives limitées par (P) sont d'un même côté de (P) et que la droite (D) ne coupe pas le segment AB, A et B désignant les traces des arêtes sur (P). Alors, les orientations équivalentes des O^3 et d'autre part des O^2 correspondants peuvent se définir par une même orientation de la droite (D).

a) Les traces A' et B' des arêtes sur le plan (P') sont supposées de se trouver d'un même côté du plan (P). Alors, les demi-arêtes positives limitées par (P') se trouvent aussi d'un même côté de (P') et la droite (D) ne coupe pas le segment A'B'. Par conséquent, l'orientation déjà choisie sur la droite (D) définit encore des orientations équivalentes dans le plan (P').

b) Si A' et B' se trouvent de part et d'autre de (P'), il faut vérifier que les demi-arêtes positives limitées par (P') se trouvent aussi de part et d'autre de (P'). Les O^2 déterminés par (P') sont d'orientations opposées, la droite (D) coupant dans ces conditions le segment A'B'.

Si la droite (D) sépare les points A et B et de même les points A' et B', nous arrivons à des conclusions analogues.

2° cas : Les plans (P) et (P') n'ont pas de point commun.

Dans ce cas, nous pouvons toujours trouver un plan (P'') coupant les deux plans (P) et (P'), chacun suivant une droite, de sorte que ces deux droites ne coupent pas les arêtes. Le plan (P'') peut être défini pour cela par ses traces A'' et B'' sur les arêtes et un troisième point. Il suffit de prendre ces trois points dans des régions convenablement choisies déterminées par (P) et (P').

La comparaison des sections des deux O^3 par (P) et (P') se fait alors par l'intermédiaire de la section par (P''), ce qui nous ramène au premier cas.

3° cas : Les plans (P) et (P') ont un point commun sur l'une des arêtes. Ce cas peut être traité comme le cas précédent.

DÉFINITION : Les orientations équivalentes de E^3 autour de deux droites orientées sont définies par le fait que les deux O^3 correspondants sont équivalents.

Les O^3 équivalents à un O^3 donné forment une classe d'équivalence. En effet, pour démontrer la réflexivité, la symétrie et la transitivité de la relation d'équivalence, nous sommes ramenés, grâce à la définition des O^3 équivalents, aux propriétés correspondantes dans le plan.

Finalement, il y a deux orientations opposées du E^3 correspondant aux deux orientations opposées autour d'une droite orientée.

Détermination d'un O^3 par un trièdre orienté ou par un tétraèdre orienté

Soit l'ensemble de trois demi-droites (les arêtes) de même origine O, non situées dans un même plan et placées dans l'ordre : $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$. Cet ensemble définit le trièdre orienté O.ABC. Nous convenons de lui faire correspondre l'élément O^3 d'arête $\vec{OA}$, le demi-plan positif contient $\vec{OB}$ et le demi- E^3 positif contient $\vec{OC}$. Donc :

Un trièdre orienté définit une orientation de l'espace E^3 .

Considérons maintenant quatre points placés dans l'ordre O, A, B, C. Cet ensemble ordonné définit le tétraèdre orienté $O \longleftrightarrow ABC$. Nous faisons encore correspondre à ce tétraèdre orienté le trièdre orienté O.ABC et par conséquent une orientation de l'espace à trois dimensions.

Application à l'orientation mutuelle de deux vecteurs

PROBLÈME : Etant donnés deux segments orientés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ non coplanaires, comparer les orientations définies par les deux segments d'espaces orientés : $(\vec{AB}, \vec{CD})$ et $(\vec{CD}, \vec{AB})$.

Soient K et L deux points respectivement sur $-\vec{CA}$ et $-\vec{DB}$. On a :

$$\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{CD}) &\longrightarrow (\vec{AB}, \vec{KL}), \\ (\vec{CD}, \vec{AB}) &\longrightarrow (\vec{CD}, \vec{KL}). \end{aligned}$$

Le plan sécant AKL laisse les demi-arêtes positives $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ d'un même côté. Par conséquent, les orientations dans ce plan autour de A et C correspondant aux orientations dans l'espace E^3 sont équivalentes,

puisque la droite KL ne coupe pas le segment AC. Donc, les deux orientations à comparer sont équivalentes.

L'orientation définie par ces deux segments d'espace est nommée encore l'orientation mutuelle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

ORIENTATION DE L'ESPACE LINÉAIRE A n DIMENSIONS

DÉFINITION : Dans le E^n , un *élément d'orientation à n dimensions* ou O^n est l'ensemble d'un O^{n-1} situé dans un E^{n-1} , et d'un demi- E^n positif, limité par ce E^{n-1} .

En remontant de proche en proche, nous rencontrons un O^2 , dont l'arête est par définition aussi l'arête du O^n . Un espace sécant E^{n-1} du O^n est un espace à $n-1$ dimensions toujours dans E^n , ayant un seul point commun avec l'arête. L'intersection d'un E^{n-1} sécant d'un O^n avec cet élément d'orientation est un O^{n-1} .

DÉFINITION : Deux O^n sont équivalents, si les intersections avec un espace sécant commun sont des O^{n-1} équivalents, lorsque les demi-arêtes positives des deux O^n se trouvent d'un même côté du E^{n-1} sécant. Ou :

Si les O^{n-1} sont opposés, lorsque les demi-arêtes positives sont de part et d'autre du E^{n-1} sécant.

La justification se fait d'une façon analogue comme dans le cas des éléments d'orientation à trois dimensions.

Cette définition nous permet de mettre en évidence que les O^n équivalents à un O^n donné forment une classe d'équivalence. Finalement, il y a deux classes opposées, définissant deux orientations opposées de l'espace linéaire à n dimensions.

SIMPLEXE ORIENTÉ ET ÉTOILE ORIENTÉE

Soit un simplexe dont les sommets $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ sont placés dans l'ordre des indices, par cet ordre le S^n est orienté. Il lui correspond l'ensemble des demi-droites d'origine commune A_0 et placées dans l'ordre correspondant : $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$. Cet ensemble ordonné définit une étoile orientée. A l'étoile orientée correspond à son tour le O^n d'arête $\overrightarrow{A_0A_1}$ limitant le demi-plan contenant $\overrightarrow{A_0A_2}$, ce dernier plan limitant le demi- E^3 contenant $\overrightarrow{A_0A_3}$, et ainsi de suite.

Un simplexe orienté, ou une étoile orientée, définissent donc un espace linéaire orienté.

La comparaison d'un simplexe orienté à un autre simplexe orienté de même dimension peut se faire par l'intermédiaire des éléments d'orientation correspondants, en effectuant si possible le remplacement des sommets successivement.

En particulier :

Un échange de deux sommets consécutifs entraîne un changement d'orientation.

L'effet d'une permutation circulaire des sommets dépend de la parité de la dimension de l'espace.

R. NEUMEISTER,

Lycée Fustel de Coulanges à Strasbourg.

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS

UN PEU DE BIOGRAPHIE

Les *Bulletins* 175 et 176 contiennent une préface de Poncelet et une leçon de Tartaglia où sont cités de nombreux savants.

La chronologie et la biographie ne sont pas l'histoire des sciences, mais quelques dates et quelques précisions sur les personnages nommés dans ces deux écrits seront peut-être les bienvenues.

D'ALEMBERT, 1717-1783 : « C'est à vous que je reconnais devoir presque entièrement le peu de progrès que j'ai fait dans les Mathématiques », lui écrit Lagrange en 1762, et Voltaire, en 1766 : « Mon cher philosophe, vous êtes mon philosophe ; plus je vous lis, plus je vous aime. »

APOLLONIUS, première moitié du II^e siècle avant notre ère. « Le grand Géomètre », titre qu'il mérite.

ARCHIMÈDE, mort au sac de Syracuse en 212 avant notre ère.

Quoi de plus subtil que le Postulat qui porte aujourd'hui son nom, et qu'il mit le premier en évidence ?

ARISTOTE, IV^e siècle avant Jésus.

Il fut de mode, depuis le XVII^e siècle, d'en dire beaucoup de mal. La tendance nouvelle est d'en penser beaucoup de bien. Ce n'est pas un mathématicien, mais un excellent biologiste.

BELIDOR. — Bernard Forest de Belidor, né en Catalogne vers 1698. Ingénieur, Brigadier des armées du Roi, Censeur royal et inspecteur général de l'Arsenal, à Paris, Membre de l'Académie des Sciences, mort à Paris le 8 septembre 1761.

« *L'Architecture hydraulique* de Belidor est un ouvrage immense, un trésor de recherches et de machines que le citoyen Coulomb voulait compléter, et que le citoyen Prony a commencé de refaire. » (Lalande).

« On pourra voir la *Recherche de la Vérité*, du R.P. Malebranche, qui est un excellent livre pour former l'esprit, et le rendre capable d'avoir des idées claires, et j'ose me flatter par avance que ceux qui liront ces ouvrages, me sauront gré de leur en avoir donné la connaissance ; et quoiqu'un Livre de Métaphysique semble ne convenir guères entre les mains d'un Officier, j'en sçais qui en font un aussi bon usage que des Commentaires de César. » (Nouveau cours de Mathématiques à l'usage de l'Artillerie et du Génie, 1725).

BÉZOUT Etienne, Nemours, 31 mars 1730, Basses-Lôges, près Fontainebleau, 27 septembre 1783. De l'Académie royale des Sciences et de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon et de la Marine, des Aspirans-Gardes de la Marine, des Elèves et Aspirans au Corps royal de l'Artillerie ; Censeur royal.

Ses cours, qui ont eu de nombreuses éditions, sont restés célèbres. Théorie générale des Equations, 1779.

BOÈCE (Anicius-Manlius-Torquatus-Severinus). Après avoir été un protégé de Théodoric, roi des Visigoths, ce philosophe et mathématicien romain fut mis à mort sur l'ordre de son maître, en 526.

BORDA (Jean-Charles de), Dax, 4 mai 1733, Paris, 1^{er} ventôse an VII (19 février 1799). Capitaine de vaisseau et mathématicien.

BOSSUT (Charles), Tartaras (Loire), 11 août 1730-Paris 14 janvier 1814.

Appartint, comme Borda, à l'Académie des Sciences. Hydraulicien, Mathématicien, Historien des Sciences qui mérite encore d'être consulté sur les XVII^e et XVIII^e siècles.

« Je confiai mon embarras à un fameux géomètre [Fontaine] qui me répondit : *Admettez les infiniment petits comme une hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra.* La foi est venue en effet. »

BERNOULLI :	Jacques I	1655-1705
	Jean I	1667-1748
	Nicolas I	1687-1759
	Nicolas II	1695-1726
	Daniel I	1700-1782
	Jean II	1710-1790
	Jean III	1744-1807
	Jacques II	1759-1789

Voici, en extrait, des œuvres du premier, 1692, de quoi exercer des taupins :

$$\begin{aligned}
 \text{A. Natur.} \quad & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \& c = \frac{1}{0} = 1 \frac{1}{0} \\
 \text{B. Trigon.} \quad & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \& c = \frac{2}{1} = 1 \frac{1}{1} \\
 \text{C. Pyramid.} \quad & \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} \& c = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} \\
 \text{D. Triang. Pyr.} \quad & \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \frac{1}{126} \& c = \frac{3}{4} = 1 \frac{1}{4} \\
 \text{E. Pyr. Pyr.} \quad & \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \frac{1}{252} \& c = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Et voilà, de Jean I, en 1694, une formule :

$$\int ndz = nz - \frac{1}{1.2} z^2 \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3} z^3 \frac{ddn}{dz^2} - \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \frac{dddn}{dz^3} \& c$$

BRIANCHON, Charles-Julien, Officier d'Artillerie, 1783-1864.

« J'ai démontré que : Dans tout hexagone circonscrit à une conique, les diagonales qui joignent les angles opposés se croisent toutes trois en un même point. » (Treizième cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique).

CARNOT, 1753-1823.

Pour avoir des précisions sur les travaux de tous les mathématiciens, surtout les géomètres, de la fin du XVIII^e et du début du XIX^e, il faut lire la thèse de René TATON : « L'Œuvre scientifique de Monge » (Presses Universitaires).

COULOMB (Charles-Augustin), Angoulême, 14 juin 1736-Paris 23 août 1806.

Membre de l'Académie des Sciences, Inspecteur général de l'Université. Mécanicien et Physicien.

DESARGUES, Lyon, 1591-1661. Voir la thèse de R. TATON : « L'Œuvre mathématique de G. Desargues » (Presses Universitaires).

DEPARCIEUX, Cessoux (Gard), 1703-Paris, 2 septembre 1768. Membre de l'Académie des Sciences.

« Plusieurs savans, parmi lesquels on doit distinguer Deparcieux..., ont réuni un grand nombre de données précieuses sur la population, les naissances, les mariages et la mortalité. » (Laplace).

DESCARTES, 1596-1650.

DUBUAT (Comte), Tortisambert (Calvados), 23 avril 1734-Vieux-Condé (Nord), 17 octobre 1809. Ingénieur militaire, hydraulicien. Membre de l'Académie des Sciences.

DULEAU. — Ici, ma science est en défaut. Si vous savez quelque chose, écrivez-moi. Si je trouve, de mon côté, je le publierai dans un prochain numéro.

DUPIN Ch. (1784-1873).

EUCLIDE. — Mathématicien probablement antérieur à Archimède, cité pour la première fois par Appollonius et dont l'œuvre est fondamentale.

EULER (Léonard), Bâle, 15 avril 1707-Saint-Pétersbourg, 7 septembre 1783. Un des plus grands mathématiciens de tous les temps passés et probablement à venir. Elève de Jean I Bernoulli.

EYTELWEIN Johann-Albert. Membre de l'Académie de Berlin depuis 1803. Mort le 18 août 1849. Mécanicien.

GALILÉE, 1564-1642.

Déclencha la révolution scientifique lorsqu'il regarda le Ciel, en 1610, dans une lunette.

HIPPOCRATE. — Tartaglia cite peut-être le Médecin grec. Mais il y eut au v^e siècle avant notre ère un mathématicien de ce nom, de grande valeur (lunules d'Hippocrate).

HUYGENS (Christian), La Haye, 1629-1695. Initia Leibniz aux Mathématiques modernes, en 1673, à Paris.

Jean DE MONTE REGGIO, les Français disaient Jean de Mont-Royal. Appelé surtout Regiomontanus, 1436-1476. Grand astronome et mathématicien allemand.

JORDANUS NEMORARIUS. — Mathématicien et Mécanicien du XIII^e siècle.

KÉPLER, 1571-1630.

Pas plus que pour Descartes ou pour Huygens, il ne faut ici s'attarder : cet homme est trop grand.

LA HIRE (Philippe de), Paris, 18 mars 1640-Paris, 21 avril 1718. Membre de l'Académie des Sciences. Son père était peintre et fut un ami de Desargues. Quant à lui, il fut avec Pascal un des rares disciples du grand géomètre. Mathématicien, Astronome, Mécanicien.

LAGRANGE, Turin, 25 janvier 1736-Paris, 10 avril 1813.

« Vous devez bien être persuadé que j'ai déjà rendu d'avance au roi de Prusse le témoignage que vous méritez et que je l'ai bien assuré de l'excellente acquisition qu'il va faire en votre personne. Adieu, mon cher et illustre ami ; je me tiens trop heureux de pouvoir tout à la fois contribuer au bien-être d'un grand homme et à la satisfaction d'un grand roi, digne de toute ma reconnaissance. Je vous embrasse de tout mon cœur. » (D'Alembert à Lagrange, 20 mai 1766).

LAPLACE (Pierre-Simon), Beaumont-en-Auge (Calvados), 23 mars 1749-Paris, 5 mars 1827.

« La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul. »

LEGENDRE (Adrien-Marie), Paris, 18 septembre 1752-Paris 9 janvier 1833.

« A mesure que x augmente, la différence entre deux nombres premiers voisins de x augmente aussi, et peut être représentée avec beaucoup d'approximation, quant à la valeur moyenne, par $\log x - 0,08366$; de sorte que dans un intervalle de $2m$ termes compris depuis $x - m$ jusqu'à $x + m$, on devra compter autant de nombres

premiers qu'il y a d'unités dans $\frac{m}{\log x - 0,08366}$; pourvu que m soit assez petit par rapport à x . » (1798).

LÉONARD DE PISE ou le Fibonacci. Grand mathématicien italien du XIII^e siècle.

LUCA PACIOLI ou Luca dal Borgo, comme l'appelle Tartaglia. Algébriste italien du XV^e siècle. Ami de Léonard de Vinci.

MARIOTTE, Edme. Mort à Paris, le 21 mai 1684. Membre de l'Académie des Sciences. Physicien.

MAUMETH, fils de Moïse. Tartaglia veut citer probablement Abou-Abd-Allah Muhammad ben Mousa Al-Khowarizmi, célèbre mathématicien du IX^e siècle, d'où nous viennent les mots « algèbre » et « algorithme », ce dernier étant une déformation de son surnom.

MONGE (Gaspard), 1746-1818.

MONTGOLFIER (Joseph-Michel), 1740-1810 ; (Jacques-Etienne), 1745-1799.

On doit à ces deux Ardéchois, mes compatriotes, l'invention de l'aérostation. Le second est mort au village qui m'a vu naître.

NAVIER (Pierre-Toussaint), Saint-Dizier, 1712-Châlons, 1779. Médecin. Précis des moyens de secourir les personnes empoisonnées par les poisons corrosifs, 1778.

Membre correspondant de l'Académie des Sciences.

Il s'agit plus vraisemblablement de L. Navier (1785-1836), Ingénieur des ponts et chaussées, fondateur de la mécanique moléculaire (1822), membre de l'Institut.

NEWTON, 1642-1726.

PASCAL, 1623-1662.

PLATON. — Rappelons simplement que le philosophe grec vivait au IV^e siècle avant notre ère, et que sa fréquentation de savants de la taille d'Archytas ou d'Eudoxe nous a valu de sa part quelques beaux passages sur notre science.

PRONY (Gaspar, baron de), Chamelet, près Lyon, 1755-Paris, 1839. Ingénieur, Membre de l'Institut.

PTOLÉMÉE. — Astronome grec du début du II^e siècle. Au Moyen Age, fut un des savants de l'Antiquité les mieux connus, surtout comme Astrologue... Très supérieur à cette réputation.

PYTHAGORE. — Savant et philosophe semi-légendaire du VI^e siècle avant notre ère. Très postérieur (un millénaire au moins) au théorème qui porte son nom.

REYNAUD. — Le Baron Reynaud ne s'est pas attiré la sympathie de Poncelet. 1777-1844. Publia un nombre considérable de manuels.

SMEATON (John), 1724-1792. Ingénieur anglais, membre de la Royal Society. Hydraulicien.

TORRICELLI, 1608-1647. Torricelli est, en Mathématiques, avec Cavalieri, Fermat et Roberval, un des hommes qui ont fait faire à l'Analyse infinitésimale, ses plus grands progrès avant les systématisations de Wallis, de Newton et de Leibniz.

VAUBAN, 1633-1707. Membre de l'Académie des Sciences, ingénieur, tacticien, économiste.

VITRUVÉ. — Cet architecte romain du I^{er} siècle eut à la Renaissance et au XVII^e siècle une influence considérable sur les techniciens occidentaux.

Et voilà cette petite revue terminée.

Jean ITARD.

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

LANGAGE ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES *

Quand on se propose de rechercher si les Mathématiques sont utiles et comment elles le sont, on peut au moins affirmer — ce qui est hors de doute pour tout le monde — que cette discipline se prête, par excellence, à l'exercice d'un langage précis sur des sujets précis. Pour Cicéron, l'orateur idéal devait s'être exercé à la géométrie. Plus récemment, pour M. CAGNAC, c'est surtout au professeur de Mathématiques qu'échoit le rôle d'apprendre aux élèves la langue française.

On doit s'exprimer en langue correcte en toute circonstance, mais cette langue n'est que l'un des deux éléments d'une communication correcte... encore faut-il avoir quelque chose à communiquer. Ainsi on se dit parfois, lorsqu'on écoute certains discours : ce que j'entends est d'un français très correct, le style en est riche, la langue en est parfaite, mais il arrive aussi, dans cette même circonstance, que l'on ajoute, après réflexion : ce discours n'exprime rien, il ne signifie rien, il n'a aucun sens.

Faire connaître un fait, ou transmettre une idée, demandent :

- 1) une *existence* : un fait se produit, une idée vient à l'esprit ;
- 2) un *moyen de transmission* efficace.

N'examinons pas de trop près la question de l'existence brute d'un fait ou d'une idée : l'un et l'autre peuvent-ils vraiment exister indépendamment de toute représentation (qui est déjà une expression, même une photographie), nous sortirions de notre sujet ; nous sous-entendons un postulat d'existence des faits et des idées. Admettant cela, nous sommes exactement dans notre sujet, car *tout enseignement est un double exercice de transmission*.

Rappelons ce qu'on appelle acte de communication : tout acte par lequel des êtres vivants tentent d'influencer directement la conduite ou l'activité d'autres êtres vivants, par la parole, l'écriture et aussi les gestes, et aussi les sons, et, alors, la musique. Les parties en cause sont l'acteur et l'auditeur.

Dans tout enseignement, ce jeu est doublement pratiqué, sous les formes suivantes :

1^{er} temps, le professeur est acteur, l'élève est auditeur ;

2^e temps, les rôles sont inversés.

* Les durées respectives de ces deux temps sont fort variables selon les professeurs et les niveaux d'enseignement. Ainsi, dans l'Enseignement Supérieur, le professeur est toujours acteur ; dans les petites classes, et surtout quand l'inspecteur général vient, on préfère que ce soit l'élève.

Insistons bien sur la nature de cet acte de transmission, acte de tout enseignement. Nous ne recherchons pas, c'est entendu, si l'idée ou le fait ont une existence *a priori*, mais nous affirmons que, sans expression, tout se passe comme si idée et fait n'existaient pas. Je suis souvent amené à dire à mes élèves : une chose qui n'est pas exprimée est une chose qui n'existe pas. Si c'est un paradoxe, cela traduit cependant une attitude que nous devons adopter.

Dans ce qui précède « expression » a un sens très général ; le dessin, par exemple, est évidemment un moyen d'expression en Mathématiques et en logique, entre autres. Dans ce qui va suivre, « expression » voudra dire « expression en langage parlé ou écrit ».

Examinons maintenant ce langage dont nous faisons usage dans l'enseignement des Mathématiques.

(*) Conférence destinée aux candidats au C.A.P.E.S. et prononcée le 12 mars 1956 au Centre Pédagogique Régional de Paris.

Piu Servien prend le langage total et en fait deux classes : langage scientifique et langage lyrique (p. 14).

Une phrase appartient au *langage des sciences* si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

- 1) elle a un sens unique, universel ;
- 2) elle admet des phrases équivalentes (une infinité).

Équivalence a ici son sens précis, avec les qualités habituelles : R.S.T. Le meilleur exemple qu'on puisse donner, Hilbert le donne. Après l'énoncé de l'axiome : « deux points différents déterminent toujours une droite », est indiqué le faisceau suivant d'équivalentes : au lieu de « déterminent », nous pouvons dire « que la droite passe par ses deux points, ou qu'elle joint ces deux points, ou que les deux points sont situés sur la droite ». Nous voyons que nous pouvons, nous aussi, donner beaucoup d'exemples. Nous pouvons d'ailleurs pousser cette notion d'équivalence assez loin. Ainsi, lorsque l'on reconnaît que deux propriétés sont équivalentes, les phrases qui les expriment sont-elles alors des phrases équivalentes ? Si oui, où cela nous entraîne-t-il ?

Le langage lyrique est l'ensemble de toutes les autres phrases ; exemple : il n'y a pas de phrase équivalente à : « C'était pendant l'horreur d'une profonde nuit. » Toutes les quasi-équivalentes qu'on essaie de donner d'une phrase lyrique la gauchissent en des sens divers, l'attirent vers d'autres plages de son contenu et modifient les contours de son sens. (Dans cet ordre d'idées nous pourrions aller beaucoup plus loin et parler de la « surdétermination » des moyens d'expression propres aux arts).

Je me permets d'ajouter qu'il serait opportun de former une classe intermédiaire qu'on pourrait appeler celle du *langage philosophique*. Dans beaucoup de circonstances, il est difficile de saisir étroitement la pensée dans une formule verbale ; on poursuit la pensée sans l'atteindre, les phrases que l'on forme ont un sens que l'on juge toujours, ou trop restreint ou trop large. On n'atteint cette pensée que par une moyenne de sens non équivalents, on l'atteint par une sorte de coupure parmi un ensemble continu de sens plus ou moins voisins de celui qu'on veut exprimer ; c'est une sorte de « sens irrationnel », si l'on veut, par opposition avec le sens rationnel bien défini des phrases du langage scientifique. Exemple : essayez de donner la définition de « la liberté ».

Excusez-moi d'avoir fait cette digression ; nous ne sortons pas de notre sujet ; soyons heureux d'avoir reconnu et défini l'existence des phrases équivalentes : leur emploi très systématique dans notre enseignement nous permet sans cesse d'assurer la compréhension de ce que nous enseignons, c'est un procédé d'explication. Il est possible aussi que nous ayons parfois recours, mais avec prudence, à une moyenne de phrases presque équivalentes — langage philosophique alors — dans une explication particulièrement difficile.

Réciproquement — conformément au principe du double jeu — l'usage de phrases équivalentes servira pour le *contrôle des acquisitions* de nos élèves. Nous serions bien naïfs d'être satisfaits si l'élève répète correctement ce que nous disons ! L'effort de mémoire est, pour un enfant, moins pénible que l'effort de compréhension. D'ailleurs, l'enfant ne sait pas bien ce que signifie « comprendre ». Nous n'aurons le droit d'être satisfaits que si l'enfant parvient à exprimer en phrases différentes, même maladroitement, mais équivalentes, ce que nous lui avons exprimé une première fois, d'une certaine façon. L'enfant peut dire en toute bonne foi : « J'ai compris », nous savons qu'il n'en est peut-être rien au sens où nous entendons « comprendre » et, s'il vient vous trouver à la fin de la classe parce qu'il a eu zéro et vous dit : « Je croyais avoir compris », comprenez bien vous-même qu'il avait atteint un certain degré de compréhension que, vous, vous jugez insuffisant.

Il faudrait beaucoup d'introspection — et d'indiscrétion — pour parvenir à préciser quelles sont toutes les variétés de compréhensions qu'on héberge en soi-

même d'abord, et qu'on trouve chez autrui. Songez que M. FOUCHÉ nous a dit une fois qu'il lui a fallu vingt ans pour comprendre ce qu'est une différentielle ! Nous ne pensons pas que nous passerons pour plus intelligent que lui, si nous disons l'avoir compris en un quart d'heure !

A ce que nous avons dit des phrases équivalentes, il faut apporter une nuance. Toutes les phrases d'une même classe d'équivalence ayant un même sens déterminé, universel, ne sont cependant pas également bonnes, car on ne peut jamais connaître exactement le degré d'efficacité d'une transmission. Ce doute provient d'abord d'un certain *coefficient d'indétermination* attaché inévitablement au sens de chaque mot et provient surtout de la grande *variété des interprétations* possibles de chaque phrase. Pour le comprendre, il suffit de rappeler les expériences rapportées par M. SERVAIS dans le *Bulletin* du mois de janvier (p. 199). Vous dites simplement : « Soient deux cercles sécants », vous les dessinez et vous demandez : « Que voyez-vous ? ». Les interprétations d'une telle phrase — pourtant si simple —, les représentations, les enchaînements mentaux qu'elle déclenche, sont extrêmement divers. Il faut donc rechercher, parmi les phrases équivalentes d'une même classe, celles qui favorisent au mieux les enchaînements ultérieurs que vous voulez commander, celles qui vous mettent en résonance avec l'auditoire.

LES MOTS — Nous allons maintenant entrer dans quelques détails techniques, nous allons nous occuper des *mots* — c'est la matière première, c'est donc important — nous ne nous arrêterons pas à leur orthographe (où pourtant il y a beaucoup de fautes chez nos élèves). Puis nous passerons aux phrases, sans nous préoccuper de la syntaxe (où il y aurait pourtant aussi beaucoup à dire).

Le choix d'un mot ou d'une locution pour désigner une chose nouvelle en Mathématiques se fait, soit par un néologisme, soit par un emprunt au langage total.

Le choix d'un *néologisme* ne soulève pas de difficulté : on bâtit le mot selon une étymologie rappelant un caractère essentiel de l'objet ; exemples : courbe unicursale, ensembles équipotents ; cette spécialisation du mot lui confère une grande fidélité, et c'est si bien qu'on est conduit à en abuser en Mathématiques modernes, d'où un langage qui passe, à tort, pour pédant — mais notons que, pour le débutant, le mot bien choisi a un effet de choc et qu'il est bien retenu.

L'emprunt au langage total offre souvent un danger : l'objet mathématique acquiert une image, une projection parmi les objets du monde extérieur. Quelles doivent être les qualités de cette image pour qu'elle soit bonne ? Car on sent bien parfois qu'elle est bonne, que c'est une aide efficace pour accrocher une notion. Ainsi, « fonction continue » est bon, car « continu » a un sens courant si vague, que le besoin de précision ne peut se satisfaire qu'en attachant l'idée strictement à l'objet mathématique que cette locution désigne. Au contraire, le mot « relativité » est fort mauvais, car on est tenté de lui donner un contenu non dépourvu de sens, mais pourvu d'un sens étranger au véritable.

Ainsi, le choix et l'emploi des mots sont des difficultés. Plusieurs auteurs l'ont compris, qui, même dans un manuel élémentaire comme celui de M. CHÂTELET pour la classe de Première, paru il y a une quinzaine d'années, terminent par un lexique, c'est-à-dire un dictionnaire. Mais que peut-on attendre d'un dictionnaire ? « C'est un recueil de cercles vicieux », dit M. CAGNAC. Quelqu'un m'a dit : « Le sens d'un mot n'est jamais compris intégralement. » Un autre : « La recherche du mot et la préoccupation de la syntaxe empêcheraient notre esprit de se donner tout entier à la poursuite de la pensée. » Un autre encore (G. MAUNOURIT) : « Le mot du dictionnaire n'est pas un acte de communication, mais une forme extérieure commune à plusieurs de ces actes (voir F. GOBLOT, *Cahiers*). »

Nous voici mis en garde : le mot est tantôt le plus sûr, tantôt le plus dangereux des véhicules de la pensée, mais il nous faut vouloir que ce soit le plus sûr, et nous déclarons impossible, interdit, que le sens d'un mot ne soit pas parfaitement connu et pensé.

Voici d'abord une liste de mots empruntés au langage total et dont le sens, en Mathématiques, est différent du sens dans le langage total. Elle est loin d'être complète :

accroissement,	homologue,	projection,
fonction croissante,	lieu géométrique,	quelconque,
vitesse,	équivalent,	enveloppe,
accélération,	semblable,	terme,
plan horizontal,	égal,	facteur.
intérieur d'une courbe,	nécessaire, il faut, si...,	

Quelquefois le mot *garde* intégralement son sens du langage total. C'est assez rare : condition suffisante, transformation, correspondance, unicité, univoque.

Donnons aussi des exemples de *mots à sens multiples*, ce qui est gênant et choquant. Cela se rencontre dans l'enseignement le plus élémentaire. (L'inconvénient disparaît quand les sens sont très différents) :

diamètre : droite, ou segment, ou longueur ;
 cercle et circonférence (c'est un ennui, dans les dispositions relatives) ;
 axe : de rotation, de demi-tour, l'axe ox ;
 pente : $\sin \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha$;
 symétrie : plan, espace, variables, relation, fonction ;
 déterminé : dont le sens est toujours à préciser — ce mot n'a pas de sens ;
 cône : surface ou solide ;
 et voir : qu'est-ce que « voir », et voir avec quoi ?
 intervalle (a, b) et en cotée ;
 sens > 0 ; sens d'un axe.

Il y a des mots habituellement *mal employés*.

Chez les débutants : droite et segment de droite, — « abaisser » la perpendiculaire est ridicule, — l'énoncé : la perpendiculaire est plus courte que toute oblique n'a pas de sens, — surface (pour aire). Je voudrais que l'expression « augmenter indéfiniment » fût bannie définitivement.

Le mot « arbitraire » doit être re-défini chaque fois qu'on l'emploie ($ox = 0$, $x > 2$).

La locution « en général » a deux sens.

Quant au choix de l'article défini, ou de l'article indéfini, il est remarquable de trouver chez nos élèves l'intervention systématique. Citons un exemple où l'importance de l'article est en évidence : Trouver a et b de façon que a et b soient les racines de $x^2 + ax + b = 0$ et : « ...que a et b soient racines de l'équation » sont deux problèmes différents qui n'ont pas la même solution.

Enfin, ne négligeons pas les mots : or, donc, car, par suite, autrement dit, alors, c'est-à-dire, en effet — ni la ponctuation ; en particulier, après toute égalité il y a logiquement un signe de ponctuation ayant un sens, et l'absence de signe a aussi un sens.

Pour terminer, signalons qu'il y a des mots n'appartenant pas au langage mathématique : forcément, obligatoirement, auxquels nos élèves ont recours pour nous convaincre. Il m'arrive quelquefois de dire avec fermeté : le mot « petit », le mot « grand », n'appartiennent pas au langage mathématique. Lui appartiennent, les locutions : infiniment grand ou petit, plus grand que, plus petit que. Petit, grand, ainsi que presque et quasi, appartiennent à la physique.

LES PHRASES. — Parlons maintenant *des phrases*, des expressions proprement dites. Il y a beaucoup de fautes qu'on prend pour des fautes de Mathématiques, mais qui sont, en réalité, des fautes d'expression. Plus précisément, ce ne sont même pas des fautes : la phrase, considérée comme acte de communication, ne remplit pas son rôle, sa « signification » n'est pas celle que l'acteur voulait. Songez que lorsque l'élève me récite sa leçon, je m'attends à retrouver ce que j'ai pensé, *malgré deux*

transmissions déformantes, la mienne et la sienne ! Peu d'espoir, en vérité. Et songez à toutes les déformations possibles, s'il y a des sous-entendus !

Exemple : Je demande à un élève (H.E.C., élève moyen) ce qu'est une identité. Réponse : « C'est deux expressions qui prennent la même valeur quel que soit x . » Je rectifie. — « C'est ce que je voulais dire », reprend l'élève, et m'informant un peu mieux de ce qu'il voulait dire, je constate qu'il a pensé : une identité, c'est ce qui se produit lorsque l'on a... Pour nous, « identité » désigne un être mathématique, une catégorie d'égalités (comme « équation » désigne une autre catégorie d'égalités), pour l'élève, identité désignait la circonstance, le phénomène. Il n'y avait pas de faute, il y avait un changement dans la fonction du mot.

Ces confusions sont très fréquentes. Pour juger de la valeur mathématique d'une phrase d'élève, il faudrait d'abord en faire l'analyse logique et grammaticale. Je crois qu'on ne pourrait guère éviter ces difficultés que par un réglage résolument axiomatique du langage (voir GOBLOR, *Cahiers pédagogiques*, 15 novembre 1955, p. 2).

La notion de limite est fertile aussi en confusions dont on ne sait pas bien si elles sont dans le langage ou dans les idées. Cela se produit chez les physiciens (mais pour eux cela n'a pas d'importance, car $b = f(a)$ ne les intéresse que si $x \simeq a$ entraîne $y \simeq b$). C'est ainsi qu'est née l'expression : telle propriété est « vraie à la limite » qui est une expression fautive, ou du moins laisse le passage libre à beaucoup d'inexactitudes (par exemple, « la vitesse moyenne est la longueur du vecteur vitesse moyenne »).

Nous avons maintenant de graves observations à formuler sur l'emploi du verbe *être*.

Cet auxiliaire, on le fait servir à trop de constructions, toujours on exige de lui un travail trop lourd. Exemple : vous demandez une définition : « Qu'est-ce qu'un A ? ». La réponse commence spontanément sous la forme : « Un A est... » et vous sentez aussitôt que vous n'en sortirez pas. Cette forme impose que vous définissiez A par un attribut ; cela va bien si A est un être simple, mais, souvent, il vous faut, pour être satisfait de la définition, une avalanche d'attributs ! Allez demander ainsi : « Qu'est-ce qu'un déterminant ? » « Qu'est-ce qu'une fraction ? » Vous êtes certains d'avoir une réponse incomplète ou incorrecte, ou bien, votre interlocuteur s'en tirera, s'il est rusé, en éludant la question : « Une fraction est un ensemble de deux entiers, etc... »

Nous devons enseigner la tournure de langage qu'il convient d'adopter en de telles circonstances.

Cette difficulté n'est pas très importante. Il y a plus grave. Prenons les deux phrases suivantes :

1) Un rectangle est un parallélogramme ayant un angle droit.

2) Un vecteur est un segment de droite orienté.

Je dis que l'une de ces deux phrases est fautive. En effet :

Elles sont toutes les deux de la même forme qui est très fréquente :

Un A est un B ayant la particularité C.

Deux cas se présentent alors :

1) le B particularisé par C est encore un A (les B obtenus forment un sous-ensemble de l'ensemble des A). C'est ce qui se produit dans 1) ;

2) le B particularisé n'est plus un A. C'est ce qui se produit dans 2) ; le vecteur n'est plus un segment, c'est un être nouveau, tout à fait différent. La seconde phrase est fautive.

De tels exemples abondent en Mathématiques ; la forme empruntée au langage total est insuffisante à cause du verbe être. Il faut compléter (« est avec appartenance », « est, avec exclusion » ou d'autres façons).

Notons que les élèves adoptent quelquefois le sens 2) à la place du sens 1) ; ils disent : « Un rectangle n'est pas un parallélogramme. »

Le verbe être appelle l'attribut, dit-on. Oui, quand vous dites « le triangle est isocèle ». Mais, souvent, son rôle est loin d'être aussi modeste. « L'Etat c'est moi », dit Louis XIV : mais Louis XIV peut dire également : « Moi, c'est l'Etat. » L'attribut est si exclusif, que la réciproque est assurée. Cela se produit souvent en Mathématiques et les élèves ne sentent pas du tout cette force absolue du verbe être dans ce cas. Ainsi, on rencontre souvent des théorèmes ayant la forme, « l'ensemble des A est l'ensemble des B ». Quelle peine avons-nous toujours, pour obtenir de nos élèves, la réciproque ! N'est-il pas choquant qu'ils n'en éprouvent pas le besoin logique ? La cause en est la faiblesse d'expression du verbe être, acte de communication complètement avorté. Nous ne nous en tirerons que par plusieurs équivalentes : « est identique à... », ou « il y a correspondance biunivoque par identité entre les objets de A et ceux de B, etc... ».

LE STYLE. — En ce qui concerne le style en général, distinguons-en trois sortes : style d'explication, style d'exposition, style de rédaction. Cette classification ne porte nullement sur la correction du langage, et style d'explication ne veut pas dire style familier. Il est entendu que nous devons bannir chez nos élèves et chez nous-mêmes le langage enfantin, simplet ou exagérément elliptique. Il y a de quoi plaisanter en énumérant quelles sont les opérations de l'algèbre : le tirer, le porter, la chasse, la disparition, l'apparition, etc... Nous devons éviter les tournures fâcheuses, comme : « les x se barrent », les « on a » répétés sans fin. Dans le style d'explication, on peut tolérer une certaine liberté, on s'interrompt, on reprend, on côtoie, mais prudemment le langage lyrique, si vous voulez, dans le but de provoquer une image. On sent bien alors qu'on n'écrit pas ce que l'on dit, mais cette liberté provisoire qu'on se donne est indispensable au rendement d'une bonne explication.

Le style d'exposition est plus dépouillé, on l'emploie presque exclusivement dans une grande classe, il tend vers le style de rédaction, et, quand on utilise ce dernier, il faut le marquer par un changement du ton et du débit pour que les élèves sachent qu'ils doivent prendre des notes complètes et puissent le faire.

Il faudrait arriver à inculquer ceci : une solution se rédige et c'est difficile, et cela se travaille comme un devoir de français et c'est un devoir de français d'abord. La rédaction est elle-même un problème indépendant du problème proprement dit, et ce problème consiste en la recherche d'un *compromis*, expliquons-nous.

Deux qualités sont également appréciables dans la valeur en signification d'un texte : l'intelligibilité, la *facilité de compréhension* : le lecteur est conduit par petits pas, sans effort, les sauts de raisonnement lui sont évités, il n'a aucun intermédiaire à parcourir tout seul, mais alors la rédaction est longue.

L'autre qualité, au contraire, c'est la *concision* qui satisfait les esprits rapides, vigoureux et avides.

Toute rédaction est donc imparfaite, puisque ce qu'elle gagne dans l'une des qualités, elle le perd dans l'autre.

Notons que ces deux tendances se trouvent respectivement très accusées parmi les travaux originaux de nos savants classiques. Ainsi, on cite Rieman comme auteur cherchant l'extrême concision ; on cite Hermite comme un ciseleur. Poincaré, entraîné et submergé par son génie, regrette parfois une première rédaction faite toute d'une traite et se fait travailleur de style. Einstein, aussi bien que Napoléon, laissent à d'autres le souci de mettre en forme ce qu'ils ont produit.

La tendance moderne est, je crois, la recherche de la concision, laquelle est obtenue au mieux par l'usage des *symboles* ; mais attention chez le débutant : cet usage conduit vite au mécanisme et l'élève est souvent tenté de mettre au rang de symbole ce qui n'est qu'une abréviation : les rédactions deviennent des schémas, des squelettes ; ce qui était concision devient rapidité, escamotage. Si vous voyiez certaines solutions de nos élèves !... Je ne sais si autrefois les élèves parlaient et rédigeaient mieux, je sais qu'aujourd'hui tout ce qu'on fait doit être vite fait, mais notre

méthode actuelle d'enseignement est peut-être en partie responsable de ce genre d'insuffisance de nos élèves. Autrefois, le professeur dictait, les élèves copiaient, le professeur était ainsi engagé personnellement et tout entier, sa forme devait être parfaite et définitive, il était le modèle permanent et quelque chose en rentrait bien dans l'élève, à force et malgré lui !

Depuis, on lui a reproché cette façon ; aujourd'hui, c'est la classe vivante, c'est l'élève qui fait tout ! — mais comment le fait-il ? — après quels balbutiements et combien de faux-pas, et sans élégance, sans cadence ! (pensez à la cadence d'un raisonnement). Pour une leçon ainsi faite, exclusivement par l'élève, pour un devoir ainsi corrigé, exclusivement par l'élève, il n'est pas question de rédaction : du chaos ne se rédige pas.

Cette façon doit être immédiatement suivie d'une mise en forme très nette, due au maître, et d'une concision raisonnable. Ne jamais manquer cette deuxième étape, faute de temps, dirait-on, que la rédaction ne soit jamais sacrifiée, avec la consolation illusoire d'un « ils ont compris, cela suffit ».

En conclusion, nous dirons que — là comme ailleurs — il n'y a pas de règle : pas de cours dicté, bien entendu, mais dictez parfois, donnez à vos élèves un modèle de ce qu'on doit dire et écrire, mais exercez-les aussi à former eux-mêmes leurs modèles ; sachez qu'il leur plaira de vous imiter, surtout s'ils vous aiment.

J. SIROS (*Lycée Lakanal*).

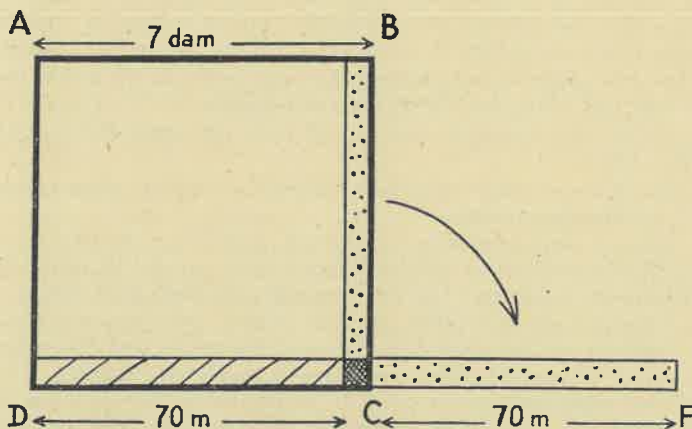
LA RACINE CARRÉE EN CLASSE DE TROISIÈME

Dans le *Bulletin* 175, la question suivante avait été posée : *Peut-on démontrer la règle de la racine carrée en classe de Troisième ?*

Nous avons reçu les deux réponses suivantes :

A. Une solution « géométrique ».

Calculer la racine carrée de 5 437 à une unité près revient pratiquement à déterminer à 1 m près le côté d'un terrain carré ayant une superficie de 5 437 m², soit 54 dam² 37 m² (d'où le partage en tranches de deux chiffres à partir des unités, ou de la virgule).



1° 54 étant compris entre les carrés 49 et 64, le côté du carré est de 7 dam par défaut.

2° Du terrain carré ABCD retranchons le carré de 7 dam de côté ; il reste une superficie de :

$$54 \text{ dam}^2 37 \text{ m}^2 - 49 \text{ dam}^2 = 5 \text{ dam}^2 37 \text{ m}^2 \quad \text{ou} \quad 537 \text{ m}^2.$$

Ce reste peut être partagé en deux rectangles égaux et un petit carré qui, mis bout à bout, forment un rectangle dont la longueur DCF est comprise entre

$$2 \times 70 = 140 \text{ m et } 150 \text{ m,}$$

et dont la largeur est inférieure à 10 m.

On obtiendra une valeur approchée de cette largeur en divisant 537 par 140, ou 53 par 14 (2 fois 7, d'où la règle). Le quotient 3 ne tenant pas compte du petit carré pourra être trop fort ; l'essai se fera par le calcul de l'aire du rectangle DCF, de largeur 3 et de longueur $140 + 3 = 143$,

$$143 \times 3 = 429 < 537 \text{ (d'où la règle d'essai).}$$

Le chiffre 3 convient ; la racine à 1 près par défaut est 73 ; le reste est :

$$537 - 429 = 108.$$

Le même raisonnement permet d'obtenir le chiffre suivant de la racine en prenant pour nouvelles unités dm^2 et dm, etc...

MARCHAND (professeur honoraire).

B. Découverte de la règle.

Il faut d'abord noter qu'il ne s'agit pas de démonstration. Il s'agit de faire découvrir et de justifier un procédé pratique d'extraction de la racine carrée d'un nombre écrit en système décimal. Comme aucun théorème préalable n'est utile et qu'un appel au concret est, non seulement possible, mais encore nécessaire par la définition intuitive et non axiomatique des nombres entiers, nous pouvons présenter la question d'une façon abordable, non seulement pour des élèves de Troisième, mais même pour des élèves de Cinquième ; du reste, c'est aussi la méthode que j'emploie, mais plus rapidement et sans manipulations concrètes, dans les classes de Philosophie et même de Mathématiques !

Les idées directrices sont : l'opération est l'inverse de l'opération de formation des carrés (comme la division par rapport à la multiplication). On fera des opérations provisoires (comme pour la division). La première opération provisoire doit se poursuivre par des opérations complémentaires, mais celles-ci sont d'un type nouveau (tandis que dans la division, elles sont encore des divisions). Enfin, il faut s'adapter à la numération décimale.

Je m'excuse d'être un peu longue, mais, dans ces questions, c'est le détail de la méthode qui importe et la rend ou non assimilable aux élèves (1). Notons qu'en Troisième, les deux premières parties peuvent être faites parfois en une leçon, la seconde partie étant reprise à la seconde leçon. Mais toute partie commencée doit être conduite à sa conclusion.

1^{re} partie. — Chaque élève est muni d'un assez grand nombre de jetons, boutons, confetti... Les lentilles sont très appréciées.

Le carré d'un nombre, par exemple $5^2 = 25$, est le nombre d'objets disposés en carré de cinq objets de côté. Nous remarquons que le même mot est pris dans deux sens différents. C'est compréhensible, mais gênant pour les explications.

a) Formation des carrés des entiers consécutifs.

Le carré de cinq objets de côté étant formé, nous plaçons un nouveau rang de cinq objets en bas, puis un rang de cinq objets à droite, puis un objet pour le coin. Les élèves recommencent jusqu'à ce que tous aient compris que nous voulons former des carrés, non des rectangles, qu'ils aient remarqué cet objet du coin que nous posons en dernier et qu'ils aient accepté de poser les objets en ordre et des deux côtés choisis, par exemple en bas et à droite.

Passage à l'abstrait : 1° Je suppose avoir formé 32^2 , que faut-il ajouter pour

(1) Je reproduis ici un article paru dans la « Revue de l'Enseignement Secondaire des Jeunes Filles », 15 février 1932.

avoir 33^2 ? — 2° J'ai formé 45^2 et il me reste 50 objets ; puis-je faire le carré suivant ? — 3° J'ai formé 38^2 et il me reste 76 objets ; puis-je faire le carré suivant ?



fig. 1

Conclusion.

b) *Formation des carrés non consécutifs.*

Nous faisons former un carré, par exemple de huit objets de côté, et cherchons à le compléter pour former le carré de $8 + 3 = 11$ objets de côté. Il nous faut une *bande* de huit objets de long sur trois de large pour le bas, puis une *deuxième bande* égale pour la droite, puis le *petit carré du coin* de 3 sur 3.

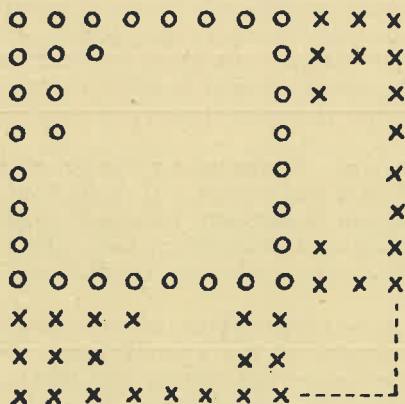


fig. 2

Après quelques exemples analogues, laissant les objets, les élèves répondent par calcul mental aux questions :

1° Combien faut-il ajouter d'objets au carré de 125 objets de côté pour obtenir le carré de 128 de côté ? — 2° J'ai formé 32^2 et il me reste 250 objets ; puis-je former 34^2 ? 35^2 ? 36^2 ?

Conclusion provisoire.

Exercice : J'ai disposé des objets en rectangle ; il y a $n + 5$ lignes de n objets. Quel plus grand carré puis-je faire avec ces mêmes objets ?

1^{re} *remarque importante* : au lieu de compter successivement les deux bandes, nous pouvons considérer la *double-bande*, de même largeur, mais de longueur double. Nouveaux calculs avec cette manière de compter. Nouvelle conclusion.

Mais nous refusons, si nos élèves le proposent, de faire entrer le petit carré du coin dans la double bande, car cela nous éloignerait du but.

2^e *remarque essentielle* : si le carré primitif est assez grand, le nombre d'objets de la double-bande est beaucoup plus petit que celui du carré primitif ; le nombre

d'objets du petit carré du coin est encore beaucoup plus petit que celui de la double-bande.

2^e partie. — EXTRACTION DES RACINES CARRÉES.

a) *Recherche concrète.* — Avec une poignée d'objets former le plus grand carré possible. Etude du reste.

b) *Recherche par le calcul.* — En essayant des nombres de plus en plus grands, nombreux exemples quand le nombre donné ne dépasse pas 200. Compréhension du but de l'étude : abréger ces calculs par tâtonnement quand le nombre proposé est grand ; nous cherchons donc une *règle pratique*.

— *Première recherche* : soit 5134. Ce nombre est supérieur à 10^2 , à 50^2 , inférieur à 100^2 , etc... On trouve bien vite $70^2 < 5134 < 80^2$.

Notion de racine carrée approchée à une dizaine près par défaut et par excès.

Pour préciser la réponse, nous cherchons le chiffre des unités. (Ici, nous faisons appel au concret, mais sans utiliser les objets ; nous esquissons les gestes et précisons par un schéma au tableau).

Le carré de 70 de côté contient :

$$70^2 = 4900 \text{ objets. Le reste provisoire est } 5134 - 4900 = 234.$$

Nous pouvons former le carré consécutif, ce qui nécessite :

$$(70 \times 2) + 1 = 141 \text{ objets. Il reste 93 objets.}$$

Ce reste est insuffisant pour former le carré suivant : c'est le *reste définitif*. Nous concluons et écrivons :

$$5134 = 71^2 + 93, \quad \text{et} \quad 71^2 < 5134 < 72^2.$$

— *Deuxième exemple* : soit 6245. Nous trouvons :

$$70^2 < 6245 < 80^2, \quad 70^2 = 4900, \quad 6245 - 4900 = 1345.$$

Ce reste provisoire est grand : quelle largeur de bande pouvons-nous obtenir ? La longueur de la double-bande est $70 \times 2 = 140$. Sa largeur sera donc le quotient de la division de 1345 par 140, c'est-à-dire 9.

« Mais nous avons oublié le petit carré du coin ! » — « C'est vrai, mais c'est peu de chose ! » — « Pourtant il demande 81 objets. » — « Eh bien, nous allons essayer ce chiffre 9. La double-bande contiendra $140 \times 9 = 1260$ objets, le carré du coin exige $9 \times 9 = 81$ objets ; il nous faut donc $1260 + 81 = 1341$ objets. Nous pouvons les mettre puisque nous en avons les 1345 objets du reste provisoire à notre disposition ; il nous restera 4 objets. Nous avons de la chance ! »

Nous donnons la réponse et traitons d'autres exemples en nous aidant toujours du schéma dessiné.

Conclusion : nous savons extraire la racine carrée des nombres jusqu'à 10 000. Les élèves (heureusement en grande majorité) qui n'ont jamais appris la règle sont satisfaits et font les calculs avec plaisir.

3^e partie. — L'ADAPTATION DE LA RÈGLE A LA NUMÉRATION DÉCIMALE.

Les élèves se sont exercés seuls. A ce stade, certains élèves font, par exemple, l'opération comme suit :

Nombre donné 830. J'utilise $25^2 = 625$. Reste provisoire 205. Longueur de double-bande 50. J'essaye 4. Non, j'essaye 3

$$50 \times 3 = 150$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$\text{Total } 159$$

{ Reste définitif 46.

{ La racine cherchée est $25 + 3 = 28$.

Il s'agit d'utiliser au mieux la numération décimale. Nous refaisons un exemple au tableau (en précisant une disposition déjà plus ou moins proposée à la leçon précédente). Je reprends ici l'exemple de la deuxième partie.

a) Règle pour obtenir le chiffre des dizaines. Énoncé habituel.

b) Règle pour obtenir la largeur de la double-bande : observation des zéros. On les dessine en pointillé et l'on remplace :

$$70 \times 2 = 140$$

quotient de division de 1345 par 140

$$7 \times 2 = 14$$

par quotient de la division de 134 par 14.

c) Remarque par laquelle on remplace les opérations

$$140 \times 9 = 1260$$

$$9 \times 9 = 81$$

$$1341$$

$$\text{par } 149 \times 9 = 1341$$

Le zéro en pointillé est ainsi remplacé par le chiffre 9 essayé.

Les élèves trouvent ceci peu facile à inventer ! Nous leur montrons combien c'est naturel d'après nos schémas en faisant, pour l'essai, entrer le petit carré du coin dans la bande périphérique ; mais le concret est déjà loin ; les élèves adoptent avec plaisir la règle sous la forme « remplir » le zéro pointillé.

Justifier les trois règles a) b) c) en retrouvant les zéros pointillés sur tous les exemples. Bien disposer l'opération.

d) Complément facultatif : on peut faire la multiplication 149×9 et la soustraction qui donne le reste en une seule opération, comme dans la division, puisque le multiplicateur n'a qu'un chiffre, comme dans la division. Nouveaux calculs.

En majorité, les élèves ont encore besoin, pendant un certain temps, d'écrire les zéros pointillés et même d'esquisser le schéma.

4^e partie. — (L'attention est un peu lassée. Nous devons accélérer et donner peu d'explications).

Nombres supérieurs à 10 000.

En extrayant la racine carrée de 5597, par exemple, nous avons trouvé

$$74^2 < 5597 < 75^2, 5597 = 74^2 + 121$$

Or

$$(740)^2 = 74^2 \times 100, (750)^2 = 75^2 \times 100$$

donc

$$(740)^2 < 559700 < (750)^2,$$

740 est donc la valeur approchée à une dizaine près par défaut de la racine carrée de 559700, le reste provisoire étant 12100. Si le nombre donné est 559748, ces 48 unités ne peuvent combler la différence entre 559700 et $(750)^2$, donc 740 est encore la valeur approchée à une dizaine près par défaut de 559748, le reste provisoire étant cette fois 12148.

Conclusion : a) obtenir 740 et le reste provisoire 12148 ; b) poursuivre l'opération, ce que nous savons faire. On peut continuer l'opération posée (en mettant des zéros pointillés si l'on veut).

Calculs sur des nombres de 6 chiffres, puis de 7 et 8 chiffres.

Racine carrée des nombres décimaux ; racines carrées approchées à 0,1, 0,01, etc. près.

Nous partons de l'examen de la place de la virgule dans les carrés des nombres décimaux. D'autre part, nous calculons la longueur évaluée en m , dm , cm du côté d'un même carré dont la surface est évaluée en m^2 , dm^2 , cm^2 . Nous examinons, dans l'opération posée à la manière habituelle, quels sont les nombres qui correspondent à des longueurs ou à des surfaces, et précisons le reste.

L'étude achevée, si la classe est bonne et si un élève, comme cela m'est arrivé, dit que « cela se démontre d'habitude avec u », on pourra reprendre le raisonnement avec des lettres en s'aidant du schéma. Ce sera maintenant compréhensible, et il sera intéressant pour le professeur de distinguer ceux de ses élèves qui éprouvent une réelle satisfaction à ce complément.

Pensera-t-on que la méthode que je viens de présenter prend bien du temps ? On fait cette même critique à tout procédé de « redécouverte » dans l'enseignement. Mais il me semble que l'expérience prouve au contraire que c'est du temps gagné ; le rabâchage d'une règle compliquée, imposée sans justification, est long aussi et il est stérile. L'effort fait en commun a entraîné nos élèves, développé leur attention, attiré aussi leur sympathie, et la classe sera prête à aborder avec plus d'entrain le reste du programme.

P.-S. — Ajoutons que si le reste $a - x^2$ est négligeable dans les conditions de l'étude, de sorte que l'on puisse pratiquement écrire $x^2 = a$, on conviendra d'écrire $x = \sqrt{a}$, ou, mieux, $x \simeq \sqrt{a}$.

L. FÉLIX.

DES EXEMPLES RÉELS

dans l'enseignement des Mathématiques

Les Mathématiques ont-elles pour fin l'abstraction gratuite ou l'application au réel ? En ces termes la question est simpliste. Il apparaît au contraire, dans les synthèses de l'épistémologie contemporaine, que la pensée et l'action ne sont pas deux modes séparés, surtout opposés, mais deux aspects complémentaires d'un processus unique. Ils se renvoient nécessairement et constamment l'un à l'autre. Cela seul, soit dit en passant, suffit à récuser la notion traditionnelle de culture « désintéressée ».

L'enseignement, pour s'être cru obligé de choisir entre ces deux entités, l'action et la pensée, s'est confiné dans l'abstraction gratuite. De là deux conséquences :

1° l'aspect tout à fait byzantin, devant l'opinion, de notre discipline, et le mépris qui s'ensuit ;

2° l'affaiblissement de l'abstraction elle-même, coupée de ses sources ; ce qui, pour l'intention traditionnelle, est proprement une absurdité.

Ceci n'est pas un paradoxe, ou seulement de première vue, si l'on se réfère à l'épistémologie, qui est par définition l'effort de compréhension des sciences. Nous regrettons de ne pouvoir que schématiser en deux mots sa synthèse essentielle.

Notre enseignement, pour se réanimer comme justement des circonstances éminemment réelles le demandent, doit restituer au réel sa pleine fonction. Il s'agit que nos cours, de temps en temps, s'éclairent d'applications techniques. Il se trouve précisément que diverses techniques se rattachent directement aux Mathématiques (sans du tout en appeler à la physique) ; ainsi la Navigation. Les préambules indispensables s'en exposent en quelques minutes.

Nous donnons ci-dessous un petit aperçu de ces sortes d'applications, pour montrer d'abord qu'en effet elles sont d'accès facile, et principalement qu'elles s'attachent mot pour mot aux questions théoriques, au point enfin de conférer à celles-ci une vigueur que la simple sécheresse traditionnelle ne leur donne pas.

Quelques aspects de la théorie des constructions géométriques éclairés par des applications nautiques

1) PRINCIPE D'UNE CONSTRUCTION.

Soit un navire N (fig. 1) dont on veut connaître la position au large d'une côte. Sur ce navire on a moyen (cité en une autre occasion) de déterminer sa distance d à un repère A (phare, clocher) ou *amer*. Le navire appartient donc au *lieu géométrique* des points qui sont à la distance d de A ; ce lieu est le cercle (A, d) , dit *cercle de distance* (déjà cité pour illustrer la définition du cercle). On le trace sur la carte marine.

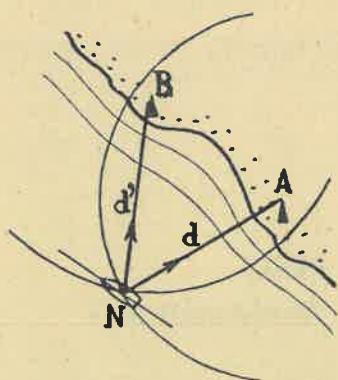


Fig. 1

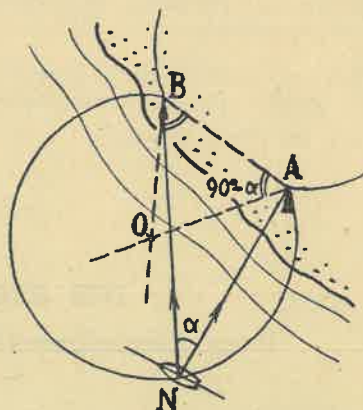


Fig. 2

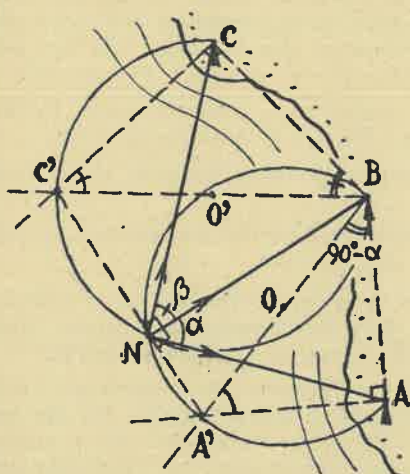


Fig. 3

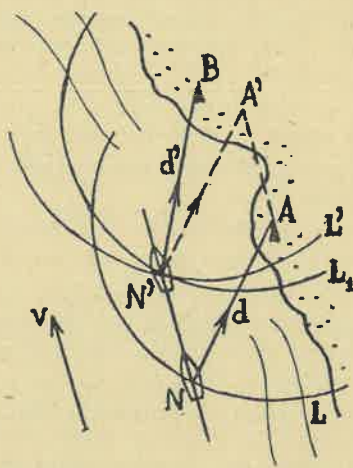


Fig. 4

Pareillement, le navire appartient à un second lieu, qui est le cercle de distance (B, d') . Devant appartenir aux deux lieux à la fois, N est point commun, c'est-à-dire point d'intersection.

Plus généralement on peut caractériser la position du navire par d'autres mesures que des distances. Il existe pour chacune un lieu géométrique correspondant, cité opportunément dans le programme ; nous en donnons un exemple ci-dessous. Mais toujours le point cherché s'obtiendra à l'intersection de deux lieux géométriques. Il sera intéressant d'examiner toutes les combinaisons possibles, pour bien affermir cette idée importante. Signaler qu'elle s'applique même dans la Navigation au long cours.

2) ARC CAPABLE.

Sur le navire on a moyen (cité en une autre occasion) de déterminer l'angle ANB (fig. 2) ou *distance angulaire* de deux amers A et B. Le navire appartient donc au lieu des points d'où l'on aperçoit le segment AB sous l'angle α . Ce lieu est un *arc capable*. On le trace sur la carte.

Le tracé pratique est très proche de la *construction classique*. On porte en A et B, au rapporteur, l'angle $90^\circ - \alpha$; on obtient le centre O. Cette indication pratique permet de bien envisager la question, et son intérêt vivant la fait mieux retenir.

3) ÉNONCÉ D'UNE RÈGLE DE CONSTRUCTION.

Naturellement, il faut envisager aussi le cas où α est obtus. On trouve que l'on doit porter en A et B, cette fois, l'angle $\alpha - 90^\circ$, et de l'autre côté de AB. Il paraît alors indiqué de rassembler les deux constructions en une seule conclusion. On est conduit à la règle suivante :

Former $|90^\circ - \alpha|$. Porter cet angle en A et en B,

1° s'il est positif, du côté de la mer ;

2° s'il est négatif, du côté de la terre.

On remarquera que cette application fait bien sentir ce qu'est une *règle* de construction, notion parfois négligée par les élèves (parce que purement théorique, ce qui leur semble à juste raison un contresens). On voit parfaitement ici qu'une règle de construction est une marche à suivre, et qui doit répondre aux exigences suivantes :

- être soigneusement décomposée en temps successifs (sûreté) ;
- être concise (rapidité d'exécution) ;
- être complète, c'est-à-dire prévoir tous les cas (parer à toutes éventualités).

La composition d'une règle de construction apparaît enfin comme une tâche très sérieuse ; elle engage une responsabilité.

4) UNE DÉMONSTRATION SUR LES ANGLES INSCRITS.

Pour en revenir au problème initial, on peut déjà déterminer la position du navire par l'intersection d'un arc capable avec un cercle de distance, ou même par l'intersection de deux arcs capables. Ce sont là deux exemples de la variété des combinaisons possibles que nous avons signalée.

Considérons le cas de deux arcs capables. Le navire (fig. 3) est en vue de trois amers A, B, C. On a mesuré les distances angulaires α de A et B, et β de B et C. Le navire appartient à la fois aux deux arcs capables décrits respectivement sur AB et sur BC, avec les angles α et β . Il se trouve à leur intersection.

Or, si l'on réfléchit pratiquement, il s'avère que la construction effective de deux arcs capables est assez longue par rapport aux autres tracés sur la carte. Il est donc naturel de chercher une construction plus simple de N, qui demeure le véritable objectif.

Prenons l'initiative, à titre d'expérience théorique, de considérer les points A' et C' respectivement opposés à B dans les cercles O et O'. On démontre aisément, après l'avoir aperçu, que les trois points A', N, C' sont alignés (c'est un *exercice*

classique). N apparaît comme le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur la droite A'C'. Il suffirait donc de déterminer A' et C' pour résoudre le problème (exemple de l'analyse d'un problème).

Or, l'angle BAA' est droit comme inscrit dans un demi-cercle d'où un premier lieu de A' : la perpendiculaire en A à AB. De plus, l'angle AA'B vaut α comme inscrit, ce qui donne à l'angle ABA' la valeur $90^\circ - \alpha$; d'où un second lieu de A'. Ce point est ainsi déterminé, et C' pareillement.

Enoncer la règle (*synthèse*). Envisager le cas où α , par exemple, est obtus. Conclure (*récapitulation*).

Cette application incite l'élève à chercher des relations, rien que « pour voir ». Elle montre d'ailleurs à sa source l'initiative de l'esprit. Cette initiative est motivée.

5) TRANSFORMATIONS (TRANSLATION).

Pour faire le point du navire on a supposé jusqu'ici que les deux lieux provenaient de mesures effectuées simultanément. Or, il est assez intuitif que souvent on ne pourra remplir deux tâches à la fois, même à peu près. On connaît alors un lieu L à l'instant t (fig. 4) et un lieu L' à l'instant t' . On veut trouver la position du navire à l'instant présent t' , voire à l'instant passé t . Suivant une méthode générale en Mathématiques, on va se ramener au cas précédent.

On connaît en effet le parcours du navire, de t à t' , en direction et sens par la boussole ou *compas*, et en longueur par l'indicateur de vitesse, sur la machine. Autrement dit on connaît le *vecteur libre* NN', soit v . Le point N' appartient donc au transformé du lieu L par la *translation* v . Soit L₁ ce transformé ; le point cherché N' est à l'intersection de L₁ avec L'.

Cette application éclaire la notion de translation, et elle fait ressortir l'importance des transformations en vue des problèmes de constructions. Elle montre aussi le principe de leur emploi.

Elle donne enfin l'occasion d'appliquer les théorèmes sur la transformation des figures élémentaires, droite et cercle ; ceci pour tous les lieux L déjà signalés. Par exemple (fig. 4) pour transformer un cercle de distance (A, d), on transforme son centre et on garde le même rayon.

6) CONVENANCE D'UNE INTERSECTION.

Les intersections peuvent avoir à satisfaire à certaines conditions, provisoirement laissées en attente. Dans le problème du point, il faut qu'une intersection se situe dans une certaine portion du plan, représentant la mer. L'une des deux intersections se trouve à chaque fois rejetée (fig. 1, 2, 3, 4) comme ne répondant pas à cette condition.

Ceci illustre la notion de *convenance d'une racine* dans les problèmes d'algèbre. Elle enseigne par ailleurs l'analogie foncière entre les démarches de l'algèbre et celles de la géométrie. Cette analogie est au surplus commode à connaître.

7) DISCUSSION D'UN PROBLÈME.

Nous avons réservé cette question parce que, dans le problème du point, il n'y a justement aucune discussion. La position du navire est connue sans ambiguïté, à coup sûr.

Mais cette absence peut précisément éclairer la question de l'existence des solutions. Dans le problème ci-dessus on sait d'avance que la solution existe : le navire a nécessairement une position. Dans d'autres problèmes, au contraire, on ignore au commencement si le point cherché (le point ou tout autre objet) existe ; on saura, à supposer qu'il existe, qu'il répondra à telles conditions nécessaires ; mais ces dernières, en elles-mêmes, laisseront son existence hypothétique.

L'Inspection générale a rappelé notre attention sur cette question, en dégageant à cette occasion la notion de problème « spéculatif ». Le problème du point en Navigation est un net exemple de problème non spéculatif. Déjà, par conséquent, il participe à la compréhension de cette notion, par l'exemple contraire.

Nous pourrions citer, dans le même genre d'applications, un exemple de problème spéculatif, net et intéressant, mais il convient de nous limiter.

Nous pensons que ce très bref aperçu aura déjà montré l'intérêt, rien même qu'au point de vue théorique, de quelque ouverture de notre enseignement sur des choses réelles. Les théories mal comprises des élèves prennent toute leur netteté dans des applications effectives. Comment en irait-il autrement, puisque c'est la pensée mathématique elle-même, comme le fait voir l'épistémologie, qui exige du réel, pour abstraire ? La culture ne peut pas être « désintéressée », c'est-à-dire littéralement sans intérêt, sans raison... Entreprendre sans intérêt est une absurdité.

Nous pensons aussi que cet aperçu aura montré la facilité d'introduire quelques applications dans nos cours, sans préparation spéciale, sans « distraction » de la tâche officielle. Mais il va sans dire qu'un professeur serait bien intraitable, une fois le problème terminé, et ne serait-ce que pour détendre un instant les élèves (pédagogie de l'attention), de refuser de répondre à une question d'ordre purement technique qu'ils auraient à poser, pour avoir pris justement intérêt au problème. Ce peut être au contraire, pour le professeur, l'occasion d'un contrôle.

On pourra renvoyer les élèves, d'une façon générale, à une bibliothèque de classe : excellente raison pour un travail personnel. Il est invraisemblable d'ailleurs que les grandes lignes de la civilisation technique soient ignorées de l'« honnête homme » du xx^e siècle. Il appartient peut-être au professeur de Mathématiques de guider les élèves de ce côté ; ce serait pour nous un honneur. L'aperçu précédent montre en fait que cette direction se ferait d'elle-même : les applications se relient entre elles, peuvent être groupées en centres d'intérêt.

Nous nous permettons de signaler que les idées ci-dessus sont le résultat d'années de recherches et qu'elles ont été éprouvées en classe, surtout en Seconde. Les élèves prennent plaisir à exercer leur savoir, non plus seulement sur des « devoirs », mais, comme disait Descartes, « dans le grand livre du monde ».

Qui s'en étonnerait ?

C. DELAPIERRE.

(Ecole Militaire Préparatoire, Les Andelys).

POUR LE STAGE DE SEVRES 1956

Rappelons que le stage, dont l'organisation a été confiée à notre Association par M. le Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré, d'abord prévu pour les 22-24 mars, aura lieu à Sèvres, dans les locaux du Centre International d'Etudes Pédagogiques, du 1^{er} au 3 novembre prochain. Nous remercions Mme HATTINGUAIS, Directrice du Centre, de l'hospitalité qu'elle nous offre toujours si aimablement, se dépensant sans compter, ainsi que ses collaborateurs, pour faciliter l'organisation des stages.

Le Comité de l'A.P.M. a désigné un Comité d'organisation, comprenant : Mlle FÉLIX, MM. BIGUENET, CHAZAL, EDDE, FOUCHÉ, ITARD et WALUSINSKI.

Avec l'accord de l'Inspection Générale de Mathématiques les thèmes suivants ont été choisis :

1° La vision dans l'espace, problème de l'enseignement de la géométrie dans l'espace.

2° Les problèmes posés par l'initiation à l'algèbre.

3° Mathématiques, langage et symboles.

Le Comité d'organisation est heureux d'annoncer que MM. ITARD, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Henri-IV, et L. SCHWARTZ, professeur à la Sorbonne, ont accepté de faire les conférences d'introduction sur les thèmes 2 et 3.

Sans pouvoir donner des précisions définitives sur l'organisation du stage, nous ajouterons cependant :

a) Tous les Collègues désirant participer aux stages sont invités à poser leur candidature, par la voie hiérarchique, au Recteur de leur Académie.

b) Après les conférences d'introduction et un débat général, les études seront poursuivies par petits groupes. Les conclusions seront résumées et confrontées dans une réunion générale de synthèse.

c) Le *Bulletin* publiera le compte rendu des débats et les conclusions.

Enfin, tous les Collègues, futurs participants au stage ou non, sont invités à envoyer au Comité d'organisation leurs suggestions et avis. A titre d'information, et pour indiquer la perspective générale des questions à débattre, nous publions ci-dessous des plans d'étude relatifs aux trois thèmes choisis.

PREMIER SUJET : LA « VISION » DANS L'ESPACE

1. *Inventaire des difficultés* rencontrées par les élèves dans l'étude de la géométrie dans l'espace :

- Les éléments illimités.
- Connaissances insuffisantes de géométrie plane.
- *Représentation des figures.*
- L'orientation des figures dans l'espace.

2. *Modes de représentation :*

- La perspective.
- Perspective axonométrique.
- Construction de modèles.
- Géométrie descriptive et géométrie cotée.
- Emploi de la couleur.

3. *Solutions :*

— Etude des figures dans l'espace tout au long de la scolarité : les figures de l'espace comme sources de problèmes de géométrie plane (éléments limités).

— Programmes de Seconde et de Première : nouvelle répartition, introduction en Seconde des éléments illimités (droites, plans...) et propriétés métriques en Première (dans le plan et dans l'espace).

— Exercices de représentation des volumes dans les diverses classes ; coordination avec l'enseignement du dessin.

— Construction de modèles et étude des propriétés des modèles construits.

— Coordination avec l'enseignement de la physique (optique).

SECOND SUJET : L'INITIATION A L'ALGÈBRE

1. *L'algèbre et nous :*

— Questions de vocabulaire et de définitions : sommes-nous d'accord sur la signification du mot « algèbre » ?

— Questions de notation : histoire des notations et des notions ; état actuel ; insuffisances éventuelles de la codification.

— L'algèbre moderne et notre enseignement.

2. *L'algèbre et les élèves :*

— Les premiers exemples de calcul algébrique en Sixième, à propos de problèmes concrets ; possibilités d'extension.

— L'arithmétique littérale en Cinquième ; ses limites. La résolution d'équations simples.

— Les nombres relatifs en Quatrième : 1) modes d'introduction ; — 2) question de vocabulaire (nombres algébriques ou nombres relatifs) ; — 3) exercices de calcul : dictées de nombres, exercices d'origine concrète.

— Le calcul algébrique en Quatrième : résultats obtenus ; origine ou causes des difficultés.

— La résolution des équations : méthodes ; notion d'équivalence.

— L'étude des fonctions.

— Comment reprendre la définition et l'étude des nombres relatifs, puis les éléments de calcul algébrique en Seconde, puis en Mathématiques ou en Sciences Expérimentales.

— L'initiation aux méthodes de l'analyse à partir de la Seconde.

3. Importance croissante de l'algèbre :

— Dans les Mathématiques et dans les sciences.

— Pour les élèves qui se destinent à des études scientifiques.

— Pour les élèves qui se destinent à des études non scientifiques.

TROISIÈME SUJET : MATHÉMATIQUES, LANGAGE ET SYMBOLES

1. LANGAGE ; la langue maternelle et les Mathématiques :

1) Vocabulaire :

— Ce qu'il est : substantifs, verbes d'action, attributs ; — vocabulaire logique, conjonctions, expression des relations.

— Ce qu'il doit être : codification ; évolution.

2) Rédaction :

— Qualités du style : précision, concision, rigueur grammaticale, mémorisation.

— Langue écrite et langue parlée : différences et similitudes.

— Rédaction d'un énoncé : questionner pour faire chercher ou questionner pour vérifier les connaissances acquises.

— Corrigé de problème (du point de vue de la rédaction) : les exigences indispensables (orthographe...).

3) Adaptation du langage au niveau des connaissances des élèves :

— Expressions valables et expressions qui ne le sont pas ; expressions mal comprises (« faux-amis »...).

— Expressions générales introduites sur des cas particuliers.

— Expressions introduites prématurément (avant l'acquisition des connaissances mathématiques ou logiques qui les justifieraient).

— Evolution du problème au cours de la scolarité : tableau des acquisitions souhaitables selon les classes.

— Les exercices de rédaction : devoir, interrogation orale, exposé.

2. SYMBOLES :

1) Classification : substantifs, verbes et attributs ; symboles logiques.

2) La pensée et les symboles :

— Symbole, première expression de la pensée en gestation.

— Symbole, expression abrégée, condensée, d'une pensée élaborée ; mémorisation et algébrisation.

3) Les élèves devant le symbolisme :

— Compte rendu d'expériences.

— Exercices de traduction (thème et version) de la langue courante à l'écriture symbolique.

— Introduction progressive des symboles au cours de la scolarité : tableau des acquisitions souhaitables selon les classes.

4) *Codification des symboles et des notations :*

- Condition pour qu'un symbole nouveau soit introduit.
- Moyens de faire adopter les symboles codifiés.
- Action contre l'usage abusif ou défectueux.

3. CONCLUSION.

- La langue et les symboles mathématiques dans la vie moderne.

Première contribution aux sujets d'études

A. L'INITIATION A L'ALGÈBRE.

Je voudrais soumettre à l'attention des Collègues français de l'Enseignement du Second Degré les pensées suivantes sous forme de questions.

1) Ne vous êtes-vous pas aperçus que vos élèves, année après année, font les mêmes erreurs dans leurs calculs algébriques ? Que, si vous êtes correcteur aux examens, vous trouvez les mêmes erreurs chez les élèves de vos Collègues ? Et que si, moi qui vis en Grande-Bretagne et n'enseigne pas dans un lycée, je donnais une liste des erreurs recueillies dans les écoles londoniennes, vous trouveriez qu'elle coïncide, à peu près, avec la liste que vous pourriez établir ? Comment pouvons-nous expliquer cette *invariance* des erreurs qui les rendent indépendantes des changements de programmes, des systèmes scolaires, des langues utilisées, des religions des élèves, des croyances des maîtres ?

2) N'avez-vous pas tous connu le double phénomène du fort en arithmétique qui échoue en algèbre, et du faible en arithmétique qui se trouve dans son élément en algèbre ? Comment vous l'expliqueriez-vous ?

3) Ne vous semble-t-il pas clair que l'arithmétique et l'algèbre font appel à deux prises de conscience distinctes dans l'activité mentale ? Dans la première, est-ce que le résultat numérique ne dominerait pas la scène, empêchant le calculateur d'aller très profond dans l'examen de ce qu'il fait pour aboutir au nombre qui clôt son activité ? Dans la seconde, est-ce que l'accent n'est pas plutôt sur l'ensemble des opérations sous-jacentes en arithmétique, ce qu'on appelle la « structure de corps » ?

4) L'initiation à l'algèbre ne serait-elle pas précisément ce passage conscient d'un ensemble d'opérations portant sur un ensemble de nombres, à la dynamique de cet ensemble d'opérations, entraînant la formation dans l'esprit des élèves d'un ensemble dont les éléments sont des opérations ?

Il me semble que si ces questions sont comprises et transférées dans la réalité de la classe, l'initiation de l'algèbre se fera aisément *pour tous*. Ceci résulte, en fait, de notre expérimentation pédagogique.

B. LA VISION DANS L'ESPACE.

Il est rare qu'un professeur de Première, dans un lycée français, n'enregistre pas, au moins une fois par année, le phénomène de l'acquisition par quelque élève de la vision dans l'espace. Nombreux sont les élèves, bons en géométrie plane, qui ne parviennent pas à voir dans l'espace, quelquefois définitivement. Ce phénomène ne peut manquer de frapper le psychologue et bien qu'il y ait très peu d'études sur ce sujet, il me semble clair qu'on ne s'opposera pas aux énoncés suivants :

1) Vivre et agir dans un espace à trois dimensions n'entraîne pas automatiquement la « vision géométrique » dans l'espace.

2) La vision dont il s'agit est une opération mentale qui a lieu dans la représentation. Une fois acquise, elle devient un attribut permanent de la représentation.

3) Il ne s'agit pas de perception stéréognostique, mais d'un déclenchement volon-

taire qui permet de voir une figure comme plane ou à trois dimensions, selon les besoins. Cette vision diffère aussi de la perspective qui, suivant des lois spéciales, force l'œil à voir la troisième dimension.

4) Il reste encore à démontrer que la manipulation de modèles spatiaux entraîne cette aptitude. Il y a là un domaine de recherches qui pourrait être des plus fructueux.

Moins certaines sont les conclusions suivantes :

1) La vision dans l'espace est une « structuration fonctionnelle » brusque de la perception (Cf. notre livre sur *L'Affectivité*, appendice III) et peut être le résultat d'un apprentissage délibéré.

2) Elle correspond à la substitution d'une classe de positions à chaque perception et à l'utilisation mentale de cette classe au lieu de l'objet représentationnel. Ainsi un segment de droite est, dans le plan, un objet unique malgré ses déplacements permis, mais, dans l'espace, il est, soit un point, soit un élément de l'ensemble de toutes les visions correspondant à l'ensemble de toutes les positions.

3) C'est ce dégagement de la chose vue et la conception que l'ensemble des possibilités est potentiellement présent dans le champ du regard, qui constitue la vision dans l'espace et offre des difficultés aux personnes conditionnées d'une autre manière.

Il serait intéressant de savoir jusqu'à quel point les Collègues trouvent ces conclusions d'un certain secours.

C. GATTEGNO (*professeur à l'Université de Londres*).

TROIS ENQUÊTES DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE (C.I.E.M.)

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique, dont le Président est actuellement M. BEHNKE, Professeur à l'Université de Münster (Westphalie), et dont le Secrétaire est M. l'Inspecteur Général DESFORGE, a décidé, lors d'une réunion de sa Commission exécutive, à Genève, le 2 juillet 1955, de proposer aux Sous-Commissions nationales de l'Enseignement mathématique les trois sujets d'étude suivants :

- I. L'enseignement des Mathématiques jusqu'à l'âge de quinze ans.
- II. Les bases scientifiques des Mathématiques dans l'Enseignement Secondaire.
- III. L'étude comparée des méthodes d'initiation à la Géométrie.

Des rapports seront présentés sur ces questions au prochain Congrès international des Mathématiciens, à Edimbourg, en 1958.

La Sous-Commission française, présidée par M. le Doyen A. CHÂTELET, envisage d'établir trois importants rapports sur ces sujets. Pour cela, elle sollicite la collaboration de tous les Collègues, mathématiciens ou professeurs de Mathématiques, qui voudront bien contribuer à ces enquêtes.

Elle propose à leur réflexion les questions suivantes, qui n'ont évidemment aucun caractère limitatif, mais qui sont seulement destinées à faciliter, à ses débuts, ce travail nécessairement collectif.

ENQUÊTE I.

— Décrire ce qui est, ce qui se fait ; indiquer ce qui devrait être, ce qui pourrait se faire...

— Quels buts se propose ou devrait se proposer l'enseignement des Mathématiques.

ques jusqu'à quinze ans ? Corrélation entre ces buts et les méthodes pédagogiques employées ou à recommander.

— Quels sont les emprunts possibles à la vie courante qui peuvent inspirer la première initiation aux Mathématiques, en particulier dans la formulation des problèmes ?

- Les Mathématiques dans l'Enseignement du premier degré.
- L'introduction et l'étude des fractions.
- L'introduction et l'étude des nombres relatifs (affectés d'un signe).
- L'initiation au formalisme algébrique (règles de calcul, inconnues, etc...).
- La Géométrie rationnelle (par opposition à la Géométrie intuitive).

ENQUÊTE II.

— L'emploi des méthodes autoritaires et leur disparition progressive ; l'emploi des règles ; l'emploi des justifications intuitives.

— Grandeurs, nombres, opérations.

— Formation axiomatique des maîtres ; niveaux axiomatiques possibles aux divers stades de l'Enseignement.

— Fondements de l'Arithmétique (irrationnels compris).

— Les Mathématiques et le réel.

ENQUÊTE III.

— Quelles sont les méthodes d'initiation effectivement utilisées ou qui paraissent possibles ?

— Rôles de dessin géométrique et des modèles.

— Les diverses axiomatiques possibles et leur utilisation progressive.

— Les lacunes laissées dans l'Enseignement, celles qui sont comblées et celles qui ne le sont pas.

— Les raisonnements par continuité en Géométrie ; les axiomes correspondants ; les irrationnels.

— Les notions de mesures de longueurs et d'angles.

— La notion de vecteur et son utilisation.

— Questions d'orientation.

— La notion de convexité.

— L'initiation à la Géométrie dans l'espace.

— Correspondances et transformations.

*
**

Toutes les personnes qui voudront bien contribuer à ces enquêtes sont priées de faire une rédaction de leurs réponses (à une ou plusieurs des questions précédentes), ou en général, de leurs idées, et d'adresser ces textes, avant le 15 septembre 1956, aux Collègues suivants chargés du premier dépouillement des matériaux :

Enquête I : M. G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11^e.

Enquête II : M. P. DUBREIL, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5^e.

Enquête III : M. G. CHOQUET, Institut Henri-Poincaré, 11, r. Pierre-Curie, Paris, 5^e.

Une réunion de la Sous-Commission française, élargie à tous ceux qui auront bien voulu travailler pour l'une ou l'autre de ces enquêtes, aura lieu en novembre 1956 pour examiner les premiers résultats obtenus et poursuivre l'élaboration des rapports.

A. CHÂTELET, *Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Paris, ancien Président de la C.I.E.M.*

P. DUBREIL, *professeur à la Sorbonne, membre de la C.I.E.M.*

J. DESFORGE, *Inspecteur Général, Secrétaire de la C.I.E.M.*

≡ IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE ≡

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN ALLEMAGNE OCCIDENTALE *

LES UNIVERSITÉS

I. — APERÇU HISTORIQUE.

Les Universités allemandes ont une position privilégiée qui n'est peut-être pas compréhensible immédiatement à l'étranger ; elle peut s'expliquer historiquement. Les plus anciennes universités datent du ^{xiv}^e siècle, comme celles d'Heidelberg ou celle de Cologne, qui remontent, la première à 1386, la seconde à 1388. Ce sont des universités catholiques où la jeunesse de la chrétienté occidentale trouve la totalité des connaissances de l'époque, envisagées naturellement du point de vue de la scolastique.

La renaissance de l'humanisme et la Réforme provoquent la transformation des universités, et, en outre, en fait surgir de nouvelles, comme celles de Marbourg en 1527, d'Iéna en 1558, de Wurzburg en 1582. La redécouverte du génie grec, et en particulier l'admiration de l'académie platonicienne, accrédite la croyance en la fécondité de la connaissance libérée de tout préjugé. Les universités allemandes en reçoivent une nouvelle impulsion et connaissent un magnifique développement. Dès cette époque, l'étudiant itinérant est devenu traditionnel, et, encore aujourd'hui, la jeunesse se considère comme obligée de se déplacer, dans toute la mesure du possible, pendant ses études universitaires, afin d'échapper à l'influence exclusive d'une seule conception scientifique.

Une nouvelle mutation apparaît avec le ^{xviii}^e siècle, le siècle des lumières, époque que les Allemands appellent « Aufklärung ». L'Université de Halle voit le jour en 1694 et celle de Göttingue en 1737 ; toutes deux proclament l'autonomie de la raison et s'imposent le principe de la libre recherche. Les sciences exactes et naturelles font leur entrée dans ces deux universités, dont les professeurs sont astreints à la recherche personnelle, et bientôt les autres universités suivront leur exemple.

Le début du ^{xix}^e siècle voit le mouvement de résistance aux conquêtes napoléoniennes, qui est à l'origine de la création de l'université de Berlin, dont Guillaume de Humboldt fut le promoteur, et Fichte le premier recteur. Dès lors, les universités ont à peu près la physionomie qu'elles garderont jusqu'au ^{xx}^e siècle. Leur principe est que l'université est au service de la science, qu'il n'y a pas de science vivante sans recherche, et que nul ne peut y être professeur s'il ne s'est distingué dans la recherche.

Quelle est la situation actuelle ? La période prestigieuse des universités allemandes appartient au passé, et il y a d'immenses difficultés à les reconstruire, après deux guerres mondiales épuisantes, et perdues. La première condition est de recouvrer la liberté d'enseignement. Aujourd'hui, cette liberté semble se borner à l'interprétation des plans d'études, mais un passé récent a appris à connaître les intrusions gouvernementales, les abus de la part du corps enseignant et les grossières violences d'un régime dictatorial. Combien est précieuse la liberté d'enseignement, on l'a vu en Allemagne, entre 1933 et 1945, lorsqu'il était interdit de citer un auteur juif, et qu'exposer la théorie de la relativité d'Einstein était une attitude très suspecte, et on peut même se demander si elle est rétablie aujourd'hui, notamment en médecine et dans les Sciences Expérimentales.

Le souvenir reste donc vif de la glorieuse liberté qui caractérise la période de 1814 à 1914, et qui s'exprimait à la fois par l'indépendance des professeurs, et par la possibilité pour les étudiants de choisir les cours selon leur convenance, de les suivre sans aucun contrôle, et de circuler librement d'une université à une autre.

(*) Voir les deux premières parties de cette étude dans les *Bulletins* 175 et 176.

Aujourd'hui, l'université s'affronte à de nombreux problèmes. Son principe a toujours été la formation purement scientifique, et nullement la formation professionnelle, même chez les futurs maîtres des lycées. Ce sont là des vues idéales qui se heurtent de plus en plus aux exigences de la vie active, et qui créent une lacune particulièrement grave pour les mathématiciens. Klein a signalé cette discontinuité (*Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*) et il a consacré une grande partie de son activité à la recherche d'une pénétration réciproque plus étroite entre les Mathématiques à l'école et à l'université ; ce problème n'est nullement résolu.

D'autre part, la nécessité de la recherche scientifique est évidente, le grand public en a lui-même nettement conscience. Toutes ces considérations font que les universités occupent une place de choix dans les préoccupations gouvernementales et que leur reconstruction a une priorité dans les projets officiels. En conclusion, leurs perspectives d'avenir sont de nouveau favorables, si elles parviennent à concilier recherche et enseignement sans s'isoler du monde qui les entoure et des hommes qui y vivent.

II. — LES ÉTUDIANTS.

On dit souvent en Allemagne que l'université française est faite pour l'Etat, l'université américaine pour l'étudiant, et l'université allemande pour le professeur. Il y a dans cette boutade une part de vérité. Quand l'étudiant pénètre dans l'université de son choix, il éprouve le sentiment d'être négligeable, et de pénétrer dans le temple de la science, dont les professeurs sont les desservants. Ceux-ci choisissent les cours à leur convenance, en font un terrain d'expérience où ils construisent une théorie selon de nouveaux points de vue, sans préoccupation pédagogique, et sans que l'auditeur puisse s'aider d'un livre. Il en résulte que, si les étudiants rendent en général justice à leurs professeurs, ces derniers sont souvent portés à taxer les étudiants d'incapacité, d'inintelligence, et à les accuser de ne s'intéresser qu'à leur futur gagne-pain. Pourtant, les bacheliers qui entreprennent des études supérieures de Mathématiques constituent une sélection, et il serait imprudent d'accuser le lycée d'être incapable de juger les aptitudes scientifiques de ses élèves.

Notons que les étudiants sont nombreux, et qu'un cours peut avoir jusqu'à 200 auditeurs. Il y a d'autre part une nette discontinuité dans le passage du lycée à l'université ; l'enseignement du lycée se maintient dans l'intuition, tandis que, dans l'université, dès les débuts, les cours sont souvent exposés de manière abstraite et axiomatique et il en résulte pour l'étudiant un contraste pénible et qui devient même vite accablant. Il faudrait s'efforcer de réaliser l'« abstrait dans l'intuition » et d'obtenir un enseignement plus humain ; cela vaudrait aux professeurs une vive reconnaissance de la part des étudiants.

Beaucoup de débutants ne connaissent pas le succès, 25 à 40 % en calcul différentiel et intégral. Quelques-uns recommencent, la plupart changent d'orientation, et cela est d'autant plus fâcheux que ce ne sont pas nécessairement les plus médiocres qui abandonnent dès la première année. Notons enfin, et ce n'est pas le privilège de l'Enseignement Supérieur allemand, que les professeurs ont des obligations nombreuses et variées, qu'ils ont le souci légitime de leur carrière, laquelle dépend essentiellement de leurs succès scientifiques personnels, et on comprendra que finalement les étudiants aient à souffrir de toutes ces considérations.

Du fait même de la nouveauté des études supérieures mathématiques, on n'estime pas nécessaire, pour les aborder, d'avoir acquis une formation secondaire spécialisée ; par contre, une solide culture générale est indispensable, qui permettra de se faire une idée juste de l'évolution des Mathématiques, et d'y voir autre chose qu'une construction logique qui ne serait qu'un jeu de l'esprit.

Il est également indispensable que les étudiants puissent lire les ouvrages étrangers. Après la guerre, les étudiants arrivaient à l'université avec des connaissances fort incomplètes, et ils ne pouvaient pas lire le français. Maintenant, la situation est différente, grâce au travail en séminaire, et on peut interdire la participation aux séminaires à ceux qui ne peuvent lire, ni le français, ni l'anglais.

Il faut faire une dernière remarque, au sujet des étudiants qui suivent des cours de Mathématiques, sans être des spécialistes ; il s'agit des médecins, des pharmaciens et de ceux qui se destinent aux Sciences Expérimentales. Les professeurs se plaignent qu'ils ne peuvent pas écrire les simples formules qui sont exigées pour la compréhension de leurs cours de physique expérimentale. Pour ces étudiants, une solide formation mathématique scolaire est nécessaire. Nulle connaissance ne peut être significative en tant que science si elle n'est pas munie d'une solide armature logique ; pour cela, la Mathématique est un modèle dont la rigueur et la clarté ne peuvent être atteintes par aucune autre science, et enfin la vie actuelle est tellement imprégnée de Mathématiques, notamment dans la technique et dans l'économie, qu'on ne peut guère se passer d'une certaine formation dans cette science.

III. — LES INSTITUTS MATHÉMATIQUES.

Les instituts, qu'on appelle aussi séminaires, sont issus des petits séminaires qu'on trouvait autrefois dans toutes les universités, mais ils sont aujourd'hui beaucoup mieux équipés. Autrefois, l'institut était un simple local pour les maîtres de conférences et les assistants, où on tenait des séances de séminaire. On y trouvait une petite bibliothèque pour laquelle il n'était en général prévu aucun prêt ; elle était parfois utilisée par les étudiants, en présence des assistants, mais les heures d'utilisation étaient très limitées. L'installation était loin d'offrir les commodités d'une bibliothèque universitaire. A l'origine, une des raisons de la création des instituts fut précisément le désir de remédier aux insuffisances des bibliothèques universitaires, généralement pauvres en ouvrages mathématiques, et qui refusaient de faire des achats en rapport avec les besoins des mathématiciens.

Aujourd'hui, l'institut est le principal lieu de travail des étudiants et des professeurs ; les étudiants s'y retrouvent entre eux, et ils peuvent y avoir des contacts plus directs avec les professeurs, qui s'efforcent d'y passer la plus grande partie de leurs heures d'activité. Les étudiants peuvent utiliser la bibliothèque, où ils trouvent notamment la littérature internationale, et, parfois, comme à Fribourg ou à Munster, une section pour la pédagogie des Mathématiques et une collection d'ouvrages scolaires. Aussi le poste de directeur de l'institut n'est-il plus une fonction administrative accessoire ; il comporte une grande responsabilité intellectuelle à l'égard des jeunes générations d'étudiants.

L'avantage qu'on voit dans l'institution des séminaires est qu'elle évite à l'étudiant d'être confiné dans la solitude de sa chambre ; les idées qu'il peut former dans cette solitude sont peu de choses par rapport au profit qu'il peut retirer de discussions avec ses camarades. D'autre part, l'université ne constituait autrefois qu'une moitié de la vie de l'étudiant ; l'autre appartenait à l'activité des associations. Cela n'existe plus, d'où un vide très sensible que le séminaire contribue à combler. Par contre, on fait grief aux instituts d'aboutir à une fragmentation de l'université en écoles professionnelles, et d'assujettir étroitement les étudiants à leurs professeurs, ce qui est contraire aux traditions universitaires. Ce à quoi on objecte que le souci de la formation professionnelle et du développement de la personnalité n'implique pas nécessairement la perte de la liberté, tout dépend de la manière dont les choses se passent en pratique ; au surplus, comment ne pas fragmenter l'activité de l'université, quand on a affaire à 6.000 étudiants ?

IV. — LES ÉTUDES.

Pour tous les débutants qui visent quelque examen mathématique, sont prévus, pendant les deux premiers semestres, des cours de calcul infinitésimal et de géométrie analytique. Il y a encore d'autres cours et travaux pratiques, dont nous reparlerons, au total une douzaine d'heures hebdomadaires, mais en principe la présence n'est pas obligatoire et l'assiduité n'est pas contrôlée. Il y a jusqu'à 200 auditeurs en calcul différentiel, dont une bonne moitié seront des mathématiciens spécialistes, les autres des physiciens ou des naturalistes, etc... Les cours diffèrent naturellement beaucoup d'un professeur à l'autre ; il n'y a pas d'instructions officielles pour le choix des

matières, et aucun livre de cours, même si le professeur est l'auteur d'ouvrages ; c'est une tradition, comme nous l'avons déjà signalé. Mais il y a naturellement à chaque époque un style général qu'on retrouve partout plus ou moins. Dans le passé, l'enseignement ne pouvait pas ne pas subir l'influence de mathématiciens comme Kowalewski, Toeplitz, Weierstrass. Dans les dix dernières années, les cours ont subi l'influence des idées d'Elie Cartan, particulièrement fertiles dans l'extension de formules classiques (Gauss, Green, Stokes) aux espaces à n dimensions.

Plus récemment encore s'est manifestée l'influence bourbakiste, qui fait apparaître de nouvelles perspectives par sa construction originale et systématique des Mathématiques. Les conceptions bourbakistes permettent de rapprocher et d'unifier différentes notions (par exemple les intégrales de Riemann, de Stieltje, de Lebesgue), et fournit une introduction adéquate à la topologie qui, déjà à l'époque prébourbakiste, s'était développée en une branche autonome et importante étudiée pendant le deuxième semestre (à partir du théorème de Heine-Borel).

Tout cela demande à être élaboré, pour être mis à la portée du débutant moyen. Pour le moment, si nous vivons une sorte de siècle de la « totale bourbakisation », il faut reconnaître que ces théories ne font pas grand cas des étudiants qui ne sont pas supérieurement doués. Le problème reste posé, de trouver la méthode convenable, qui reste dans un juste milieu. Si nous sommes trop abstraits, nos étudiants nous suivent encore ; mais les physiciens protestent, car ils ont besoin de gens qui résolvent des problèmes concrets, et non pas qui restent dans les nuages, à jongler avec des symboles abstraits.

A côté du cours de calcul infinitésimal, il y a, pour les deux premiers semestres, un cours de géométrie analytique, titre qui peut recouvrir des contenus très différents. Au début du siècle, on s'inspirait des ouvrages bien connus de Salmon, du programme d'Erlangen, de la géométrie projective sous forme axiomatique. A quoi s'ajoutent aujourd'hui le calcul vectoriel, le calcul matriciel. Dans certains cours, il s'agit, partant d'un système d'axiomes comme ceux de Hilbert pour la géométrie euclidienne, ou d'un système équivalent, de montrer comment on peut en déduire les théorèmes de la géométrie élémentaire, ou de démontrer l'isomorphie entre les figures géométriques et des expressions connues et définies dans le corps des nombres réels.

Ces cours sont précieux pour les futurs professeurs de Mathématiques, mais s'ils s'adressent aux débutants, les physiciens pourront encore à bon droit protester. Ces vues, bien que profondes et belles, leur sont inutiles ; ce qu'il leur faut, c'est la connaissance des vecteurs, du calcul dans l'espace à trois dimensions, les déterminants, les matrices, et tout cela au plus tôt. C'est pourquoi il existe dans certaines universités, Berlin en particulier, un cours d'introduction destiné à alléger le cours principal et à ménager une meilleure transition entre le lycée et l'université.

Ceci pose le problème des cours de Mathématiques pour les non spécialistes, comme chimistes, biologistes, économistes. Tous voudraient posséder les méthodes générales essentielles qui leur sont nécessaires, mais voudraient les acquérir avec le minimum de théorie. Satisfaire ce vœu, dit l'auteur, c'est « comme l'œuf de Christophe Colomb ». Personne ne s'en charge volontiers, si bien que les Mathématiques finissent par être négligées dans les examens relatifs à ces catégories d'étudiants. En somme, le problème se pose aussi dans les classes supérieures des lycées, et un professeur de lycée expérimenté serait sans doute le plus compétent pour résoudre ces difficultés.

Nous avons parlé jusqu'à présent des étudiants débutants, les seuls qui entrent dans le cadre du livre étudié, puisque celui-ci se fixe l'âge extrême de 21 ans. Mais il est évidemment impossible de fixer une frontière nette, puisque les étudiants ne sont pas répartis par années, et qu'ils suivent tel ou tel cours à telle ou telle époque selon leurs préférences personnelles. Par exemple, certains étudient la théorie des fonctions dès le troisième semestre, tandis que d'autres attendent, pour le faire, le sixième.

Quatre cours essentiels sont prévus pour la période intermédiaire des études :

la théorie de la mesure de Lebesgue ; les équations différentielles ; la théorie des fonctions ; la géométrie différentielle.

Le premier est moins fréquenté généralement que les trois autres ; il est parfois remplacé par un cours sur la théorie de l'intégration dans le style Bourbaki.

Le cours sur les équations différentielles est le plus fréquenté, notamment par tous ceux qui veulent aborder les études de physique avec le bagage mathématique indispensable. Pour des raisons historiques, ce cours est fait en liaison avec la théorie des groupes de Lie.

Le cours sur la théorie des fonctions offre évidemment de grandes possibilités de varier le mode d'exposition, mais le plus riche en vues générales et en connexions avec d'autres domaines, c'est le cours de géométrie différentielle. Il importe de ne pas négliger ces digressions par souci de purisme, car on ne peut demander aux auditeurs de les trouver eux-mêmes. Citons, par exemple : théorie de la représentation des surfaces et introduction à la cartographie ; représentation conforme locale et conception des surfaces à trois dimensions comme surfaces de Riemann ; démontrer élémentairement que la surface sphérique n'est pas applicable sur un plan ; démontrer le théorème sur la somme des angles d'un triangle géodésique à l'aide du théorème de Gauss-Bonnet.

On peut faire des remarques analogues à propos de l'algèbre ; depuis l'apparition du livre de Van der Waerden, les cours se sont fort modernisés ; les concepts de groupe, de corps et d'anneau sont devenus usuels ; la théorie de Galois occupe sa juste place, et on veille à ce qu'elle ait sa pleine signification, afin que les futurs professeurs puissent, avec son aide, faire la lumière sur les classiques problèmes de construction.

La géométrie est traitée très inégalement dans les diverses universités ; dans certaines, il n'y en a pas, en dehors des cours de géométrie analytique et de calcul différentiel ; dans d'autres au contraire, comme Fribourg, on retrouve la géométrie dans de nombreux autres cours. Il faut citer essentiellement les leçons sur les fondements de la géométrie, et celles sur la topologie.

Les premières étaient importantes, surtout avant la première guerre mondiale (influence de Hilbert) ; elles le sont beaucoup moins aujourd'hui et c'est sans doute regrettable, car elles sont particulièrement précieuses pour éclairer la géométrie élémentaire des lycées.

La topologie est importante pour la recherche moderne dont le préliminaire naturel est la connaissance des espaces topologiques. Ici encore le cours Bourbaki a fait surgir un tout autre aspect. Le leitmotiv de Bourbaki est de faire une construction neuve des Mathématiques. Ce n'est pas la géométrie élémentaire ni les nombres réels, qui donnent la base d'une construction mathématique totale, du moins pour les mathématiciens expérimentés, ce sont les structures fondamentales : algèbre, structures d'ordre, espaces topologiques. On obtient alors une meilleure économie dans le système d'axiomes, et les groupes, sur lesquels Klein avait autrefois attiré l'attention, ne sont plus qu'une structure parmi les autres.

Ce serait une erreur de croire qu'il en résulte un accroissement des matières à étudier, et une surcharge pour l'étudiant. L'idée bourbakiste essentielle est d'arriver à un meilleur groupement des sujets, à une présentation plus économique, plus resserrée et plus rigoureuse. Il y a des sujets qui passent au second plan, et c'est seulement la capacité de pensée abstraite qui croît constamment. Il y a d'ailleurs eu de tout temps des disciplines mathématiques pour lesquelles, d'un point de vue purement scientifique, on aurait pu souhaiter des leçons universitaires ; mais il faut faire un choix, et le souci primordial est de favoriser les trois grandes branches que les futurs professeurs ont à connaître et à enseigner : analyse, géométrie et algèbre.

En résumé, Bourbaki veut nous procurer une meilleure possibilité de dominer l'ensemble des Mathématiques, et c'est pourquoi il y a lieu, dans nos cours, de prendre ses idées en considération.

A côté des matières essentielles que nous venons de passer en revue, il y a

encore des connaissances qui sont exigées des futurs maîtres, et sur l'importance desquelles l'administration insiste constamment : la géométrie descriptive, la géodésie élémentaire, l'astronomie mathématique. Le professeur doit être mis en état d'animer son enseignement par des applications et, par là, d'intéresser les esprits plutôt tournés vers la pratique. Mais on rencontre ici une résistance muette de la part de nombreux professeurs qui, absorbés par leurs préoccupations théoriques, interprètent très libéralement leurs obligations à cet égard. On dit parfois : si un étudiant a pu comprendre les méthodes modernes des hautes Mathématiques, il lui sera facile d'étudier seul les parties élémentaires des Mathématiques appliquées. C'est peut-être vrai en théorie, mais il est probable que l'étudiant n'agira pas ainsi, si on ne l'a pas déjà intéressé à ces applications à l'université.

Aussi se préoccupe-t-on de plus en plus d'instituer des leçons sur la pratique et la didactique de l'enseignement mathématique, afin d'améliorer la capacité professionnelle des étudiants, d'éviter qu'ils soient exclusivement intéressés par la recherche abstraite peut-être inféconde pour les Mathématiques scolaires, et aussi de leur éviter de regrettables désillusions tout au long de leur future carrière ; qu'ils ne soient pas amenés plus tard à adopter l'attitude de ces professeurs qui reçoivent les stagiaires qu'on leur confie en disant : « Commencez par oublier tout ce que vous avez appris à l'université. »

Les adversaires d'une telle formation invoquent les principes traditionnels de l'université allemande : pas de formation professionnelle, seulement la formation scientifique ; la pédagogie s'acquiert pendant les années de stage, et on reprend l'argument, « qui peut le plus peut le moins », oubliant ainsi que le succès dans une science ne dépend pas seulement de l'intelligence, mais aussi du goût que l'on éprouve pour cette science, et qui n'existera pas si on ne l'a pas éveillé à l'université.

Il est certain que si des leçons de pédagogie mathématique devaient présenter à l'étudiant une technique rigide et sans vie, il vaudrait autant ne pas les faire. Et ce n'est pas encore aujourd'hui que de telles leçons résoudreont le difficile problème de la formation des maîtres. Il y a toujours lieu de réaliser de meilleures liaisons entre les Mathématiques de l'école et celles de l'université, comme le souhaitait déjà Klein.

Quelques mots enfin sur l'histoire des sciences ; nombreux sont ceux qu'elle intéresse, dans leur souci de formation générale des étudiants. La compréhension historique est en effet de plus en plus nécessaire en un temps où tous les exposés se font de plus en plus axiomatiquement. On risque d'en retirer une impression d'arbitraire dans le choix des axiomes, les Mathématiques semblent un jeu de l'esprit, et le mathématicien un homme qui ne suit que sa fantaisie.

Ces erreurs ne se produiront pas si l'on apprend à connaître la laborieuse évolution des Mathématiques au cours des siècles. Alors on voit dans les Mathématiques une chaîne de magnifiques découvertes dues au labeur de l'intelligence humaine. Mais gardons-nous de voir dans l'histoire des sciences une panacée ; il importe qu'elle ne soit pas étudiée pour elle-même, et qu'elle ne soit pas une collection de faits et de dates ; c'est pourquoi il n'y a pas lieu de l'imposer.

Terminons en signalant qu'au cours des semestres intermédiaires d'études, les étudiants mathématiciens ont à choisir une deuxième matière, qui est souvent la physique, bien que ce choix implique un travail très lourd (35 heures par semaine, en y comprenant les travaux pratiques). Mais la deuxième matière est aussi la chimie, ou la biologie, la géographie, la religion, ou l'éducation physique. Les directeurs d'instituts mathématiques apprécient cette diversité des matières, bien qu'elle entraîne des difficultés dans l'assiduité aux cours, en particulier pour ceux qui ont choisi l'éducation physique. Mais elle apporte plus de variété et d'animation dans la vie de l'étudiant, pour lequel l'étude exclusive des Mathématiques constitue un cadre trop étroit.

« ... tout plein de choses dignes d'estre sceues... »

Eléments d'algèbre moderne, par A. LENTIN et J. RIVAUD, Vuibert, éditeur, Paris, 1956 ; un volume de 284 pages, 2 000 F.

De même qu'un écrivain est consacré le jour où son œuvre fait l'objet d'une thèse en Sorbonne, des Mathématiques nouvelles sont en passe de devenir classiques quand de bons manuels les mettent à la portée du public scolaire. Le petit livre de DELACHET et QUEYSANNE, déjà signalé ici, s'adressait au grand public cultivé et lui donnait une idée de l'esprit nouveau de l'algèbre. Nos Collègues LENTIN et RIVAUD ont aussi fait œuvre utile pour cette liaison entre les Mathématiques qui se font et celles qui s'enseignent, en s'adressant plus particulièrement aux élèves des classes de Spéciales et de Mathématiques Supérieures, en traitant les questions qui sont aux programmes de ces classes. Mais leur livre sera lu avec un égal intérêt et autant de profit par tous les Collègues qui ne voudraient pas aborder la lecture des grands traités sans préparation.

A ces mérites déjà suffisants s'ajoute celui de fournir une réponse (ce n'est sans doute pas la seule) à une question souvent posée : de l'algèbre moderne, que pouvons-nous, que devons-nous « faire passer » dans notre enseignement ?

Eh bien, voici un cours possible, voici une réalisation. Est-elle tellement révolutionnaire ? L'algèbre moderne, par ses raisonnements sur les *opérations*, indépendamment des éléments sur lesquels elles portent, retrouve l'unité sous la diversité, mettant à nu les *structures*, abstractions nouvelles ; les auteurs notent justement : *Logiquement et pédagogiquement une abstraction ne se conçoit que sur la base d'un « concret » préalable — disons : sur une PRATIQUE antérieure intuitivement assimilée. Nous avons fait notre possible pour rattacher les notions nouvelles aux connaissances acquises dans les classes précédentes.*

D'autre part, de nombreux exercices, en fin de paragraphes, permettent au lecteur de vérifier qu'il a bien compris les notions nouvelles. Des exercices plus développés, des compléments, figurent à la fin des cinq livres en lesquels se subdivise l'ouvrage. Les auteurs ont eu raison d'attacher autant d'importance aux exercices ; d'abord, ils rendront service à leurs lecteurs, et puis on ne pourra plus dire que ces notions d'algèbre moderne ne se prêtent pas à des applications graduées.

Passons rapidement en revue la table des matières. Le livre I, « Groupes, anneaux et corps », établit les notions générales : ensembles, lois de composition, structures, relations d'équivalence, relations d'ordre, notions d'application et d'isomorphisme ; structure de groupes et groupes de substitution ; structure d'anneau et exemple de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, de l'anneau des classes résiduelles modulo n ; structure de corps et corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Le livre II concerne les anneaux de polynômes : polynômes à une indéterminée, P.G.C.D., corps des fractions rationnelles ; polynômes à plusieurs indéterminées.

Le livre III, « Algèbre linéaire », comprend l'étude des espaces vectoriels à n dimensions, les déterminants, les équations linéaires et des notions sur l'algèbre des matrices.

Le livre IV étudie le corps des réels et l'isomorphisme fondamental de ce corps, puis le corps des complexes. Il se termine par une note sur les quaternions.

Le livre V donne des compléments sur les groupes et une introduction à la théorie de Galois.

Comme cela est particulièrement indispensable dans un tel ouvrage, un index permet de retrouver la définition des mots nouveaux. Il est cependant bon de remarquer que les auteurs ont eu le souci de limiter l'enrichissement du vocabulaire ; leur rédaction y gagne en clarté. La typographie simple et bien aérée participe également à la bonne présentation d'un livre que ses lecteurs auront plaisir à trouver à

portée de la main dans leur bibliothèque. Et puisque les nouveaux programmes des classes de Spéciales et de Mathématiques Supérieures vont bientôt être appliqués, la publication de ces « *Eléments d'algèbre moderne* » arrive à son heure.



La géométrie de Descartes, par Jean ITARD, une brochure de 16 pages, collection « Les Conférences du Palais de la Découverte », en vente au Palais de la Découverte (Série D, n° 39).

Dans la déjà riche collection de brochures éditées par le Palais de la Découverte (et qui reproduisent les conférences faites régulièrement chaque samedi sur les sujets scientifiques les plus variés), nous avons plaisir à signaler le bel exposé de notre Collègue ITARD sur la Géométrie de Descartes. Même pour ceux qui ont eu le plaisir d'entendre sa conférence, le 7 janvier 1956, il y a profit à relire cette étude si claire et pourtant si complète des sources de Descartes, et de revivre, grâce à son talent d'historien des Mathématiques que les lecteurs du *Bulletin* ont pu apprécier, la genèse des idées nouvelles qui font la gloire méritée de Descartes. La classification des « courbes géométriques » et des « courbes mécaniques » est une de ces idées dont la portée n'a pu être appréciée que par la suite du développement des études analytiques. ITARD, réfutant, preuves à l'appui, ceux qui voient en Descartes un plagiaire de certains mathématiciens antérieurs, conclut très justement : Racine et Shakespeare ne sont pas des plagiaires parce qu'ils ont pris leurs sujets chez des auteurs anciens ; la pensée de Descartes a pu trouver chez d'autres ses premières inspirations ; mais Descartes n'est jamais à l'aise quand il imite ; il donne toute sa mesure quand il crée. Et il a bien fallu que sa création soit géniale pour dominer comme elle l'a fait trois siècles de travaux géométriques et algébriques.

N.-B. — Profitons de cette occasion pour signaler que des brochures du Palais sur les questions de Mathématiques et d'Astronomie sont disponibles. On peut les commander au Palais de la Découverte, en ajoutant au prix (indiqué ici entre parenthèses) les frais d'envoi, sachant que les prix sont diminués de 10 % pour les membres de l'enseignement. Les envois en province sont faits par le Palais contre remboursement.

Demander le catalogue de ces brochures ; s'il est trop important pour être cité ici, notons tout de même quelques titres (les prix entre parenthèses) : BOULIGAND, Aux lisières de la géométrie différentielle (107) ; CHÂTELET, L'arithmétique des idéaux (65) ; P. DUBREIL, Les relations d'équivalence et leurs principales applications (88) ; JULIA, L'espace hilbertien (75) ; LICHNEROWICZ, Géométrie différentielle et topologie ; DUGAS, De Descartes à Newton, par l'Ecole anglaise (70) ; TATON, La géométrie projective en France de Desargues à Poncelet (60), L'histoire de la géométrie descriptive (110) ; P. COUDERC, Sur la Relativité (55), L'Univers est-il en expansion ? (62).



« L'enseignement mathématique ».

Dans le *Bulletin* 170, nous avons annoncé la parution d'une nouvelle série de la revue internationale « L'Enseignement mathématique », fondée à Genève par H. FEHR et C.-A. LAISANT, en 1899 et qui était attentivement suivie par les Collègues français avant cette guerre.

La nouvelle série vient de paraître : tome I, fascicules 1, 2, 3 et 4 (les trois premiers réunis en un volume). On sait que la revue est l'organe officiel de la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique*. A ce titre, elle publie les communiqués et rapports de cette Commission, comme, dans ce tome, les contributions à l'enquête sur « le rôle des Mathématiques et du mathématicien à l'époque contemporaine », instituée à l'occasion du Congrès d'Amsterdam (1954).

Mais M. KARAMATA, professeur à l'Université de Genève, qui dirige la Revue, veut maintenir et même étendre son rayonnement. C'est le rôle des articles généraux qui seront orientés, plus encore dans les tomes suivants que dans celui-ci, vers la culture mathématique générale et les problèmes de la pédagogie des Mathématiques.

Ce premier tome a le mérite de nous faire connaître la conférence prononcée par M. LICHNEROWICZ, à l'Université de Genève, sur « *La Communauté des savants* » et de fournir une réédition d'une étude de H. LEBESGUE, sur « *L'œuvre mathématique de Vandermonde* », qui n'était pas facilement accessible dans le tome IV de THALÈS où elle avait paru en 1939. Citons encore au sommaire, un article de VAN DER WAERDEN sur les Mathématiques appliquées dans l'Antiquité, et de A. OSTROWSKI une étude sur les critères de convergence et divergence dus à V. ERMAKOF.

Les fascicules sont complétés par des notes bibliographiques abondantes qui donnent les tables des matières détaillées des nouveaux ouvrages. Insistons enfin sur la présentation impeccable de cette revue, qualités de l'impression, du papier et du brochage qui justifient son prix : abonnement pour un tome, 2 000 F ; le dépositaire pour la France est le S.E.V.P.E.N., 13, rue du Four, Paris, 6^e ; C.C.P. Paris 9060-00.

Grâce à l'obligeance de M. KARAMATA, nous pouvons communiquer aux Collègues que cela intéresserait l'index général des 40 tomes de la première série. Pour les conditions de vente des quelques collections complètes encore disponibles, s'adresser directement à M. KARAMATA, Institut de Mathématiques, Genève.



La mesure des grandeurs, par H. LEBESGUE, Gauthier-Villars, éditeur, un volume de 188 pages, prix : 1 600 F (port en sus 70 F).

On sait que cet ouvrage classique est constitué par la réunion des articles écrits par H. LEBESGUE, pour « *L'Enseignement mathématique* », de 1931 à 1935. Le premier tirage était épuisé ; cette réédition sera appréciée. Peu de mathématiciens ont su aussi brillamment que LEBESGUE allier le génie de la découverte et le souci de l'enseignement. Le présent volume ouvre donc sous les meilleurs auspices la nouvelle collection des monographies de *L'Enseignement mathématique* (bien que l'ouvrage soit diffusé en France par Gauthier-Villars où il rejoint au catalogue les autres œuvres de LEBESGUE).

LEBESGUE précisait très exactement ses intentions :

« Je me suis efforcé de traiter les questions de façon aussi simple et aussi concrète que possible, sans sacrifier pour cela la rigueur logique. Cet idéal pourra paraître quelque peu archaïque à l'époque où les considérations abstraites et savantes jouent un rôle capital jusque dans les sciences expérimentales ; mais ceux à qui sont dues ces considérations ont pu se mouvoir dans l'abstraction et faire cependant œuvre utile précisément parce qu'ils avaient un sens particulièrement aigu de la réalité. C'est ce sens qu'il faut s'efforcer d'éveiller chez les jeunes ; après, mais après seulement, le passage à l'abstrait peut être profitable ; lorsque sous l'abstrait on continue à voir le concret et, dans le général, tous les cas vraiment utiles. »

Rappelons les grandes divisions du livre : Comparaison des collections et nombres entiers ; Longueurs et nombres ; Aires planes ; Volumes ; Longueurs des courbes et aires des surfaces gauches ; Grandeurs mesurables ; Intégration et dérivation ; Conclusions.

Ces dernières comportent un paragraphe sur le rôle du professeur de Mathématiques. Pouvons-nous les relire avec profit ? J'ai été surpris, achoppant sur ce jugement sévère de la méthode dite de « *redécouverte*, qui consiste à guider les élèves vers certains raisonnements catalogués, toujours les mêmes... ». Cependant LEBESGUE remarque que si la méthode de redécouverte était la véritable méthode de

découverte, ça se saurait, que dans la découverte il y a quelque chose d'inhabituel et il faut donc faire sentir aux élèves que dans les Mathématiques il y a aussi la place de l'intelligence. Par-delà des jugements sévères et des boutades qui peuvent encore nous surprendre, nous trouvons donc matière à réflexion dans ces conclusions, réflexion sur notre métier : « *Il faut faire concevoir aux élèves qu'en dehors des Mathématiques on ne démontre rien mathématiquement et que, pourtant, la logique est utile en toutes circonstances. Les Mathématiques ont été créées par les hommes pour leurs besoins et elles leur sont, en fait, un auxiliaire précieux ;* LE PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES DOIT RESTER UN PROFESSEUR D'ACTION. »

Quand il faudra définir la place de l'enseignement des Mathématiques dans la future (oui, je dis future) réforme de l'enseignement, pourra-t-on mieux dire ?



Initiation au calcul matriciel, par A. MONJALLON, Vuibert, éditeur, un vol. 125 pages, prix : 700 F.

Par ses applications en Physique et dans les Sciences économiques, le calcul matriciel doit être connu aujourd'hui d'un nombre croissant d'usagers. On apprend à effectuer pratiquement les opérations arithmétiques avant d'en étudier la théorie complète (pour le cas favorable où cette étude est réellement faite). M. MONJALLON a pensé qu'il pouvait en être de même pour les matrices ; laissant de côté les démonstrations trop abstraites, il s'est donc efforcé de faire comprendre les règles fondamentales

Après avoir défini les matrices, il expose la théorie des déterminants. Ces connaissances sont utilisées à l'étude des systèmes d'équations linéaires ; la multiplication des matrices est alors facilement conçue. Viennent ensuite les transformations linéaires et la notion de matrices semblables, les formes quadratiques et les matrices orthogonales. Un long chapitre de compléments permet de traiter des opérations sur les matrices et d'introduire la notion de matrice adjointe. Puis viennent les applications à la géométrie.

Le livre qui rendra service à tous ceux qui veulent acquérir rapidement une première connaissance du sujet, se termine par 27 exercices et un index.

G. W.

Livres reçus

— *Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique*, par R. CAMPBELL, Masson, éditeur, 272 pages ; broché, 2 400 F ; relié, 2 900 F.

— *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*, par L. BRILLOUIN et M. PARODI, Masson, éditeur, 348 pages, broché, 4 000 F ; cartonné, 4 600 F.

— *Colloque sur les questions de réalité en géométrie* (Liège, 23-26 mai 1955), Masson, éditeur, 196 pages ; 1 900 F.

— *La géométrie et le problème de l'espace*, par F. GONSETH, Dunod, éditeur (Tome VI, Le problème de l'espace), 172 pages.

— *Analyse dimensionnelle et théorie des maquettes*, par H.-L. LANGHAAR, traduit de l'américain par C. CHARCOSSET, Dunod, éditeur, 230 pages.

— *La Trigonométrie*, par R. CAMPBELL, un volume de la collection « Que sais-je ? », P.U.F.

— *Annales de Propédeutique* ; 1. Mathématiques générales ; 2. M.P.C. et S.P.C.N. ; *Annales du concours d'admission aux Ecoles normales primaires* ; *Annales corrigées du Baccalauréat* ; *Annales corrigées du B.E.P.C.* ; *Annales du Brevet d'Enseignement industriel*, Vuibert, éditeur.

— *Dictionnaire de Mathématiques*, par A. JOLY, Hachette, éditeur.

≡ V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS ≡

Rapport sur le concours de l'agrégation de Mathématiques (Femmes) en 1955

Le Jury de l'Agrégation féminine de Mathématiques en 1955 était composé de la façon suivante : M. VILLAT, membre de l'Institut, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Paris, président ; M. DESFORGE, inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président ; Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (classe de Fontenay) au Lycée Fénelon ; M. PAILLOUX, professeur à la Faculté des Sciences de Caen ; M. PÉTRUS, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

Pour les épreuves pratiques et orales auxquelles M. VILLAT n'a pu assister, la présidence a été assurée par M. DESFORGE, et M. VILLAT a été remplacé numériquement par M. ROSEAU, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Poitiers.

La session du concours a duré du 31 mai, date du début des épreuves écrites, au 1^{er} août. Les résultats d'admissibilité ont été donnés le 7 juillet. Les épreuves pratiques et orales ont eu lieu au Lycée Fénelon, à Paris, à partir du 12 juillet.

Candidates inscrites. — Le nombre des candidates inscrites était soixante-dix-neuf. Voici leur origine :

- huit élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, dont deux accomplissaient une quatrième année à l'Ecole ;
- quatre élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ;
- trois auditrices à l'Ecole Normale Supérieure, dont l'une était professeur en congé ;
- vingt-sept professeurs titulaires en exercice ;
- un professeur titulaire en congé ;
- une adjointe d'enseignement titulaire en exercice ;
- vingt et un élèves-professeurs accomplissant leur année de stage dans un Centre pédagogique régional ;
- quatorze étudiantes (Paris et province), dont une était déjà titulaire du certificat d'aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S.).

EPREUVES ECRITES

Soixante et une candidates seulement ont pris part à la première épreuve écrite ; trois ont abandonné le concours après la composition des Mathématiques Élémentaires ; une, après la composition de Mathématiques Spéciales ; une encore, après la composition de Calcul différentiel et intégral. Il y a donc eu vingt-trois défections, totales ou partielles. Ce groupe, trop important, de défaillantes comprend :

- dix professeurs et une adjointe d'enseignement titulaires en exercice ;
- onze élèves-professeurs des Centres pédagogiques régionaux ;
- une étudiante (province).

Il est à noter que l'une de ces candidates a eu grand tort de ne pas se présenter pour la quatrième épreuve alors qu'elle avait fait les trois premières et qu'elle avait ainsi réuni un total assez convenable qui, complété par une note moyenne en mécanique, pouvait lui donner l'admissibilité.

Cinquante-six candidates ont donc achevé les épreuves écrites. Pour elles, le total des notes relatif à l'ensemble des quatre compositions varie de 59 à 12,5 sur 80, c'est-à-dire de 14,75 à 3,1 sur 20.

La répartition de ces notes d'ensemble est la suivante : quatorze sont supérieures à 10 sur 20 (un 14,75 ; deux 13 ; cinq notes entre 12 et 13 ; trois entre 11 et 12 ;

trois entre 10 et 11) ; quatre sont comprises entre 9 et 10, onze entre 8 et 9, neuf entre 7 et 8. Viennent ensuite : huit notes entre 6 et 7, sept entre 5 et 6 et trois entre 3 et 5. On remarque le nombre important de notes comprises entre 7 et 9 : vingt en tout, présentant d'ailleurs entre elles des écarts très faibles.

Les trente-huit premières candidates de ce classement ont été déclarées admissibles. La moyenne de la dernière admissible est légèrement supérieure à 7 sur 20.

La moyenne de l'écrit pour les trente-huit admissibles est 9,6 sur 20 ; elle est 5,5 pour les non-admissibles, et 8,2 pour l'ensemble des candidates.

Sans attacher une valeur stricte à la comparaison des notes et des moyennes correspondant aux sessions successives, — car bien des causes accidentelles peuvent modifier, une année ou l'autre, l'allure du concours —, il n'est pas sans intérêt de remarquer que les écarts entre les notes extrêmes, pour l'ensemble des épreuves écrites, sont très sensiblement les mêmes depuis quelque temps : de 15 à 3 en 1953 ; de 14 à 2,5 en 1954 (sans tenir compte, ici, de la note exceptionnelle 17,5 de la candidate classée en tête) ; de 14,75 à 3,1 en 1955. Quant aux moyennes générales de l'écrit pour les admissibles, pour les non-admissibles, et pour l'ensemble des candidates, elles se présentent ainsi :

en 1953	11	6,5	8,7
en 1954	8,6	4,4	6,6
en 1955	9,6	5,5	8,2

On voit que, malgré l'augmentation sensible du nombre des admissibles par rapport aux années précédentes (trente-huit en 1955, au lieu de trente-deux en 1954 et de trente et une en 1953), les moyennes de 1955, qui sont même supérieures à celles de 1954, témoignent un niveau tout à fait équivalent à celui des sessions antérieures.

Le groupe des trente-huit admissibles comprend :

- sept élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles (dont les deux élèves de quatrième année) ;
- les quatre élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ;
- deux auditrices à l'Ecole Normale Supérieure ;
- onze professeurs titulaires en exercice et un professeur titulaire en congé ;
- quatre élèves-professeurs des Centres pédagogiques régionaux ;
- neuf étudiantes : une de la Faculté de Bordeaux, une de la Faculté de Grenoble, trois de la Faculté de Lille, deux de la Faculté de Poitiers, une de la Faculté de Strasbourg et une de l'Académie de Rennes.

Pour établir la liaison avec les précédents concours, notons que douze anciennes admissibles s'étaient fait inscrire en 1955 ; l'une d'elles ne s'est pas présentée et une autre n'a pas achevé les épreuves écrites ; les dix autres figurent de nouveau sur la liste d'admissibilité de 1955 : six professeurs titulaires en exercice, une élève de l'Ecole Normale Supérieure, une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure, un élève-professeur du C.P.R. de Lyon, une étudiante. Je pense que ces résultats sont encourageants pour les anciennes admissibles et doivent les engager à poursuivre leur effort de préparation.

Pour compléter les indications déjà données concernant les relations entre l'agrégation et les Centres pédagogiques régionaux, précisons que les Centres réunissaient, en 1954-1955, trente-deux élèves-professeurs de Mathématiques (femmes), sans compter les élèves des Ecoles Normales Supérieures. Comme on l'a déjà vu, vingt et une d'entre elles s'étaient fait inscrire à l'agrégation, mais dix seulement ont pris part à toutes les épreuves écrites, et quatre ont été déclarées admissibles. Il convient d'ajouter que, sur ces vingt et une candidates inscrites, vingt avaient subi avec succès, en 1955, les épreuves pratiques du C.A.P.E.S. (quatre avaient obtenu la mention Très Bien ; six, la mention Bien ; neuf, la mention Assez Bien, et une, la mention Passable) ; la vingt-et-unième, refusée aux épreuves pratiques, avait obtenu du

Jury du C.A.P.E.S. une prolongation de stage dans un C.P.R., pour une année. Cette dernière candidate figure du reste parmi les quatre élèves-professeurs admissibles à l'agrégation de 1955 (mais elle n'a pas été reçue), les trois autres admissibles étant des certifiées avec mention : deux Très Bien, une Assez Bien.

D'autre part, certaines candidates à l'agrégation se présentaient en même temps au concours d'admission des Centres pédagogiques régionaux en 1955 (Première partie du C.A.P.E.S.) : quatre élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, une élève de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, sept étudiantes (Paris et province) dont l'une n'a pas passé l'écrit. Neuf parmi ces onze candidates effectives ont été admissibles à l'agrégation : les cinq élèves des Ecoles Normales Supérieures et quatre étudiantes classées respectivement 3^e, 16^e, 21^e et 25^e au concours d'admission dans les C.P.R. (La liste des reçus à ce concours, publiée avant la fin des épreuves orales de l'agrégation, comprend quarante et un noms, auxquels il faut ajouter ceux de treize élèves des Ecoles Normales Supérieures).

**

Les épreuves écrites ont donné lieu aux observations suivantes (les énoncés ont été publiés par le *Bulletin* n° 171 de l'A.P.M.).

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(Mme DOMANGE)

Le problème proposait l'étude de deux familles de sphères ayant respectivement leurs centres sur deux coniques focales, et telles que toute sphère de chaque famille soit tangente à chacune des sphères de l'autre. La partie I examinait le cas d'une ellipse et d'une hyperbole focales, et la partie II, le cas de deux paraboles focales ; enfin, une application apparaissait dans la partie III, où l'on demandait le lieu des centres des sphères tangentes à trois sphères données.

Les parties I et II, suivant le même plan, marquaient dans le détail les étapes successives d'une recherche, tandis que la partie III laissait les candidates entièrement libres de choisir la voie à suivre. Cette dernière partie n'a été traitée, même partiellement, par personne, d'une façon exacte ; dans certaines copies on trouve quelques indications sur une méthode acceptable, mais dans aucune on ne paraît avoir soupçonné l'existence de plusieurs familles de sphères-solutions (il y en a quatre au maximum), et dans la plupart on semble affirmer qu'il ne peut y avoir qu'une solution.

Les parties I et II ont été abordées presque parallèlement dans la majorité des compositions, et si la partie II manque parfois, ou est poussée moins loin, c'est sans doute faute de temps. Ces deux parties comportaient des préliminaires de calcul où l'on faisait établir des résultats numériques très précis, mettant en jeu un choix de l'orientation de certains axes sur lequel l'énoncé insistait, mais l'utilité de cette précaution ne semble pas avoir été comprise par beaucoup. Ces résultats permettaient non seulement de démontrer les propriétés signalées ensuite explicitement dans le texte (contacts de sphères, mise en évidence de certains réseaux), mais aussi de faire des remarques précises sur la disposition et la place de certains éléments importants, tels que les points fixes ou les cercles orthogonaux des réseaux de sphères ; de tels renseignements étaient indispensables pour comprendre, en particulier, la simplicité des figures transformées par inversion, mais leur découverte et leur mise en évidence étaient laissées à l'initiative des candidates. Or, si beaucoup d'entre elles calculent correctement et démontrent docilement ce qui est explicitement demandé par l'énoncé, la plupart ne voient rien au-delà, et, par suite, sont incapables d'aborder d'une façon efficace la question sur l'inversion. Ces copies, trop scolaires, où l'essentiel du problème n'a pas été vraiment compris, n'ont pas pu, évidemment, être très bien notées.

Ce manque d'esprit d'observation et d'analyse s'est fait aussi cruellement sentir à propos de l'étude des points de contact M d'une sphère fixe $(P_1)_u$ de l'une des familles avec toutes les sphères de l'autre ; le fait que le lieu de ces points M était constitué par un seul cercle résultait facilement de l'expression de la mesure algébrique $\overline{P_1M}$ obtenue au début, jointe à la considération de la surface conique de révolution ayant pour sommet le centre P_1 de la sphère considérée et pour base la conique lieu des centres des sphères $(Q)_u$. La démonstration correcte a été rare ; le plus souvent, un résultat est affirmé au hasard, sans explications suffisantes, sans qu'apparaisse le souci de rattachement aux éléments déjà acquis.

En définitive, le problème ne présentait pas de véritables difficultés ; un peu d'esprit critique, allié à une saine curiosité, permettait de mener à bien une solution valable. Mais, justement, trop de candidates se contentent de répondre strictement aux questions posées dans le texte, et souvent d'une façon vague, sans chercher à les approfondir raisonnablement, et paraissent oublier, à chaque étape, les faits précédemment établis.

Sur soixante et une copies, treize ont mérité une note supérieure ou égale à 10 sur 20 : un 17,5 ; un 15 ; deux 14 ; deux 13 ; deux 12,5, un 12 ; un 11,5 ; deux 10,5 et un 10. On trouve ensuite : onze notes comprises entre 8 et 9 inclus ; seize allant de 6 à 7,5 ; seize encore, de 4 à 5,5 ; puis quatre, de 3 à 3,5, pour terminer par un zéro correspondant à une copie blanche. La composition notée 17,5 comporte un exposé correct des parties I et II, et la meilleure amorce de solution pour la partie III ; sa lecture, rendue difficile par un bien fâcheux désordre, donnait cependant une impression de recherche intelligente et de réflexion, qui s'est trouvée confirmée à l'oral.

La moyenne de l'épreuve est 7,5 pour l'ensemble des candidates ; elle est un peu supérieure à 9 pour le groupe des trente-huit admissibles, et s'abaisse à 4,9 pour les non-admissibles. Ces moyennes sont, heureusement, sensiblement plus fortes que celles de l'an dernier (6,25 ; 8,25 et 3,9, respectivement). Notons que les vingt-huit candidates, dont la note est au moins égale à la moyenne générale 7,5, figurent toutes sur la liste d'admissibilité ; il y a, par contre, quelques admissibles qui ont mérité, à cette composition, une note très basse : 5 ou 4,5, mais, bien entendu, cette dernière remarque ne doit pas être prise comme un encouragement pour l'avenir.

**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(M. PÉTRUS)

Le problème comportait l'étude, dans l'espace rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz , des sphères tangentes à un plan donné, du cône circonscrit à chacune d'elles ayant pour sommet l'origine O , du plan et du cercle de raccordement correspondants, et de la section du cône par le plan tangent commun à toutes les sphères.

Dans une première partie, on proposait de déterminer les équations de ces différents éléments. Nombreuses sont les candidates qui ont utilisé des méthodes maladroites et trop longues, pour parvenir parfois à des résultats inexacts, alors que le théorème de Dandelin et ses corollaires classiques permettaient d'orienter simplement les calculs et fournissaient immédiatement certaines réponses, notamment celles concernant l'angle au sommet du cône. La discussion de la réalité du cône et de sa section par un plan fixe n'a pas toujours été suivie de l'interprétation géométrique au moyen d'un paraboloides de révolution, qui jouait du reste un rôle important dans une grande partie du problème. La correspondance entre les centres des sphères donnant le même cône a été en général correctement observée et identifiée, mais certaines

copies contiennent des erreurs grossières ou des méprises qui révèlent chez leurs auteurs une ignorance totale de l'homologie harmonique.

La détermination des éléments de la conique section du cône par le plan tangent commun aux sphères n'a pas toujours été heureusement conduite, souvent faute d'avoir fait une figure et d'avoir su appliquer quelques propriétés classiques. Rares sont les candidates qui ont remarqué que toutes ces coniques étaient tangentes à un cercle imaginaire fixe, section par leur plan du cône isotrope ayant O pour sommet, ce qui permettait entre autres de trouver immédiatement l'excentricité relative aux foyers réels. La discussion de la nature de la conique a donné lieu également à des fautes bien surprenantes.

Dans la seconde partie, une première question proposait l'étude d'une surface de révolution, dont la méridienne se décomposait en deux hyperboles équilatères ; ce fait est resté trop souvent inaperçu. La seconde question était relative aux cônes circonscrits égaux à un cône donné ; l'un des calculs faits au début donnait rapidement l'équation du lieu géométrique demandé, mais la plupart ne se préoccupent pas d'interpréter cette équation en la gardant sous la forme où elle avait été normalement obtenue ; au contraire, plusieurs croient utile de développer certaines expressions qui y figurent, ce qui compromet bien leurs chances d'aboutir ; deux copies seulement contiennent l'ébauche d'une solution géométrique, d'ailleurs immédiate. Il s'agissait ensuite des sphères de la famille envisagée qui sont orthogonales à une sphère donnée, et d'abord de leur enveloppe. Bien peu de candidates observent la décomposition de cette enveloppe en un plan et une sphère, et peuvent, en conséquence, aborder avec succès l'étude de la cyclide de Dupin, que l'on rencontrait après. Cette partie du sujet est en général manquée, et notamment la mise en évidence d'un second mode de génération de la surface ; on ne trouve là, dans les copies, que de vagues allusions non justifiées.

La troisième partie faisait d'abord intervenir les sphères de la famille tangentes à un deuxième plan fixe, dont on avait pris soin de donner l'équation sous une forme simple. Nombreuses sont les candidates qui paraissent ignorer ce qu'est le lieu des points équidistants de deux plans, car, ayant formé son équation, on voit affirmer qu'il s'agit d'un cylindre hyperbolique. L'enveloppe des plans polaires correspondants n'est abordée que dans de rares compositions, et sans succès ; il en est de même pour le lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données.

L'étude, proposée ensuite, des sphères de la famille tangentes à une droite donnée, issue de O , n'a pas été réussie, faute, sans doute, d'avoir tracé une figure claire et d'en avoir analysé les propriétés immédiates. La recherche de l'enveloppe du lieu des centres de ces sphères, quand la droite donnée varie dans un plan, a été surtout l'occasion de calculs pénibles, aboutissant à des résultats faux ou incomplets, alors que la géométrie apportait, là encore, une aide évidente.

Si la quatrième partie paraît avoir servi de refuge à quelques candidates, leurs copies ne contiennent souvent que des banalités sans issue possible. Et la cinquième, rarement abordée, n'a pas eu plus de succès.

L'impression générale n'est donc pas très favorable. Le sujet était cependant facile ; il comportait, à divers moments de la solution, de nombreuses remarques géométriques, qui permettaient d'orienter les calculs, de les alléger, voire même, parfois, de les supprimer. Comme on l'a déjà observé lors des concours précédents, beaucoup trop de candidates semblent croire que la géométrie analytique ignore la géométrie et qu'il s'agit essentiellement d'accumuler d'interminables calculs, amorcés souvent au petit bonheur, poursuivis sans idée directrice apparente, et bien rarement achevés par une interprétation correcte et précise, qui est pourtant l'essentiel. Il faut voir là sans doute les conséquences d'un défaut de formation, mais surtout celles d'un manque, plus grave, de réflexion sur l'existence et l'importance des liaisons entre les divers secteurs des Mathématiques, en particulier entre la géométrie et l'algèbre qui constituent la base essentielle de notre enseignement.

Les cinquante-huit compositions ont été notées de 15 à 3,5. Vingt-quatre atteignent ou dépassent 10 : un 15 ; deux 13,5 ; six 13 ; deux 12,5 ; deux 11,5 ; six 10,5 et cinq 10. Viennent ensuite : dix notes comprises entre 8 et 9,5 ; quatorze entre 6 et 7,5 ; huit entre 4 et 5,5, et deux 3,5. La moyenne de l'épreuve est 8,74 pour l'ensemble des candidates ; elle se relève à 9,84 pour le groupe des trente-huit admissibles, et s'abaisse à 6,65 pour les vingt non-admissibles. Ces moyennes sont supérieures aux moyennes correspondantes de 1954 : 7,25 ; 9 et 5,2.

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

(M. VILLAT)

La question proposée aux candidates concernait l'étude de surfaces non-développables définies comme enveloppes d'un plan, à deux paramètres u et v , ayant pour équation $Ax + By + Cz + D = 0$, les lignes $u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$ sur la surface étant supposées conjuguées au sens de Dupin.

On demandait tout d'abord de démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les quatre coefficients A, B, C, D de l'équation du plan satisfassent à une même équation aux dérivées partielles, de la forme

$$(E) \quad \theta''_{uv} = P \theta'_u + Q \theta'_v + R \theta$$

P, Q, R étant des fonctions de u et de v .

A peu près toutes les candidates ont obtenu une démonstration de ce théorème, mais il semble que bien peu d'entre elles aient eu leur attention attirée sur le fait que les propriétés de conjugaison possèdent le caractère dualistique, — moyennant quoi le théorème en question ne diffère pas du théorème classique concernant l'annulation du coefficient moyen de la seconde forme de Gauss relative à la surface. D'ailleurs, la chose est quasi-évidente de la manière suivante :

Si l'on donne le plan tangent, les coordonnées homogènes d'un point quelconque de la surface sont définies par les équations

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz + Dt = 0 \\ A'_u x + B'_u y + C'_u z + D'_u t = 0 \\ A'_v x + \dots + D'_v t = 0 \end{array} \right.$$

Si l'on donnait, par contre, les coordonnées ponctuelles sur la surface, les coordonnées du plan tangent seraient, de même, définies par

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz + Dt = 0, \\ Ax'_u + By'_u + Cz'_u + Dt'_u = 0 \\ Ax'_v + \dots + Dt'_v = 0 \end{array} \right.$$

Mais on voit aussitôt que la propriété de conjugaison considérée se traduit par la condition :

$$\sum A'_u x'_v = 0,$$

équivalente du reste à

$$\sum A'_v x'_u = 0.$$

Il en résulte, d'après (I) :

$$(I') \quad \sum A''_{uv} x = 0,$$

et d'après (II) :

$$(II') \quad \Sigma A x''_{uv} = 0.$$

Les formules (I) et (I') entraînent

$$\begin{vmatrix} A & A'_u & A'_v & A''_{uv} \end{vmatrix} = 0,$$

et les formules (II) et (II') entraînent de même

$$\begin{vmatrix} x & x'_u & x'_v & x''_{uv} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui signifie que (A, B, C, D) — de même que (x, y, z, t) — satisfont respectivement à une équation aux dérivées partielles du type indiqué. Les réciproques sont immédiates.

Deux candidates seulement ont donné une démonstration équivalente à la précédente ; beaucoup d'autres ont curieusement compliqué leurs calculs en triturant sans adresse des déterminants du troisième ordre ; quelques-unes ont renoncé à s'en sortir, et ont admis le résultat.

Une addition simple à cette question indique que les coefficients A, B, C, D ne sauraient être solutions de deux équations distinctes du type (E), — sans quoi, ils satisferaient à une équation de la forme

$$\alpha \theta'_u + \beta \theta'_v + \gamma \theta = 0,$$

ce qui entraînerait que la surface enveloppe est développable, puisque les trois plans (I) auraient une droite en commun.

Dans la seconde partie, on proposait de prendre pour A, B, C, les valeurs suivantes :

$$A = (u + v), \quad B = i(u - v), \quad C = uv - 1,$$

donnant manifestement lieu à l'identité

$$A^2 + B^2 + C^2 = (uv + 1)^2.$$

L'équation du type (E), à laquelle satisfont ces trois fonctions, est alors déterminée ; un calcul simple permet de l'écrire

$$(e) \quad (uv + 1) \theta''_{uv} - u \theta''_u - v \theta''_v + \theta = 0.$$

On demandait de résoudre cette dernière équation en utilisant le procédé suivant : dériver tout d'abord le premier membre de (e) par rapport à u, puis par rapport à v, et se servir des résultats simples ainsi obtenus. Ce calcul conduit aux relations

$$(uv + 1) \theta''_{u^2v} - \theta''_{u^2} = 0,$$

et, de même,

$$(uv + 1) \theta''_{uv^2} - v \theta''_{v^2} = 0,$$

d'où

$$\theta_{u^2v^2}^{IV} = 0.$$

Il en résulte donc qu'on peut poser

$$\theta''_{uv} = U_1(u) + V_1(v),$$

d'où

$$\theta''_{u^2} = \left(v + \frac{1}{u}\right) U_1 \quad \text{et} \quad \theta''_{v^2} = \left(u + \frac{1}{v}\right) V_1;$$

on en déduit θ'_u et θ'_v par quadratures, puis, par la relation (e), la fonction θ elle-même, qui peut, moyennant quelques aménagements d'écriture faciles, être mise sous la forme

$$\theta = 2vf(u) + 2ug(v) - (1 + uv) \cdot [f'(u) + g'(v)],$$

f(u) et g(v) étant des fonctions dérivables quelconques.

Le choix particulier, proposé par l'énoncé :

$$f(u) = u^3, \quad g(v) = v^3,$$

conduisait à une surface bien connue ; on ne songe nullement à reprocher à la majorité des candidates de n'avoir pas identifié cette surface, qu'elles avaient entièrement le droit d'ignorer. En général, son étude a été faite correctement, ainsi que la constatation du fait qu'il s'agit d'une surface minima. Cependant, cette étude a été, non moins généralement, effectuée avec la plus grande maladresse ; il semble que la plupart n'aient jamais entendu parler, à propos de surfaces, que des deux formes fondamentales de Gauss ; beaucoup paraissent ignorer l'existence des formules d'Olinde Rodrigues, d'un si puissant secours dans les applications (spécialement lorsque les cosinus directeurs de la normale sont en évidence avec des valeurs simples, comme c'était ici le cas).

Cette observation s'applique plus précisément encore pour la question suivante : si l'on choisit pour A, B, C, les expressions précédemment indiquées au début de la seconde partie, et pour D la solution générale de l'équation (e), on demande de montrer que la surface correspondante est minima. Ce résultat s'obtient simplement, en observant d'abord que la surface enveloppe du plan

$$(u + v)x + i(u - v)y + (uv - 1)z + \theta = 0,$$

est définie par

$$x + iy + vz + \theta'_u = 0,$$

$$x - iy + uz + \theta'_v = 0,$$

$$(uv + 1)z + u\theta'_u + v\theta'_v - \theta = 0,$$

les cosinus directeurs α, β, γ de la normale à la surface étant tels que

$$\alpha + i\beta = \frac{2v}{uv + 1}, \quad \alpha - i\beta = \frac{2u}{uv + 1}, \quad \gamma = \frac{uv - 1}{uv + 1}.$$

En désignant par ρ l'un des rayons de courbure principaux, les formules d'Olinde Rodrigues donnent

$$d(x - iy) + \rho d(\alpha - i\beta) = 0,$$

$$d(x + iy) + \rho d(\alpha + i\beta) = 0,$$

$$dz + \rho d\gamma = 0,$$

c'est-à-dire, ici :

$$d(uz + \theta'_v) - \rho d \frac{2u}{uv + 1} = 0$$

.....

$$dz - \rho d \frac{2}{uv + 1} = 0.$$

L'élimination de du et dv entre deux de ces équations, après quelques simplifications élémentaires, conduit à l'équation du second degré en ρ , dont la forme même met en évidence que la somme des racines est nulle si, et seulement si, θ satisfait à l'équation (e). C'est le résultat annoncé, avec cette précision que, non seulement on obtient ainsi des surfaces minima, mais qu'on les obtient toutes par ce procédé (pour autant qu'elles correspondent à des fonctions f et g dérivables).

Cette question n'a été résolue correctement que par deux candidates. En général, on a préféré rattacher la recherche à l'annulation de la combinaison

$$EG' + GE' - 2FF'$$

des coefficients de Gauss, ce qui n'était pas pour simplifier les choses...

Dans la dernière partie du problème, on s'intéressait aux surfaces pour lesquelles l'équation (E), qui leur donnait naissance, était réduite à

$$\theta''_{uv} = 0.$$

Une telle surface est donc l'enveloppe du plan

$$(1') \quad [A_1(u) + A_2(v)]x + [B_1(u) + B_2(v)]y + [C_1(u) + C_2(v)]z + [D_1(u) + D_2(v)] = 0.$$

Il est manifeste que les équations dérivées

$$(2') \quad A'_1 x + B'_1 y + C'_1 z + D'_1 = 0,$$

$$(3') \quad A'_2 x + B'_2 y + C'_2 z + D'_2 = 0,$$

représentent des plans, dépendant seulement de u , ou de v , respectivement, et contenant les courbes de la surface qui forment le réseau conjugué envisagé ici. Notons en passant que quelques candidates n'ont pas aperçu cette évidence, et ont mis en œuvre des raisonnements singuliers pour montrer que les lignes conjuguées coordonnées étaient planes.

On demandait d'établir la réciproque de cette propriété, ou, plus précisément, que toute surface non développable sur laquelle il existe deux familles de courbes conjuguées planes peut s'obtenir par le procédé précédent. Deux candidates seulement ont donné une démonstration correcte de ce théorème, qui peut être démontré de la façon suivante :

La surface étant définie tangentiellement par les relations

$$(1) \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$(2) \quad A'_u x + B'_u y + C'_u z + D'_u = 0,$$

$$(3) \quad A'_v x + B'_v y + C'_v z + D'_v = 0,$$

si toute ligne $u = \text{constante}$ est plane, c'est que la droite (1), (2) appartient à un plan ne dépendant que du paramètre u ; il doit donc exister deux fonctions λ et μ telles que

$$\lambda A'_u + \mu A = f(u), \dots\dots\dots,$$

c'est-à-dire telles que

$$(4) \quad \lambda A''_{uv} + \lambda'_v A'_u + \mu A'_v + \mu'_v A = 0, \dots\dots\dots$$

Un raisonnement analogue est valable pour les courbes $v = \text{constante}$, et cela entraîne que A, B, C, D doivent satisfaire aussi à une équation analogue à (4) :

$$(5) \quad \lambda_1 A''_{uv} + \lambda'_{1u} A'_v + \mu_1 A'_u + \mu'_{1u} A = 0, \dots\dots\dots$$

Or, A, B, C, D ne peuvent satisfaire à deux équations distinctes de cette forme : les équations (4) et (5) doivent donc être équivalentes, ce qui conduit aux conditions :

$$\mu = \lambda \frac{\delta (\text{Log } \lambda_1)}{\delta u}, \quad \mu_1 = \lambda_1 \frac{\delta (\text{Log } \lambda)}{\delta v}, \quad \frac{\delta^2}{\delta u \delta v} \left(\text{Log } \frac{\lambda_1}{\lambda} \right) = 0.$$

On déduit de là que

$$\mu = \lambda'_u + \lambda \frac{U'}{U},$$

U ne dépendant que de u , et, par suite,

$$U (\lambda A'_u + \mu A) = \frac{\delta}{\delta u} (U \lambda A).$$

La condition (4) s'écrit alors :

$$\frac{\delta^2}{\delta u \delta v} (U \lambda A) = 0, \dots$$

et, par suite, en multipliant les coefficients A, B, C, D de l'équation (1) par le facteur $U.A$, on ramène cette équation à la forme proposée au début de cette troisième partie, ce qui démontre la proposition.

On proposait alors une application facile, en considérant les deux plans tangents

$$(6) \quad x \cos u + y \sin u + z = 0,$$

$$(7) \quad x \cos v + y \sin v + z = 0,$$

au cône de révolution $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Les surfaces S , telles que les tangentes à ce cône, menées par chaque point de S dans le plan tangent à S en ce point, soient conjuguées, sont des surfaces de l'espèce précédemment étudiées, et pour lesquelles les plans (6) et (7) doivent jouer le rôle des plans (2') et (3') ; on doit donc avoir

$$(8) \quad \frac{A'_1(u)}{\cos u} = \frac{B'_1}{\sin u} = \frac{C'_1}{1} = \frac{D'_1}{0}$$

$$(9) \quad \frac{A'_2(v)}{\cos v} = \frac{B'_2}{\sin v} = \frac{C'_2}{1} = \frac{D'_2}{0}$$

La valeur commune des trois premiers rapports (8), ne peut dépendre que de u , celle des rapports (9) ne dépendant que de v ; on aura donc toutes les fonctions $A_1, \dots, A_2, \dots$ par des quadratures contenant deux fonctions arbitraires, l'une de u , l'autre de v . On évite d'ailleurs tout signe de quadrature en posant

$$C_1 = F(u) + F''(u), \quad C_2 = G(v) + G''(v).$$

On est ainsi conduit à l'équation du plan :

$$\begin{aligned} & x [F'' \cos u + F' \sin u + G'' \cos v + G' \sin v] \\ & + y [F'' \sin u - F' \cos u + G'' \sin v - G' \cos v] \\ & + z (F + F'' + G + G'') + C'' = 0, \end{aligned}$$

dont l'enveloppe fournit la surface cherchée. L'énoncé associait à une telle surface deux familles de sphères dont l'étude est largement élémentaire.

Il est singulier de constater que les candidates, qui ont examiné la dernière partie du problème, ont écrit les équations (8) et (9) permettant de la résoudre, mais (à deux exceptions près) ont cru nécessaire de donner aux rapports égaux (8) et (9) la valeur 1. Elles n'ont ainsi trouvé qu'une solution extrêmement particulière.

L'une des compositions surclassait nettement toutes les autres : elle a obtenu la note 18,5. Viennent ensuite : un 17 ; un 16 ; un 15 ; puis douze notes comprises entre 12 et 13,5 ; onze notes, entre 10 et 11 ; quatorze, entre 8 et 9,5 ; treize, entre 6 et 7,5 ; enfin un 5, un 4 et un zéro correspondant à une copie blanche. Les moyennes sont : 9,7 pour l'ensemble des candidates, 11 pour le groupe des trente-huit admissibles, 7 pour les non-admissibles ; ces moyennes sont voisines (avec une légère baisse) de celles du concours précédent : 9,8, 11,6 et 7,5.

Le niveau de cette composition est honnête, sans plus ; peu de copies émergent d'une moyenne assez grise. On souhaiterait que les candidates soient munies de connaissances moins exclusivement théoriques, et qu'elles sachent davantage tenir compte des éléments particuliers d'une question, — sans croire qu'il existe un procédé, et un seul, propre à résoudre chaque partie du problème. Pour la grande majorité, il est clair qu'en dehors des deux formes fondamentales de Gauss, il n'existe, en géométrie différentielle, rien de valable... Cette manière de voir est quelque peu fâcheuse.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

(M. PAILLOUX)

Le problème comportait l'étude du mouvement d'une roue réduite à sa circonférence, roulant sans glisser sur un plan horizontal, et maintenue verticale par une liaison sans frottement ; diverses circonstances étaient successivement envisagées.

Trop peu de candidates ont des notions saines sur les réactions, qu'elles soient ou non avec frottement ; trop peu savent tirer parti de faits simples : ainsi il n'a pas été remarqué explicitement que la vitesse du centre de la roue était portée par le diamètre horizontal de la roue, ce qui donnait rapidement de nombreuses réponses.

Dans la première question, la position du système était définie par quatre paramètres, ξ, η, ψ, θ . Les deux conditions non holonomes, le théorème du moment cinétique par rapport à Az ($\psi' = \text{const.}$) et le théorème des forces vives fournissaient la mise en équations. ψ' et θ' restaient constants, le plan de la roue restait tangent à un cercle fixe décrit par le centre de la roue, d'un mouvement uniforme. Il est regrettable que la majorité des candidates écrive *a priori* les six équations du mouvement du centre de gravité et du moment cinétique, sans en rien tirer, et en se perdant dans une analyse souvent fautive du système des réactions.

Dans la seconde question, puisque la tangente au lieu du centre A est un rayon horizontal, ce lieu est une tractrice, ce qui ne fut pas remarqué. Le théorème de la force vive suffisait ici pour la mise en équation, puisque les quatre paramètres étaient déjà liés par les deux conditions non holonomes et par la liaison introduite. Cette dernière liaison était bilatérale, comme le montrait sans peine le calcul de la réaction du mur ; beaucoup de candidates ont cru du reste pouvoir se contenter d'une réponse par oui ou par non, sans justification.

La question des chocs était plus délicate. Le frottement en B était tel que, pour les vitesses, tout se passait comme si le point B de la roue était un point fixe. Après le choc inélastique, l'état des vitesses était celui de la question I, 2° ; une seule inconnue était à déterminer ; le théorème de Carnot pouvait suffire. Dans le cas du choc parfaitement élastique, dont la définition était rappelée, trop peu de candidates savent que, dans un choc avec frottement, entre le début et la fin du choc, une partie de l'énergie cinétique disparaît irréversiblement pendant la période de glissement. Ce cas ne se produit pas ici, tout glissement étant impossible, d'où la condition habituelle $W_1 + W_0 = 0$, pour les vitesses normales. Regrettons l'abus de la condition $W_1 + eW_0 = 0$, utilisant un coefficient de restitution dont l'existence physique est contestable lorsqu'il se produit un choc avec frottement ; d'ailleurs l'énoncé indiquait la voie à suivre. Pour traiter ces deux problèmes de chocs, on pouvait, ce qui a été signalé, utiliser des paramètres réduits tenant compte de l'absence de glissement, et appliquer les équations de Lagrange des chocs en introduisant explicitement la percussion sur le mur par un travail virtuel.

Dans la quatrième question, la roue subissait une force horizontale appliquée en son centre, et on désirait attirer l'attention sur les conditions initiales : il *fallait* que le plan initial de la roue contienne la tangente à la trajectoire imposée au centre de la roue. ψ' restait constant, et sa valeur pouvait être prise arbitrairement. Le mouvement de A sur la courbe en résultait. On avait donc ξ, η, θ, ψ en fonction du temps ; les équations de Lagrange fournissaient trois équations pour les deux multiplicateurs et pour X, Y.

Dans la seconde partie, le même défaut de méthode qui consiste à oublier de compter le nombre de paramètres de position (ou à les compter trop tard) a conduit à de vaines débauches de calcul ; « il y a trop d'inconnues pour les équations !... » Lorsque les plans des roues sont bloqués par rapport à la tige qui joint les centres, la position du système peut être définie par $\xi, \eta, \psi, \theta_1, \theta_2$. On dispose, en général, de quatre équations provenant du roulement sans glissement et de l'équation de la force vive. Le cas d'exception est celui où les plans des roues sont perpendiculaires à la tige, car le nombre des conditions non holonomes n'est plus que de trois. Mais il est préférable d'introduire le plan mobile horizontal entraîné par la tige A_1A_2 . On connaît la direction des vitesses de A_1 et A_2 . Il en résulte que le centre instantané de rotation est fixe dans le plan mobile et dans le plan fixe. Le théorème des forces vives montre que la vitesse angulaire de rotation est constante. Le cas d'exception doit être traité directement ; la conclusion reste la même.

Si une seule roue est bloquée, $\xi, \eta, \psi, \theta_1, \theta_2$ et ψ_2 , ou bien α_2 , sont les paramètres. En dehors des quatre conditions de roulement sans glissement et de l'équation des forces vives, l'intégrale première $\psi_2' = \text{const.}$ conduit à la solution.

Si les plans des roues sont libres de tourner, on a les deux intégrales premières

$\psi_1 = \text{const.}$, $\psi_2 = \text{const.}$, qui, jointes à l'équation des forces vives et aux quatre conditions non holonomes, suffisent à déterminer les sept paramètres. Lorsque les vitesses angulaires ψ_1 et ψ_2 sont nulles, la barre A_1A_2 est animée d'un mouvement étudié par La Hire.

La troisième partie insistait spécialement sur la notion de conditions initiales. La vitesse de E étant connue à l'instant initial, il en résulte la connaissance des vitesses de G, A_1 , A_2 . Seuls ψ_1 et ψ_2 sont arbitraires. La force $\vec{F}$ à appliquer en E était l'une des deux réactions subies par la barre EG, dont la masse était supposée négligeable ; cette force était donc dirigée suivant EG. Une seule équation suffisait pour la déterminer, par exemple, l'équation des forces vives sous forme différentielle, ce qui a été vu parfois.

Souhaitons que les candidates relisent leur travail, en souhaitant d'abord, pour certaines, qu'elles ne soient pas rebutées par leur propre écriture. On éviterait peut-être ainsi ces trop fréquentes expressions vicieuses qui vont de la concision mal comprise à la faute de raisonnement : « ψ a un mouvement uniforme » ; — « le mouvement est un cercle » ; — « les réactions n'étant pas holonomes » ; — « la roue est donc un véhicule » ; — on parle de « la vitesse de la roue » ; — on pense qu'un roulement sans glissement donne « une intégrale première », et que « liaison bilatérale » signifie « liaison qui introduit deux réactions ».

Redisons qu'il faut préciser le système d'axes lorsqu'on parle des projections d'un vecteur, — qu'il ne faut pas introduire simultanément les multiplicateurs de Lagrange d'une part, et les composantes de la réaction de liaison correspondante d'autre part, sans voir les liens qui les unissent, et qu'un choc parfaitement inélastique ne produit pas le repos total.

Les notes des cinquante-six candidates sont échelonnées de 17,5 à 0,5. Après deux compositions qui se détachent nettement en tête, avec un 17,5 et un 17, on trouve une répartition assez uniforme entre 14,5 et 4 : un 14,5 et un 14 ; sept notes entre 12 et 13,5 ; quatre, entre 10 et 11,5 ; sept, entre 8 et 9,5 ; neuf, entre 6,5 et 7,5 ; six, entre 4 et 5,5. Puis vient un lot, trop important, de dix-sept copies cotées de 1 à 3,5, les deux dernières n'obtenant que 0,5. La moyenne est inférieure à 7 pour l'ensemble des candidates ; elle n'atteint pas tout à fait 8,5 pour le groupe des trente-huit admissibles, et elle s'abaisse à 3,7 pour les non-admissibles. Les quinze candidates qui ont obtenu, pour cette épreuve, une note au moins égale à dix figurent toutes parmi les admissibles.

ÉPREUVES PRATIQUES

Bien que les notes extrêmes soient sensiblement différentes pour chacune des deux épreuves pratiques, puisqu'elles vont de 2 à 11,5 pour la géométrie descriptive, et de 0 à 14 pour le calcul numérique, les moyennes de ces deux compositions pour l'ensemble des trente-huit admissibles sont pratiquement les mêmes : 5,8 et 5,9, sensiblement plus basses que celles du concours précédent (7,4 et 8,3).

Le groupement de ces deux épreuves donne une répartition de notes (sur 20) qui s'échelonnent très irrégulièrement de 11 à 1, avec quatre notes seulement entre 10 et 11, puis, après un 9,5, huit notes voisines de 8, six notes voisines de 6, douze comprises entre 4 et 5,5, cinq entre 2,5 et 3, pour terminer par un 1,5 et un 1. La moyenne est voisine de 5,8.

Ces résultats sont loin d'être brillants. Tout a déjà été dit et redit, dans les rapports sur les sessions antérieures, au sujet de la signification de ces deux épreuves, qui ont leur place dans un concours de recrutement du niveau de l'agrégation. Je ne reprendrai pas, ici, les remarques d'ordre général qui ont été développées, en particulier, dans le rapport de l'année dernière. Si l'on se borne à rechercher l'influence de ces deux compositions sur le classement des concurrentes, disons que deux d'entre elles leur doivent, pour une large part, le succès définitif : des notes conve-

nables pour l'ensemble épure-calcul ont compensé, dans l'un des cas, un total médiocre à l'écrit, et, dans l'autre, une fâcheuse défaillance à l'oral. Inversement, deux candidates, admissibles dans la zone neutre, auraient pu finalement réussir si les deux épreuves pratiques leur avaient apporté, au lieu d'un maigre total, la moyenne décente que procure presque toujours un sérieux effort de préparation en ces matières.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
(M. PÉTRUS)

Énoncé du problème

Les données sont exprimées en millimètres. La figure est rapportée à trois axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$; l'axe $x'x$, porté par le grand axe de la feuille, est orienté positivement vers le bas ; l'origine O est à 220 du bord inférieur de la feuille ; l'axe $y'y$ est orienté positivement de gauche à droite ; l'axe $z'z$, rabattu sur la feuille, se confond avec l'axe xx' , la ligne de terre étant confondue avec $y'Oy$.

On désigne : par Δ la verticale ayant pour équations $x = 90$, $y = 0$; par Γ le cercle, situé dans le plan de front passant par Δ , dont le centre a pour coordonnées 90, 60, 60, et dont le rayon a pour longueur 30 ; par S le tore ayant pour axe de révolution Δ et pour demi-méridienne Γ .

Le plan de bout P , bitangent au tore S , et dont le point de contact avec Γ a une cote supérieure à 60, coupe S suivant deux cercles ; soit C celui de ces deux cercles dont le centre a un éloignement x supérieur à 90. Dans le plan de front passant par Δ , le cercle ayant même centre que le tore et orthogonal au cercle Γ coupe la verticale Δ en deux points ; soit B celui de ces points dont la cote est supérieure à 60.

On appelle K la surface conique ayant B pour sommet et C comme directrice.

1° Construire l'intersection complète des surfaces S et K .

2° Représenter par ses deux projections le solide, supposé opaque, limité par les portions de chacune des surfaces S et K situées à l'intérieur de l'autre.

3° Rédiger sur une feuille annexe une brève notice expliquant les remarques géométriques faites, la méthode employée et les résultats obtenus.

Les données très simples pouvaient facilement suggérer de faire une transformation par inversion ayant pour pôle B et laissant globalement invariants le tore ainsi que le cône ; on en déduisait que le reste de l'intersection était constitué par un cercle de Villarceau, symétrique de C par rapport à un plan méridien simple. L'emploi des plans méridiens du tore comme plans auxiliaires était tout indiqué pour la détermination de points quelconques de l'intersection, et cette méthode permettait du reste bien des remarques géométriques.

Si l'on excepte une ou deux candidates maladroites qui ont eu quelque peine à représenter le tore, celui-ci a été figuré correctement. La détermination du cercle de Villarceau C a été manquée par quelques concurrentes, qui, sans doute, n'avaient jamais exécuté la moindre épure, même à main-levée, sur ce sujet classique. La lecture des notices a révélé que beaucoup n'avaient pas réussi à identifier la seconde partie de l'intersection des deux surfaces ; si le correcteur s'est montré indulgent pour celles qui avaient réalisé une construction empirique à peu près exacte, il a par contre noté très sévèrement les compositions qui ne contenaient aucun résultat sur ce second cercle ou qui faisaient apparaître des tentatives par trop fantaisistes.

La représentation du solide commun a été l'occasion de nombreuses bévues, prouvant que bien des candidates savent mal « voir dans l'espace », et ne savent pas non plus appliquer quelques remarques élémentaires qui leur permettraient de se tirer d'affaire.

L'exécution matérielle est en général déplorable. En bref, il est manifeste que la préparation de cette épreuve est négligée par un trop grand nombre, et les mauvais résultats de cette année sont d'autant plus décevants que le sujet avait été

choisi, à dessein, dans un domaine tout à fait classique et correspondait à un problème de géométrie dont la solution était immédiate ; il avait paru ainsi que toute candidate, même celle que ses fonctions privaient de toute occasion de faire des épreuves, pouvait présenter un minimum de travail décent. Mais cette espérance a été déçue.

Le faible niveau de cette composition n'a pas permis de dépasser la note 11,5. L'échelonnement de la cotation se présente ainsi : après deux 11,5 et deux 11, on trouve sept notes comprises entre 8 et 9 ; huit, entre 6 et 7,5 ; huit entre 4,5 et 5,5, en enfin onze entre 2 et 3. La moyenne générale de l'épreuve est 5,8. Ces résultats sont bien inférieurs à ceux de l'an dernier, car la moyenne atteignait alors 7,4, avec dix notes (sur trente-deux) supérieures à 10.

Souhaitons de nouveau, pour l'avenir, que les candidates se décident à comprendre l'importance et la valeur de cette partie du concours.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE

(M. ROSEAU)

Enoncé du problème

On se propose de calculer, pour les valeurs

1,2 ; 1,4 ; 1,6 ; 1,8
données à la variable x , les valeurs numériques de la fonction

$$(1) \quad \text{Log } \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{Log } x - x + \frac{1}{2} \text{Log } (2\pi) + \varphi(x)$$

où

$$(2) \quad \varphi(x) = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)x^{2r-1}} + R_n(x),$$

les coefficients B_r désignant les nombres de Bernoulli, et $R_n(x)$ une fonction de x pour laquelle on admettra que

$$|R_n| < \frac{B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)x^{2n+1}}.$$

La notation $\text{Log } x$ représente le logarithme népérien de x .

1° Calculer les quatre premiers nombres de Bernoulli B_1, B_2, B_3, B_4 en utilisant le développement en série

$$\frac{x}{2} \cotg \frac{x}{2} = 1 - B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} - B_3 \frac{x^6}{6!} - B_4 \frac{x^8}{8!} + \dots$$

dont on admettra la validité. (Il pourra être commode de diviser le développement de $\cos \frac{x}{2}$ par celui de $\frac{2}{x} \sin \frac{x}{2}$).

2° Calculer $\varphi(x)$ défini par la formule (2), à 10^{-6} près pour les valeurs 3,2 ; 3,4 ; 3,6 ; 3,8 données à x .

3° Calculer avec l'approximation permise par la table de logarithmes, les valeurs de $\text{Log } \Gamma(x)$ pour les valeurs de x définies au début de l'énoncé. On commencera par calculer $\text{Log } \Gamma(x)$ pour les valeurs 3,2 ; 3,4 ; 3,6 ; 3,8, données à x ; puis on poursuivra le calcul demandé par l'usage convenablement répété de la formule

$$\text{Log } \Gamma(x+1) = \text{Log } \Gamma(x) + \text{Log } x$$

que l'on admettra.

La première question, très simple, avait pour objet de conduire au calcul des quatre premiers nombres de Bernoulli par un processus de division. En général cette partie préliminaire a été traitée correctement, mais on relève de fréquentes erreurs pour le quatrième coefficient.

Dans la seconde question, les candidates, en majorité, ont vu qu'il suffisait d'arrêter le développement au troisième terme pour obtenir la précision demandée ; mais la justification de ce fait apparaît peu claire : les erreurs permises sur le calcul approché des trois premiers termes de la série asymptotique sont exprimées avec peu de netteté, et la quasi-totalité des candidates utilisent les tables de logarithmes à cinq décimales sans se demander si la précision ainsi obtenue est suffisante pour réussir le calcul avec l'approximation demandée.

Enfin, très peu ont abordé la troisième partie.

La présentation est souvent maladroite, rarement bien ordonnée. Si l'on peut apprécier chez quelques-unes un effort louable à cet égard, il n'en reste pas moins que, pour la plupart, ces qualités primordiales d'ordre et de méthode n'apparaissent guère ; de grands progrès sont encore à faire dans ce sens.

Les notes s'échelonnent de 0 à 14, la zone d'accumulation étant, bien fâcheusement, au voisinage de 5. Après un 14 et deux 13, on trouve : quatre notes entre 10 et 11 ; quatre, entre 8 et 9 ; six, entre 6 et 7 ; douze entre 4 et 5, puis neuf, entre 0 et 3. La moyenne générale de l'épreuve est environ 5,9, en baisse notable par rapport à l'année 1954, où elle était voisine de 8,3.

EPREUVES ORALES

Comme d'habitude, les deux leçons de « Mathématiques Élémentaires » et de « Mathématiques Spéciales », que devait exposer chacune des trente-huit admissibles, avaient été « couplées » par le jury avant le tirage au sort traditionnel.

Voici la liste des sujets de leçons (les numéros entrés parenthèses accompagnant chacune des questions d'« Élémentaires » et de « Spéciales » correspondent au groupement des deux leçons traitées par une même candidate) :

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Pour une classe de Seconde C-Moderne :

- (1) Inégalités dans les triangles.
- (2) Positions relatives de deux cercles.
- (3) Exemples de résolution de problèmes de construction.
- (4) Exemples de résolution de problèmes de lieux géométriques.
- (5) Lieu des points dont le rapport des distances à deux droites est donné. Faisceaux harmoniques de droites (géométrie plane).

Pour une classe de Première C-Moderne :

- (6) Plan et droite perpendiculaires.
- (7) Volume de la pyramide. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.
- (8) Exemples de problèmes dont la résolution conduit à une équation du premier ou du second degré, ou à un système de deux équations du premier degré.
- (9) Le même sujet que (8).

Pour une classe de Mathématiques :

- (10) Arithmétique : division des nombres entiers.
- (11) Première leçon sur les fractions.
- (12) Arithmétique : définition et extraction de la racine carrée arithmétique d'un nombre entier à une approximation décimale donnée.
- (13) Première leçon sur les nombres positifs et négatifs.
- (14) Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Interprétation graphique.
- (15) Etude, sur des exemples, d'une fonction de la forme

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$$

(a, b, c, a', b' constantes, a et $a' \neq 0$). Représentation graphique.

- (16) Exemples de résolution d'équations trigonométriques.
 - (17) Résolution et discussion de l'équation

$$a \cos x + b \sin x = c.$$
 - (18) Mouvement rectiligne vibratoire simple ; interprétation au moyen d'un mouvement circulaire uniforme. Mouvement rectiligne défini par une équation de la forme

$$x = a \cos (\omega t + \alpha) + b \cos (\omega t + \beta).$$
 - (19) Cosmographie. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes.
 - (20) Trièdres supplémentaires. Applications.
 - (21) Faisceaux harmoniques de droites. Polaire d'un point par rapport à deux droites.
 - (22) Produit de deux homothéties. Applications.
 - (23) Les propriétés générales de l'inversion étant supposées connues, traiter quelques applications de cette transformation.
 - (24) Première leçon sur les coniques.
 - (25) Le même sujet que (24).
 - (26) Equations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie. Applications.
- Pour une classe de Mathématiques Supérieures (programme de « géométrie pure ») :*
- (27) Similitude plane.
 - (28) Première leçon sur l'inversion.
 - (29) Transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle. Applications.
 - (30) Etude des cercles tangents à deux cercles donnés dans un plan.
 - (31) Conditions pour que quatre points soient sur un cercle. Applications.
 - (32) Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles ; axe radical. Applications.
 - (33) Faisceaux linéaires de cercles ; faisceaux orthogonaux.
 - (34) Tangente à une conique définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité. Problèmes sur les tangentes.
 - (35) Ellipse et cercle déduits l'un de l'autre par affinité. Diamètres conjugués. Construction d'une ellipse connaissant deux demi-diamètres conjugués.
 - (36) Propriétés d'une hyperbole relativement à ses asymptotes.
 - (37) Sections planes d'un cône de révolution.
 - (38) Intersection de deux cônes circonscrits à une même sphère.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

- (20) Première leçon sur les nombres complexes.
- (38) Les propriétés générales des opérations élémentaires sur les nombres complexes étant supposées traitées, en donner quelques applications (géométriques, trigonométriques...).
- (4) Diviseurs communs à deux polynômes à une variable. Applications.
- (21) Première leçon sur les déterminants.
- (22) Résolution et discussion d'un système de n équations linéaires à p inconnues, le cas dit « de Cramer » étant supposé traité.
- (27) Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.
- (32) Transformation d'une équation algébrique par une substitution rationnelle portant sur une seule racine. Applications.
- (1) Formule de Taylor pour les fonctions d'une variable réelle. Applications.
- (30) Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction. Exemples.
- (35) Application de la variation des fonctions à la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante. Exemples.
- (36) Fonction inverse d'une fonction continue monotone. Exemples.
- (23) Fonction exponentielle.

- (3) Fonction logarithmique.
- (19) Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.
- (24) Fonctions homogènes de plusieurs variables.
- (25) Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. Applications.
- (31) Première leçon sur l'intégrale définie d'une fonction continue.
- (28) Changement de variable dans une intégrale (indéfinie et définie). Applications.
- (37) Première leçon sur les séries numériques.
- (2) Les généralités sur les séries à termes réels et à termes complexes étant supposées traitées, établir les caractères de convergence dits « de Cauchy » et « de d'Alembert », pour les séries à termes positifs et pour les séries à termes quelconques. Exemples.
- (7) Première leçon sur les séries entières.
- (5) Développement en série entière en x de la fonction $(1+x)^{\alpha}$ (α constante réelle). Application.
- (34) Intégration des équations différentielles du premier ordre dans le cas de la séparation des variables ; exemples d'intégration d'équations différentielles du premier ordre se ramenant au cas de la séparation des variables.
- (29) Intégration de l'équation différentielle linéaire du premier ordre. Exemples.
- (13) Courbes planes dont l'équation polaire est résolue par rapport au rayon vecteur : tangente, concavité, branches infinies, asymptotes.
- (10) Construction des courbes planes définies en coordonnées polaires. Exemples. (Les résultats généraux sur les tangentes, sur la concavité, sur les branches infinies, sont supposés connus).
- (8) Courbure d'une courbe plane ; développée ; développante.
- (11) Géométrie analytique : plan tangent en un point d'une surface.
- (12) Directions principales et axes de symétrie des courbes du second ordre.
- Réduction de l'équation d'une courbe du second ordre en axes rectangulaires.
- (17) Divisions homographiques sur une conique.
- (16) Directions principales des surfaces du second ordre.
- (18) Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.
- (14) Sections circulaires des surfaces du second ordre.
- (15) Géométrie descriptive : problèmes sur les plans tangents au paraboloïde hyperbolique.
- (9) Cinématique du point : vecteur-accélération ; composantes tangentielle et normale.
- (6) Mécanique : travail d'une force. Théorème de la force vive pour un point matériel. Applications.
- (33) Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance.
- (26) Mécanique : mouvement d'un point pesant sur un plan incliné, avec frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente du plan.

**

Après bien d'autres, le rapport sur l'agrégation de 1954 rappelait la signification et la valeur des deux « leçons » qui forment l'oral du concours ; je n'y reviendrai pas cette année, si ce n'est pour insister sur le rôle que doit avoir, dans la formation des futurs maîtres, une préparation sérieuse de cette double épreuve.

Evidemment, l'écrit apporte un très net témoignage sur les qualités d'esprit et les connaissances des candidats, et les quatre problèmes proposés permettent, dans leur variété, d'apprécier une certaine compréhension des notions fondamentales, ainsi que l'aptitude à les mettre correctement en œuvre. Mais une application d'une théorie peut être traitée convenablement sans que les points de départ, les bases de cette

théorie aient été bien dominés ; un problème met presque toujours en jeu des connaissances déjà élaborées, prises à un certain moment de leur développement, et n'exige pas nécessairement, du moins en apparence, que l'on revienne. « à la source », et que l'on ait pris la peine de tout reconstituer, étape par étape, depuis l'origine. Une « leçon », au contraire, c'est-à-dire un exposé présenté à un auditoire dont le niveau est conventionnellement défini, rend presque toujours indispensable un appel à quelque notion de base, dont la simple évocation, au cours d'un raisonnement ou d'une recherche, peut mettre en évidence, soit qu'elle a été l'objet d'une sérieuse méditation et qu'elle a été comprise, soit que son importance n'a pas été saisie ou que sa signification exacte est restée inaperçue.

Le programme des épreuves orales invite à entreprendre une étude approfondie des questions qui constituent la matière de notre enseignement, dans les classes secondaires et dans les classes de « Spéciales » qui en sont le prolongement naturel. Il faut bien voir qu'il s'agit, à ce sujet, non d'acquérir une érudition poussée sur quelque point de détail dont la portée risque d'être fort limitée, mais de réfléchir sur les idées essentielles, sur tout ce qu'un enseignement bien compris de notre discipline peut et doit apporter, aussi bien dans l'ordre de la culture générale, que dans la présentation des connaissances scientifiques indispensables à ceux qui poursuivront des études, qu'elles soient techniques, ou pratiques, ou spéculatives, ou abstraites.

D'ailleurs, les « premières leçons sur ... », que le jury propose fréquemment aux épreuves orales, et qui apparaissent, presque à chaque session, parmi les sujets tirés au sort par les candidates, mettent bien en lumière cette préoccupation de demander aux aspirants-professeurs un effort sérieux d'information et de mise en ordre, particulièrement utile dans une période où le mouvement des idées, dans le domaine mathématique et scientifique, est particulièrement intense ; la confrontation des divers points de vue, qui du reste ne sont souvent opposés qu'en apparence, est, à l'heure actuelle, une nécessité pour qui doit enseigner.

Sans doute est-il opportun de rappeler, à cet égard, que le jury n'a aucune idée préconçue sur tel ou tel mode de présentation des questions, et que toute façon de voir raisonnable est parfaitement acceptée, pourvu d'abord, bien entendu, que les développements soient suffisamment adaptés au niveau de la classe qui est censée être en cause, pourvu aussi que le candidat n'ait pas trop présumé de ses forces et ait pris la préoccupation de s'assurer que l'entreprise pourra être menée à bon terme, d'une façon cohérente. Cette dernière recommandation n'est peut-être pas inutile, car il arrive que tel exposé, après un début correct, parfois brillant, se heurte brusquement à une difficulté de fond, mal repérée, et tourne court, ou retombe sur un terrain banal, que l'on paraissait, au départ, vouloir soigneusement éviter.

Redisons aussi que la préparation de l'oral ne doit pas se borner strictement à l'étude et à la mise au point des connaissances mathématiques ; si cet aspect est primordial, il n'est pas le seul, et tout ce qui touche à la présentation extérieure mérite aussi un sérieux apprentissage. Bien sûr, les conditions du concours sont, à ce point de vue, quelque peu factices, et l'on peut prétendre, non sans raison, que le comportement ne peut être le même devant un jury impassible et devant un groupe d'élèves à qui l'on s'adresserait directement, à qui l'on poserait des questions, que l'on s'efforcerait de faire vivre. Mais il est bon de rappeler encore que l'épreuve de la « leçon », telle qu'elle est conçue actuellement, est révélatrice de certaines qualités et de certains défauts qui tiennent au tempérament, au caractère, et dont il n'est sans doute pas impossible de prendre conscience en temps utile, pour essayer de développer les unes et de corriger les autres.

Ne peut-on pas « apprendre » à faire un bon usage du tableau, et aussi de la craie et du « chiffon » ? à mettre de l'ordre dans la présentation d'une question, dans la disposition d'un calcul, dans la construction d'une figure, dont on aimerait voir la naissance progressive, posément expliquée et commentée ? Ne peut-on faire effort pour maîtriser son élocution, pour éviter cette rapidité du débit, si fréquente, et qui

donne parfois l'impression d'un véritable torrent de paroles, pas toujours contrôlées, et où se glissent trop souvent de fâcheux lapsus ? Ne peut-on arriver à se défaire d'une certaine attitude de « récitante », voire de « lectrice », qui ne peut quitter des yeux le paquet, quelquefois bien volumineux, de feuilles où tout a été écrit ? Il ne paraît pas impossible d'acquiescer, en s'y appliquant, une certaine aisance dans l'attitude, dans le ton, dans la phrase, au moins lorsqu'il s'agit d'un sujet que l'on connaît, que l'on domine dans une certaine mesure, et dont on a pris soin d'ordonner méthodiquement les éléments. A écouter certaines leçons, on serait tenté, fâcheusement, de songer à un « déballage », en ne retenant ici que le sens usuel de ce mot, et en excluant, cela va sans dire, une autre acception qui met en cause la médiocre valeur des « marchandises » ainsi offertes.

Et, dans un domaine bien voisin, n'est-il pas possible d'éviter quelques fautes et incorrections, dans le langage ou dans ses abréviations symboliques, les unes simplement désagréables, les autres risquant de trahir la pensée ? Plusieurs ont été signalées maintes fois ; leur répétition prouve qu'il n'est pas inutile d'en citer de nouveau quelques-unes :

- « plus grand ou égal à... » ;
- « deux cercles intérieurs » (et même : intérieurs l'un à l'autre) ;
- « il existe c tel que... » (il s'agit d'un énoncé du théorème des accroissements finis) ;
- « la différence est possible » ;
- « h est racine du polynôme $\alpha(h)$ » (il s'agit d'un polynôme en h divisible par h) ;
- « les sous-multiples d'un polynôme » ;
- le trop classique « cône de sommet l'origine » ;
- une fantaisie orthographique sur le mot « podaire », devenu « podère » ;
- les notations défectueuses : $f(xy)$ représentant une fonction de deux variables x et y ; $f_{\lambda x}(\lambda x, \lambda y)$, alors que le symbole f a d'abord été présenté pour définir la fonction $f(x, y)$ des variables x et y ; $f_x(\alpha, \beta, 0)$, alors que f n'est qu'une fonction de deux variables x et y

J'ajouterai volontiers ici une remarque sur un détail de vocabulaire de la théorie des limites. Il est courant d'entendre dire qu'une variable « augmente indéfiniment », ou bien « croît indéfiniment », en risquant ainsi d'évoquer l'idée d'une variation dans un sens déterminé (les mots « croître » et « décroître » ont une signification mathématique), liée du reste à l'adverbe « indéfiniment », qui peut donner lieu à des interprétations incorrectes. Pourquoi ne pas s'en tenir à la locution « tend vers l'infini » (en indiquant, ou non, le signe), qui fait l'objet d'une définition précise ? Deux exemples simples peuvent illustrer cette observation :

— la fonction $\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ est croissante dans l'intervalle $(1, +\infty)$, on peut bien dire qu'elle croît *sans cesse* en même temps que x , et elle ne tend pas vers l'infini quand x tend vers $+\infty$;

— la fonction $(x + 2 \sin x)$ change de sens de variation une infinité de fois dans tout intervalle de la forme $(a, +\infty)$, quel que soit le nombre a ; elle n'est pas constamment « croissante », ce qui ne l'empêche pas de tendre vers $+\infty$ en même temps que x .

*
**

Il serait sans intérêt de reprendre dans le détail toutes les remarques que pouvait comporter chacune des leçons ; beaucoup n'ont de valeur que si on ne les sépare pas de l'exposé présenté et des incidents qui ont pu le marquer ; toutes ces observations ont d'ailleurs été faites individuellement, lors de la réception des candi-

dates, à l'issue du concours. Je me bornerai à quelques indications qui peuvent contenir un enseignement.

Comme chaque année, plusieurs des sujets proposés impliquent un commentaire sur des méthodes de recherche et de raisonnement, illustré par des exemples qu'il importe de choisir judicieusement : « exemples de résolution de problèmes de construction », « exemples de résolution de problèmes de lieux géométriques », « exemples de problèmes dont la résolution conduit à une équation du premier ou du second degré, ou à un système de deux équations du premier degré »... Il a déjà été parlé longuement, dans les rapports antérieurs, de la signification de tels problèmes, de la conception traditionnelle que nous en avons. Certains des exposés ont du reste été fort convenables. Ainsi, la leçon sur les problèmes de lieux géométriques a montré, dans l'ensemble, un très sérieux effort de mise au point dans l'analyse des idées de « condition nécessaire », de « condition suffisante », sans omettre de montrer qu'il ne s'agit pas de définir une fois pour toutes un plan rigide, un moule dans lequel doivent être coulées toutes les solutions des questions de ce genre, mais qu'il importe avant tout de réfléchir et d'être raisonnable : bien poser le problème ; faire le recensement méthodique de ce que l'on connaît et le mettre clairement en évidence ; savoir, à chaque étape, dresser le bilan de ce qui est acquis, et préciser, par là, l'orientation ultérieure du travail. Ainsi, on verra apparaître que le schéma traditionnel (1° recherche de conditions nécessaires, 2° étude réciproque, 3° conclusions) n'a rien d'absolument obligatoire ; que, parfois, ce sont des conditions « suffisantes » qui se présentent d'abord de façon naturelle, l'existence d'êtres remplissant les conditions voulues étant acquise d'emblée (et il s'agit alors de chercher si ces conditions sont bien nécessaires, si les êtres connus ou découverts au départ sont les seuls à vérifier les conditions imposées) ; que, parfois aussi, la transformation du problème posé en un problème équivalent se révèle comme une possibilité normale et constitue une solution directe et accessible.

L'exposé sur les problèmes de construction, correct dans l'ensemble, n'a mis en évidence qu'un mode de raisonnement, sans dégager assez nettement les idées de fond, et sans bien faire apparaître que leur mise en œuvre ne doit pas être exigée dans un ordre immuable. Il convient, à ce propos, de remarquer que si la première phase de la recherche, entreprise sous l'hypothèse « supposons que le problème soit possible et que l'on ait réalisé une figure vérifiant les conditions données », a permis d'établir que toute figure possédant la propriété (A) possède aussi la propriété (B), il peut être dangereux de poursuivre le raisonnement en disant : « on est ainsi ramené à construire une figure possédant la propriété (B) », car cette phrase peut être interprétée comme une affirmation d'équivalence, alors qu'il convient, à ce moment, de poser clairement la question de la « réciproque ». La faute n'était pas dans la pensée de la candidate, et il s'agit là d'une nuance de vocabulaire ; mais, en Mathématiques comme ailleurs, on ne saurait apporter trop d'attention au choix des mots, à la tournure des phrases, qui, mal contrôlés, peuvent provoquer de regrettables contresens. D'autre part, si, dans cet exposé, on insiste sur l'analyse, qui doit être faite d'abord, des propriétés de la figure supposée réalisée, il n'est peut-être pas inutile d'ajouter que cette analyse doit être complète, doit envisager toutes les possibilités : par exemple, si l'on propose de construire un segment ayant une longueur donnée, parallèle à une direction donnée, et dont les extrémités sont sur deux droites données, il faut éviter, au cours de « l'analyse », de remplacer, sans y prendre garde, le segment par un vecteur équipollent à un vecteur donné, car le raisonnement, en apparence correct, mais incomplet, ne pourra conduire qu'à une solution incomplète.

La leçon « sur les problèmes dont la résolution se ramène... » a été traitée cette année par deux candidates. L'une d'elles a choisi des exemples intéressants et variés, commentés d'une façon satisfaisante, mais sans mettre suffisamment en lumière le véritable raisonnement qui doit intervenir au cours de la « mise en équations »,

c'est-à-dire de la phase de la solution où s'établit la liaison précise entre la question posée au début (géométrie, mécanique...) et la question d'algèbre que l'on veut substituer à la première. Il est banal de remarquer, une fois de plus, que ce raisonnement de liaison a pour objet de démontrer une équivalence, ou, plus exactement, de mettre en évidence les conditions requises pour que l'on soit assuré d'une équivalence, et, par conséquent, que ce raisonnement comporte un déroulement logique — aller et retour, traités séparément ou simultanément, suivant les cas, — identique à celui dont on vient encore de parler à propos des lieux géométriques.

L'autre leçon entendue sur le même sujet était constituée par une suite d'exemples assez pauvres, ne permettant guère de dégager des idées générales. Disons, à cet égard, qu'il est un peu décevant de constater que, dans les exposés, assez nombreux, comportant obligatoirement ou naturellement un certain nombre d'applications dont le choix doit être fait par la candidate (constructions de courbes, variation de fonctions, résolutions d'équations, séries, intégrales...), trop souvent les exercices présentés sont d'une grande banalité ou d'un intérêt douteux, et aussi qu'ils sont parfois traités avec une maladresse telle que l'on pourrait être tenté de proposer la solution de la candidate comme un modèle de ce qu'il ne faut pas faire. Sans doute est-il difficile d'improviser des exemples valables au cours des trois ou quatre heures accordées à l'oral, pour la mise au point d'une leçon ; mais il ne devrait justement pas s'agir d'improvisation, et c'est pendant la préparation du concours qu'il convient, à propos des chapitres importants du programme, de réfléchir sur la façon d'illustrer telle théorie ou telle méthode, et d'imaginer quelques idées de problèmes dont l'étude constituera un apport utile et pourra servir de guide.

Il va sans dire, à ce sujet, que la mise au point d'un énoncé d'exercice est une opération délicate ; il faut peser les mots et les phrases, mettre chacun des éléments en bonne place. Il faut aussi, bien entendu, veiller à la cohérence des données, et éviter, par exemple, d'assujettir un paraboloïde hyperbolique à avoir une génératrice verticale et une génératrice de bout non situées dans un même plan, alors qu'aucun des deux plans directeurs n'est de profil.

Restant encore dans le domaine des observations d'un caractère assez général, susceptibles d'être appliquées dans divers secteurs, je crois devoir insister sur un point d'algèbre qui, presque chaque année, est la cause ou le prétexte de quelques malentendus : il s'agit de la notion de quotient exact, ou de rapport, et de toutes ses applications. Il semble que l'on puisse se mettre d'accord sur l'origine même de cette notion, qui prend naissance lorsque l'on étudie le problème de la division exacte d'un nombre a par un nombre b , la théorie de la multiplication étant acquise. Les propriétés connues de cette dernière opération permettent de démontrer l'existence et l'unicité d'un nombre dont le produit par b est égal à a , lorsque b n'est pas nul, — puis que le problème posé n'a pas de solution, est impossible, lorsque b est nul, a ne l'étant pas ; — et enfin que le problème admet comme solution n'importe quel nombre, lorsque a et b sont nuls tous les deux. La définition d'un mot (quotient exact), puis d'un symbole, pour désigner, puis pour représenter le résultat ainsi obtenu, intervient alors, et ne peut raisonnablement intervenir que lorsque le problème de la division exacte a une solution unique, c'est-à-dire lorsque le « diviseur » n'est pas nul. Ainsi apparaît, à ce moment de la construction progressive de l'édifice algébrique élémentaire, que le symbole $\frac{a}{b}$ n'a été défini, et, par suite, n'a de sens que si b n'est pas nul,

et qu'il représente le nombre unique dont le produit par b est égal à a . On est donc lié, pour toute la suite, et l'emploi d'un tel symbole, à quelque moment que ce soit d'un travail, comporte obligatoirement la condition $b \neq 0$. Si cette règle est parfois transgressée, ce ne peut être qu'en vertu d'une convention explicitement exprimée, et justifiée : c'est ainsi, par exemple, que l'on peut écrire la condition de parallélisme de

deux directions de droites, ayant respectivement pour paramètres directeurs (p, q, r) et (p', q', r') , sous la forme

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r},$$

alors que certains des nombres p, q, r , peuvent être nuls, mais cette écriture est (ou, du moins, doit être) toujours précédée ou accompagnée d'un commentaire rappelant qu'il s'agit là d'une convention, applicable dans l'hypothèse où l'un au moins des trois dénominateurs est différent de zéro, et qui remplace, en abrégé, un système de trois relations telles que

$$p' = \lambda p, \quad q' = \lambda q, \quad r' = \lambda r,$$

étant ainsi entendu que, si l'un des dénominateurs p, q, r est, ou devient, nul, le numérateur du « rapport » correspondant doit lui-même être pris égal à zéro, ce « rapport » devant alors être supprimé de la suite des égalités considérées.

De même, dans la théorie élémentaire des limites, et des opérations sur les limites, on fait souvent intervenir, à propos des « formes indéterminées », un vocabulaire et un symbolisme tels que : « le rapport de deux fonctions de x se présente sous la

forme indéterminée $\frac{0}{0}$, lorsque x tend vers une valeur x_0 ». Mais, là encore, il s'agit,

très précisément, non de la mise en jeu d'un symbole représentant un quotient exact, mais d'une convention d'écriture simplement destinée à rappeler les termes de la question qui se pose : « Lorsque deux fonctions tendent simultanément vers zéro, il n'existe pas de théorème général relatif à l'existence d'une limite pour le quotient de l'une par l'autre, et il convient, dans chaque cas, d'étudier directement le pro-

blème. » Il est ainsi bien entendu que ce symbole d'indétermination $\frac{0}{0}$ (comme les symboles $+\infty, -\infty, 0 \times \infty, \dots$, qui ont la même origine) ne représente pas un nombre, et ne constitue qu'une abréviation évocatrice.

Ces points acquis, ne devraient plus surgir, au beau milieu d'un exposé, des considérations hasardeuses sur un rapport dont le dénominateur peut prendre la valeur zéro, ou encore des scrupules tardifs sur la légitimité d'une simplification de

fraction rationnelle (on peut remplacer $\frac{A.B}{A.C}$ par $\frac{B}{C}$, en supposant que A est différent de zéro), ni, à plus forte raison, certaines interprétations, trop fréquemment entendues, à propos de l'étude de quelques fonctions classiques, telles que la fonction homographique, ou la fraction quotient de deux polynômes, lorsque le numérateur et le dénominateur viennent à avoir une racine commune. S'il s'agit, par exemple, de

la fonction
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - \alpha},$$

la condition primordiale à imposer étant $x \neq \alpha$, il est clair que, si $ax^2 + bx + c$ est égal à zéro, la fonction y , telle qu'elle a été donnée, n'est pas définie pour la valeur α de la variable x et se réduit à une fonction linéaire à l'intérieur de chacun des deux intervalles d'existence ; je ne sais quel sens peut être attribué à une phrase telle que : « pour $x = \alpha$, la fonction y est indéterminée », et, si l'on tire de là, en guise de conséquence, que la courbe représentative est alors formée de deux droites

dont l'une est parallèle à Oy , je pense que l'on doit aussi en déduire que $\frac{0}{0}$ est un

symbole (dont l'origine reste mystérieuse) représentant *n'importe quel nombre* ; il semble inutile d'insister sur le jeu d'« égalités » que l'apprenti-mathématicien pourrait, dans ces conditions, considérer comme légitime. Il va de soi que le problème se pose très différemment si l'on demande d'étudier la relation, entre deux variables x et y :

$$(x - \alpha)y = ax^2 + bx + c,$$

et de déterminer le lieu géométrique des points dont les coordonnées (x, y) sont les solutions de l'équation ainsi proposée.

Pour en finir avec ces bien longues remarques sur la notion de quotient, il est peut-être utile de signaler, à propos des formules de trigonométrie où interviennent des tangentes et des cotangentes, que ces fonctions cessent d'être définies pour certaines valeurs des variables, et que ces conditions d'existence méritent d'être mises en évidence dès que l'on est amené à introduire les symboles tangente et cotangente, dans un raisonnement ou dans un calcul.

*
**

De l'examen détaillé des différentes leçons, je retiendrai encore quelques observations.

A propos des « inégalités dans les triangles » (classe de Seconde), il est quelque peu regrettable d'entendre présenter cette étude à partir d'un « *postulat* » où l'on admet que, dans tout triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres. La candidate qui a traité cette question paraissait ignorer que la comparaison d'un angle extérieur d'un triangle à l'un des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents, comparaison qui peut servir de point de départ à la théorie élémentaire des inégalités dans les triangles, peut être traitée comme une conséquence des définitions du début de la géométrie et de l'un des deux « premiers » cas d'égalité des triangles. Il n'est pas sans intérêt de montrer qu'une chaîne logique peut conduire à la justification d'une affirmation bien connue sur « le plus court chemin entre deux points ».

Dans l'étude des faisceaux harmoniques, il importe de faire apparaître qu'il s'agit non de quatre droites (concurrentes) quelconques, mais de quatre droites rangées dans un certain ordre. D'autre part, la notion de polaire d'un point par rapport à un angle, si elle est exposée, doit être complétée par la mise en valeur de la simplicité et de l'intérêt, théorique et pratique, des résultats et des constructions qui s'y rattachent.

Le problème des cercles tangents à deux cercles donnés dans un plan devrait constituer un « beau » sujet de leçon. Est-ce la richesse des points de vue possibles, entre lesquels il faut, peut-être, savoir choisir, qui provoque souvent de fâcheuses erreurs ? Evidemment, on doit mettre sur le compte d'une passagère étourderie des propositions telles que :

— lorsque deux cercles sont tangents intérieurement, l'une des parties du lieu géométrique des centres des cercles tangents à ces deux cercles se compose d'une demi-droite, et d'un point (l'autre partie étant une conique) ;

— lorsque deux cercles sont concentriques, le lieu des centres des cercles qui leur sont tangents est un cercle ; — mais, la candidate qui les énonce à haute voix ne devrait-elle pas, les entendant, réagir aussitôt ?

La transformation par inversion a fait l'objet de deux leçons, l'une présentant les débuts de la théorie, l'autre devant traiter quelques-unes de ses applications. Pour la première, faut-il encore rappeler qu'une unité de longueur doit avoir été fixée pour que la définition classique ait un sens, et aussi qu'il est préférable d'éviter des énoncés tels que : deux points et leurs inverses sont toujours sur un même cercle ? Dans la seconde, un fâcheux mélange de mesures arithmétiques et de mesures algébriques de segments et de vecteurs, employées souvent à contre-temps, a rendu fort contestable une bonne partie des résultats présentés, d'autant plus que la candidate avait annoncé, au départ, son intention de s'en tenir à des inversions positives, et que des inversions négatives n'ont pas manqué de s'introduire à certains moments, sans en avoir reçu l'autorisation peut-être, et, à coup sûr, sans avoir été clairement aperçues.

Dans l'étude de quelques équations trigonométriques, la candidate, scrupuleuse — n'osant peut-être pas aborder sous son vrai jour la résolution d'une équation telle que

$$\sin [f(x)] = \sin [g(x)]$$

en énonçant explicitement le problème ainsi posé (c'est-à-dire : existe-t-il des valeurs de x telles que les valeurs correspondantes de f et de g aient le même sinus ? et, s'il en existe, déterminer ces valeurs), ce qui permet de le remplacer immédiatement par un problème équivalent —, a commencé par faire l'hypothèse de l'existence d'une solution x_0 , afin d'avoir à mettre en jeu de véritables égalités, mais la distinction ainsi établie au départ entre les deux sens du signe $=$ n'a pas tardé à s'estomper et même à disparaître, créant une certaine confusion, peu propice au développement d'un raisonnement logiquement et raisonnablement construit.

Une confusion analogue s'est révélée dans la classique leçon sur les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. Cependant, le début de l'exposé était solide, puisqu'il montrait que l'on savait obtenir tous les couples de nombres formant les solutions d'une équation linéaire à deux inconnues : l'étude complète d'un système de deux équations s'en déduit tout naturellement, en cherchant quels sont les couples solutions de l'une des deux équations qui sont également solutions de l'autre ; la méthode dite « de substitution » se justifie ainsi d'une façon parfaitement directe et naturelle sans que l'on ait à faire appel à certains théorèmes d'équivalence.

Dans une première leçon sur les nombres positifs et négatifs, il est très normal que l'on mette en vedette, dès le début, l'idée d'*extension*, mais l'énoncé, même commenté, de cette idée ne dispense pas, pour la suite, du souci de cohérence et de logique, et n'autorise nullement à jongler avec les symboles, déjà connus et définis jusque-là pour une certaine catégorie d'êtres, en les introduisant, sans aucune précaution, dans le domaine nouveau que l'on est justement en train de construire. La phrase : « a et b étant deux nombres arithmétiques, l'élément c tel que $a + c = b$ est appelé un nombre relatif », ne peut constituer, telle quelle, une définition d'un nombre relatif, puisque l'on ne sait pas, à ce moment, ce que signifient les symboles $+$ et $=$ appliqués à d'autres êtres que les nombres arithmétiques.

La présentation des nombres complexes a été faite, cette année, à partir de la considération des classes de polynômes en x congrus modulo $(x^2 + 1)$. C'est là une théorie parfaitement acceptable, fort ancienne du reste dans son fond, sinon dans sa forme, rajeunie quelque peu par l'introduction systématique de la notion de congruence. Mais, dans ces exposés où il s'agit de définir des êtres nouveaux, puis les relations de comparaison et les opérations qui les concernent, il y a un passage délicat : le vocabulaire et les symboles, qui seront employés pour représenter ces relations et ces opérations, vont être conventionnellement confondus avec le vocabulaire et les symboles déjà utilisés pour d'autres catégories d'êtres à partir desquels on est en train de construire une nouvelle catégorie, par voie d'extension, et il est bien rare que soit évitée la faute logique (qui vient d'être signalée à propos des nombres « relatifs. ») que constitue l'emploi prématuré de ce vocabulaire et de ces symboles. Il est bien évident que, si l'on convient de représenter par le symbole $(ai + b)$ la classe de tous les polynômes en x congrus au polynôme $(ax + b)$ modulo $(x^2 + 1)$, on définit ainsi un nouvel être, à partir des deux nombres réels a et b , dont la représentation symbolique est lourdement chargée de signes (i , $+$) et de conventions (i placé à côté du nombre réel a), dont le sens n'est pas encore élucidé, et qu'il faudrait savoir identifier avec clarté, le moment venu, avec les signes et conventions qui seront définis plus tard ; la passerelle est fragile et bien des novices n'éviteront pas la chute.

Dans la théorie des diviseurs communs à des polynômes, il importe de mettre en évidence, dès le début, que si A est diviseur de B , tout polynôme $(k.A)$, où k est une constante non nulle, est également diviseur de B , et d'en déduire la conséquence pratique, qui consiste à ne pas considérer comme distincts, dans l'étude des diviseurs

et des multiples, deux polynômes dont l'un est le produit de l'autre par une constante différente de zéro. Et le jury serait heureux de ne pas entendre affirmer que, si deux polynômes A et B ne sont ni l'un, ni l'autre, divisibles par le polynôme C, leur produit A.B ne saurait être divisible par C, ou, tout au moins, la phrase ayant sans doute été prononcée par inadvertance, d'entendre, en temps utile, une rectification.

Si l'on convient, à propos de la formule de Taylor pour les fonctions d'une variable, de présenter les deux formes du terme complémentaire, dites « de Lagrange » et « de Young », il est tout indiqué de faire ressortir la différence entre les hypothèses « suffisantes » mises en jeu pour la démonstration de l'une et de l'autre des deux formules, l'existence de la « dernière » dérivée étant supposée acquise, dans l'un des cas, à l'intérieur de l'intervalle d'étude, et dans l'autre cas, à l'une des extrémités de cet intervalle.

L'exposé sur « la séparation des racines... » a donné lieu à de nombreux commentaires dans les rapports antérieurs. Rappelons que l'idée essentielle qui devrait être dégagée est que toute fonction définie, continue, et monotone dans un intervalle (a, b) s'annule au plus une fois dans cet intervalle, et que c'est la comparaison des signes des valeurs numériques, ou des limites, de la fonction pour les extrémités d'un tel intervalle, qui permet de décider si la fonction s'annule ou non. Ce théorème mis en évidence, il reste à montrer comment on pourra l'appliquer en pratique.

Dans la leçon voisine, sur « l'emploi de la dérivée... », on aimerait que le théorème classique liant le signe de la dérivée au sens de variation de la fonction dans un intervalle, soit démontré avec la simplicité et la netteté qui manifesteraient une parfaite mise au point des définitions et des résultats fondamentaux mis en jeu. Il convient de savoir gré à la candidate qui a traité cette question d'avoir pensé à faire observer que l'emploi de la dérivée n'était pas toujours indispensable pour découvrir le sens de variation d'une fonction dans certains intervalles, mais pourquoi a-t-elle eu la fâcheuse idée d'illustrer cette judicieuse et importante remarque en prenant

comme exemple la fonction $\frac{x^4 - 2}{1 - x^6}$, sous le prétexte qu'il s'agit là, pour les valeurs positives de x , du quotient d'une fonction croissante par une fonction décroissante ?

La théorie des séries constitue l'un des domaines qui paraissent particulièrement redoutés de la plupart des candidates. Et il semble bien que la cause profonde de cette appréhension, et des échecs trop fréquents qui se manifestent dans les leçons, pourtant classiques, proposées sur ce sujet, est une insuffisante connaissance de la notion de limite. Il est banal de dire que c'est là un des fondements de l'analyse, et il est bien naturel de demander à de futurs professeurs d'avoir réfléchi sur ce chapitre essentiel, afin d'en dominer au moins les aspects élémentaires que l'on aura constamment à appliquer dans l'enseignement, même au niveau de l'initiation.

Les exposés sur les séries, numériques ou entières, font bien souvent apparaître de regrettables lacunes, dans l'ordre de la compréhension, et ce n'est pas l'évocation plus ou moins habile de quelque « grand théorème » qui pourra faire illusion, quand on s'aperçoit que sur des points fort simples, le sens même de certaines définitions élémentaires n'a pas été saisi. A deux reprises, le théorème de Cauchy donnant une condition nécessaire et suffisante de convergence a été cité, ce qui n'est, bien entendu, nullement répréhensible, à condition que l'énoncé soit parfaitement correct et qu'un commentaire convenable en soit donné ; mais, quelques tentatives d'utilisation, en particulier à propos des séries absolument convergentes, se sont révélées plutôt douteuses, d'autant plus que l'étude des séries absolument convergentes peut être présentée sous des formes très simples et claires, sans recourir à un résultat admis sans démonstration et, par là-même, insuffisamment assimilé. Et, cette année encore, il est bon de rappeler que les critères élémentaires de Cauchy et de d'Alembert sont applicables, hors des « cas douteux », aux séries quelconques, à termes réels ou

complexes, qu'il s'agisse de la convergence ou de la divergence, la divergence résultant ici du fait que le terme général ne tend pas vers 0.

Pour les séries entières, il est bon de faire ressortir le rôle que joue le théorème d'unicité du développement en série entière d'une fonction ; la découverte, par un certain procédé, d'une série entière dont la somme est égale à la fonction donnée, dans un intervalle comprenant zéro, ne peut, à elle seule, constituer une solution *complète* du problème posé.

C'est encore la notion de limite qui est en cause dans la définition classique d'une intégrale définie à partir des « sommes S et s », mais la faute, souvent signalée et fréquemment commise dans cette théorie consiste à ne pas s'apercevoir qu'il n'est pas question ici de *limite* d'une fonction d'un nombre fini de variables, et que ce mot, s'appliquant à des êtres nouveaux mettant en œuvre des modes de partage d'intervalles en intervalles partiels, correspond à une idée nouvelle, et doit, par conséquent, être défini, comme doivent être démontrées, d'ailleurs, les propriétés des nombres ainsi construits.

Les leçons sur les coordonnées polaires sont également presque toujours décevantes. Faut-il penser que le maniement des êtres de la géométrie orientée et celui des fonctions circulaires offrent de très sérieuses difficultés, qui n'ont pu être encore surmontées après plusieurs années d'études mathématiques, au cours desquelles ces notions ont pourtant joué un rôle essentiel ? Il est curieux qu'une candidate à l'agrégation ne songe pas à remarquer que, l'équation polaire d'une courbe étant mise sous la forme $r = f(\theta)$, les valeurs finies de θ pour lesquelles r s'annule ou tend vers zéro fournissent immédiatement les tangentes au pôle, aux différents arcs de la courbe qui passent en ce point, de même que les valeurs finies de θ pour lesquelles r tend vers l'infini, définissent non moins immédiatement les directions asymptotiques des branches infinies correspondantes. Faut-il redire ici que les exemples de construction de courbes définies en coordonnées polaires révèlent, presque tous les ans, de fâcheuses lacunes de fond, qui provoquent parfois de grosses erreurs ? Il serait bon que les candidates prennent la peine de réfléchir et d'étudier méthodiquement les problèmes d'algèbre, de trigonométrie et de géométrie élémentaire qui se posent normalement lorsqu'on cherche à réaliser de telles constructions.

L'étude des directions principales a été traitée dans deux leçons relatives, l'une aux courbes, l'autre aux surfaces du second ordre. En géométrie plane, l'exposé a été rendu confus par l'intervention constante de la notion de diamètre, alors que le « genre parabole » n'avait pas été mis à part, et une affirmation telle que « dans toute conique, il y a deux axes de symétrie », qui ne peut évidemment être considérée comme révélant une grave lacune dans la science géométrique de la candidate, montre que cette question classique a encore besoin d'une sérieuse mise au point. La leçon relative aux surfaces du second ordre a bien commencé, par une définition correcte, mettant à leur vraie place les deux notions d'orthogonalité et de conjugaison qui jouent, par nature même, des rôles différents ; mais pourquoi la mise en équation qui doit en résulter n'a-t-elle pas tenu compte de cette distinction, et a finalement placé sur le même plan les deux relations ? D'autre part, un essai de raisonnement géométrique, essai louable mais incomplet, n'a compensé que partiellement certaines insuffisances dans l'étude des propriétés élémentaires des racines de l'équation en S .

Un point de départ très valable pour traiter le problème des génératrices rectilignes des quadriques sans point double est d'établir qu'une telle quadrique peut toujours être définie par une équation de la forme $PQ = RS$, P, Q, R, S étant quatre formes linéaires indépendantes des variables représentant les coordonnées homogènes d'un point de l'espace. Il est alors naturel d'observer que cette équation met en évidence quatre droites appartenant à la surface (intersections de plans tels que $P = 0, R = 0$), ce qui justifie la recherche de l'intersection de la surface par les plans variables passant par l'une ou l'autre de ces quatre droites. Bien entendu, les propriétés

générales étant obtenues par ce moyen, il reste à étudier les particularités relatives aux quadriques à centre unique et aux paraboloïdes.

Enfin, dans une leçon sur le vecteur-accélération, dans la cinématique du point, il est indispensable de faire apparaître la position de ce vecteur par rapport aux plans tangents à la trajectoire, ou plutôt par rapport aux plans tangents au support géométrique de la trajectoire, car il est bon d'attirer l'attention sur la distinction nécessaire entre la trajectoire et son support géométrique (l'exemple d'un mouvement vibratoire, ou d'un mouvement uniformément varié, sur une droite ou sur un cercle, suffit pour le faire comprendre). D'autre part, la considération des mouvements projetés sur un plan ou sur une droite, si elle n'est pas indispensable, est cependant très utile, et d'ailleurs très facile à exposer.

*
**

Je voudrais maintenant, en mettant un terme à ces observations, bien préciser qu'il ne faut pas en tirer des conclusions pessimistes, car si les critiques paraissent nombreuses, il faut bien dire que l'on pourrait, parallèlement, dresser un tableau assez fourni de réussites, d'idées heureuses, de bonnes intentions, dont quelques-unes ont d'ailleurs été, de-ci, de-là, signalées. Le jury sait bien qu'il s'agit de « candidates », et que bien des notions et des problèmes qui font partie de notre enseignement, n'arrivent que peu à peu à être dominés, ou, plutôt, mieux compris ; il reste toujours « quelque chose » à apprendre, ou à saisir plus clairement, et les remarques qui précèdent n'ont d'autre objet que de susciter certaines réflexions, et d'éviter, peut-être, certains faux-pas.

*
**

Les notes obtenues par les candidates pour les deux épreuves orales se répartissent ainsi :

Pour les Mathématiques Élémentaires, quatre leçons (trois de géométrie, une d'arithmétique) ont été cotées 17,5 et 17 ; puis viennent deux 15, trois 14, cinq 13, quatre 12, deux 11 et un 10 ; quant aux notes inférieures à la moyenne, six sont comprises entre 9 et 8, six entre 7 et 6, et viennent en fin deux 5, un 4 et un 2. L'une des candidates admissibles, après avoir fait les épreuves pratiques, n'a pas pu prendre part à l'oral. La moyenne générale de cette épreuve, pour les trente-sept admissibles restantes, est un peu supérieure à 10,5 ; elle est en baisse sensible par rapport à celle de 1954, qui atteignait 12. Il semble bien que l'allongement de la liste d'admissibilité a amené jusqu'à l'oral quelques candidates, qui ne manquent pas de valeur et de qualités, mais qui étaient insuffisamment préparées (plusieurs se présentaient pour la première fois) ; elles auront les plus grandes chances de réussir après une sérieuse mise au point de leurs connaissances.

En Mathématiques Spéciales, le groupement des notes est plus serré, entre 16 et 5, avec deux zones d'accumulation inégales : celle de tête comprenant quatre 16, cinq 15, deux 14, deux 13, et celle de queue, malheureusement plus dense, avec quatorze notes comprises entre 9 et 7, et six entre 6 et 5, séparées par un petit lot moyen de quatre notes entre 12 et 10. La moyenne générale, pour l'ensemble des candidates, est un peu inférieure à 10,3, et légèrement supérieure à celle de l'an dernier (9,7). Il faut remarquer qu'il n'y a pas eu cette année de leçon de Spéciales se détachant très nettement des autres : les quatre meilleures, cotées 16, ont été très convenables, sans porter, cependant, à quelque moment, dans le fond et dans la forme, la marque d'une qualité exceptionnelle qui entraîne l'adhésion sans réserve.

Pour l'ensemble des deux épreuves orales, les notes sur 20 se répartissent entre 16,5 et 3,5, avec une importante condensation autour de la moyenne : après les trois

premières (un 16,5 et deux 15), on trouve en effet douze notes entre 13,5 et 12, six entre 11 et 10, sept entre 12 et 10, onze entre 9,5 et 7, pour terminer par un 6,5, un 6, un 5,5 et un 3,5. Et la moyenne générale de l'oral, pour les trente-sept admissibles, est 10,4 ; elle apparaît encore très voisine de celle de 1954 (10,8), et de celle des années précédentes.

RESULTATS GENERAUX

Le total de toutes les notes correspondant à l'ensemble des huit épreuves écrites, pratiques et orales, pour chacune des trente-sept admissibles (ayant passé toutes les épreuves) varie, cette année, de 284 à 109,5, pour un maximum de 400 points. La moyenne générale de chacune de ces candidates est donc comprise entre 14,2 et 5,5, et la moyenne générale pour le groupe est environ 9,5 sur 20. Les notes extrêmes sont très comparables à celles des années voisines, en mettant à part la candidate classée en tête en 1954, qui avait obtenu une moyenne générale (16,5) rarement atteinte, et en tenant compte de l'augmentation non négligeable de la liste d'admissibilité. Il en est de même de la moyenne générale, qui était 9,65 en 1954 et 10,5 en 1953.

Le classement de l'écrit a été, comme d'habitude, assez profondément modifié par les épreuves pratiques et orales, et cela dès le quatrième rang : quatre candidates assez mal placées à l'écrit figurent parmi les reçues.

Le nombre de postes d'agrégées mis au concours en 1955 était bien supérieur à celui de l'année précédente : trente-huit, dont trois correspondant à des emplois à l'étranger et Outre-Mer, au lieu de vingt-huit en 1954. Si la liste des admissibles avait pu, sans difficulté, être prolongée jusqu'à comprendre trente-huit noms, le jury n'a pas pu proposer pour l'admission définitive plus de vingt et une candidates, les admissibles non reçues bénéficiant d'ailleurs, comme on le verra plus loin, d'une mesure d'équivalence, lorsqu'elles n'étaient pas déjà, soit titulaires du certificat d'aptitude, soit admises dans un Centre pédagogique régional.

Les notes d'ensemble des vingt et une reçues sont comprises entre 284 et 198, sur 400, c'est-à-dire entre 14,2 et 9,9 sur 20, c'est-à-dire à peu près toutes supérieures à la moyenne. La répartition de ces notes est la suivante : un 14,2 ; un 13,6 ; un 13, puis trois comprises entre 13 et 12, trois entre 12 et 11, huit entre 11 et 10, et quatre à peine inférieures à 10. Une coupure marquée sépare les deux dernières reçues (deux *ex-aquo*) du groupe des non-reçues, dont les huit premières ont obtenu des notes comprises entre 9 et 8. Le jury, pour établir ses propositions, a tenu le plus grand compte des nécessités actuelles concernant le recrutement des professeurs, nécessités marquées par la progression croissante du nombre des postes déclarés vacants, tout en ayant le souci de garder au concours de l'agrégation, et au titre d'agrégé, sa traditionnelle et indéniable valeur.

Il n'est pas sans intérêt de donner ici les moyennes des deux groupes de candidates : reçues, et admissibles non-reçues, pour les épreuves écrites, pour les épreuves pratiques, pour les épreuves orales, et pour l'ensemble des huit épreuves ; les nombres indiqués ci-dessous correspondent, dans l'ordre, à ces quatre séries d'épreuves :

pour les vingt et une reçues	10,9	7	12,2	11,2
pour les admissibles non-reçues	8,0	4,5	8	7,4

En comparant avec les résultats de 1954, on verra que la première ligne de ce tableau marque très nettement le maintien du niveau des notes des candidates reçues.

La promotion des agrégées de 1955 comprend : trois élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, dont la première du classement final, qui était d'ailleurs première à l'écrit avec une sensible avance sur les autres candidates, — sept élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, parmi lesquelles la seconde,

la troisième et la cinquième, — huit professeurs titulaires en exercice (dont la quatrième), et un professeur titulaire en congé, — et deux élèves-professeurs, l'une du Centre pédagogique (C.P.R.) de Paris, l'autre du C.P.R. de Lyon, d'ailleurs déjà reçues toutes deux au C.A.P.E.S., dont elles avaient passé les épreuves pratiques en 1955.

Les dix-sept admissibles non reçues comprennent : neuf étudiantes (des Facultés de Lille, de Poitiers, de Strasbourg, de Rennes, de Grenoble), deux auditrices à l'Ecole Normale Supérieure, une élève de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, trois professeurs titulaires en exercice, deux élèves-professeurs du C.P.R. de Paris. Si aucune des étudiantes « libres » admissibles ne figure cette année sur la liste des reçues, il faut remarquer d'abord que la plupart d'entre elles affrontaient le concours pour la première fois, puis que quatre sont classées juste après la coupure, et que toutes ont donné l'impression qu'une nouvelle et sérieuse année de préparation leur donnerait de grandes chances de succès.

Parmi les admissibles non-reçues, quatre avaient été déjà admissibles en 1954 ; trois d'entre elles, deux professeurs titulaires en exercice et une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure déjà titulaire du C.A.P.E.S., obtiennent ainsi le titre de professeur bi-admissible, — mais la quatrième, non encore titulaire du C.A.P.E.S., n'étant proposée par le jury que pour l'équivalence de la partie théorique du C.A.P.E.S., ne pourra bénéficier de sa double admissibilité que lorsqu'elle aura obtenu le titre de « certifiée » (à moins qu'elle ne soit reçue, auparavant, à l'agrégation).

Cinq autres admissibles ont obtenu, sur la proposition du jury, l'équivalence complète du C.A.P.E.S. ; quatre étudiantes (deux de Lille, une de Poitiers, une de Strasbourg) et une élève de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses. Trois (étudiantes) ont été dispensées de la partie théorique du C.A.P.E.S. et seront donc élèves-professeurs dans des C.P.R. pendant l'année 1955-1956. Quant aux autres admissibles non reçues, l'une est professeur titulaire, une autre est déjà certifiée, trois étaient reçues en 1955 à la première partie du C.A.P.E.S., et une, enfin, élève-professeur au C.P.R. de Paris en 1954-1955, mais non reçue aux épreuves pratiques du C.A.P.E.S. en 1955, était autorisée, par le jury du C.A.P.E.S. à accomplir une deuxième année de stage dans un C.P.R.

Signalons encore que la liste d'admission à la partie théorique du C.A.P.E.S. en 1955 (examen d'entrée dans les C.P.R.), publiée avant la fin de la session de l'agrégation, comprenait, parmi les candidates étudiantes, quatre admissibles à l'agrégation ; aucune des quatre n'a été reçue à ce concours, mais l'une a obtenu, à défaut du titre d'agrégée, l'équivalence complète du C.A.P.E.S. Quant aux cinq élèves des Ecoles Normales Supérieures qui se présentaient à la fois à l'agrégation et au concours des C.P.R., elles étaient toutes reçues à ce dernier, mais quatre d'entre elles sont devenues agrégées et la cinquième a obtenu l'équivalence complète du C.A.P.E.S.

*
**

On voit, par ce bilan, les liens de plus en plus étroits qui s'établissent entre les deux concours de recrutement, agrégation et C.A.P.E.S., par l'intermédiaire des Centres pédagogiques régionaux, dont l'institution se révèle extrêmement heureuse à tous égards.

On remarquera que, cette année, plusieurs étudiantes se sont présentées à l'agrégation sans faire acte de candidature à la partie théorique du C.A.P.E.S. : c'est là un fait très naturel ; il est intéressant de constater que cinq d'entre elles figurent parmi les admissibles, et qu'en définitive trois ont obtenu le titre de certifiée (par équivalence), les deux autres bénéficiant de l'équivalence de la partie théorique du certificat.

Plusieurs des candidates admissibles et certifiées, ont demandé l'autorisation de ne pas prendre de poste à la rentrée d'octobre 1955, afin de poursuivre leur préparation à l'agrégation. Elles ont obtenu satisfaction, de même que quelques certifiées de 1955 qui ne s'étaient pas présentées à l'agrégation. Je souhaite que, malgré les difficultés de recrutement, de tels sursis continuent à être accordés très largement, car les obligations professionnelles, surtout pour un professeur débutant, risquent fort de rompre la chaîne du travail entrepris en vue du concours et déjà marqué par un demi-succès. Je n'oublie pas, bien entendu, que chaque session voit le succès de plusieurs professeurs titulaires en exercice, et leur nombre a été, cette année, particulièrement important ; il faut souligner le grand mérite de ces candidates et les féliciter pour le remarquable et persévérant effort qu'elles ont su accomplir. Je n'oublie pas non plus que le Centre national d'enseignement par correspondance va instituer, dès 1956, une préparation à l'agrégation ; une préparation au C.A.P.E.S., organisée par ce Centre, fonctionne déjà depuis deux ans d'une façon remarquable ; sans nul doute, les candidats à l'agrégation, qui n'ont pas la possibilité de suivre les cours et les conférences d'une Faculté, pourront ainsi recevoir une aide précieuse et efficace. Cependant, on ne peut s'empêcher de songer à ceux et à celles qui, ayant été dans l'obligation de prendre immédiatement un poste comme professeur certifié ou comme adjoint d'enseignement, ont dû peu à peu, malgré leur courage, et souvent pour des raisons de santé, renoncer à affronter des épreuves qu'ils ne pouvaient plus préparer sérieusement. N'est-il pas de bonne politique, pour l'avenir de l'Université, de favoriser, pour ceux qui s'en sont montrés dignes, un effort vers le mieux, un approfondissement des connaissances qui peut être fructueusement réalisé au cours d'une année consacrée à l'étude, après un premier contact avec les réalités et les exigences du concours ?

Et je ne saurais mieux terminer ce rapport qu'en soulignant justement les progrès qui se manifestent, d'année en année, dans l'organisation de la préparation des candidats à l'agrégation ; on ne saurait trop remercier tous les maîtres de l'Enseignement Supérieur et de l'Enseignement Secondaire, qui acceptent avec beaucoup de dévouement ces lourdes tâches de direction et de contrôle du travail ; grâce à eux, la formation des futurs professeurs s'accomplit dans des conditions de plus en plus favorables.

J. DESFORGE,

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Centre national d'Enseignement par correspondance

Préparation à l'agrégation

En vue de mettre en œuvre tous les moyens propres à remédier à la pénurie du personnel enseignant, le Ministre de l'Education Nationale a décidé de créer au Centre national d'Enseignement par correspondance une préparation par correspondance à l'agrégation. Cette préparation fonctionnera dès le mois de novembre 1956 et sera dirigée par M. MOROT-SIR, professeur à la Faculté des Lettres de Lille.

Elle est spécialement destinée :

1° Aux candidats habitant hors de France (Union Française. Français résidant à l'étranger).

2° Pour la Métropole :

a) Aux étudiants dont l'état de santé interdit formellement des déplacements difficiles.

b) A ceux qui sont inscrits dans une Faculté où n'est pas organisée de préparation à l'agrégation à laquelle ils ont l'intention de se présenter.

c) Aux étudiants sous les drapeaux.

d) Aux étudiants qui exercent des fonctions d'enseignement et que l'éloignement empêche de suivre régulièrement les cours des Facultés.

Tout étudiant devra adresser une demande d'autorisation d'inscription au Doyen de la Faculté intéressée. Cette demande sera transmise au Recteur avec l'avis du Doyen et celui-là la fera parvenir avec son avis au Directeur du Centre de préparation.

En ce qui concerne les candidats à l'agrégation des Sciences physiques et à l'agrégation des Sciences naturelles, il est extrêmement souhaitable que soit envisagée l'organisation dans les Facultés de séances de travaux pratiques groupées de manière à n'exiger que le minimum de présence.

Préparation à des concours de l'Enseignement Technique

Un nouveau cycle de préparation aux professorats techniques adjoints industriels (collèges techniques et centres d'apprentissage) commence ce mois-ci au Centre national d'Enseignement par correspondance, pour les spécialités suivantes : dessin industriel en mécanique, mécanique, électricité, automobile et bureau des travaux.

En même temps commence la préparation au concours de recrutement des chefs de travaux de centres d'apprentissage en vue du concours de 1957.

La préparation dure un an ; elle est gratuite.

Pour tous renseignements ou demandes de dossier, écrire au secrétariat du Centre national d'Enseignement par correspondance, radio et télévision, 60, boulevard de Stalingrad, Vanves (Seine).

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU 25 MARS 1956

Etaient présents : 55 membres.

Bureau : MM. BIGUENET (*Vice-Président*), CHAZAL (*Vice-Président*), LEGRAND (*Trésorier*), Mlle MASSON (*Vice-Présidente*), MM. ROSTOLLAND (*Secrétaire*), WALUSINSKI (*Président*).

Comité : MM. BAY, FAVRELLE, FOUCHÉ, GUITTON, POCHARD, THOVERT, CANONGE, MARVILLET.

Membres : Mme AYRAULT (*Jules-Ferry*), MM. BARRIA (E.N. Evreux), BASTIEN (Sézanne), BELGODÈRE (*Institut Henri-Poincaré*), BERRARD (Nancy, *Henri-Poincaré*), BUQUET (St-Quentin), Mme CANONGE (Nîmes), MM. DÉON (*Janson-de-Sailly*), DURRANDE (*St-Louis*), DUVAL (*Colbert*), DUVAL (C.T. *Dorian*), Mlle GALMARD (*Château-dun*), MM. GITTON (Orléans), GODEFROY (Le Raincy, *Charlemagne*), GUERBOIS (*Langevin*), GUILLOTIN (C.T. Sens), HERMANT (*Chaptal*), HUISMAN (*Montaigne*), Mlle LEMASURIER (Amiens), M. LERICHE (St-Germain, *Marcel-Roby*), Mlle LONJARET (Metz), M. MAGNIER (*Janson-de-Sailly*), Mlle MARCHAND (Sèvres), M. MASSEON (Colmar), Mlle A. MINOIS (Le Mans), M. MONJALLON (*St-Louis*), Mlle PETIOT (Angoulême), Mlle POIRMEUR (*Hélène-Boucher*), MM. PONS (*Arago*), PRÉVOST (*J.-B.-Sax*), Mlle ROBLIN (Vierzon), Mlle ROULET (Montgeron, *Henri-IV*), MM. RUFF (*Chaptal*), SAUVADET (Metz), SIROS (*Lakanal*), VERRIÈRE (*Janson-de-Sailly*), VILLA (Lézignan), VOGT (Dôle), X, Y, Z (trois noms manquent).

S'étaient fait représenter ou ont voté par correspondance : 121 membres, dont les noms suivent : ALMÉRAS (Nîmes), AUNIS (*Saint-Louis*), BARLUET (Limoges), BEAMURGUIA (St-Gaudens), BERGER (*J.-Decour*), J. BERNARD (Savigny), BERTRAND (Marseille, *Thiers*), BLANCHET (Beaucaire), BOUCHAT (Besançon), BOUSSO (Sarbruck), BOUTIN (*Janson-de-Sailly*), BOUVIER (Poitiers), BRACQUET (*Montaigne*), BRATIÈRES (E.N., Rodez), BRUN (Marseille, *Thiers*), CANTON (*La Fontaine*), CARALP (*Montaigne*), CARBONNIER (Reims, C.M.), CARREAU (*Voltaire*), CASTANET (Nîmes, C.M.T.), CASTELLANI (*Voltaire*), CATOIRE (Troyes, C.M.), CHAUMONT (*Fénelon*), CHAUVINEAU (*Henri-IV*), CHIPON (Nancy), CHONE (Clermont-Ferrand), CIALS (Le Puy, E.N.), CLANET (Toulouse), CLAVERIE (E.N., Gironde), COCHET (*Voltaire*), COLLOT (Nancy), COMBES (*Voltaire*), CONSTANTIN (Reims), CROZES (*Henri-IV*), DAUTREVEAUX (Belfort), DECHERVOIS (*Voltaire*), DELAUTRE (Charleville), DELCOURT (*Janson-de-Sailly*), DÉMERY (Nancy), DENÈGRE (Le Mans), DENNEBOURG (Vire), DEPAIX (Nancy), DEVIOSSE (Lillebonne), DIONOT (Sèvres), DOMANGE (*Fénelon*), DRIVAS (*Voltaire*), DUCRY (Nîmes), DUMAZEDIER (Savigny), DUVERT (Lyon, *Amphère*), EDDE (E.N., Auteuil), ERHART (Strasbourg, *Kléber*), FÉLIX (*La Fontaine*), FERNÉ (St-Gaultier), FRANCO (Corte), FREDJ (Alger, *Bugeaud*), GAL (Arles), GERIL (Alger, E.N.), GIRARD (*Arago*), GRENIER (*Voltaire*), GUERRIER (Valence), GUGNON (*Jules-Ferry*), GUILLOTIN (E.N., Le Mans), HAMON (Valenciennes), HÉRAUT (Castres), HERZOG (*Camille-Sée*), HOVIN (Nancy), ITARD (*Henri-IV*), JAUSSAUD (Nîmes), KROMM (Bordeaux, *Montesquieu*), LACROIX (Lille, *Fénelon*), LAGARDE (Tarbes), LANDUYT (Lille, *Fénelon*), LASSALIE (La Tour-du-Pin), LASSORT (Bordeaux, *Montesquieu*), LENTLE (*Voltaire*), LENTIN (*J.-Decour*), LEROY (Nantes), LESIRE (Lyon, *Amphère*), LEVASSORT (Luxeuil), LIMOGÉ (Barr), LOUQUET (Barr), MAILLOT (Lyon, *Parc*), MARCEIL (Rennes), MARCHAND (Laval), Y. MARTIN (Rennes, *Fac. des Sciences*), MAS (*Janson-de-Sailly*), MASCART (Paris), MENY (Vierzon, E.N.P.), MERLIN (Libourne), MERMOZ (Orange), MINOIS (*Marie-Curie*), MINOIS (*St-Louis*), MOREAU (Orléans), MOUGENOT (Nancy), MOUREAUX (Lons-le-Saunier), MULLER (Aix-les-

Bains), NICOD (Lyon, *C. Morel*), NOYER (Mâcon), PERRICHET (*St-Louis*), PINSON (Excideuil), PATEAU (Boulogne-sur-Mer), PLESSIER (*Janson-de-Sailly*), POUILLE (Nancy), REGNARD (Carpentras), RENARD (*Janson-de-Sailly*), RICHARD (Carpentras), ROCHE (Troyes, *C.M.*), ROCHIAS (Clermont-Ferrand, *C.T.*), ROUGER (*Victor-Hugo*), SAMUEL (Clermont-Ferrand, *Fac. des Sciences*), SELLIER (Amiens), SERRUQUES (*St-Louis*), SIGNORET (Bordeaux, *Montaigne*), SNYDERS (Lille, *Faidherbe*), STOULS (*Janson-de-Sailly*), TENCE (Domfront), TESTU (Montgeron, *Henri-IV*), THOMAS (*Voltaire*), THÉOCLISTE (Valence, *C.M.T.*), VERVAECKE (Lille, *Fénelon*), VILLENEUVE (*Montaigne*).

La séance est ouverte à 8 h. 45 par M. WALUSINSKI, Président, qui présente les excuses des membres du Comité, empêchés : Mlle DIONOT, MM. CROZES, EDEDE, GIRARD, ITARD.

M. BALLAND, Président de l'Union des Naturalistes, avait invité M. WALUSINSKI à assister aux « Journées des Naturalistes » qui se tiennent à Bordeaux à partir du 25 mars. La simultanéité des Assemblées générales des deux Associations n'a permis qu'un échange de lettres. Voici celle de M. BALLAND :

MON CHER COLLÈGUE,

Je regrette beaucoup que les circonstances et la simultanéité de nos Assemblées générales ne vous permettent pas de participer à nos « Journées » de Bordeaux. Mais je suis très heureux de constater et d'apprécier la solidarité de nos Associations.

Je vous prie de dire à nos Collègues mathématiciens combien les Naturalistes sont heureux de joindre leurs efforts à ceux que déploie votre Association en faveur d'une Réforme de l'Enseignement qui accorde enfin aux disciplines scientifiques la place à laquelle elles prétendent pour qu'un enseignement de qualité prépare avec succès nos élèves aux conditions de vie qui sont et seront celles de la seconde moitié du XX^e siècle.

Je vous prie, mon cher Collègue, de bien vouloir agréer l'expression de mes sentiments cordiaux et dévoués.

M. LE RÉVÉREND, Président de l'Union des Physiciens, empêché en dernière minute d'assister à notre Assemblée par des raisons de santé, nous a exprimé oralement les mêmes sentiments.

Au nom de l'A.P.M., M. WALUSINSKI remercie les Présidents des deux Associations avec lesquelles il est si hautement souhaitable que nous entretenions des relations suivies et cordiales.

I. Rapport moral

M. WALUSINSKI se contente de donner quelques compléments au rapport publié dans le *Bulletin* 176.

L'augmentation des effectifs de l'A.P.M. se confirme. Une énergique propagande reste à faire auprès des jeunes Collègues, dans les E.N.S. et les C.P.R. en particulier, ainsi que dans l'Enseignement Technique et parmi les Collègues scientifiques des Cours Complémentaires.

Les Conférences organisées en commun avec la Société Mathématique de France connaissent un grand succès ; le cycle sur l'Algèbre se poursuivra jusqu'en juin : d'autres cycles seront organisés les années suivantes.

Le professeur FREUDENTHAL, de l'Université d'Utrecht, qui doit faire un cours au Collège de France, a bien voulu nous promettre une Conférence (avec projections) sur l'initiation à la géométrie dans l'Enseignement du Second Degré aux Pays-Bas. Cette Conférence aura lieu le lundi 14 mai à 17 h. 15, au Musée Pédagogique.

Ces Conférences participent et participeront à l'enrichissement des sommaires de notre *Bulletin*. Deux critiques ont été formulées à cet égard. Il ne faut pas que l'augmentation des pages entraîne une augmentation des cotisations : il n'en est pas question pour l'instant. Une place exagérée aurait été accordée à l'algèbre moderne et la publication de certains rapports de concours de recrutement serait retardée : de nombreuses pages ont été consacrées aux travaux de nos amis belges sur l'initiation à la géométrie, ou à l'histoire des Mathématiques, ou à la coordination de notre enseignement avec celui de la physique ; la publication des rapports officiels a toujours été faite dès que ces rapports ont été déposés. Enfin des articles sur l'enseignement dans les classes du premier et du second cycle ont été demandés et l'appel sera constamment renouvelé.

Enfin les journaux ont annoncé que le Ministre de l'Education Nationale prévoyait le dépôt d'une « loi-cadre » pour la Réforme de l'Enseignement. L'histoire des dernières années ne nous permet plus d'espérer la réalisation rapide de nos souhaits. Mais cette information nous invite à suivre le développement de ce projet avec vigilance et nous avons eu raison de formuler des principes à faire inscrire dans cette loi. Ils serviront de ligne directrice pour l'action du futur Comité.

La discussion du rapport moral est alors ouverte.

Mlle MASSON et M. CHAZAL expriment la satisfaction des Collègues pour l'amélioration du *Bulletin*. M. RUFF, insistant sur l'intérêt des contacts entrepris par le Syndicat de l'Enseignement de la Région Parisienne entre professeurs des Cours Complémentaires et professeurs du Second Degré, demande que les questions d'enseignement élémentaire soient plus largement traitées. Un Collègue insiste dans le même sens, en signalant le cas des professeurs qui doivent enseigner les Mathématiques sans être eux-mêmes mathématiciens de formation. M. THOVERT rappelle qu'il a proposé des sujets tels que : Comment traiter l'étude du second degré ? M. MASSERON propose des enquêtes sur des sujets précis, les problèmes spéculatifs, par exemple.

Compte tenu de ces observations, le rapport moral est adopté à l'unanimité moins une abstention.

L'Assemblée émet d'autre part le vœu que les rapports annuels sur les concours de recrutement puissent être publiés dès le début de l'année scolaire et profiter ainsi à la préparation des candidats aux concours de l'année suivante. La publication des rapports des concours des grandes Ecoles est également souhaitée.

2. Compte-rendu financier

M. WALUSINSKI donne la parole à M. LEGRAND pour le compte rendu financier.

M. LEGRAND complète les chiffres donnés dans le *Bulletin* 176. A la date de l'Assemblée générale 2 207 cotisations ont été perçues ; cela correspond à une augmentation absolue de 250 membres. L'actif s'élève à 1 257 000 F.

Il ne paraît pas utile d'augmenter les cotisations. M. LEGRAND propose de laisser au Comité le soin de limiter au besoin le nombre total annuel de pages de notre *Bulletin*. (Un Collègue propose que dans le cas où une augmentation des cotisations deviendrait nécessaire, nombre de pages et taux correspondant de la cotisation seraient proposés aux membres).

Les conclusions du compte rendu de M. LEGRAND sont adoptées à l'unanimité avec félicitations pour sa bonne gestion des finances de l'Association.

Au nom de tous, M. WALUSINSKI remercie de nouveau M. LEGRAND pour le travail considérable qu'il a accompli de façon toujours si parfaite.

3. Modifications des statuts et du règlement intérieur

Les nouveaux textes s'établissent ainsi qu'il suit (l'indication du vote figurant entre parenthèses, après chaque texte modifié ; se reporter au *Bulletin* 170 pour le texte complet) :

Statuts. — *Article V* (première phrase) : L'Association se réunit en Assemblée générale au moins une fois par an. (Pour : 175 voix ; contre : 1 voix ; abstention : 0).

Article VI : L'addition proposée au deuxième paragraphe est adoptée à l'unanimité (voir texte dans le *Bulletin* 175).

Article VI (second paragraphe) : Le Comité se compose de trente-deux membres élus pour quatre ans à la majorité des suffrages et à bulletins secrets, par l'Assemblée générale ordinaire. En cas d'*ex-æquo* aux élections, les candidats seront départagés par tirage au sort. Lorsqu'un membre du Comité cesse de faire partie de celui-ci, il est remplacé, pour la fin de son mandat, par celui des candidats non élus qui a obtenu le plus de voix aux dernières élections. Si, toutefois, la précédente condition désignait des candidats *ex-æquo*, ils seraient départagés par le tirage au sort (modification et addition proposées ont été adoptées à l'unanimité).

Règlement intérieur. — *Article I*, deuxième phrase : Le non-versement de la cotisation annuelle avant le 1^{er} décembre de l'année scolaire en cours est considéré comme une démission. (Pour : 171 ; contre : 4 ; abstention : 1).

Article II (addition à la fin) : Le Comité nomme les membres d'honneur de l'Association. (Pour : 173 ; contre : 2 ; abstention : 1).

Article V (addition) : Dans chaque établissement, les membres peuvent constituer une section locale qui désigne un ou plusieurs correspondants chargés d'assurer les relations avec le Comité ou le Bureau ou la Section régionale de leur Académie. (Adoptée à l'unanimité moins une voix et deux abstentions).

4. Les épreuves de Mathématiques aux divers examens

A. CONCOURS D'ENTREE DANS LES ECOLES NORMALES ET B.E.P.C.

1^{er} CONCOURS DES E.N. (ENTREE EN SECONDE). SUJET NATIONAL.

L'épreuve comportait un exercice d'arithmétique coté sur 15 et un problème de géométrie coté sur 25.

La question d'arithmétique : « Calculer le P.G.C.D. et le P.P.C.M. de trois nombres donnés », réduite à un *pur mécanisme* suivi de calculs ne présentant aucune difficulté, aurait pu paraître acceptable pour un examen, dont l'objet est de contrôler des connaissances. Elle n'avait pas sa place, semble-t-il, dans un « concours » où l'on se propose de déceler les aptitudes et les qualités d'intelligence et de raisonnement des candidats. A cet égard, on peut considérer son efficacité comme extrêmement réduite.

D'ailleurs, sans vouloir généraliser une statistique très partielle, on ne peut s'empêcher de noter cependant que, dans un centre de plus de cinq cents candidats, 33 % ont obtenu les notes 14, 14 1/2 et 15 sur 15, soit 33 % de notes de 18 1/2 à 20 avec majorité de 20 ; c'est tout de même significatif ! Un exemple limite, ohôisi parmi beaucoup d'autres moins flagrants, mais néanmoins comparables, suffira à souligner combien peu probante était cette première question : un candidat a cumulé le maximum 15 sur 15 — synonyme normal d'élève brillant — avec un 0 sur 25 en géométrie — synonyme de l'inaptitude la plus totale aux raisonnements les plus élémentaires.

Plus intéressant s'est révélé le problème de géométrie, avec cependant une légère réserve dans la gradation des difficultés. La seconde question a formé barrage, et beaucoup de candidats — à défaut d'avoir su trouver les points limites I et J — ont abandonné toute la suite du problème, qui exigeait le calcul de la distance IJ. Dans ces conditions, le barrage est apparu un peu brutal et précoce.

2° B.E.P.C.

Les textes de B.E.P.C., en progrès dans l'ensemble, présentent parfois encore des inexactitudes ou incorrections de rédaction. Celles-ci ont été signalées maintes fois ici. Il ne semble pas utile d'y revenir.

Ces textes m'ont d'ailleurs valu une seule communication d'un collègue de Clermont. Je le remercie vivement de manifester quelque intérêt à la question. Notre correspondant critique à juste titre une rédaction défectueuse d'un exercice souvent proposé sous cette forme :

1° Résoudre graphiquement tel système (de deux équations à deux inconnues).

2° Vérifier par le calcul le résultat obtenu sur le graphique.

Il souligne que s'il n'y a aucun doute sur les intentions de l'auteur du texte, sur ce qu'attendent les membres de la Commission (en majorité tout au moins) et même peut-être dans l'esprit des candidats (ce qui est moins sûr), il n'en reste pas moins qu'on serait désarmé devant le candidat qui se contenterait : de tracer le graphique, de lire les coordonnées du point d'intersection, puis de vérifier que les nombres x et y trouvés sont solution du système en calculant les valeurs numériques de chacun des membres des deux équations : il aurait effectivement « vérifié par le calcul le résultat obtenu sur le graphique ».

Conclusion : disons ce que nous voulons dire. Puisque l'auteur du texte souhaite en réalité dans la deuxième question que le candidat résolve le système algébrique et compare la solution trouvée à celle de la première question, pourquoi alors ne pas le dire clairement et sous cette forme ? La vérification, la vraie, y trouvera alors sa place. Elle est à ce niveau le complément indispensable de la résolution.

R. EDDE (*E.N.* Auteuil).

B. BACCALAUREAT, PREMIERE PARTIE

Le problème proposé en juin aux candidats des séries A' C C' M M' T en France métropolitaine a suscité de vives observations.

On lui a reproché d'être entièrement fondé sur la relation entre les côtés d'un triangle et l'une de ses médianes. Sans excuser les élèves qui l'ignoraient et qui n'ont pas su l'établir on peut en effet regretter que cette lacune de leurs connaissances les ait empêchés de manifester leurs possibilités sur le programme propre de la classe de Première. Pour ceux au contraire que le début n'a pas arrêtés, la suite du problème se développait avec une lente progression et leur permettait de se mettre en valeur, non pas en résolvant des questions difficiles, mais en rédigeant avec précision et simplicité les applications d'un même principe à diverses figures de l'espace.

Cette même relation sert d'introduction à un problème de Madagascar, mais ici l'auteur prudent demande d'abord de l'établir ; il invite malheureusement le candidat à utiliser des formules trigonométriques qui ne lui sont pas nécessairement familières.

A.E.F., C.M., juin, fournit un énoncé plutôt destiné à vérifier l'acquisition d'un mécanisme de calculs qu'à juger des qualités intellectuelles.

Alger A' C C' M T, sept., propose un problème accessible à tous, mais présentant quelques difficultés supplémentaires pour les candidats qui ne connaissent pas l'expression de volume engendré par le triangle tournant qu'utilisent certains auteurs pour parvenir au volume de la sphère.

Egypte, C M T, septembre, demande de rechercher deux lieux géométriques, puis de les limiter.

Istanbul, M, sept., à propos de l'étude des fonctions $y = 2m^2x^2 + 4mx + 1$ se lance dans un problème de géométrie analytique peu conforme à l'esprit du programme de Première.

Les questions de cours sont loin d'être à l'abri de tout reproche.

Athènes, M, juin, a extrait textuellement du programme les deux questions suivantes :

1° Mouvement rectiligne uniformément varié. Diagramme de *ces mouvements*. Le pluriel se justifie dans le programme où il s'applique à la fois au mouvement uniforme et au mouvement uniformément varié.

2° Périodicité des fonctions circulaires $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$. Représentations graphiques. Relations entre les fonctions circulaires d'un même angle.

On n'a retenu du programme que $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$ en abandonnant $\sin x$ et $\operatorname{cotg} x$ — et la question est bien assez longue ainsi — mais on est surpris de ne pas trouver la même restriction dans la seconde partie de la question.

Egypte, C M T, sept., pose la question suivante, bien longue pour un débutant en trigonométrie. Etablir la formule donnant $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$. En déduire une expression de $\cos(a+b+c)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, puis de $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$ seulement.

Rome B, sept. — Extension de la notion d'arc.

Application : On considère, sur un cercle orienté, un arc trigonométrique d'origine A et d'extrémité B et dont la mesure algébrique est le nombre a ,

$$-\infty < a < +\infty.$$

On demande de déterminer sur le même cercle un point M tel que la mesure algébrique de l'arc AM soit égale à $\frac{a}{3}$.

Il semble que si a est donné, $\frac{a}{3}$ est connu et le point M est de ce fait déterminé.

Il n'y a rien à ajouter. La forme de la question est donc obscure et ne correspond pas à l'intention de son auteur.

Enfin quelques questions gênent le candidat en ne lui laissant pas le choix de sa méthode.

Alger, B, juin. — Somme et produit des racines de l'équation du second degré.

Application : Ecrire un polynôme du second degré sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré lorsque cette opération est possible.

Peut-être la recherche des expressions classiques de la somme et du produit est-elle au contraire pour certains l'application de la décomposition du polynôme en produit.

Liban-Syrie, B, juin. — Somme et produit des racines de l'équation du second degré. Réciproque.

Le candidat, peu sûr de lui, peut se demander à quelle proposition exactement il doit trouver une réciproque.

A.O.F., B, septembre. — Tangente et plan tangent à la sphère.

Plan de la question :

1° Définition de la tangente à une courbe en un point de cette courbe.

2° Définition des tangentes à une surface en un point de cette surface.

3° Application de ces définitions à la sphère.

4° Plan tangent à la sphère.

N.-B. — Le cône et le cylindre circonscrits à la sphère ne sont pas demandés.

L'obligation de ce plan n'a pas dû avoir beaucoup d'inconvénient dans ce cas, mais l'exemple ne saurait être suivi sans danger. La composition d'une question de cours est d'ailleurs un élément d'appréciation de la valeur du candidat.

Même si ces négligences ne sont pas toutes très graves, elles ont certainement nui à quelques candidats : il importe chaque année de les relever et de rappeler ainsi qu'on ne prend jamais trop de soin à composer, rédiger et vérifier les questions d'examen.

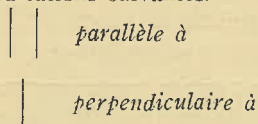
R. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*).

5. Définitions et notations

Voici les quelques études qui nous ont été demandées depuis notre dernier rapport.

RELATIONS DE PARALLÉLISME ET D'ORTHOAGONALITÉ.

Les symboles de ces relations figurent aux normes A.F.N.O.R. (X 02-102, symboles géométriques) avec les indications suivantes.



« Ne concernant que des droites indéfinies ou des segments de droites à l'exclusion de droites orientées ou de vecteurs. »

Une note, en bas de page, ajoute que ces symboles sont :

« A ne pas utiliser dans le corps d'un texte. »

Ces deux notations sont donc officiellement admises, on ne peut en aucun cas reprocher à un élève de les utiliser, à condition cependant qu'il les utilise correctement. On sait en effet que l'image graphique d'une relation n'est pas un simple procédé d'écriture rapide, mais un véritable objet mathématique qui doit entrer en action, les propriétés de la relation qu'il a mission de représenter devant se trouver ainsi fidèlement traduites.

Nous ferons cette étude pour la relation de parallélisme.

L'ensemble de base, — on dit aussi le *référentiel* — est l'ensemble des droites de l'espace euclidien que l'on étudie. La relation de parallélisme est une *autocorrespondance*, c'est-à-dire une relation entre deux éléments de ce même ensemble de base.

Le parallélisme envisagé doit s'entendre, *au sens large* ; précisons alors quelques définitions.

Deux droites sont parallèles, *au sens strict*, si elles sont coplanaires et sans points communs.

Deux droites sont parallèles, *au sens large*, si elles sont, soit strictement parallèles, soit confondues.

Ces définitions étant rappelées, étudions les propriétés de la relation de parallélisme.

1° Elle est *réflexive*. $D \parallel D$ quelle que soit D .

2° Elle est *symétrique*. C'est-à-dire que l'on peut écrire à volonté :

$D \parallel D'$ ou $D' \parallel D$

3° Elle est *transitive*. C'est-à-dire que les hypothèses :

$$D \parallel D' \text{ et } D' \parallel D'' \text{ entraînent conjointement } D \parallel D''$$

En résumé, la relation de parallélisme, réflexive, symétrique, transitive, est une *relation d'équivalence*. Elle permet d'effectuer une *classification* de toutes les droites de l'espace étudié, chaque *classe d'équivalence* étant un *faisceau* complet de droites parallèles (pour les élèves de Seconde), une *gerbe* complète de droites parallèles (pour les élèves de Première). L'appartenance d'une droite D à un tel faisceau (ou une telle gerbe) est appelée *direction* et l'on peut énoncer :

$$D \parallel D'$$

D a même direction que D'.

Ce qui précède, montre que le symbole de la relation de parallélisme est particulièrement heureux ; il est d'abord très intuitif puisqu'il dessine deux droites parallèles ; il est d'autre part impeccable du point de vue logique, son analogie avec le signe d'égalité $=$ rappelant que le parallélisme (au sens large) est comme l'égalité une relation d'équivalence.

Dans la rédaction d'un devoir, ou d'un cours, le symbole de parallélisme doit être soumis au même mode d'emploi que le signe d'égalité. De même que le signe d'égalité, jouant le rôle de lien verbal, se place entre deux nombres, le symbole de parallélisme se place entre deux droites. Mais dans des propositions telles que celles-ci : « ces deux nombres sont égaux », ou « ces deux droites sont parallèles », les symboles d'égalité et de parallélisme sont l'un et l'autre interdits. Ainsi s'explique le scrupule des rédacteurs des normes A.F.N.O.R. qui ont indiqué en note : « à ne pas utiliser dans le corps d'un texte. »

La question m'a été posée de savoir si le signe de parallélisme peut s'employer entre d'autres éléments que des droites ou des segments. Je ne peux donner ici que mon opinion personnelle qui est la suivante :

-- le parallélisme d'une droite et d'un plan est une relation qui n'est pas transitive, on doit donc s'interdire d'employer entre une droite et un plan le symbole de parallélisme.

le parallélisme d'une droite et d'un plan est une relation qui n'est pas transitive, on doit donc s'interdire d'employer entre une droite et un plan le symbole de parallélisme.

INTERSECTIONS ET RÉUNIONS.

L'article de M. W. SERVAIS, paru au *Bulletin* d'octobre 1955, a excellemment répondu à toutes les questions qui nous avaient été posées. Il convient donc simplement de rappeler quelques définitions.

Soient A et B deux ensembles formés d'éléments de même nature, c'est-à-dire empruntés au même *référentiel*.

1° On appelle *intersection* de A et de B l'ensemble formé par les éléments communs à A et à B.

On peut noter : $A \cap B = I.$

2° On appelle *réunion* de A et de B l'ensemble formé par les éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A et B.

On peut noter : $A \cup B = R.$

Des exemples d'intersections et de réunions abondent dans nos programmes les plus élémentaires (relire à ce sujet l'article de M. W. SERVAIS), intersections de

droites, de bandes, de demi-plans et, plus généralement, de parties de plan en géométrie, intersections et réunions de collections de solutions (théorie des équations) en algèbre, intersections de collections de diviseurs et de collections de multiples en arithmétique.

Une initiation peut en être donnée à un âge très tendre, ensembles A et B coloriés en jaune et en bleu, intersection obtenue en vert. Par contre, l'emploi des symboles ne semble souhaité que dans les grandes classes ; en effet, pour comprendre ces symboles il faut :

1° Préciser le référentiel E.

2° Concevoir A et B comme parties de ce référentiel E.

3° Envisager la formation de l'intersection et celle de la réunion comme deux opérations définies dans l'ensemble des parties de E.

Ce point de vue est, si non savant, du moins très sérieux et l'on peut le considérer comme l'aboutissement d'un long travail d'abstraction. Il trouve naturellement sa place dans les classes terminales.

Y. CROZES.

NOTE. — Notre collègue BERTRAND a bien voulu accepter de prendre maintenant en charge l'étude des notations et des définitions. Nous prions donc nos correspondants d'écrire aux adresses suivantes :

Pour les définitions et les notations : M. BERTRAND, professeur au Lycée Thiers, 3, parc Jean-Mermoz, Marseille (8°).

Pour l'axiomatique et la redécouverte : M. CROZES, professeur au Lycée Henri-IV, 10, rue du Buisson-St-Louis, Paris (10°).

NOMBRES ALGÈBRIQUES OU RELATIFS.

La question posée aux membres de l'Association a entraîné, parmi les réponses envoyées par correspondance une majorité « relative » (si l'on ose dire) en faveur de l'expression « nombres relatifs » : pour 40 voix, contre 28, abstentions 42.

L'Assemblée considère qu'il n'est pas possible de trancher le débat. Le Comité pourra étudier la question en accord avec l'Inspection Générale et l'A.F.N.O.R.

Remarques (versées au débat après l'A.G.) :

A. — D'une lettre de M. HUISMAN : « *Les manuels américains (et sans doute anglais ?) emploient l'expression signed numbers. Quant aux manuels allemands, je n'en ai pas d'élémentaires sous la main, mais ils emploient sûrement algébrique, ou du moins l'employaient à l'époque de Klein. En effet, l'édition de Klein que je possède est en anglais, mais voici ce qu'on y lit :*

« Let us first note, as to terminology, that in the schools, one speaks of positive and negative numbers, inclusively, as relative numbers, in distinction from the absolute (positive) numbers, whereas, in universities this language is not common. Moreover, in the schools, one speaks of algebraic numbers along with relative numbers, an expression which we in universities employ, as you know, in quite another sense. »

L'usage n'était donc pas bien fixé au temps de Klein. Qu'en est-il aujourd'hui ? Je ne saurais le dire, mais on voit que la question n'est pas nouvelle... »

B. — L'introduction systématique et générale de l'expression « nombres relatifs » paraît entraîner l'expression *mesure relative* d'un vecteur sur un axe. Cependant, je note que dans un bon livre de trigonométrie utilisé par nos Collègues suisses (par PAULI et POST, Payot éditeur), on emploie couramment *nombres relatifs*, mais on parle de *composante numérique d'un vecteur sur un axe*.

6. Formation des maîtres et recrutement

La première partie du débat porte sur la licence d'enseignement pour les Mathématiques. La création d'un certificat de physique pour les futurs professeurs de Mathématiques est généralement envisagé avec faveur, en raison de l'accroissement inévitable du programme du certificat de Physique générale. M. RUFF propose que le choix soit laissé aux candidats à la licence d'enseignement de Mathématiques, entre le certificat de Physique générale et ce certificat de Physique pour les Mathématiciens (qui ferait pendant au certificat « méthodes mathématiques pour les physiciens »).

(Les avis recueillis par correspondance en faveur de ce certificat de Physique avaient donné 44 voix pour et 13 voix contre).

M. CHAZAL souhaite que la licence d'enseignement de Mathématiques comporte des compléments de géométrie élémentaire et d'arithmétique. M. RUFF voudrait y voir un enseignement des fondements de ce que les professeurs ont effectivement à enseigner.

M. BELGODÈRE signale le projet de séparation du programme de calcul différentiel en deux parties, l'une serait obligatoire pour la licence d'enseignement et comprendrait ce que tout professeur doit savoir, la seconde serait destinée aux chercheurs du troisième cycle.

M. MAGNIER pose la question de savoir si la formule de la licence par certificats distincts doit ou non être conservée ; personnellement il pencherait pour qu'un programme de licence soit fixé dans son ensemble.

M. BAY insiste pour l'unification des programmes des certificats de licence sur le plan national.

M. MARVILLET, constatant l'« abîme » qui existe entre les programmes des lycées et ceux des Facultés, demande si les programmes de Mathématiques Élémentaires et ceux de la Propédeutique ne doivent pas aussi être modifiés ; quant à lui, il le souhaite.

En conclusion, la question de la réforme de la licence d'enseignement et la formation des maîtres par l'institution des I.P.P.E.S. devra être attentivement suivie par le Comité qui décidera des propositions à soumettre éventuellement à la prochaine A.G.

Remarques : parmi les avis exprimés par correspondance, citons celui de M. CASTANET (C.N.T. Nîmes) : « La Réforme doit porter sur d'autres points plus importants (que les modifications proposées pour les certificats). C'est l'esprit de la formation des maîtres qu'il faut changer, plutôt que le contenu des programmes. Revoir à ce sujet le projet Langevin-Wallon, qui dit à ce sujet des choses fort pertinentes. »

Sur la division du programme de calcul différentiel, M. LENTIN écrit : « Non, pas de division ; le « classique » doit être traité et repensé à la « moderne » et non coupé de lui. »

Sur le même sujet, M. MARTIN (Faculté des Sciences de Rennes) déclare : « La question est mal posée ; il faut fixer un programme de calcul différentiel pour la licence. Actuellement, l'enseignement de calcul différentiel comporte souvent ce qui ne devrait être enseigné qu'en analyse supérieure, d'où le désir de séparer ce qu'on a cru bon, auparavant, de réunir sous la dénomination de « Calcul différentiel et intégral » (le mot « analyse » serait d'ailleurs mieux adapté à la réalité). »

La seconde partie du débat porte sur le principe d'une agrégation de Mathématiques pour l'Enseignement Technique. M. BIGUENET rappelle les raisons qui ont amené le Comité à poser la question et insiste sur les raisons qui militent en faveur

d'une « option technique » dans l'agrégation de Mathématiques (caractères particuliers des Mathématiques à enseigner dans les sections techniques).

MM. BAY et CHAZAL expriment leur avis en faveur de ce projet ; adaptation de l'agrégation à l'Enseignement du Second Degré, tel qu'il évolue sous la pression de l'évolution technique et sociale ; rappel de la décision en faveur de cette agrégation prise par une Commission créée par M. HENNEQUIN au sein de l'A.P.M., les épreuves communes de Mathématiques Elémentaires et de Spéciales garantissant le niveau de cette agrégation.

Les réserves faites par M. MAGNIER et M. MARVILLET portent, soit sur la crainte d'une modification générale de l'agrégation actuelle qui perdrait son caractère, soit sur le fait qu'une agrégation spéciale à l'Enseignement Technique peut signifier sa séparation absolue de l'Enseignement du Second Degré.

Les avis recueillis par correspondance se partagent à peu près également avec 37 voix pour et 26 voix contre, une certaine indécision étant marquée sur l'interprétation des voix contre (qui, dans certains cas, précisent qu'ils seraient en faveur d'une agrégation unique avec option technique).

C'est d'ailleurs à cette solution d'une agrégation unique de Mathématiques, mais avec option technique que l'A.G. se rallie à l'unanimité. Le Comité se trouve ainsi mandaté pour agir dans ce sens auprès des Directions de l'Enseignement du Second Degré et du Technique.

7. Réforme de l'Enseignement et programmes

M. WALUSINSKI rend compte des indications fournies par correspondance. Il semble que l'accord soit quasi-unanime sur les principes énoncés comme devant servir de base à la Réforme, quant à l'enseignement des Mathématiques. Sur la nécessité des séances de travaux pratiques dans toutes les classes, un seul avis contraire, d'un professeur de Spéciales qui déclare « que les travaux pratiques et les heures d'interrogation ne sont souhaitables que dans les classes préparatoires aux Grandes Ecoles ». Devant cette unanimité presque complète, M. WALUSINSKI soumet à l'Assemblée générale le vœu suivant qui est adopté sans opposition ni modification :

« L'Assemblée générale de l'A.P.M. du 25 mars 1956 approuve l'action du Comité en faveur de l'institution d'une heure hebdomadaire de travaux pratiques de Mathématiques, avec demi-effectifs dans toutes les classes du Second Degré.

L'Assemblée générale rappelle les raisons pédagogiques impérieuses qui rendent indispensable et urgente l'institution de ces heures :

1° Guider les élèves dans la recherche des problèmes, multiplier les exercices d'application.

2° Limiter ou supprimer (selon les classes) le travail écrit à la maison qui est d'un rendement faible.

3° Obtenir ainsi à peu de frais et sans attendre une réforme d'ensemble plus longue à réaliser une amélioration sensible de l'enseignement scientifique, la dite réforme d'ensemble devant adapter celui-ci aux exigences du développement scientifique général.

L'Assemblée générale rappelle encore que ces séances de travaux pratiques n'auront leur complète efficacité qu'avec des effectifs scolaires réduits (demi-classe), ceux-ci étant placés sous la direction de leur professeur habituel.

En conséquence, l'Assemblée générale mandate le Comité pour entreprendre toutes démarches en vue de l'organisation de ces heures dès la rentrée d'octobre 1956. »

Sur les questions relatives aux programmes, une nette majorité s'est également dégagée sur les questions suivantes :

a) Amélioration, mais non augmentation des programmes dans les classes du premier cycle (55 voix, contre 9, parmi ces derniers avis plusieurs émettant le souhait d'un renforcement des programmes scientifiques de la section moderne).

b) Vœu assez général d'une initiation prudente et précise à la géométrie dans l'espace dans les classes du premier cycle (44 voix, contre 22). On insiste souvent sur le fait qu'il faut être simple mais sans que cela nuise à la précision, en particulier dans le langage.

c) Par 66 voix contre 11, nos correspondants ont souhaité l'introduction franche et systématique des vecteurs en Seconde.

d) La refonte envisagée des programmes de géométrie de Seconde et de Première a été souhaitée par 53 Collègues, rejetée par 22. Comme pour les autres questions, il s'agit là d'un sondage dont l'Assemblée générale pense que le Comité pourra inspirer son action.

e) Une nette majorité, 52 voix contre 7, réclame l'identité des programmes des classes et des examens de fin d'année, le plus souvent par crainte du « bachotage » qui résulterait de la situation contraire. On en profite pour souhaiter la diminution de l'importance relative de la question de cours ou même on souhaite sa disparition.

Des avis plus nuancés ont été recueillis sur les autres questions qui semblent devoir être discutées à nouveau : en particulier celle concernant la création de trois sections scientifiques terminales A, B et C ; la section B ou « Physique » ne paraît pas souhaitée par beaucoup de Collègues. Il est suggéré que les Collègues physiciens et mathématiciens, qui souhaitent la création de cette section nouvelle, en expliquent mieux les raisons d'être.

Quant aux questions 2 et 5 portant sur des détails des programmes, les avis ont été partagés ; question 2 : pour 37, contre 30 ; question 5 : pour 44, contre 33.

L'Assemblée générale pense que ces résultats devront être étudiés par la *Commission des Programmes*, dont le rapport devrait être soumis à l'Assemblée générale de 1957.

8. Élections au Comité

MM. BASTIEN, CANONGE, FOUCHÉ, LEGRAND, ROSTOLLAND, SIROS, THOVERT et WALUSINSKI procèdent au dépouillement des votes qui donne les résultats suivants :
Votants : 176.

Sont élus membres du Comité : MM. HUISMAN (131 voix), SIROS (117 voix), DURRANDE (115 voix), MONJALLON (115 voix), THÉRON (110 voix), RUFF (107 voix).

Viennent ensuite : Mlle VERVAECKE (86 voix), Mlle GOUKOWSKY (70 voix) ; MM. CASSÉ (66 voix), LE MÉNÉGER (33 voix), DEVIOSSE (25 voix), ANTHIER, Mlle BUDON, GODEFROY, QUEYSANNE et RENARD (chacun une voix).

La séance est levée à 13 heures.

Réunion du Comité

19 avril 1956

Présents : Mlles AFFRE, MASSON ; Mme SCHUCK ; MM. BIGUENET, CHAZAL, DURRANDE, EDDÉ, FOUCHÉ, GIRARD, GUITTON, HUISMAN, ITARD, LEGRAND, MAILLARD, MONJALLON, ROSTOLLAND, SIROS, THÉRON, WALUSINSKI.

Excusés : Mlles DIONOT, FÉLIX ; MM. BENOIST, BERTRAND, MARVILLET, POCHARD, RUFF, THOVERT.

La séance est ouverte à 14 h. 15. WALUSINSKI salue les nouveaux membres du Comité et les félicite de leur élection. En attendant l'arrivée de quelques Collègues retenus par le Concours général, il signale quelques informations : Conférence de M. FREUDENTHAL ; les trois enquêtes de la C.I.E.M. ; le « Rapport de l'Inspection générale sur l'Enseignement des Mathématiques en 1953 » : à ce propos il est proposé qu'une large distribution de ce rapport soit faite, à raison d'un exemplaire par professeur ou tout au moins d'un exemplaire par établissement.

1. Election du Bureau. — M. CHAZAL préside ensuite la séance pour l'élection du Président. Il y a dix-sept présents ayant le droit de vote ; cinq pouvoirs sont acceptés ; il y a donc 22 votants. Comme il est coutume, le vote a lieu à bulletins secrets. Les résultats sont les suivants : WALUSINSKI, 21 voix ; HUISMAN, 1 voix. M. CHAZAL déclare WALUSINSKI élu et lui passe la présidence.

M. WALUSINSKI remercie les Collègues de leur témoignage de confiance et déclare qu'il fera son possible pour ne pas les décevoir. Il sait d'ailleurs qu'il peut compter sur l'aide sympathique de tous.

Le Bureau est ensuite complété de la façon suivante :

Vice-Présidents : Mlle AFFRE ; MM. BIGUENET, EDDE, MONJALLON, THÉRON.

Trésorier : M. LEGRAND.

Secrétaires : MM. ROSTOLLAND, GIRARD, HUISMAN (bibliothèque et Comité du *Bulletin*) ; Mlle FÉLIX (conférences) ; MM. SIROS (Commission des programmes), ITARD (bibliographie).

Comité de rédaction du Bulletin : Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, GIRARD, ITARD, SIROS ; *Secrétariat* : MM. HUISMAN et WALUSINSKI.

2. Bulletin. — M. LEGRAND signale l'augmentation des frais du *Bulletin* : le n° 176 est revenu à 290 000 F : à ce prix-là nous ne pourrions maintenir le rythme de nos publications. Il propose de limiter le nombre total de pages publiées dans l'année, environ 450 pages.

Le principe de cette limitation est adopté.

Diverses propositions sont faites pour augmenter les ressources ou limiter les dépenses : demande de subvention du C.N.R.S. ou indemnisation du Ministère pour la publication des rapports officiels, demande de tarifs préférentiels aux P.T.T.

Le Bureau fera les demandes nécessaires.

3. Révision des horaires. — M. WALUSINSKI donne lecture d'une lettre de M. le Directeur Général du Second Degré à qui il avait transmis le vœu de l'Assemblée générale sur les heures de travaux pratiques de Mathématiques.

M. BRUNOLD écrit : « *Je suis intéressé par le vœu que vous avez bien voulu m'adresser ; il s'inspire d'une préoccupation que nous avons depuis longtemps et qui a été récemment affirmée au cours des travaux d'une commission que présidait M. le Recteur SARRAILH.*

Mais je pense que l'idée d'une réforme de l'Enseignement n'est pas abandonnée, bien au contraire ; peut-être même est-elle plus proche que jamais de sa réalisation.

C'est la raison pour laquelle il conviendrait de ne pas apporter de retouches fragmentaires à tout notre dispositif. Mieux vaut attendre que les grands principes, qui doivent servir de base à une réforme, soient nettement définis. »

Cette réponse de M. BRUNOLD est donnée en *post-scriptum* à une lettre où M. le Directeur Général fait état de l'inquiétude de M. PERRIN, Haut-Commissaire à l'Energie atomique, sur la formation des ingénieurs et sur le sentiment qu'il partage avec M. PERRIN, de la nécessité d'éveiller tôt les vocations scientifiques. Nous rele-

vons une certaine incompatibilité entre le souhait exprimé par M. BRUNOLD de voir résoudre au plus vite les questions relatives à la formation des scientifiques et le refus exprimé plus haut. Le Comité décide de solliciter M. PERRIN pour intervenir lors des journées sur les Mathématiques à Sèvres en novembre prochain, et, d'autre part, d'engager l'action la plus large, auprès de M. le Directeur Général, auprès de M. le Ministre, auprès des Directeurs des Grandes Ecoles scientifiques, ainsi qu'auprès de toutes les personnalités intéressées par le développement des études scientifiques pour qu'elles interviennent en faveur de l'institution de ces travaux pratiques dès la rentrée d'octobre 1956.

4. Nouveaux programmes. — Par lettre, M. POCHARD exprime ses inquiétudes au sujet du futur arrêté concernant les nouveaux programmes en application des travaux de la Commission Châtelet.

Le Comité charge le Bureau de suivre ces projets dès leur publication.

5. Vœux. — M. WALUSINSKI donne lecture de deux vœux présentés par Mme LEROY, professeur au Lycée de Nantes. Le premier concerne les élèves de B ayant opté à l'écrit pour une épreuve de Mathématiques : pourquoi ces candidats ne pourraient-ils subir, facultativement, une interrogation orale de Mathématiques (comme cela a lieu pour les candidats ayant choisi une épreuve de langue vivante à l'écrit et qui peuvent néanmoins subir une interrogation orale facultative dans la même langue). Le Comité approuve ce vœu qui sera transmis à la Direction de l'Enseignement Supérieur.

Le second vœu proposait le rétablissement de l'option mathématiques à l'écrit de la section A. En raison de l'existence de la section A' et de la difficulté de modifier les épreuves écrites d'admissibilité, ce vœu n'est pas retenu, mais Mlle MASSON insiste pour que les élèves de A, qui le souhaitent, puissent suivre les heures facultatives de Mathématiques comme elles le pouvaient, avant la création de la section A' : ce vœu sera transmis à la Direction du Second Degré.

6. Problèmes de recrutement. — Le vote de l'Assemblée générale en faveur d'une option technique à l'agrégation de Mathématiques doit être traduit par une étude approfondie de la question afin de pouvoir présenter un projet précis aux directions intéressées. Une *Commission de formation des maîtres*, dirigée par M. CHAZAL, se réunira prochainement pour en discuter.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée à 16 h. 30.

Le bloc - notes de L'A.P.M.

* **Erratum.** — Dans le n° 175, à la page 275, dans l'article de G. BOOSTELS, la matrice écrite au bas de la page a ses lignes interverties. Elle doit être identique à celle qui la précède dans le texte.

* **Précision.** — Notre Collègue J. ITARD a omis de signaler qu'il est l'auteur de la traduction en français de la *Leçon inaugurale de Tartaglia* : c'est la première fois que ce texte paraît en français.

* **Préparation à l'agrégation.** — Notre Collègue H. DUMAS, du Lycée *Blaise-Pascal*, à Clermont, nous signale que nous avons oublié de citer la Faculté de cette ville parmi celles où des préparations à l'agrégation sont organisées. Celle-ci fonctionne, et avec succès, depuis 1947, sous la direction de MM. BLANC et DELANGE.

* **Régionale de Nancy.** — Notre Collègue COLLOT précise que le compte rendu publié dans le n° 176 devait être signé de lui au titre de *Secrétaire de séance*. D'au-

tre part, des Collègues absents à cette réunion étaient excusés, et en particulier : Mile LONJARET, BERETTA et M. MOUGENOT.

*** Rectification.** — M. WEIL (Ecole Normale de Carcassonne) nous prie d'insérer : « J'ai indiqué, sur la foi d'une consultation hâtive de table de densités, que le résultat d'un calcul qu'on retrouve cité dans le manuel de deux auteurs et dans les exercices de deux autres, ne correspond à la densité d'aucun corps connu. En fait, elle est voisine de celle du fer et, d'ailleurs, on peut sûrement trouver un corps, fer impur ou alliage, qui ait cette densité. Au demeurant, il n'en reste pas moins que les données de l'exercice ne correspondent sûrement à aucune expérience de caractère marquant et que si le premier avait bien le droit de choisir les données à son gré, les suivants ont montré un goût immodéré du plagiat qui, exercé tantôt dans les moindres détails comme ici, tantôt sur le fond du texte, représente un frein regrettable au progrès de l'enseignement des Mathématiques...

D'autre part, M. ESTÈVE me signale que les ouvrages Estève et Mitault (édition Gauthier-Villars) ont été rédigés en conformité avec la classification des propriétés géométriques en euclidiennes, linéaires et sans doute projectives. »

*** Initiation à la géométrie.** — M. FREUDENTHAL, professeur à l'Université d'Utrecht, a fait une conférence, le 14 mai 1956, au Musée Pédagogique, sous les auspices de l'A.P.M. et sur le sujet suivant : *Méthodes d'initiation à la géométrie*. Un compte rendu en sera publié dans le prochain *Bulletin*.

*** Pour les amateurs de vieux livres.** — Nous pouvons leur signaler que la *Librairie Monge*, 63, rue Monge, Paris, 5^e, spécialisée dans l'histoire des sciences (livres anciens et modernes), édite une liste de belles occasions périodiques. Elle adressera volontiers un spécimen de cette liste aux Collègues qui lui en feront la demande ; recommandez-vous de l'A.P.M.

*** X^e Rencontre internationale de professeurs de Mathématiques.** — Cette X^e Rencontre, organisée par la « Commission internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CHOQUET-PIAGET-GATTEGNO) » aura lieu à *Novi* (Yougoslavie), du 17 au 26 août 1956. Thèmes : la formation mathématique des instituteurs, la pénurie du personnel enseignant mathématique. Renseignements et inscriptions : s'adresser à M. GATTEGNO, 225 High Street, HAMPTON HILL, Mddx (Angleterre) ; prix du séjour, 12.000 dinars.

LES PROCHAINS BULLETINS.

— En septembre : n° 178, énoncés des concours 1956.

— 15 octobre : n° 179, premier Bulletin de la 36^e année ; une table des matières de la 35^e année du Bulletin y sera encartée.

Viendront ensuite 180 (1^{er} décembre), 181 et 182 (Annales du Baccalauréat et du B.E.P.C.), 183 (15 janvier), 184 (1^{er} mars), 185 (15 mai), 186 (septembre, Concours 57).

RECOMMANDATIONS IMPORTANTES.

Ce programme de publications représente pour l'A.P.M. une tâche essentielle. Elle ne peut être menée à bien que si la situation financière de l'Association reste bonne.

Facilitez le travail de notre Trésorier.

Effectuez, dès la rentrée d'octobre, le renouvellement de votre cotisation, soit 600 F (par virement C.C.P. Paris 5 708-21). Cette cotisation, selon les nouveaux statuts, doit être versée **AVANT LE 1^{er} DECEMBRE**, dernier délai.

Changements d'adresse : les Collègues qui changent de poste au 1^{er} octobre sont priés de donner leur nouvelle adresse aussitôt que possible ; ils éviteront ainsi des lenteurs ou des erreurs dans la distribution du Bulletin. Qu'ils en profitent pour renouveler leur cotisation en indiquant clairement leur nouvelle adresse.

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 89.253. — Dépôt légal : II-1956

vient de paraître

Une brillante présentation de la Science Française

LA PHYSIQUE

Tome II de l'Encyclopédie Française

Le développement foudroyant de la physique depuis 50 ans, et en particulier de la Physique atomique, est résumé dans ce volume dont les collaborateurs ont été choisis parmi les plus brillantes personnalités de la Science Française.

Sous la direction de **Louis de BROGLIE**, un volume, reliure mobile (qui permet la mise à jour ultérieure), 500 pages illustrées, 16 planches hors-texte : 7500 F taxe locale incluse • Facilités de paiement; renseignements et prospectus-spécimen chez les libraires et 114 Bd Raspail, Paris 6

dépositaire général

LAROUSSE

MASSON & C^{ie}, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

NOUVEAUTÉ :

NOUVEAUTÉ :

MANUEL
DE
CALCUL PRATIQUE
NUMÉRIQUE et GRAPHIQUE

par
A. DESFRETIERE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud
Professeur honoraire de l'enseignement technique

*Classes de 2^e, 1^{re} et Terminales des E.N.P., des Collèges techniques,
des Sections techniques des Lycées et des Collèges modernes.*

1. **Calcul numérique** - Un volume, avec figures et exercices, broché : 620 fr.
2. **Calcul à la règle et par le graphique.** - Un volume broché : **Juin 1956**

DELAGRAVE

Nouveauté

G. WALUSINSKI

AIDE-MÉMOIRE DE COSMOGRAPHIE

Classes de Mathématiques, Sciences Exp^{les} et Philosophie

Un volume (11,5 × 18,5), couverture forte **190 Fr.**

Rappel :

AIDE-MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES

Classe de 1^{re} A,B,C, Moderne

par F. BRACHET et J. DUMARQUÉ. **95 Fr.**

LE PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C.

et au concours d'entrée aux Ecoles Normales

par M. BOMPARD. Un vol. (14,5 × 20) br. **520 Fr.**

MATHÉMATIQUES

Classes de PREMIÈRE :

Nouveautés :

LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Première C.M.	Br. : 545 F., cart. : 655 F.
LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Première C.M.	Br. : 600 F., cart. : 730 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Première A.B.	Br. : 585 F., cart. : 705 F.

SPECIMENS gratuits sur demande

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
1^{re} partie, séries C. et M. 285 F.

Classes de SECONDE :

LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Seconde C.M.	Br. : 400 F., cart. : 500 F.
LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Seconde C.M.	Br. : 575 F., cart. : 695 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Seconde A.B.	Br. : 535 F., cart. : 655 F.

Algèbre et géométrie : 1 volume

COURS COMPLET DU 1^{er} CYCLE

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième, *Livre de Corrigés*.

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième, *Livre de Corrigés*.

Note Importante. — Les livres de corrigés ne sont pas en vente dans le commerce

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Troisième.	
Edition Lycées et Collèges	Br. : 455 F., cart. : 560 F.
Edition Cours Complémentaires	cart. : 680 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Quatrième.	
Edition Lycées et Collèges	Br. : 425 F., cart. : 530 F.
Edition Cours Complémentaires	cart. : 635 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième.	
Edition Lycées et Collèges	Br. : 335 F., cart. : 435 F.
Edition Cours Complémentaires	cart. : 495 F.
LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième.	
Edition Lycées et Collèges	Br. : 270 F., cart. : 370 F.
Edition Cours Complémentaires	cart. : 355 F.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique et Cosmographie) Br. : 830 F., cart. : 930 F.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE .. Br. : 420 F., cart. : 550 F.

Classe de MATHÉMATIQUES :

COURS COMPLET

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE	Br. : 700 F., cart. : 805 F.
" — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE	Br. : 280 F.
" — ARITHMETIQUE	Br. : 290 F.
" — MECANIQUE	Br. : 250 F., cart. : 340 F.
LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE,	Br. : 390 F., cart. : 490 F.
LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE	Br. : 605 F., cart. : 705 F.
" — TRIGONOMETRIE	Br. : 380 F., cart. : 475 F.
" — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 2 ^e partie, classe de Mathématiques	100 F.

Prix taxe locale incluse

A MM. LES PROFESSEURS

Aussi longtemps qu'il a été laissé à chaque Faculté le soin de fixer les sujets des compositions de Baccalauréat pour les candidats de son ressort, nous avons pu présenter, chaque année, dans nos *Annales du Baccalauréat*, une collection copieuse de sujets, collection constituant une documentation précieuse et renouvelée d'année en année. L'institution du « sujet unique » pour toutes les Facultés de la France métropolitaine a considérablement réduit le nombre des sujets à insérer dans nos *Annales*. Pour cette raison, nous y avons, depuis trois ans, fait figurer, en plus des sujets officiels, des « sujets-type », élaborés par des professeurs expérimentés.

Nous avons pu, grâce aux « sujets-type » envoyés par MM. les Professeurs, donner à nos *Annales* 1955 un caractère de diversité comparable à celui que présentaient précédemment les sujets officiels et de nombreux usagers de nos *Annales* nous ont exprimé leur satisfaction. C'est pourquoi, encore, comme l'an dernier, nous faisons appel, pour les sujets à faire paraître dans nos *Annales* 1956, à tous les professeurs de Mathématiques qui voudront bien nous apporter leur concours, en leur demandant de nous adresser un ou plusieurs sujets complets (questions de cours et problème) pour une ou plusieurs séries parmi les suivantes :

1^{re} partie, Série B ;

1^{re} partie, Séries A', C, C', M, M' et T ;

2^e partie, Séries Mathématiques et Mathématiques et Technique.

Il convient que ces sujets soient composés de telle façon que, en les résolvant, un candidat puisse donner un témoignage de bonne scolarité.

Les sujets que nous recevrons seront examinés par une Commission de professeurs de l'Université, qui y fera un choix. Chacun des sujets retenus et insérés dans nos *Annales* portera l'indication du nom de son auteur.

Prière d'adresser les envois à la Librairie Vuibert (Service des *Annales*), bd Saint-Germain, 63, Paris (5^e), avant le 15 juin 1956.

MÉMOCAHIER

un précieux auxiliaire du professeur

7 pages d'aide-mémoire
sur papier de couleur

8 pages d'aide-mémoire
sur papier de couleur

un cahier de classe
de 140 pages

MÉMOCAHIER

une couverture illustrée,
plastifiée, lavable, de
couleur différente
pour chaque matière

Existe dans
les matières suivantes

**FRANÇAIS
MATHÉMATIQUES
ANGLAIS
LATIN
HISTOIRE
GÉOGRAPHIE**

Un aide-mémoire toujours présent

- Rappelle tout le programme des études secondaires
- Réalise, grâce au format, les regroupements les plus utiles dans une typographie très claire
- Contribue à l'assimilation des connaissances et à la formation de la mémoire
- Supprime les pertes de temps et les causes d'erreur.

C'est une création **STUPAP**

188 RUE DE LA ROQUETTE, PARIS • ROQ. 27-20 - MEN. 38-50

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6° (<i>Jusqu'à épuisement</i>)	220 fr.
ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour	330 »
<i>Corrigé des exercices de 6°</i>	300 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5°	185 »
GÉOMÉTRIE 5° et 4°	400 »
ARITHMÉTIQUE 5°	350 »
<i>Corrigé des exercices de 5°</i>	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4°	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3°	350 »
GÉOMÉTRIE 3°	325 »
GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3°	800 »
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages cartonné).	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.	100 »
ALGÈBRE 2° A.B.C.M.	500 »
GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M.	465 »
ALGÈBRE 1° A.B.	180 »
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1° C.M.	550 »
GÉOMÉTRIE 1° A.B.C.M.	500 »

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	390 »
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	410 »

Roland MAILLARD

Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Charlemagne
Chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

et **Albert MILLET**

Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second degré

Classe de Sixième. *Un volume. + Corrigés.*

Classe de Cinquième. *Un volume. + Corrigés.*

Classe de Quatrième. *Un volume. + Corrigés.*

Classe de Troisième (Nouvelle édition). *Un volume. + Corrigés.*

Classes de Seconde Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Seconde Classique C et Moderne :

Algèbre. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume. + Corrigés.*

Classes de Première Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Première Classique C et Moderne :

Algèbre et Trigonométrie. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume. + Corrigés.*

★ **Classe de Sciences expérimentales.** *Un volume.*

Classes de Philosophie et Sciences expérimentales :
Cosmographie. *Un volume.*

Classe de Philosophie :

Trigonométrie et Algèbre. *Un volume.*

★ **Mathématiques** (Trigonométrie, Algèbre et Cosmographie).
Un volume.

Classe de Mathématiques :

Algèbre. *Un volume.*

Géométrie descriptive.

★ Arithmétique. *Un volume.*

Un volume.

Cosmographie. *Un vol.*

Trigonométrie. *Un vol.*

Géométrie. *Un volume.*

★ Mécanique. *Un vol.*

Classe de Mathématiques (Technique) :

★ Algèbre. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume.*

Trigonométrie. *Un volume.*

Cours Complémentaires

★ **Classe de Sixième.** *Un volume. + Corrigés.*

★ **Classe de Cinquième.** *Un volume. + Corrigés.*

★ **Classe de Quatrième.** *Un volume. + Corrigés.*

★ **Classe de Troisième.** *Un volume.*

+ Les **Corrigés**, hors commerce, sont exclusivement réservés
à MM. les Professeurs de Mathématiques.

★ **NOUVEAUTÉS.**

