

PHYSIQUE : SOURCE CONCRÈTE DE LA MATHÉMATIQUE

Notre Société (1) a bien voulu me charger de vous donner le point de vue d'un professeur de physique sur le passage du concret à l'abstrait dans l'enseignement secondaire.

La question est fort controversée, nous a-t-on dit. Pour avoir eu des contacts assez nombreux avec des collègues mathématiciens, je me permettrai d'ajouter ceci :

La question est fort controversée entre professeurs de Mathématiques ; elle l'est beaucoup moins entre professeurs de physique. L'explication de ce phénomène ? A mon avis, la voici : le plus souvent, nos collègues mathématiciens placent la discussion sur le plan pédagogique, alors que les physiciens motivent le recours à l'expérience, avant tout, par la nature même de leur discipline.

Les raisons de ceux-ci sont plus contraignantes que les raisons de ceux-là.

En science naturelle, quand bien même le recours à l'expérience directe n'entraînerait aucun avantage pédagogique, il se justifierait d'abord par des raisons scientifiques.

Il m'arrive d'être déçu par l'indifférence des élèves pour certaines expériences de laboratoire, et, quelquefois, je suis même obligé de combattre la confusion qu'elles provoquent dans leur esprit. La loi de Boyle-Mariotte, expliquée au tableau noir, dans laquelle le gaz est enfermé dans un cylindre à piston plongé dans un thermostat, se comprend mieux que sur l'appareil réel, moins simple, où l'attention se disperse sur des détails expérimentaux. Il est plus facile de commenter un schéma que d'apprendre à voir et à concevoir dans une expérience.

Mais la physique est une science expérimentale ! Il en résulte que la réalisation effective de l'expérience est indispensable au même titre que le schéma de principe, parce que, sans elle, l'exposé perdrait son caractère scientifique.

Par contre, beaucoup de professeurs de Mathématiques qui s'attachent à l'intuition sont poussés par des raisons pédagogiques ; ils éprouvent l'efficacité des moyens intuitifs dans des circonstances particulières. Or, la pédagogie offre des voies diverses qui mènent à des résultats également valables. Les méthodes intuitives ont fait leurs preuves, certes ; cependant, d'un point de vue purement didactique, je n'oserais condamner un cours de Mathématiques sans matériel intuitif, mais défendu par un maître de talent.

La discussion sur ce point n'est pas près d'aboutir, parce qu'on déplace le centre de gravité du problème en restant sur le terrain de la pédagogie pure.

En Mathématiques, le recours au concret ne se justifie-t-il pas aussi et avant tout par des raisons scientifiques ?

Pour pouvoir répondre par l'affirmative, il faudrait admettre que la

(1) La Société Belge de Professeurs de Mathématiques, au Congrès de laquelle, à Berchem, fut prononcée cette conférence. Voir les autres conférences de Berchem dans le Bulletin 175.

Mathématique plonge ses racines dans le monde sensible et qu'elle élabore ses concepts à partir des êtres concrets, en suivant une voie comparable à celle qui mène du fait brut à la théorie physique. Je n'ai pas l'intention de m'arrêter longtemps à ce problème philosophique, mais j'avoue que je ne vois pas la différence entre la manière dont le mathématicien forme les concepts de nombre, de ligne, de surface, et celle dont le physicien arrive aux concepts de machine simple (sans aucun frottement), de pendule simple (avec un point matériel et un fil sans masse), de rayon lumineux (indépendant du faisceau et parfaitement rectiligne), de système isolé (sans aucun échange d'énergie avec le monde extérieur), de gaz parfait (sans cohésion, ni covolume), de mouvement uniforme (où l'espace varie linéairement par rapport à un temps abstrait).

Le pendule du physicien comporte, comme la surface du géomètre, un passage à la limite.

Il en va de la Mathématique comme des autres sciences. Son stimulant principal réside dans les besoins des hommes. A l'origine, elle a pour but de reconnaître les limites des terres, de mesurer la capacité des récipients, de développer des rapports commerciaux, d'évaluer le temps. Elle a sa source dans la réalité du monde extérieur et dans l'action que nous exerçons sur elle. Mais, pour établir des relations entre les êtres réels, il faut les débarrasser de ce qui est étranger à ces relations : ainsi se forme le concept ; ainsi la connaissance s'élève du niveau sensible au niveau rationnel. Et le fait que la Mathématique se prolonge par de pures créations de l'esprit, comme les nombres complexes, n'enlève rien à ses origines concrètes.

Le concept ne se forme pas autrement en physique, ni en toute autre science. Je ne comprends pas la légende, qui fait d'ailleurs le plus grand tort à notre enseignement, selon laquelle la Mathématique occuperait une place privilégiée parmi les sciences. Il n'y a pas de « miracle mathématique », ou, si miracle il y a, il est propre à toutes les sciences.

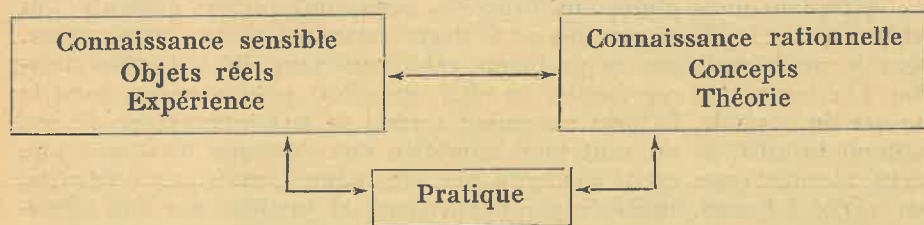
Lorsqu'on oublie les sources concrètes d'une théorie scientifique — et ne les oublions-nous pas quelquefois ? — on finit par détacher la loi abstraite de la réalité et par la considérer comme un ordre strict, indépendant du réel, auquel le monde extérieur aurait à se conformer. Avouons-le, tel est le sentiment de la plupart de nos élèves d'athénée et même de ceux qui ont terminé leurs classes. Un fait d'expérience ne concorde-t-il pas avec la théorie ? Ou bien on incrimine le fait qui aurait dû se plier à la loi, ou bien on perd toute confiance dans la théorie. Nos élèves ne se disent pas que *la théorie est sortie d'un domaine limité de la réalité et qu'elle n'est pas nécessairement valable en dehors de ce domaine.* Ne pensez-vous pas que nous sommes un peu responsables de cette situation ? Par exemple, lorsque nous déclarons, sans autre précaution, que toute mesure comporte une erreur, nous nous entendons rétorquer : « Alors, toutes ces lois physiques sont fausses », ou encore : « Nous étudions des théories qui ne sont pas vraies. » N'utilisons-nous pas trop à la légère l'expression « erreur expérimentale » ?

Dire que la théorie est utile parce qu'elle s'applique à la réalité ne fait que reculer le problème, car, *s'il était vrai que la Mathématique est un produit de la pensée humaine, indépendante de toute expérience,*

pourquoi alors s'adapterait-elle à la réalité avec une approximation aussi satisfaisante ? « La raison humaine, demande Einstein, serait-elle donc capable, sans avoir recours à l'expérience, de découvrir par son activité seule les propriétés des objets réels ? »

C'est là tout le problème de la connaissance, pour lequel des générations de penseurs ont proposé des dizaines de solutions. Il ne nous appartient pas d'en défendre une plutôt qu'une autre, mais il est intéressant de noter ceci : dans son enseignement, chacun de nous représente, d'une manière plus ou moins nette et plus ou moins consciente, une de ces tendances philosophiques.

En effet, nous avons reconnu, très schématiquement, trois jalons dans le processus de la connaissance (*) : au niveau sensible, la connaissance se base sur l'observation et l'expérience des objets réels ; au niveau rationnel, la pensée élabore des concepts et édifie des théories ; au niveau pratique, la connaissance abstraite se vérifie, se précise au contact des êtres réels.



Isoler le moment de la connaissance sensible en donnant à l'expérience une importance exclusive, c'est être empirique. C'est au fond cela qu'on a reproché aux méthodes dites nouvelles, en disant qu'elles « primarisent » l'enseignement secondaire.

Isoler le moment de la pratique en omettant d'imbriquer les connaissances dans une théorie cohérente, c'est être pragmatique.

Isoler le moment rationnel, en niant les sources concrètes de la connaissance, revient à s'adonner à une forme d'idéalisme mathématique.

Remarquez que rien ne nous oblige à nous enfermer dans des doctrines aussi exclusives. L'athénée n'est-il pas le lieu où *se rencontrent* le concret et l'abstrait ? C'est pourquoi j'essaie, pour ma part, d'axer mon enseignement sur les rapports qui existent entre ces deux aspects du savoir, de montrer le rôle de l'expérience, de la pratique et du langage dans le cheminement de la pensée qui mène de la sensation au concept.

Le passage du concret à l'abstrait est précisément une des pierres d'achoppement du secondaire. Tant que nous nous en tenons à la leçon de choses, nos élèves se sentent à l'aise ; tant que nous exposons adroitement une théorie bien délimitée, ils nous suivent encore ; mais ils trébuchent dès que nous tentons de passer de l'une à l'autre. La difficulté est-elle due à la psychologie de l'adolescent qui n'a que trop tendance à cloisonner, ou à l'enseignement qu'il a subi ? Je ne sais. Mais une chose

(*) GARAUDY : « Théorie matérialiste de la connaissance ».

me paraît certaine : pour y remédier, *il est nécessaire d'établir la coordination entre les disciplines*. Il serait paradoxal d'engager les élèves à abattre des cloisons que nous maintenons nous-mêmes dans notre enseignement. *Rendre cette coordination possible par une organisation adéquate serait, à mon avis, une tâche bien plus importante que la révision des programmes.*

En quoi un cours de physique peut-il favoriser la prise de conscience des rapports qui unissent le concret à l'abstrait ?

Je n'insiste pas sur les liens entre la théorie et la pratique, qui sont trop immédiats pour qu'il soit possible de les négliger. Aucun professeur de Mathématiques ne manque l'occasion de montrer que la vitesse et l'accélération s'expriment par des dérivées, et, à ce propos, de faire quelques exercices de cinématique. Tous les professeurs de physique profitent des précieux instruments fournis par la trigonométrie, l'algèbre, et même l'analyse, depuis que le calcul intégral figure au programme de la section latin-sciences.

Attardons-nous plutôt aux rapports, sans doute moins évidents, qui existent entre le degré sensible et le degré rationnel de la connaissance. Pour le mathématicien, ce problème est étroitement lié à l'axiomatisation. L'axiomatique représente, en effet, un effort pour séparer, dans la mesure du possible, l'aspect purement formel de la connaissance de son contenu intuitif. Si on veut bien admettre que l'axiome n'est pas une vérité absolue (une vérité évidente par elle-même), mais, au contraire, une vérité à l'essai, suggérée par l'expérience et justifiée par son efficacité, alors on ne doutera plus que les cours de physique et de mathématiques doivent conduire à une même synthèse. Un enseignement adéquat de la physique peut notamment montrer que l'axiome n'est pas une chose inutile parce que trop évidente, mais au contraire une vérité qu'il est opportun et nécessaire de dire.

Que faire pour en arriver là ? La chose n'est pas simple, car il ne peut être question de bouleverser les programmes. Certes, on peut présenter la matière avec le souci d'éclairer les rapports concret-abstrait et, pour cela, nouer des relations aussi étroites que possible entre les cours de physique et de mathématiques. Mais est-ce bien suffisant ? N'ai-je pas lu quelque part que l'enseignement moyen a l'ambition de former l'esprit de synthèse, de favoriser une prise de conscience ? A-t-on prévu, pour cela, la leçon de synthèse, je veux dire la leçon qui déborde largement du cours, réunissant des informations glanées un peu partout, la leçon qui interprète des notions étudiées au cours des années précédentes en les présentant dans un autre ordre et dans un autre esprit ? Je crois savoir que le professeur, harcelé par les programmes et par la préparation aux examens, dispose rarement du temps nécessaire. Malgré cela, j'organise, de temps en temps, une de ces synthèses dans les classes de Seconde et de Première. Le mot « synthèse » est trop fort, car il s'agit plutôt de conversations à bâtons rompus. Je propose un thème très large. Nous nous mettons d'accord sur la répartition du travail. Une documentation est fournie aux élèves ; ils retournent aussi à leurs notes des années précédentes. Je les engage à reconsidérer certains problèmes ; je leur demande notamment leur avis sur l'ordre dans lequel la matière

leur a été présentée. Nous discutons le sujet pendant deux ou trois leçons et, à cette occasion, des notions nouvelles sont enseignées d'autorité. Le plus souvent, nous finissons par nous mettre d'accord sur une structure qui nous paraît assez cohérente. Inutile de dire que je ne peux me permettre pareille initiative qu'une ou, au maximum, deux fois par an. Avant d'aborder les sujets, je tiens à dire que tous les élèves ne profitent pas de ces leçons. Les moins bons, incapables de renouveler leur optique des choses, n'en saisissent pas le sens. En revanche, les bons élèves et même les moyens coopèrent avec sympathie.

Je voudrais vous entretenir de quelques thèmes qui ont été effectivement traités et dont voici les titres : Vecteurs et espaces vectoriels ; — Les notions de temps et de mouvement uniforme ; — Le corps solide et la géométrie euclidienne ; — Les lois générales des gaz et leurs propriétés géométriques ; — Le domaine de validité de l'optique géométrique.

Dans ces études, j'ai principalement poursuivi les buts suivants :

1° Conduire les élèves de l'objet réel au concept, de l'expérience à la théorie. Montrer que le chemin suivi n'est pas direct et bien tracé ; qu'il n'est pas non plus à sens unique ; que la théorie, issue du concret, retourne à l'expérience pour la guider, préciser ses données et lui préparer de nouvelles découvertes.

2° Rendre les élèves conscients des limites de validité d'une théorie. Leur faire comprendre qu'une théorie, sortie d'un domaine limité de la réalité, ne s'applique pas nécessairement avec succès en dehors de ce domaine. Eviter ainsi leur désarroi lorsqu'un fait s'avère inexplicable par un schéma déterminé.

3° Rendre possible une ébauche d'axiomatique et préparer une notion fondamentale de la Mathématique : celle du groupe de transformation.

VECTEURS ET ESPACES VECTORIELS

Le plus souvent, sans doute sous prétexte de partir du concret, on introduit la notion de vecteur à propos de l'étude des forces. On montre qu'une force est caractérisée par son point d'application, sa direction, son sens et sa grandeur et qu'elle peut, dès lors, se représenter par un symbole appelé vecteur. Ainsi, la force est le premier vecteur qui se présente aux élèves, et c'est bien malheureux. D'abord, le caractère concret de la force est illusoire. Ensuite, on arrive à ce résultat que, pour la plupart des élèves, le vecteur continue à s'identifier à une force pendant longtemps.

J'ai demandé à mes élèves de Troisième s'ils connaissent d'autres grandeurs que les forces pouvant se représenter par des vecteurs, et d'indiquer pourquoi. Voici les réponses qui reviennent le plus souvent : le son, la lumière. Le son, par exemple, est caractérisé par : la radio, qui est le point origine ; l'intensité du son correspond à la grandeur du vecteur ; la direction et le sens sont donnés par la radio qui émet et l'oreille qui reçoit. Ces réponses ne sont pas à condamner. A leur manière, les élèves décèlent dans le fait complexe ce qui, selon eux, caractérise un vecteur. Il leur suffit de trouver un sens et une direction à un phéno-

mène pour l'identifier à un vecteur. C'est bien la preuve que la notion de vecteur doit être reprise plus tard. Elle se précisera, notamment, lorsque la loi d'addition sera connue.

Ici encore, on part presque toujours de la règle de composition des forces, établie à la suite d'une expérience directe en laboratoire. Que faut-il penser de ce procédé ? Lorsque les mesures sont assez précises et surtout assez nombreuses, on peut, quelquefois, amener les élèves à redécouvrir une loi par des questions adroitement posées. Encore ne faut-il pas abuser d'une certaine pédagogie de la redécouverte qui consiste à placer la réponse, à peine dissimulée, dans les questions. Il est d'ailleurs assez rare que, dans la discussion, le professeur ne se laisse pas guider par la connaissance préalable du résultat. « Expérience d'abord », d'accord. Mais cela ne signifie pas nécessairement « expérience de laboratoire d'abord ». Je serais étonné qu'on puisse découvrir directement la règle du parallélogramme des forces à la suite d'une expérience comme celle-ci : des masses de poids connus sont suspendues aux extrémités d'un fil qui passe dans la gorge de deux poulies ; on équilibre le système par un troisième poids appliqué entre les deux poulies ; la dernière force est égale et de sens contraire à la résultante des deux premières. Ou bien : une pièce de carton est sollicitée par deux ressorts tendus étalonnés, le système est tenu en équilibre par un troisième ressort exerçant une force opposée à la résultante des deux autres.

La voie suivante me paraît assez naturelle :

Introduire d'abord le segment orienté sur la droite. L'illustrer par l'exemple le plus immédiat : le déplacement ou, plus exactement, la translation.

Ensuite, représenter le vecteur dans le plan ; depuis la Quatrième et même avant, les élèves savent déterminer un point par ses deux coordonnées dans un système de référence xOy ; montrer que, d'une manière analogue, le vecteur est déterminé si on se donne deux vecteurs composants sur les axes.

Changer le système d'axes et en arriver à la conclusion que la décomposition du vecteur peut se faire d'une infinité de manières, mais que, en revanche, à deux composantes données ne correspond qu'une seule résultante. Remarquer que la résultante est la même quel que soit l'ordre dans lequel on porte les composantes ; un élève marchant dans la classe constate qu'il arrive au même point en effectuant $\vec{a}$ suivie de $\vec{b}$ ou $\vec{b}$ suivie de $\vec{a}$, en effectuant la résultante de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ suivie de $\vec{c}$ ou d'abord $\vec{a}$ suivie de la résultante de $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

En conclure que l'addition vectorielle jouit des propriétés suivantes :

1° Etant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, il existe un seul vecteur : $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

2° L'addition vectorielle est commutative : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

3° Elle est associative : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Nous avons fait un premier pas dans la voie de l'axiomatique.

Passons au cours de physique. Après avoir constaté qu'une force est déterminée par son support, son sens et son intensité, ne pas dire d'emblée que la force est un vecteur ; la représenter par une flèche, c'est tout.

S'appuyer sur un exemple familier : un chaland est mû par une machine qui exerce une force dans la direction du canal. On obtiendrait le même effet en remplaçant la machine par deux chevaux tirant de chacune des rives. Donc, l'ensemble des deux forces concourantes est équivalent, au point de vue de ses effets, à une force unique.

Poser alors nettement la question ? Les forces se composeraient-elles comme des vecteurs ? Ici, l'expérience de laboratoire peut nous aider.

Engager les élèves à faire les mesures avec minutie, leur laissant le soin d'étalonner eux-mêmes les ressorts. Leur faire tracer, sur le même dessin, la résultante tirée de l'expérience et la résultante obtenue par la règle du parallélogramme. Les deux résultantes ne coïncident pas, ni en grandeur, ni en direction. Discuter les causes possibles des divergences.

En conclure que l'expérience suggère la loi du parallélogramme, mais que sa précision n'est pas suffisante pour pouvoir affirmer avec certitude que les forces s'additionnent comme des vecteurs. Toutefois, nous avons confiance dans la loi du parallélogramme *parce que ses conséquences sont vérifiées par l'expérience.* La vérification d'une loi par l'ensemble de ses conséquences est pratiquée partout en physique. Elle est une raison de confiance plus profonde que la vérification directe. La loi de Newton en gravitation, les lois de Coulomb en électricité et en magnétisme, toutes les lois d'actions élémentaires de l'électro-magnétisme se vérifient de cette manière. Le fait que Le Verrier ait pu faire des prévisions extraordinaires, grâce à la mécanique céleste issue de la loi de l'attraction universelle, est une confirmation plus éclatante de cette loi que l'expérience directe de Cavendish. C'est là un argument qui convaincra les élèves.

La suite du cours de physique donne d'autres exemples de vecteurs — vitesse, accélération, champ — dont on reconnaîtra le caractère vectoriel à leurs lois d'addition. Bref, *le vecteur se reconnaît aux opérations qu'on peut lui appliquer.*

De nouvelles opérations sont définies par leurs propriétés :

Le *produit scalaire*, introduit à propos du travail et du flux, est commutatif, associatif et distributif.

Le *produit vectoriel*, illustré par l'action d'un champ magnétique sur un courant, est anticommutatif.

En rhétorique, on résout quelques exercices simples sur les courants alternatifs par le moyen du calcul vectoriel et par celui des nombres complexes. C'est l'occasion de montrer que le calcul des nombres complexes et la géométrie des vecteurs ont une base axiomatique commune. L'addition des nombres complexes a, en effet, les mêmes propriétés que l'addition vectorielle.

La notion de vecteur prend ainsi un sens plus large et, en même temps, plus abstrait (*).

(*) M. Ronsmans traitait ensuite des notions de temps et de mouvement uniforme. Nous nous réservons de publier cette partie particulièrement importante de son exposé dans un prochain Bulletin.

LE CORPS SOLIDE ET LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

La mesure des longueurs se réduit à un certain nombre d'opérations étalons, tout au moins pour des objets directement accessibles. Appliquée à un objet déformable, la mesure ainsi définie n'aurait évidemment aucun sens.

Pour qu'il soit possible d'avoir confiance dans les résultats de nos mesures, nous devons croire d'abord à l'invariance de l'étalon et de l'objet à mesurer.

Une analyse plus poussée nous montre pourtant qu'un corps ne peut jamais être rigoureusement invariable. Nous savons que l'écorce terrestre n'est pas complètement rigide ; elle se déforme sous l'influence de l'attraction de la Lune et du Soleil, comme les océans, sous cette même influence, produisent les marées (marées de l'écorce terrestre). Les objets qui nous paraissent solides et immobiles, lorsque nous les regardons en gros, ne le sont que d'une manière approchée : les pièces métalliques se dilatent lorsque la température s'élève, le bois se déforme en desséchant.

A l'échelle très grande ou très petite, l'immobilité s'évanouit complètement. Les astres sont en mouvement ininterrompu. On a cru que certaines étoiles, dites fixes, conservent les mêmes positions les unes par rapport aux autres ; mais les astronomes ont constaté, par des observations minutieuses, que ces étoiles se déplacent légèrement. L'immobilité n'existe pas davantage dans l'infiniment petit, car les atomes qui constituent la matière sont en vibration continue.

Dès lors, il n'est pas étonnant que le choix d'un étalon de longueur soit une chose difficile et qu'il ait reçu, au cours de l'histoire, des corrections successives.

D'abord, ce furent des objets supposés invariables, par exemple des coudées en bronze, que l'on déplaçait le long de l'objet à mesurer. Au XVIII^e siècle, lorsqu'on eut fait des mesures satisfaisantes du méridien terrestre, on eut l'idée de choisir le globe lui-même comme étalon. Le mètre fut défini comme étant la 40.000.000^e partie du méridien.

Mais, chaque fois que notre connaissance de la forme du globe terrestre se trouva améliorée, il aurait fallu corriger l'étalon de longueur. On sacrifia l'« étalon Terre » et on décida que le mètre serait la longueur définie à 0° par un prototype en platine. Or, la température de 0° ne peut se déterminer avec une précision absolue. En outre, la précision du mètre dépend de l'épaisseur et de la régularité des traits gravés sur le prototype. Autant dire que le mètre ne peut être défini avec une rigueur absolue ; sa précision ne dépasse pas la 7^e décimale.

Cette discussion aura convaincu les élèves qu'il ne peut être question de mesures absolument justes tant qu'elles s'appliquent à des objets réels.

Nous avons discuté le sens de la mesure des longueurs directement accessibles. Les objets que nous pouvons directement atteindre sont limités, du côté des petites dimensions, par l'atome, et, du côté des grandes dimensions, par le globe terrestre. Pourtant, les astronomes mesurent les distances entre les astres ; les physiciens déterminent certaines longueurs attachées aux atomes (longueurs d'onde). C'est dire que la science franchit chaque jour le domaine directement accessible. Mais, ici, la mesure implique des opérations d'un autre ordre. Pour mesurer la distance entre

deux points très éloignés, l'homme utilise des lunettes et recourt à l'opération de la visée. *Pour avoir confiance dans sa mesure, il doit admettre que la lumière se propage en ligne droite.* Pour mesurer des longueurs d'onde, il accepte cette fois que la lumière a un autre mode de propagation que la ligne droite.

Quoi qu'il en soit : la notion de mesure repose toujours sur une théorie physique (solide parfait, rayon lumineux), dont il suffirait de modifier une seule loi pour changer toute la signification de nos mesures.

Nous dirons avec Bauer que *notre conception même de l'étendue et de sa mesure sont fondées sur toute la physique et se modifient avec elle. On voit à quel point physique et géométrie sont étroitement liées.*

La géométrie réalise le passage du corps réel au corps solide parfait. Etymologiquement, la géométrie a pour objet la mesure de la terre. Les inondations périodiques du Nil obligeaient les Egyptiens à cadastrer les terres pour pouvoir reconstituer les limites des champs après les crues. Pour cela, il fallait pouvoir disposer de certains repères fixes. Donc, pour avoir confiance dans cette opération, il fallait croire que les dimensions de la terre ne changent pas. La question de savoir si l'invariance des dimensions de la terre est rigoureuse ou seulement approchée ne se posait pas aux Egyptiens. Ils se contentaient de résultats approximatifs et considéraient comme vraies des propriétés qui étaient plus ou moins bien vérifiées par la pratique. Leur géométrie était *empirique*.

Les connaissances des Egyptiens s'introduisirent en Grèce, mais les Grecs ne se contentaient plus d'une géométrie exclusivement pratique : ils avaient le souci de la démonstration.

Or, ils ne pouvaient raisonner avec rigueur que sur des corps parfaitement solides. Pour s'en convaincre, on se rappellera les démonstrations des cas d'égalité des triangles : on soumet l'un des triangles à une translation suivie d'une rotation et, éventuellement, d'un retournement, afin de le superposer à l'autre. En procédant de la sorte, on a admis, peut-être sans y penser, que le triangle ne change pas au cours des déplacements ; autrement dit, *on a admis que le triangle est rigoureusement un corps solide*, sans quoi le raisonnement ne serait pas valable.

Ici, nous avons franchi un pas. Le corps solide parfait n'existe pas en réalité, nous le savons ; c'est une création de l'esprit. Accepter qu'il existe, c'est formuler un *postulat*. En même temps, *la géométrie entre dans le domaine de la théorie.*

Concluons : *L'existence d'objets, ni trop grands, ni trop petits, a suffi aux hommes pour créer une géométrie empirique. Puis, elle a suggéré l'idée de substituer aux objets réels des objets idéaux, parfaitement solides, sur lesquels il est possible de raisonner avec rigueur.*

Insistons sur le fait que le corps solide parfait nous est suggéré par l'observation assez grossière d'objets réels, ni trop grands, ni trop petits. Cela nous permettra de montrer que l'application de la géométrie euclidienne est locale. Nous ne devons pas être étonnés que l'ingénieur applique journallement, sans être déçu, des propriétés de la géométrie euclidienne à des constructions à l'échelle ordinaire. Mais, quand les physiciens tenteront d'appliquer cette même géométrie à la physique des

atomes, nous ne serons pas tellement étonnés si les résultats d'expérience ne confirment pas leurs prévisions théoriques.

Nous introduisons *le groupe des déplacements* à propos du corps solide. Nous rappelons certaines notions étudiées en Cinquième : les figures obtenues par projection cylindrique d'un parallélogramme sur des écrans diversement orientés sont tous des parallélogrammes. Autrement dit, lorsque l'écran se déplace, d'une manière quelconque, les distances et les angles varient, mais les parallèles restent parallèles. Les mêmes résultats peuvent s'obtenir avec des figures articulées qui sont construites à l'aide de lattes et de chevilles et dans lesquelles les longueurs variables sont représentées par des fils élastiques. Ce procédé permet d'engendrer toute la famille du parallélogramme, comportant le rectangle, le losange et le carré, par des transformations qui conservent le parallélisme, mais non les longueurs, ni les angles. On profite de ce rappel pour grouper les propriétés affines des premiers livres d'Euclide et pour dire explicitement que ces propriétés ne comportent aucune notion d'angle ou de distance.

Après cela, nous reprenons nos figures déformables. Si nous voulons conserver les propriétés « diagonales égales et côtés égaux », nous devons serrer les articulations, faire une figure rigide. Nous ne pouvons plus alors que *déplacer* la figure. Les déplacements (translations, rotations, symétries) conservent, en effet, la distance entre deux points quelconques de la figure.

La notion de translation permet de passer d'une manière naturelle du corps solide au concept du point matériel. Pour étudier l'effet d'une force sur un solide, il est utile de décomposer le mouvement en une translation suivie d'une rotation. Pour obtenir une translation pure, on imaginera le corps transpercé de deux tiges parallèles fixes, le long desquelles le corps peut glisser. On voit immédiatement que *tous les points subissent le même déplacement. Quelle que soit l'étendue du solide*, on sera entièrement renseigné sur son mouvement de translation si on connaît le mouvement *d'un seul de ses points*. Aussi, pour simplifier l'étude d'une translation, *on dépouille le solide de ce qui est étranger à cette translation : son étendue*. Mais l'opération ne peut pas affecter le rapport de la force à l'accélération ; on ne peut donc pas priver le solide de sa masse. On imagine donc un point pourvu de masse, qui n'a évidemment pas d'existence réelle, mais dont l'étude nous informe sur le mouvement de translation des corps qui ont une étendue.

LES LOIS GÉNÉRALES DES GAZ ET LEURS PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

Le comportement des gaz est décrit par les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac : à température constante $p.v = C^*$, à volume constant $v = v_0 (1 + \alpha t)$, à pression constante $p = p_0 (1 + \alpha t)$.

Tout professeur de physique signale à ses élèves que ces lois sont obtenues en extrapolant les propriétés des gaz réels, mais qu'elles ne s'appliquent en toute rigueur qu'à un gaz idéal. A ce sujet, les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac ne doivent cependant pas occuper une place à part.

Ouvrons un manuel de physique pris au hasard ; nous y lisons à peu près ceci :

« La loi de Boyle-Mariotte n'est pas une loi rigoureuse. Les écarts que présentent les gaz vis-à-vis de cette loi sont d'autant plus faibles que les pressions sont plus petites. *La loi de Boyle-Mariotte est une loi limite*, c'est-à-dire qu'elle n'est absolument rigoureuse que pour un gaz idéal appelé gaz parfait. Elle s'applique cependant avec une approximation suffisante aux gaz réels. »

Qu'est-ce donc qu'une « loi limite » ? Y a-t-il des lois qui sont « lois limites », et d'autres qui ne le sont pas ? Y a-t-il des lois qui sont « absolument rigoureuses » pour des phénomènes réels ? Je ne vois pas, pour ma part, une différence de nature entre la loi des gaz parfaits et toutes les autres lois physiques ; toutes comportent une extrapolation ; le fait que la loi de Boyle-Mariotte ait un domaine d'application assez réduit ne justifie pas la qualification de « loi limite ». Cette appellation ne dénote-t-elle pas une mauvaise compréhension des rapports entre la réalité et la théorie ?

Quoi qu'il en soit, la loi de Boyle-Mariotte illustre bien le fait qu'une loi a une validité limitée. L'avantage ici, c'est que, même sans données expérimentales directes, les élèves ont l'impression que cette loi ne peut être valable en toute circonstance. Une courte discussion les convaincra de ce que la réduction du volume d'un gaz ne peut se poursuivre indéfiniment. J'ai posé la question suivante aux élèves de Seconde : prenons un litre de gaz sous une atmosphère ; élevons la pression d'une à deux atmosphères : le volume se divise par deux ; réduisons le volume à 1 cm^3 en comprimant très fortement. Selon vous, faudra-t-il encore doubler la pression pour réduire le volume de moitié ?

Dans leurs réponses, certains élèves expriment l'impression que « cela ne suffira plus lorsque le volume sera très petit », que « cela devient de plus en plus difficile ». L'idée m'a frappé et j'ai voulu l'exploiter dans d'autres domaines :

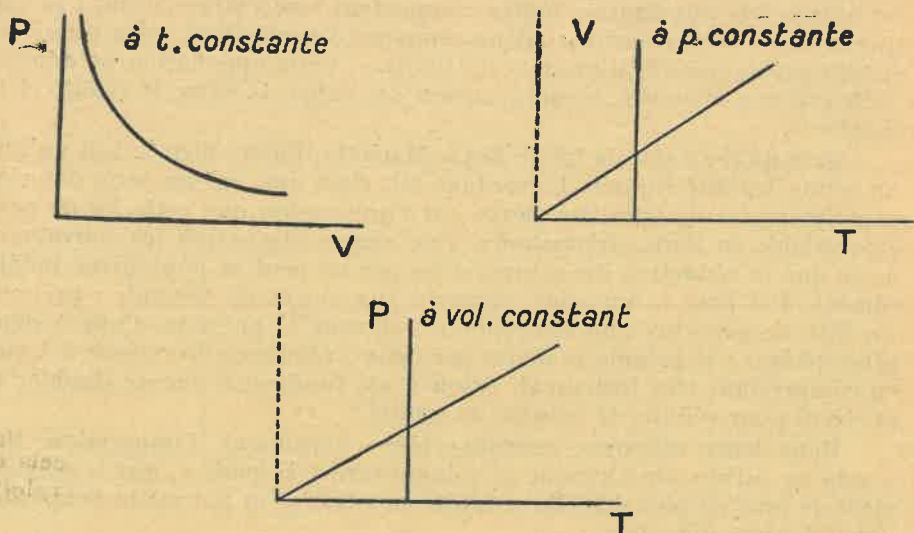
Faut-il autant de calories pour élever la température d'un corps de 10 à 11° que pour élever sa température de 1.000 à 1.001° ? Plusieurs élèves pensent que cela doit être plus difficile à 1.000° qu'à 10° . L'idée n'est bonne qu'à moitié, car la chaleur spécifique ne croît pas nécessairement avec la température. Toutefois, l'occasion est bonne pour indiquer que la chaleur spécifique n'est constante qu'en première approximation et que, dans une approximation supérieure, elle dépend de la température.

Question analogue : Est-il aussi facile d'augmenter la vitesse d'un corps de $10 \frac{m}{s}$ à $11 \frac{m}{s}$ que de l'augmenter, dans le même temps, de $1.000.000 \frac{m}{s}$ à $1.000.001 \frac{m}{s}$? Instruits par les discussions précédentes, les élèves sont presque unanimes à supposer que « cela doit être plus difficile lorsque le corps va déjà très vite ». Or, cela revient à dire que, dans la relation $F = m \cdot j$, la masse n'est plus constante, mais dépend de la vitesse. On peut alors signaler que l'on établit en relativité que :

$$F = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot j \quad (\text{où } c = \text{vitesse de la lumière}),$$

et que, pour des vitesses négligeables par rapport à la vitesse de la lumière, on est ramené à la loi connue. Ainsi, la mécanique classique est valable pour les faibles vitesses et devient grossièrement fausse lorsque les vitesses s'approchent de la vitesse de la lumière.

Les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac se représentent, graphiquement, l'une par une branche d'hyperbole, les deux autres par des droites.



Le zéro absolu est l'abscisse à l'origine de chacune des droites. Le passage de l'échelle des températures Celsius à l'échelle Kelvin correspond à une translation de l'axe des pressions ou de l'axe des volumes.

Les trois lois citées sont des cas particuliers de la loi des gaz parfaits, qui se représente par une surface dans un système d'axes p, v, T . Nous demandons à quelques volontaires de réaliser cette surface. Des sections parallèles au plan pv sont des hyperboles de Boyle-Mariotte ; des sections parallèles au plan pT sont des droites passant toutes par l'axe des volumes ; des sections parallèles au plan vT sont des droites passant toutes par l'axe des pressions. Les constructeurs devront s'astreindre à choisir des échelles convenables sur les axes, à travailler dans un système d'unités cohérent. Ils construisent point par point une famille d'hyperboles en carton, sur lesquelles s'appuient deux familles de droites. La surface est réglée.

Nous demandons alors ce qui se passerait si nous changions les unités portées sur les axes, ou encore si nous changions les échelles. La surface se déformerait, mais certaines propriétés — celles qui ont un sens

physique — résistent à la transformation ; elles doivent y résister précisément parce qu'elles ont un sens physique. Les droites restent des droites. Des directions parallèles restent parallèles. Les pentes des droites restent les mêmes, mais il est bien entendu que nous appelons pente le

rapport de l'ordonnée d'un point de la droite sur son abscisse ($\frac{p}{t}$ ou

$\frac{v}{t}$) ; l'angle que fait la droite avec l'un des axes varie évidemment, de

même que la distance entre deux points. Angles et distances n'ont d'ailleurs aucune signification physique.

Chacune des propriétés invariantes est traduite en langage géométrique et en langage physique. Ainsi, la surface engendrée par la famille d'hyperboles, et l'une des deux familles de droites, contient nécessairement l'autre famille de droites ; cela signifie que tout gaz qui obéit à deux des trois lois citées obéit nécessairement à la troisième. C'est là une propriété que l'on admet souvent implicitement dans la démonstration de la loi des gaz parfaits.

LE DOMAINE DE VALIDITÉ DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

A partir de la classe de Seconde, il nous semble que les élèves réagissent assez favorablement devant la conception d'axiomatics différentes, que la diversité de plusieurs géométries possibles ne leur apparaît plus comme une fantaisie ou une monstruosité. Comme ils restent néanmoins encore accrochés à l'absolu, ils vous posent la question : « Laquelle de ces géométries est vraie ? », ou mieux : « Laquelle de ces géométries est la plus vraie ? » La réponse est qu'un système d'axiomes nous place dans un « horizon de réalité », dont la géométrie correspondante constitue le schéma. On pourra raconter aux élèves une des fables pédagogiques par lesquelles Gonseth a si remarquablement expliqué ces notions. Mais, ici encore, le cours d'optique nous offre de larges possibilités.

Pour introduire l'optique géométrique, nous prenons plusieurs photos d'un filament de lampe à l'aide d'une chambre noire (appareil photographique sans objectif), avec des ouvertures de plus en plus petites et, naturellement, des temps de pose de plus en plus longs. Avec une ouverture relativement grande, nous obtenons une image épaisse, à bords nets. Nous ne disons pas : c'est parce que la lumière se propage en ligne droite. Nous disons : cette image peut s'expliquer en admettant que chaque point de l'objet est le sommet d'un cône de rayons lumineux limité par l'ouverture de l'appareil ; ce cône laisse une tache sur la plaque sensible : il n'y a pas correspondance point par point.

Un trou plus petit donne une image plus fine, à bords nets. Les cônes s'amincissent ; nous tendons vers la correspondance point par point. On fait remarquer que la même image peut s'obtenir géométriquement par une homothétie négative si la plaque sensible est parallèle au plan du filament-objet. S'il n'en est pas ainsi, la correspondance entre l'objet et l'image ne conserve ni les angles, ni les distances, mais à une droite de l'objet correspond une droite de l'image. Bref, *tout cela est explicable par l'hypothèse de la propagation rectiligne de la lumière en milieu homo-*

gène. A une optique de rayons lumineux correspond une géométrie de droites.

Nous disons alors à nos élèves : « Continuons à diminuer l'ouverture ; nous finirons peut-être par isoler un rayon lumineux ; nous pouvons alors nous attendre à obtenir une correspondance point par point et notre image sera parfaite. » Ils ont suivi mon conseil : un trou de 0,03 mm. et un temps de pose de trois heures. Résultat inattendu : la photo montre une image floue et des franges de diffraction. Ceci ne peut plus s'expliquer par l'hypothèse des rayons lumineux et la « géométrie de droites » n'est plus applicable. Celle-ci garde pourtant son pouvoir d'explication pour autant qu'on ne limite pas les pinceaux lumineux par des ouvertures trop petites ; elle est valable dans un certain « horizon de réalité ».

En milieu non homogène, les rayons sont réfractés. Un système optique est dit stigmatique pour deux points P et P' s'il transforme tous les rayons incidents issus de P (appelé objet) en des rayons émergents passant par P' (appelé image). On montre facilement qu'un dioptre sphérique, un miroir sphérique, une lentille ne sont pas stigmatiques pour tous les points de l'espace. Les rayons issus d'un point-objet P quelconque s'appuient, après réfraction, sur une *surface caustique*. Il n'y a pas correspondance point par point entre l'espace objet et l'espace image. Pourtant, les formules des dioptres, miroirs et lentilles, enseignées à l'athénée, supposent qu'il y ait stigmatisme. On ne peut enseigner ces formules sans signaler que leur domaine de validité est limité. Nous montrons, en outre, qu'à ce domaine correspond une géométrie qui n'est pas euclidienne. Quel est ce domaine de validité ?

Quand on diminue (pas trop) l'ouverture du diaphragme qui limite le pinceau incident, on voit que la surface caustique tend vers un point. Un objet ponctuel donne une image quasi-ponctuelle pour des petites incidences, ce qui implique l'utilisation de pinceaux faiblement ouverts et centrés sur l'axe. On se place ainsi dans ce qu'on appelle *l'approximation de Gauss*, qui constitue un corps de doctrine complet et cohérent. Cette approximation constitue un horizon de réalité et s'inscrit dans un schéma projectif. Les expériences au banc d'optique montrent facilement que, pour un dioptre utilisé dans les conditions de Gauss :

- 1° l'image d'un point de l'axe est un point de l'axe ;
- 2° le stigmatisme, déjà réalisé sur l'axe, l'est aussi autour de l'axe ;
- 3° l'image d'un plan est un plan ;
- 4° le birapport du point-objet, du point-image, du centre de courbure et du sommet du dioptre est constant et égal à l'indice de réfraction.

On voit qu'il s'agit d'une correspondance homographique. Certaines dispositions de l'écran font voir que l'image n'est pas semblable à l'objet (il n'y a pas de similitude « en volume »), que le parallélisme n'est pas conservé. En outre, cette correspondance entre l'espace objet et l'espace image est biunivoque, mais non réciproque. Si, par exemple, un objet réel P donne une image réelle en P', un objet virtuel placé en P' ne donne pas une image en P. Mais la correspondance devient réciproque dans le cas du miroir sphérique. Ici, le birapport vaut -1 ; deux points conju-

gués forment avec le centre de courbure et le sommet du miroir un quaternaire harmonique.

Si le rayon de courbure d'un dioptré est infini, la correspondance objet-image conserve le parallélisme, sans être toutefois une similitude. Ainsi, le dioptré plan établit entre l'objet et l'image une correspondance affine. Celle-ci devient une symétrie dans le cas du miroir plan.

Nous sommes partis de la géométrie projective, nous sommes arrivés à la géométrie euclidienne en passant par la géométrie affine.

Bientôt, en rhétorique, nos élèves s'attaqueront à la géométrie analytique. Ils apprendront, à l'occasion, à distinguer les propriétés projectives, affines et métriques. La compréhension du fondement axiomatique de ces notions aura été, pensons-nous, facilitée par les leçons de physique.

P. RONSMANS,
Professeur à l'Athénée Robert-Catteau
(Bruxelles).
