

BULLETIN de l'**ASSOCIATION** des **PROFESSEURS** de **MATHÉMATIQUES** de l'**Enseignement Public**

SOMMAIRE

I. ETUDES.

J. ITARD : Leçon inaugurale de Nicolo Tartaglia	281
H. CARTAN : Structures algébriques	288
P. RONSMANS : Physique, source concrète de la Mathématique.	299

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS.

L. FÉLIX : Exemple d'utilisation d'un formalisme, théorèmes de Simson, de Miquel et de Clifford	313
J. LEGRAND : La notion de « module d'entiers » et le théorème de Gauss	318
P. COUDERC et G. W. : Année des saisons et année tropique ..	319

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

P. DEDRON : Notations et tradition	322
P. SAMUEL : Réflexions sur nos problèmes de recrutement	323
A. FOUCHÉ : Valeur de la logique et puissance de l'exemple ..	324
C. GATTEGNO : Lettre sur les Mathématiques qu'il faut enseigner	327

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.

A. HUISMAN : L'enseignement des Mathématiques en Allemagne occidentale	330
O. DUBOIS-VIOLETTE : Sur un exposé élémentaire des principes de la géométrie, par R. BRISAC	333
Photographies astronomiques ; A travers les revues	334

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.

R. DONTOT : Rapport sur l'Agrégation de Mathématiques (hommes), session de 1955	335
---	-----

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

Réunion du Comité du 2 février 1956	360
Pour l'Assemblée Générale 1956 : Rapport moral du Président ; Compte rendu financier ; Questions posées	363
A. BIGUENET : L'Agrégation dans l'Enseignement technique ...	367
L. COLLOT : Régionale de Nancy	370
Quelques lettres	371

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)
Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ...	300 F
Prix de l'abonnement au <i>Bulletin</i>	1 000 F
Prix du numéro	200 F

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

<i>Président :</i>	M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11 ^e). OBE. 56-95.
<i>Vice-Présidents :</i>	Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14 ^e). M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelin, Neuilly-sur-Seine. M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris (9 ^e). M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14 ^e).
<i>Secrétaires :</i>	M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16 ^e). M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14 ^e). M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
<i>Trésorier :</i>	M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).
<i>Comité de rédaction du « Bulletin » :</i>	Mlle FÉLIX, MM. CHAZAL, GIRARD, THOVERT, WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; RALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (Fac. Sc. Toulouse) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (Nice) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. Saint-Ouen*) ; M. CHAZAL (*Saint-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (*Compiègne*) ; M. WALUSINSKI (*Voltaire*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Membres de droit

M. RAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOUDE (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (Saint-Cloud) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. BIGUENET ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. CROZES ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSSANT (Casablanca, *Lyautey*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public

I. ETUDES

LEÇON INAUGURALE DE NICOLO TARTAGLIA BRISCIANO sur toute l'œuvre d'Euclide de Megare, Mathématicien très subtil

Nicolò Tartaglia, né à Brescia environ 1500, est mort à Venise le 13 décembre 1557.

C'est un savant de premier ordre, qui est, avec Scipione dal Ferro et Gerolamo Cardano, à l'origine de la résolution algébrique des équations du troisième degré.

La leçon inaugurale sur les Mathématiques, dont nous donnons ici une traduction française, est extraite de son *Euclide*, édition posthume de 1569. Elle est rédigée, comme l'ensemble de l'ouvrage, en dialecte vénitien.

J. I.

Tous les hommes, magnifiques et très éclairés auditeurs (comme écrit Aristote au Premier livre de la Métaphysique), désirent naturellement de savoir, et, au premier des Postérieures, il conclut que le savoir n'est autre que comprendre par démonstration. Platon, d'autre part, définit la science n'être autre chose que la connaissance des choses divines et humaines : et tous les anciens philosophes disent que les parties de la science sont deux, à savoir spéculative et opérative, ou Théorique et Pratique. Aristote, au second de la Métaphysique, dit que le but de la spéculation ou de la science spéculative n'est autre que la vérité et celui de l'opération ou pratique est l'œuvre accomplie. Les dits anciens, investigateurs des choses, affirment encore que l'on atteint mieux la vérité dans les disciplines mathématiques que dans toute autre science ou art libéral. C'est pourquoi ils leur ont assigné absolument le premier degré de certitude. Et c'est pourquoi nous voyons [comme dit le Cardinal de Cusa (1)]

(1) NICOLAS DE CUES (1401-1464), philosophe, et mathématicien allemand. Un des précurseurs de COPERNIC. Ses tentatives de Quadrature du cercle furent réfutées par REGIOMONTANUS.

tous ceux qui ont goûté à ces disciplines s'y attacher avec un amour admirable. Et la seule raison en est qu'elles contiennent la vraie nourriture de la vie intellectuelle.

2. Ces Sciences ou disciplines ont été si intrinsèquement connues de nos sages antiques qu'il fut décidé par eux que la première chose qui se devait faire apprendre par tous ceux qui se dédiaient au savoir était les disciplines mathématiques (exactement comme il est aujourd'hui de coutume de commencer par la grammaire). Et ils prirent cette décision pour trois raisons : premièrement parce que les dites sciences ou disciplines éprouvaient l'ingéniosité de l'homme, et s'il était apte ou non à réussir dans les autres sciences ; car ce proverbe était coutumier parmi eux : Sicut aurum probatur igni, et ingenium Mathematicis, c'est-à-dire comme la bonté de l'or est connue et éprouvée par le feu, ainsi le talent de l'homme est connu et éprouvé par les disciplines mathématiques. Ainsi donc, quand, par hasard, il se trouvait quelqu'un qui ne fût pas apte à ces sciences, ils le retiraient de l'étude et l'appliquaient à quelque autre exercice, car ils comprenaient en effet (comme dit Vitruve Polion au premier chapitre de son premier livre) que la doctrine sans le génie, pas plus que le génie sans la doctrine, ne peuvent faire un bon ouvrier.

3. La seconde raison pour laquelle nos anciens voulaient que les Mathématiques fussent les premières étudiées est celle-ci qu'à leur compréhension ne concourt aucune autre science. La cause en est qu'elles se soutiennent elles-mêmes, se vérifient et se prouvent par elles-mêmes, et non par autorité ou par commune opinion comme font les autres sciences, mais par démonstration.

4. La troisième cause est parce qu'ils savaient que toutes les autres sciences, arts ou disciplines, ont besoin des Mathématiques, et non seulement les libérales et celles qui en dépendent, mais aussi tous les arts mécaniques, comme à présent, avec brièveté, cela sera rendu manifeste.

5. Premièrement, il est bien connu que, par le moyen des dites sciences, nous connaissons dans les occurrences naturelles, dans la matière, la description, qualité et quantité de toute figure géométrique, à savoir des triangles, quadrangles, pentagones, hexagones, rhombes, rhomboïdes et toutes autres figures planes. Et de même pour tous les corps solides, tant réguliers qu'irréguliers, comme sont les pyramides, prismes ou seratiles, sphères, cônes, cylindres ou colonnes, cubes, corps à huit bases, douze bases, vingt bases et autres qui en dépendent, comme toutes leurs propriétés et proportions, comme décrit et forme géométriquement notre insigne auteur Euclide en 15 Livres, desquels 11 sont géométriques, à savoir le premier et les 2, 3, 4, 6, 10, 11, 12, 13, 14 et 15. Et trois sont arithmétiques, à savoir les 7, 8 et 9. Le cinquième est commun aux deux, lequel est sur la proportion et la proportionnalité, laquelle proportion et proportionnalité se rencontre tant dans le nombre que dans la mesure.

6. Il est encore certain que ces sciences ou disciplines mathématiques sont nourrices et mères des sciences musicales. Car, avec les nombres et leurs propriétés de proportion et de proportionnalité, nous connaissons que la proportion double, dite des praticiens octave, est composée d'une sesquialtère et d'une sesquialtère. Et de même nous savons que la sesquialtère est composée de deux tons et d'un demi-ton mineur, et la sesquialtère est composée de trois tons et d'un demi-ton mineur, d'où il est manifeste que la susdite double ou octave est composée de cinq tons et de deux demi-tons mineurs, c'est-à-dire de six tons moins un coma, et de même nous savons que le ton est formé de plus de huit comas et de moins de neuf. Nous savons encore, par la rigueur de ces disciplines, qu'il est impossible de diviser le ton, et toute autre sur-particulière, rationnellement, en deux parties égales, ce que démontre notre Euclide, dans la huitième proposition du huitième livre (2).

7. Par ailleurs, il n'y a pas d'autre cause à la pénurie actuelle de bons et excellents astronomes, que l'absence des dites disciplines. Car personne ne peut se vanter de bien comprendre l'Almageste de Ptolémée et Jean de Monte Reggio sans la connaissance d'Euclide et quoiqu'on lise au premier chapitre de l'Ecclésiaste : *Altitudinem cæli et latitudinem terræ, et profundum abissi quis dimensus est ?* Cependant, telle est la vertu de ces sciences ou disciplines que par le moyen des proportions non seulement nos anciens ont connu quelle était la rotondité de toute la terre et son diamètre, ainsi que ceux des autres éléments, mais ils ont encore connu la grandeur du Soleil, de la Lune, des étoiles fixes ou errantes et la révolution de leur ciel, comme démontre Ptolémée dans l'Almageste, et Alphonse dans ses tables (3).

8. Ces mêmes sciences ou disciplines ouvrent la voie à l'Art judiciaire, dit Astrologie, et de même à la Pyromancie, l'Hydromancie, la Géomancie, la Nécromancie et autres sortilèges, comme ont écrit Isidore, Cieco d'Ascoli et de même Cornelius Agrippa au second De Occulta Philosophia (4).

9. Que dirons-nous de la Géographie ? Ptolémée et tous les autres excellents Géographes ne démontrent-ils pas combien lui sont nécessaires le nombre, la mesure, la proportion et la proportionnalité ? Quand on a dûment proportionné les degrés de leur longueur et de leur largeur, on réduit dans une petite carte toutes les fameuses provinces, villes, châteaux, monts, fleuves, îles, péninsules et tous autres sites maritimes.

(2) Il s'agit en réalité d'une scholie de CAMPANUS à la prop. 8, que dans sa traduction italienne TARTAGLIA annexe à la démonstration. Tout ce point 6 de l'exposé, résume le petit ouvrage attribué à EUCLIDE sur la Division du Canon.

(3) Les *Tables Alphonsines*, ALFONSO X EL SABIO, roi de Castille de 1252 à 1284. On lui doit l'idée et la direction de la grande collection des *Libros del saber de astronomia*, vers 1277, et des *Tables alfonsines*. Préparées par YUDAH BEN MOSES et ISAAC IBN SID, elles étaient rédigées en Castillan. Les traductions latines furent très utilisées par les Astronomes. Les premières éditions imprimées ont paru à Venise en 1483 et 1492.

(4) ISIDORE DE SÉVILLE ; CIECO D'ASCOLI, astrologue et médecin à Florence, brûlé vif en 1327. CORNELIUS AGRIPPA, AGRIPPA DE NETTESHEIM, philosophe et médecin, né à Cologne en 1486, mort à Grenoble en 1534 (?).

10. *Qu'elles soient nécessaires à la Chorographie, c'est-à-dire à la technique de mettre correctement en dessin un site particulier, ou un pays, et de même le plan d'une ville, nous l'avons démontré au cinquième livre de nos Quesiti et inventioni diverse (5).*

11. *En considérant encore soigneusement la science de la Perspective et en l'étudiant, on trouvera sans aucun doute qu'elle ne serait rien si la Géométrie, comme étant sa mère, ne s'y accommodait. Non seulement notre Euclide le vérifie dans sa Catoptrique et sa Perspective, et semblablement l'Archevêque Jean de Cantorbéry (6), mais plus abondamment Vitellion, ce grand Perspectif, lequel prouve et démontre chacune de ses propositions au moyen de celles d'Euclide.*

12. *Que ces sciences ou disciplines soient nécessaires à l'art de la Peinture, je ne veux pas le prouver particulièrement, car il me suffit qu'Alberto Duro (7), excellent Peintre de notre temps, dans son œuvre, non seulement le confesse et affirme, mais encore le démontre actuellement aux sens.*

13. *Combien elles sont opportunes à l'art de l'horloger, c'est-à-dire à la composition, description ou construction des horloges, tant horizontales que murales, Sebastiano Mustero (8) le rend manifeste, non seulement en pratique, mais encore en Théorie.*

14. *De ces mêmes disciplines, germe et prend naissance la science des Poids, comme le démontre nettement Giordano (9) dans le livre de Ponderibus, celui-là que nous corrigeons et approuvons au cinquième livre de nos Quesiti e inventioni diverse, science avec laquelle Aristote, dans ses Questions mécaniques, assigne la cause de toutes les inventions ingénieuses de la Mécanique.*

15. *Tant est générale la vertu ou puissance de ces disciplines pleines de certitude qu'Archimède de Syracuse, par leur étude et au moyen de ses engins mécaniques, défendit un temps la cité de Syracuse contre*

(5) Dictionnaire Mathématique d'OZANAM, éd. de 1691 : La Chorographie est la description d'une Région, ou d'une grande partie de la Terre à l'égard du Ciel, comme de la France, de l'Allemagne, etc.

La Topographie est la description d'un petit lieu de la Terre, sans avoir égard à la situation de ses parties par rapport au Ciel : comme de Paris avec ses environs, de Fontainebleau, etc...

(6) JOHN PECKHAM ou PISANUS (1242-1292), Archevêque de Cantorbéry. *Perspectiva Communis*, imprimée à Venise, 1504, Nuremberg, 1542, Paris, 1556, Cologne, 1592.

(7) ALBERT DÜRER (1471-1528) s'initia aux nouvelles méthodes de perspective des peintres italiens durant un séjour à Venise de 1504 à 1507. Par son écrit, *Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit in Linien, ebenen, und gantzen Corporen*, Nurnberg, 1525, éditions latines : *Institutiones Geometricae*, Paris, 1532, etc., est un précurseur de la Géométrie Descriptive. — Voir R. TATON, L'Œuvre Scientifique de Monge.

(8) SÉBASTIEN MUNSTER, Ingelheim, Palatinat, 1489-Bâle, 1552, professa l'Hébreu et la Théologie. Dans son œuvre considérable se trouve une *Horologigraphia*, 1531. — Il s'agit ici de cadrans solaires.

(9) JORDANUS NEMORARIUS.

les attaques de Marco Marcello, consul romain, par où il acquit un renom immortel.

16. Par leur moyen se font divers modèles variés, et se fabriquent des ponts quasi-impossibles à la nature.

17. Si nous considérons encore par la pensée et si nous regardons toutes les sortes de machines anciennes et modernes, et les instruments belliqueux tant offensifs que défensifs, comme sont les bastions, remparts, bricoles, trébuchets, catapultes, scorpions, balistes, béliers, tortues [helepoles] (10), comme démontre Vitruve au livre dix, et semblablement Végète, Valturio et Léon-Battista degli Alberti (11), nous voyons toujours que leurs proportions sont formées et construites par la puissance des nombres et des mesures.

18. Quant à nos nouvelles inventions, sur le tir des modernes machines balistiques, dites du vulgaire artilleries, je ne veux pas répéter ce que j'ai dit en d'autres lieux et partiellement publié ; qu'il me suffise de dire qu'avec l'aide de ces sciences, j'en ai trouvé la majeure partie sans aucune expérience, ni pratique.

19. De même, par leur vertu, nous avons encore pu mettre à exécution tous les modes [décrits par Végète et Frontin Valturio (12)] utilisés par nos anciens pour ordonner les armées en bataille sous des formes diverses et variées, c'est-à-dire en forme carrée d'hommes, ou de terrain, et de même la manière de former le coin, les ciseaux, la scie, le rhombe, la forme circulaire et la lunaire, lesquelles choses sont à l'époque actuelle presque complètement perdues.

20. Quelle aide et de quel soutien sont les dites disciplines pour l'Architecture, Vitruve Pollion le rend manifeste dans sa préface.

21. Ces sciences ou disciplines, non seulement aiguïssent l'ingéniosité de l'homme, et le rendent apte à pouvoir pénétrer facilement dans toute autre science. Mais encore elles le préparent à pouvoir discourir ou cheminer longuement vers la Sagesse ; aussi Boece Severino veut-il que ces sciences ou disciplines soient le vrai chemin pour monter jusqu'à

(10) Sorte de Béliers plus puissants.

(11) *L'Epitome rei militaris*, en 4 livres, de FLAVIUS VEGETIUS RENATUS, est du IV^e siècle de notre ère.

ROBERT VALTURIO vivait au XV^e siècle. Son ouvrage en 12 livres, *De re militari*, a été imprimé à Vérone en 1472, et réimprimé plusieurs fois. Il fut traduit en français en 1555.

LEON BATTISTA ALBERTI (Gênes, 1404, Rome, 1472), artiste, théoricien de la perspective, mathématicien.

(12) Il s'agit probablement de l'ouvrage de FRONTIN (40-103), *Strategematon*, que VALTURIO a peut-être commenté dans de *Re Militari*. Cet ouvrage de FRONTIN fut en effet très apprécié à la Renaissance. SEXTUS JULIUS FRONTINUS, ingénieur remarquable, *curator aquarum* en 97, est surtout célèbre pour ses deux livres, *De aquaeductibus urbi Romae*.

elle, et conclut finalement que sans elles il est impossible de pouvoir correctement philosopher.

22. Cela même est confirmé par Platon père et maître de la philosophie, lequel voulait qu'aucun élève n'entrât dans son école, s'il n'était d'abord bien expert en Géométrie.

23. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner si de nombreux passages de la Physique, de la Métaphysique, des Analitiques Posteriores d'Aristote, et de même certains du Ciel et du Monde, paraissent obscurs et difficiles à nos modernes, car cela ne provient en grande partie que de leur ignorance des susdites sciences.

24. Elles-mêmes donnent l'existence à la Pratique spéculative de l'Algèbre et Almucabala, dite vulgairement Règle de la Chose ou Grand Art, et cela, non seulement Maumeth, fils de Moïse, Arabe (premier inventeur de cette science), mais encore frère Luca dal Borgo, Michel Stifelo (13), et Léonardo Pisano, le rendent géométriquement manifeste.

25. Le divin Platon étant un jour interrogé sur la cause qui faisait que l'homme, dans le genre animal, était appelé raisonnable, et tous les autres étaient dits irraisonnables et brutes, il répondit que c'était parce que l'homme sait compter, et les bêtes non. Si donc une aussi petite partie de ces disciplines qu'est la numération, pour être commune à tous les hommes, les rend différents des bêtes brutes, et leur donne le privilège de ce nom de raisonnables, il est clair que plus nous apprendrons de ces disciplines, plus nous serons raisonnables, et plus éloignés des bêtes brutes.

26. De ces mêmes disciplines se forme une partie de la Dialectique, à savoir la pratique et la façon d'argumenter dans les discussions, de confondre l'adversaire, et de conclure par des vues variées, ce qui est manifeste lorsqu'on en poursuit l'étude.

27. Mieux, Bartolo de Sasso-Ferrato (14) (fameux légiste), en utilisant les figures géométriques dans sa Tyberina, montre non seulement être très instruit dans les Mathématiques, mais encore que la Géométrie est nécessaire au Droit.

28. Que dirons-nous de la Théologie sacrée, guide et escorte de notre salut ? Le Révérend Cardinal Nicolas de Cues ne démontre-t-il pas, dans l'avant-dernière partie de son œuvre, qu'elle ne peut être communiquée à nos intelligences sans Géométrie ? Cette partie est intitulée *Complementum Theologicum figuratum in Complementis Mathematicis*.

(13) MICHEL STIFEL (1487 ?-1567), grand algébriste allemand, dont l'*Arithmetica integra*, Nuremberg, 1544, a eu une influence considérable.

(14) BARTOLE, né à Sasso-Ferrato (Ombrie) vers 1313. Enseigne le droit à Pise et à Pérouse. Mort en 1356. Son œuvre est imprimée à Venise, en 10 vol. in-folio, 1559.

29. Mais cette science et discipline géométrique est d'une telle nécessité, que non seulement nous autres, hommes mortels, l'utilisons dans nos choses commensurables, comme il a été dit plusieurs fois ; mais encore, le Dieu Tout-Puissant, qui est la mesure de toutes choses, ne s'est pas dirigé sans elle, en formant les parties du corps humain. Et les Dessinateurs et Peintres excellents se conforment à sa règle, utilisant son compas pour chaque membre. Les Architectes accomplis, comme le montre Vitruve Pollion au chapitre premier de son troisième livre, cherchent avec le plus grand soin à proportionner les maisons et tous les édifices publics et privés à la ressemblance de ce corps humain, pour être celui-ci, comme il est dit, fabriqué avec les justes mesures, par le Grand Architecte.

30. Finalement, on reconnaît encore la noblesse, l'excellence et la hauteur des dites disciplines, par la grande célébrité et les grands noms de ceux qui ont travaillé à leur ornement et à leur étude, comme Mercure Trimegiste (15), philosophe, prêtre et roi d'Egypte, et de même Pythagore, Platon, Plotin (16), Aristote, Averroes (17), Hippocrate, notre Euclide, Ptolémée, Archimède de Syracuse, Apollonius de Perge, Jordanus, Vitruve Architecte. Et bien d'autres que par brièveté, et pour ne pas vous tenir trop longtemps, je passe sous silence. Il me suffit, en conclusion, qu'on ne trouve personne de grande renommée en aucune matière sans connaissances mathématiques.

31. J'ai voulu prononcer ces quelques paroles au début de mon cours afin que vous sachiez que la présente doctrine n'est pas chose vile, ni mécanique, et ne doit pas être méprisée, mais est chose très digne, que chacun doit apprécier, sans laquelle toute autre science est imparfaite. Nous nous arrêterons ici pour aujourd'hui. Demain, nous donnerons les définitions de quelques termes appartenant à notre matière.

32. Enfin, pour ne pas vous paraître ingrat pour l'excellente attention, que, par humanité, vous m'avez prêtée, je vous rends une grâce infinie.

(15) Le Dieu Egyptien *Thoth*, ou *Hermes Trismegistos*, jusqu'à qui la littérature alchimiste fait remonter la création de toute science.

(16) *PLOTINOS DE LYKOPOLIS* (environ 200-270), philosophe néo-platonicien.

(17) *AVERROES* (*Abû al-Walîd Muḥammad ben Aḥmad ben Muḥammad Ibn Rušd*). Né à Cordoue en 1126, mort à Marrakech en 1198. Philosophe, médecin, astronome, dont l'influence fut considérable sur les philosophes hébreux et chrétiens.

STRUCTURES ALGÈBRIQUES *

1. INTRODUCTION

Depuis quelques décades, nous assistons à une véritable invasion des Mathématiques par l'Algèbre. En particulier, sous l'impulsion d'Emmy NOETHER (dans les années 1920 et suivantes), les mathématiciens ont pris de plus en plus nettement conscience du rôle joué par les notions fondamentales de l'Algèbre dans presque toutes les branches de la Mathématique ; et, mieux, de la possibilité d'utiliser au profit de l'analyse, par exemple, des théorèmes plus ou moins profonds d'algèbre pure. Cette utilisation, certes, n'est pas nouvelle (qu'on songe notamment au développement de la théorie de Lie à la fin du siècle dernier) ; ce qui est surtout nouveau, c'est la conscience qu'on en a.

Avec l'algébrisation actuelle des Mathématiques, nul chercheur ne peut plus se permettre d'ignorer un outil devenu indispensable : l'Algèbre moderne. En retour, l'Algèbre profite de cette situation : car la Topologie, l'Analyse lui posent constamment de nouveaux problèmes et suscitent des développements qu'on aurait à peine pu concevoir il y a quelque vingt ans.

L'enseignement des Mathématiques dans les classes secondaires doit se ressentir d'une telle évolution, tout au moins dans les classes terminales ; moins sans doute dans le sens d'une modification des programmes que dans la façon de présenter des théories classiques, en tenant compte d'une nouvelle optique. C'est sans doute la raison pour laquelle la Société Mathématique a pris l'initiative de cette série de conférences.

Mais qu'est-ce que l'Algèbre ? Il n'est pas facile, en quelques mots, d'en donner une définition qui la situe d'une manière précise par rapport au reste des Mathématiques. Certes, à chaque époque du développement scientifique, chaque mathématicien possède le sentiment assez net de ce qui est de l'Algèbre et de ce qui n'en est pas. Mais toute définition explicite court le risque de devenir périmée ou trop étroite au cours de l'évolution ultérieure de la science : en effet, il est impossible d'assigner à l'avance à l'Algèbre des limites à ne pas franchir (pas plus du reste qu'à toute branche de la science), car on ne connaît pas de moyen de prévoir les domaines nouveaux qui s'offriront à l'exploration.

En gros, on peut dire qu'en Algèbre, on étudie certaines *opérations* sur les éléments d'un ou plusieurs ensembles, sans avoir égard à la nature des éléments eux-mêmes. Tout ce que l'on aura pu dire d'un ensemble muni de certaines opérations pourra s'appliquer aussi bien à tout autre ensemble, pourvu qu'il lui soit *isomorphe* (on reviendra plus loin sur la notion d'isomorphie). Cette conception de l'Algèbre est celle qui prévaut depuis un siècle peut-être ; cependant, elle risque d'être dépass-

(*) Cette Conférence, prononcée le 9 février 1956 à l'Institut Henri-Poincaré, a ouvert le cycle de conférences sur l'Algèbre, organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs de Mathématiques.

sée aujourd'hui, à la suite de progrès tout récents qui obligeront sans doute à élargir un cadre devenu trop étroit. Nous nous bornerons ici à illustrer sur quelques exemples la conception que j'appellerai classique, laissant à d'autres le soin, dans quelques dizaines d'années, de vous exposer les points de vue nouveaux qu'ouvrent certains développements actuels.

2. LA NOTION D'OPÉRATION

On rencontre cette notion dès les débuts de l'Arithmétique. Une opération est une loi qui, à deux éléments a et b , associe un élément c (qu'on appelle parfois la somme de a et de b , parfois leur produit, d'autres fois encore d'un autre nom). Au fond, il n'y a là rien d'autre que la notion de *fonction* : étant donnés trois ensembles A , B , C , on considère l'ensemble des couples (a, b) formés d'un élément $a \in A$ et d'un élément $b \in B$, ensemble qu'on appelle l'*ensemble-produit* de A et de B , et qu'on note $A \times B$; une opération sera alors simplement une fonction définie sur l'ensemble $A \times B$, et prenant ses valeurs dans l'ensemble C ; c'est, comme on dit aussi, une *application* de $A \times B$ dans C .

Un cas important est celui où les trois ensembles A , B , C sont les mêmes : on considère donc une application $f : A \times A \rightarrow A$. Une telle fonction s'appelle une *loi de composition interne*. Lorsque l'on suppose simplement $B = C$, on obtient ce qu'on appelle une *loi de composition externe* : c'est une application f de $A \times B$ dans B . Dans ce cas, chaque élément $a \in A$ définit une application de B dans B , à savoir celle qui à b associe $f(a, b)$; or, une application de B dans B , c'est ce qu'on appelle aussi une *transformation* de B . Ainsi, une loi externe associe à chaque élément de A une transformation de B ; l'ensemble A prend alors parfois le nom de *domaine d'opérateurs*. Et l'on dit que A *opère dans* B .

Voici des exemples de lois de composition : l'addition des nombres entiers associe à un couple d'entiers un entier ; de même, la multiplication des entiers ; ce sont des lois de composition internes dans l'ensemble des entiers. On peut en dire autant de l'addition et de la multiplication des fractions, ou des nombres réels, ou des nombres complexes, ou des polynômes à une ou plusieurs variables. En Géométrie élémentaire, on connaît la notion de *déplacement* : on sait que si on effectue successivement un déplacement a et un déplacement b , ce qu'on obtient est un déplacement c , qu'on appelle parfois le produit (ou le composé) de a et b ; ainsi, à un couple (a, b) de déplacements, on associe un déplacement c . Ceci est une loi de composition dans l'ensemble des déplacements.

Voici d'autres exemples : soient X et Y deux sous-ensembles d'un même ensemble E ; leur *intersection* $X \cap Y$ se compose des éléments de E qui appartiennent à la fois à X et à Y ; leur *réunion* $X \cup Y$ se compose des éléments de E qui appartiennent à l'un au moins des ensembles X et Y ; la loi qui, au couple (X, Y) , associe l'intersection $X \cap Y$, est une loi de composition interne dans l'ensemble A de tous les sous-ensembles de E ; de même, la loi qui, à X et Y , associe $X \cap Y$, est une loi de composition dans A .

Dans un autre ordre d'idées, considérons deux entiers a et b , et leur plus grand commun diviseur $d(a, b)$; l'application $(a, b) \rightarrow d(a, b)$ est une loi de composition dans l'ensemble des entiers. De même pour le plus petit commun multiple.

Donnons encore l'exemple des *mots*. Soit un ensemble E ; on appelle « mot » une suite finie $uvwxy$ d'éléments de E , distincts ou non ; il y a même un mot « vide », celui défini par une suite vide. Etant donnés deux mots $uvwxy$ et $pqrs$, on définit un nouveau mot en les écrivant à la suite l'un de l'autre : $uvwxyzpqrs$. Ceci est une loi de composition interne dans l'ensemble A des mots formés d'éléments de E . Si on compose un mot uvw avec le mot vide, on retrouve le même mot uvw .

Tous les exemples précédents sont des exemples de lois *internes*. Voici maintenant deux exemples de lois *externes*. Considérons, dans le plan (ou dans l'espace) de la géométrie élémentaire, un point O ; à chaque nombre réel t , associons l'homothétie de centre O et de rapport t : c'est une transformation. Nous avons ici une loi de composition externe dont le domaine d'opérateurs A est l'ensemble des nombres réels t , et pour lequel l'ensemble B est le plan (ou l'espace) de la géométrie.

Considérons encore les « figures » de l'espace (par exemple, les triangles) ; un déplacement transforme une figure dans une figure. Donc, si nous prenons pour A l'ensemble des déplacements, et pour B l'ensemble des figures de l'espace, nous avons une loi de composition externe dont le domaine d'opérateurs est l'ensemble des déplacements.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons presque exclusivement à des lois de composition internes.

3. PROPRIÉTÉS DIVERSES POUR UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE

Associativité : Une loi de composition, que nous noterons multiplicativement par exemple (ab) désignant le composé de a et b , est *associative* si, quels que soient a, b, c , on a $(ab)c = a(bc)$.

Toutes les lois internes que nous avons données en exemple sont associatives. Il est facile de donner un exemple de loi non associative : à chaque couple (a, b) de nombres réels, associons leur demi-somme $(a + b)/2$; on vérifie tout de suite que cette loi n'est pas associative.

Si une loi est associative, on peut définir le composé d'une suite finie quelconque d'éléments $a_1, \dots, a_n$, et démontrer un théorème général d'associativité : par exemple, on a :

$$(ab)(cdef)g = (abc)(de)(fg).$$

Commutativité : Une loi interne (notée multiplicativement pour fixer les idées) est *commutative* si l'on a : $ab = ba$, quels que soient a et b . Dans les exemples donnés plus haut, l'addition et la multiplication des nombres réels ou complexes, des polynômes, sont des lois commutatives ; de même, l'opération de réunion et d'intersection des ensembles est commutative ; la loi qui, à deux entiers, associe leur p.g.c.d. ou leur p.p.c.m., est commutative. Par contre, la composition des déplacements en géométrie n'est pas commutative ; la composition des « mots » n'est pas commutative.

Ainsi, il existe des lois associatives et non commutatives. Il y a

aussi des lois commutatives qui ne sont pas associatives, par exemple celle qui associe à deux nombres réels a et b leur demi-somme.

Lorsqu'une loi est à la fois commutative et associative, on peut définir le composé de n'importe quelle famille d'éléments, sans qu'il soit besoin de préciser dans quel ordre on les range.

Élément neutre : Étant donné une loi interne (notée multiplicativement pour fixer les idées), on appelle élément neutre un élément e tel que $ae = a$, $ea = a$ pour tout élément a . Il n'est pas certain qu'un tel élément existe ; mais, *s'il en existe un, il est unique* : car si e et e' sont deux éléments neutres, on a : $e = ee' = e'$.

Éléments inverses : Considérons une loi interne avec élément neutre e . On dit que a et b sont *inverses* si : $ab = ba = e$.

Si a possède au moins un inverse, et si la loi est associative, alors l'inverse de a est *unique* ; car si b et b' sont des inverses de a , on a :

$$b = be = b(ab') = (ba)b' = eb' = b'.$$

Lorsque la loi considérée est notée additivement (ce qui n'a lieu d'habitude que lorsque cette loi est commutative), on note généralement 0 (zéro) l'élément neutre, s'il existe ; on a donc :

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Dans ce cas, on dit « opposé » au lieu d'« inverse » : b et a sont opposés si $a + b = 0$.

4. STRUCTURE ALGÈBRIQUE DÉFINIE PAR UNE OU PLUSIEURS LOIS DE COMPOSITION

Soit E un ensemble. Une structure algébrique est définie sur E par la donnée d'une ou de plusieurs lois de composition. On donne un même nom à toutes les structures algébriques définies (sur n'importe quel ensemble) par un même nombre de lois satisfaisant à certaines conditions explicitement énumérées. Montrons cela sur des exemples.

Groupe : Une structure de groupe, sur un ensemble E , est définie par la donnée d'une seule loi de composition, qu'on astreint à satisfaire aux conditions (ou « axiomes ») qui vont être énumérées :

Axiome 1 : la loi est associative ;

Axiome 2 : il existe un élément neutre ;

Axiome 3 : chaque élément possède un inverse.

On dit alors que E , muni de cette loi de composition, est un *groupe*.

Par exemple, l'addition des entiers (positifs, négatifs ou nuls) est une loi de groupe ; il en est de même de l'addition des nombres réels, des nombres complexes, de l'ensemble des déplacements muni de la loi de composition qui a été explicitée plus haut. La multiplication des nombres réels ou complexes différents de zéro est une loi de groupe ; par contre, la multiplication des entiers positifs n'est pas une loi de groupe, car un entier n'a pas en général d'inverse. La loi d'intersection ou de réunion des ensembles n'est pas une loi de groupe ; de même, la loi de composition des « mots » n'est pas une loi de groupe.

Un groupe est dit commutatif (ou *abélien*) si sa loi de composition est commutative.

Anneau : Une structure d'anneau, sur un ensemble A , est définie par la donnée de deux lois de composition, appelées *addition* et *multiplication*, ces lois étant astreintes aux axiomes suivants :

Axiome 1 : l'addition est une loi de groupe abélien (on note 0 son élément neutre) ;

Axiome 2 : la multiplication est associative et possède un élément neutre, noté 1 (et appelé élément-unité) ; on suppose $1 \neq 0$;

Axiome 3 : la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition :

$$a(b + c) = (ab) + (ac), \quad (b + c)a = (ba) + (ca).$$

Il s'ensuit facilement que le produit de tout élément par 0 est égal à 0 ; donc, 0 n'a pas d'inverse (pour la multiplication).

Un anneau est dit commutatif si sa multiplication est commutative.

Exemples d'anneaux : les entiers ≥ 0 et ≤ 0 ; les nombres réels ou complexes ; les polynômes à coefficients réels ou complexes.

Corps : Un corps est un anneau A qui satisfait à la condition supplémentaire suivante : tout élément $\neq 0$ possède un inverse pour la multiplication. Il revient au même de dire que l'ensemble des éléments non nuls de A forme un groupe pour la multiplication.

Exemples : les entiers ne forment pas un corps, les polynômes ne forment pas un corps ; les nombres rationnels, les nombres réels, les nombres complexes forment un corps.

Bien entendu, il existe toutes sortes de groupes, d'anneaux et de corps. Rappelons que GALOIS a déterminé tous les *corps finis*, c'est-à-dire ayant un nombre fini d'éléments ; le plus simple est le corps ayant seulement deux éléments, 0 et 1 , avec une addition et une multiplication évidentes (on a notamment $1 + 1 = 0$). Pour chaque nombre premier p et chaque exposant entier $f \geq 1$, il y a un corps ayant exactement p^f éléments, et un tel corps est *unique* ; si on note n l'entier p^f , tous les éléments x du corps satisfont à l'équation : $x^n - x = 0$ (ce qui donne l'exemple d'un polynôme à coefficients non nuls et qui s'annule pour toutes les valeurs de la variable ; ce polynôme est de degré n , et la variable ne peut prendre que n valeurs distinctes, puisqu'il n'y a que n éléments dans le corps). Si un entier n n'est pas de la forme p^f , il n'y a pas de corps ayant n éléments.

5. LA NOTION D'ISOMORPHISME

On vient de dire qu'il existe un seul corps ayant p^f éléments. Ce n'est pas tout à fait correct ; ce qui est vrai, c'est que si deux corps ont le même nombre d'éléments, ils sont *isomorphes*. Cela signifie qu'il existe entre les éléments de ces deux corps une correspondance biunivoque qui respecte l'addition et respecte aussi la multiplication. D'une manière générale, on a une notion d'*isomorphisme* pour deux ensembles E et E' munis chacun d'une structure algébrique ; par exemple, un

isomorphisme entre deux groupes est une correspondance biunivoque entre les éléments de ces groupes, qui respecte la loi de composition de chacun d'eux ; c'est ainsi que la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ (où a est un nombre > 0 donné, $\neq 1$) est un isomorphisme du groupe additif des nombres réels sur le groupe multiplicatif des nombres positifs $\neq 0$, puisque $f(x + y) = f(x)f(y)$. On a de même la notion d'isomorphisme de deux anneaux A et A' : c'est une correspondance biunivoque qui respecte l'addition, la multiplication, et met en correspondance les éléments unité de A et de A' .

En fait, les êtres algébriques ne sont étudiés qu'à un isomorphisme près. C'est dans la nature des choses, puisqu'on ne s'intéresse qu'aux propriétés des opérations étudiées. La question ne se pose pas de savoir si, lorsque deux mathématiciens parlent de l'anneau des entiers, ils parlent des mêmes êtres : car les propriétés qu'ils reconnaissent à cet anneau ont pour conséquence que deux anneaux jouissant de ces propriétés sont nécessairement isomorphes.

6. CONSTRUCTION DE NOUVEAUX ÊTRES ALGÈBRIQUES

A PARTIR D'ÊTRES DÉJÀ DONNÉS : EXEMPLE DE L'ANNEAU DES POLYNÔMES

Nous supposons donné un anneau commutatif A (par exemple, le corps des nombres réels, ou l'anneau des entiers, etc...). On va définir un nouvel anneau, appelé l'anneau des polynômes (formels), à une lettre X . Ses éléments s'écrivent symboliquement $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$, où les a_n sont

des éléments de A , nuls sauf un nombre fini ; la notation X^n n'a pour le moment aucune signification, c'est une écriture formelle. Ce qui définit un « polynôme », c'est donc simplement la suite des « coefficients » $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, tous nuls sauf un nombre fini. On définit, dans l'ensemble des polynômes, une addition : la « somme » du polynôme

$\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ et du polynôme $\sum_{n \geq 0} b_n X^n$ est, par définition, le polynôme

$\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) X^n$, dont les coefficients sont les sommes $a_n + b_n$. Il est

immédiat que cette addition est commutative et associative, possède un élément neutre 0 (le polynôme dont tous les coefficients sont nuls), et que tout polynôme possède un « opposé » ; autrement dit, l'ensemble des polynômes est un groupe pour l'addition.

Appelons *monôme de degré p* un polynôme $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ dont tous les coefficients a_n sont nuls pour $n \neq p$; on peut convenir d'écrire simplement $a_p X^p$ pour désigner un tel monôme. On voit que tout polynôme

$\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ est la somme de ses monômes $a_n X^n$ des différents degrés. Ceci justifie à *posteriori* la notation employée.

La *multiplication* des polynômes se définit comme suit : on définit d'abord le produit d'un monôme $a X^p$ et d'un monôme $b X^q$ comme le monôme $\binom{a \ b}{p \ q} X^{p+q}$ dont le degré est la somme $p + q$ des degrés des deux monômes, et dont le coefficient $\binom{a \ b}{p \ q}$ est le produit des coefficients a et b . Pour définir le produit de deux polynômes $\sum_n a_n X^n$ et $\sum_n b_n X^n$, on décompose chacun d'eux en ses monômes des différents degrés, on fait les produits de ces monômes deux à deux, et on ajoute tous ces produits ; ceci donne la formule suivante : le produit est le polynôme $\sum_{n=0} c_n X^n$, avec $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.

On vérifie que, muni de l'addition et de la multiplication ainsi définies, l'ensemble $A[X]$ des polynômes en X est un anneau commutatif, qui a pour élément unité le monôme de degré 0 dont le coefficient est 1. Ainsi se trouve défini l'anneau des polynômes à une lettre X (et à coefficients dans un anneau commutatif donné A).

X est un pur symbole. Mais on va pouvoir lui substituer des « valeurs ». Etant donné un élément $x \in A$, convenons d'associer à chaque monôme $a_n X^n$ l'élément $a_n x^n$ de A (produit du coefficient a_n par la puissance n -ième de x) ; puis associons à un polynôme $\sum_n a_n X^n$ la somme des $a_n x^n$. On trouve ainsi un élément de A , qu'on appelle la « valeur » du polynôme quand on substitue à X la valeur x . Lorsque x varie dans A , la « valeur » d'un polynôme donné est une *fonction* de x , à valeurs dans A ; ainsi, *chaque polynôme définit une fonction*, mais il faut se garder de confondre dès l'abord le polynôme formel et la fonction qu'il définit.

Choisissons maintenant un élément $\alpha \in A$, et, à chaque polynôme $\sum_n a_n X^n$, associons sa valeur $\sum_n a_n \alpha^n \in A$. On obtient une application f de l'anneau $A[X]$ dans l'anneau A ; cette application associe à la somme de deux polynômes la somme de leurs valeurs, et au produit de deux polynômes le produit de leurs valeurs ; on a précisément choisi une définition de l'addition et de la multiplication des polynômes formels, de manière à assurer cette propriété de l'application f . Ainsi, si u et v désignent deux polynômes, on a :

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \quad f(uv) = f(u)f(v), \quad f(1) = 1.$$

Chaque fois qu'on a deux anneaux B et A et une application f de B dans A qui satisfait à ces conditions, on dit que f est un *homomorphisme* de B dans A . La notion d'homomorphisme peut se généraliser à d'autres espèces de structures algébriques ; en gros, un homomorphisme est une application qui respecte les lois de composition.

Pour en revenir aux polynômes, on peut généraliser ce qui précède. Soit A' un anneau contenant A ; on peut substituer à la lettre X une valeur x appartenant à A' (et non plus seulement à A) ; alors, chaque polynôme $\sum_n a_n X^n$ prend une valeur $\sum_n a_n x^n$ qui est un élément de A' . Ceci définit encore un homomorphisme de l'anneau $A[X]$ dans l'anneau A' , pourvu toutefois que x commute avec les éléments de A , c'est-à-dire que l'on ait $ax = xa$ pour tout $a \in A$. Exemple : supposons que A soit le corps des nombres réels ; soit E l'espace vectoriel formé des vecteurs d'origine O dans l'espace à trois dimensions ; les applications linéaires de E dans E forment un anneau (on sait définir la somme de deux applications linéaires ; et on prend comme produit de deux applications linéaires celle qu'on obtient en les composant) ; cet anneau A' contient l'anneau A de toutes les homothéties de centre O , anneau qu'on identifie au corps des scalaires. Cela étant, si, dans un polynôme $\sum_n a_n X^n$ à coefficients réels, on substitue à X une application linéaire x de E dans E , on trouve $\sum_n a_n x^n$ qui est encore une application linéaire de E dans E . Cette loi qui à chaque polynôme associe une application linéaire est d'une grande importance dans l'étude des transformations linéaires d'un espace vectoriel. On voit sur cet exemple l'intérêt que l'on retire de la notion de polynôme formel, qui permet de substituer à la « variable » X des êtres autres que les éléments de l'anneau des coefficients. Un autre exemple serait fourni par la substitution à X d'opérateurs différentiels, tels qu'ils se présentent dans la théorie des équations différentielles linéaires.

7. STRUCTURE-QUOTIENT

Dans la construction de nouvelles structures algébriques à partir de structures déjà connues (par exemple : construction du corps des nombres rationnels à partir de l'anneau des entiers, ou du corps des nombres complexes à partir du corps des nombres réels), on a souvent besoin de la notion de *relation d'équivalence*. On dit qu'une relation $R(x, y)$ entre éléments x et y d'un ensemble E est une relation d'équivalence si :

- 1° $R(x, x)$ est toujours vraie (« réflexivité ») ;
- 2° $R(x, y)$ entraîne $R(y, x)$ (« symétrie ») ;
- 3° $R(x, y)$ et $R(y, z)$ entraînent $R(x, z)$ (« transitivité »).

Voici des exemples de relation d'équivalence qui se présentent en Algèbre :

1) Soit m un entier donné ; la relation entre deux entiers x et y , qui s'écrit :

la différence $x - y$ est divisible par m ,
est une relation d'équivalence.

2) Plus généralement, soit G un groupe noté multiplicativement (on note x^{-1} l'inverse d'un élément x) ; soit H un sous-groupe de G , c'est-à-dire un sous-ensemble qui contient l'élément neutre e , et est tel

que $x \in H$ et $y \in H$ entraînent $x^{-1}y \in H$. La relation $x^{-1}y \in H$ entre éléments x et y de G est une relation d'équivalence dans G . Le cas de l'exemple 1 est celui où G est le groupe additif des entiers ≥ 0 ou ≤ 0 , et où H est le sous-groupe formé des multiples de m (on utilise alors la notation additive pour la loi de composition).

3) Soient (a, b) et (a', b') deux couples d'entiers tels que $b \neq 0$, $b' \neq 0$. Convenons de dire qu'ils sont équivalents si $ab' = a'b$. Il faut vérifier que ceci est bien une relation d'équivalence ; il est évident que cette relation est réflexive et symétrique, et tout revient à montrer qu'elle est transitive. Soient donc trois couples (a, b) , (a', b') , (a'', b'') , tels que $ab' = a'b$, $a'b'' = a''b'$; il s'agit de prouver que $ab'' = a''b$. Or, multiplions les deux membres de $ab' = a'b$ par b'' , et tenons compte de l'associativité et de la commutativité de la multiplication : $ab'b'' = a'bb'' = ba'b''$, ce qui, d'après $a'b'' = a''b'$, est égal à $ba''b'$. Ainsi, $ab'b'' = ba''b'$, d'où $b'(ab'' - a''b) = 0$, et comme $b' \neq 0$ et qu'un produit ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul, on conclut bien $ab'' = a''b$.

On observera que la démonstration précédente serait valable, plus généralement, si, au lieu de considérer des couples d'entiers, on prenait des couples (a, b) d'éléments d'un anneau A , avec $b \neq 0$, pourvu que A satisfasse aux conditions suivantes : A est un anneau commutatif tel qu'un produit uv ne puisse être nul sans que u ou v soit nul ; un tel anneau s'appelle un *anneau d'intégrité*.

Exemple d'anneau d'intégrité : Soit A un anneau commutatif, et soit $A[X]$ l'anneau des polynômes à une lettre X . Soient P et Q deux polynômes $\neq 0$, c'est-à-dire dont les coefficients ne sont pas tous nuls ; on a donc $P = a_p X^p + a_{p+1} X^{p+1} + \dots, a_p \neq 0$, et $Q = b_q X^q + b_{q+1} X^{q+1} + \dots, b_q \neq 0$. Alors, le produit PQ est la somme du monôme $\binom{a_p b_q}{p \quad q} X^{p+q}$ et de monômes de degré $> p + q$. Si l'anneau A des coefficients est un anneau d'intégrité (par exemple si A est un corps), le produit $a_p b_q$ est $\neq 0$, donc le polynôme produit PQ n'est pas nul, et on a ainsi prouvé que l'anneau $A[X]$ est aussi un anneau d'intégrité. On peut alors définir une relation d'équivalence entre couples (P, Q) et (P', Q') de polynômes (avec $Q \neq 0, Q' \neq 0$), c'est-à-dire finalement l'équivalence des fractions rationnelles, et ceci sans faire appel à la notion de fonction, mais d'une manière purement formelle qui ramène l'équivalence des fractions rationnelles à l'identité formelle des polynômes.

Revenons maintenant à la théorie générale des relations d'équivalence. Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E ; si x est un élément de E , on appelle *classe* de x l'ensemble de tous les éléments équivalents à x . Les conditions 1°, 2° et 3° montrent que x appartient à la classe de x , et que si x et y sont deux éléments de E , les classes de x et de y sont ou bien identiques, ou bien sans élément commun. On note E/R l'ensemble de toutes les classes, qu'on appelle aussi l'ensemble-quo-

tient de E par la relation d'équivalence R ; on dit aussi que E/R s'obtient en *identifiant* les éléments de E équivalents suivant R .

Reprenons alors les exemples 1), 2), 3) de relations d'équivalence donnés ci-dessus. Dans le cas 1), une classe d'équivalence s'appelle un *entier modulo m* ; l'ensemble-quotient s'appelle l'ensemble des entiers modulo m . Dans le cas 2), une classe d'équivalence s'appelle une classe de G suivant le sous-groupe H ; la classe d'un $x \in G$ se compose des éléments xu , où u parcourt H ; on la note xH . Dans le cas 3), une classe d'équivalence s'appelle précisément une *fraction* (ou « fraction rationnelle » si A est l'anneau des polynômes).

8. LOI DE COMPOSITION COMPATIBLE AVEC UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE

Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E ; supposons donnée une loi de composition interne dans E (notée multiplicativement pour fixer les idées). Si la classe d'équivalence du composé xy ne dépend que des classes de x et de y , on obtient une loi de composition dans l'ensemble E/R des classes.

Exemples : Soient x et y deux entiers, et considérons leur somme $x + y$; la classe de $x + y$ modulo m ne change pas si on remplace x par un x' tel que $x - x'$ soit divisible par m ; elle ne change pas non plus si on remplace y par un y' tel que $y - y'$ soit divisible par m . D'où l'*addition des entiers modulo m* ; c'est une loi de composition commutative et associative dans l'ensemble des entiers modulo m . De même, la classe du produit xy ne dépend que des classes de x et de y ; d'où la *multiplication des entiers modulo m* . On vérifie tout de suite que les entiers modulo m forment un *anneau commutatif*. C'est d'ailleurs un *corps* si l'entier m est *premier*.

Soit maintenant à définir la *multiplication des fractions* : dans l'ensemble des couples (a, b) tels que $b \neq 0$, considérons la loi de composition $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$; elle est commutative et associative, et admet pour élément neutre $(1, 1)$. On vérifie que la classe d'équivalence de (aa', bb') ne dépend que des classes de (a, b) et de (a', b') ; d'où le produit de deux fractions. La multiplication des fractions est donc commutative et associative ; de plus, chaque élément qui n'est pas dans la classe de $(0, 1)$ possède un inverse, car le produit de (a, b) et (b, a) , pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$, est équivalent à $(1, 1)$.

Remarque : Il est facile de définir l'*addition des fractions*, en utilisant une loi de composition, dans l'ensemble des couples (a, b) , qui n'est définie entre (a, b) et (a', b') que si $b = b'$, à savoir : $(a, b) + (a', b) = (a + a', b)$. Cette loi passe au quotient. Alors, muni de l'addition et de la multiplication, l'ensemble des fractions de A est un anneau, et même un *corps* Q ; de plus, si à chaque élément $a \in A$, on associe la fraction, classe de $(a, 1)$, on constate qu'on obtient un isomorphisme f de l'anneau A sur un sous-anneau du corps Q . On dit que f permet d'identifier A à un sous-anneau du corps Q (par exemple, on identifie l'anneau des entiers à un sous-anneau du corps des nombres rationnels, et l'anneau des polynômes en X à un sous-anneau du corps des fractions rationnelles en X).

Dernier exemple : groupe fondamental (ou « groupe de Poincaré ») *d'un espace topologique X.*

Nous ne définirons pas ce qu'on appelle espace topologique, et nous nous contenterons de penser à quelques exemples : espace euclidien ordinaire, surface d'une sphère, surface d'un tore, disque muni de trous, etc...

Précisons la notion de *chemin*, ou *d'arc de courbe*, dans un espace X : c'est défini par la donnée d'une application continue $t \rightarrow f(t)$ du segment $[0,1]$ de la droite numérique, dans l'espace X . On notera que $f(t)$ peut prendre la même valeur pour des valeurs distinctes du « paramètre » t ; cela ne nous gêne pas.

Choisissons désormais un point M de l'espace X ; un *lacet* d'origine M est, par définition, un chemin $t \rightarrow f(t)$ tel que $f(0) = M$ et $f(1) = M$. Dans l'ensemble L des lacets d'origine M , définissons une loi de composition : étant donné un lacet f et un lacet g , nous définissons le lacet h par la condition :

$h(t) = f(2t)$ pour $0 \leq t \leq 1/2$, $h(t) = g(2t - 1)$ pour $1/2 \leq t \leq 1$; autrement dit, on parcourt le lacet f pendant la première moitié du « temps », puis le lacet g pendant la seconde moitié du temps. Cette loi *n'est pas associative*, car si on a trois lacets f, g, h , le lacet $(fg)h$ s'obtient en parcourant f pendant le premier quart du temps, g pendant le second quart, et h pendant la deuxième moitié ; tandis que le lacet $f(gh)$ s'obtient en parcourant f pendant la première moitié du temps, g pendant le troisième quart, et h pendant le dernier quart.

Introduisons maintenant une *relation d'équivalence* R dans l'ensemble L des lacets : un lacet f sera dit équivalent à un lacet g (ou *homotope* à g) s'il existe une *déformation continue* de f dans g , au moyen d'une famille continue de lacets d'origine M ; d'une façon précise, cela signifie qu'il existe une fonction continue $F(t, u)$ de deux variables t et u variant dans $[0,1]$, telle que :

$$F(t, 0) = f(t), \quad F(t, 1) = g(t), \quad F(0, u) = F(1, u) = M.$$

On vérifie que c'est bien une relation d'équivalence, et que la composition des lacets est compatible avec cette relation ; ainsi, dans l'ensemble L/R des *classes de lacets*, on obtient une loi de composition, qui cette fois est associative. On peut montrer que c'est une *loi de groupe*, dont l'élément neutre e est la classe d'équivalence du lacet f tel que $f(t) = M$ pour $0 \leq t \leq 1$ (lacet qui consiste à rester au point M sans en bouger) ; si on a un lacet f , le lacet f' défini par : $f'(t) = f(1 - t)$ (même lacet, mais parcouru « en sens inverse »), jouit de la propriété suivante : les classes de f et de f' sont *inverses* dans le groupe L/R des classes de lacets.

Le groupe qu'on vient de définir (groupe fondamental de l'espace X au point M) joue un rôle important en Topologie, et aussi en théorie des fonctions (fonctions automorphes). On voit sur ce dernier exemple comment les notions de l'Algèbre s'introduisent dans d'autres domaines des Mathématiques.

Henri CARTAN,
Professeur à la Sorbonne.

PHYSIQUE : SOURCE CONCRÈTE DE LA MATHÉMATIQUE

Notre Société (1) a bien voulu me charger de vous donner le point de vue d'un professeur de physique sur le passage du concret à l'abstrait dans l'enseignement secondaire.

La question est fort controversée, nous a-t-on dit. Pour avoir eu des contacts assez nombreux avec des collègues mathématiciens, je me permettrai d'ajouter ceci :

La question est fort controversée entre professeurs de Mathématiques ; elle l'est beaucoup moins entre professeurs de physique. L'explication de ce phénomène ? A mon avis, la voici : le plus souvent, nos collègues mathématiciens placent la discussion sur le plan pédagogique, alors que les physiciens motivent le recours à l'expérience, avant tout, par la nature même de leur discipline.

Les raisons de ceux-ci sont plus contraignantes que les raisons de ceux-là.

En science naturelle, quand bien même le recours à l'expérience directe n'entraînerait aucun avantage pédagogique, il se justifierait d'abord par des raisons scientifiques.

Il m'arrive d'être déçu par l'indifférence des élèves pour certaines expériences de laboratoire, et, quelquefois, je suis même obligé de combattre la confusion qu'elles provoquent dans leur esprit. La loi de Boyle-Mariotte, expliquée au tableau noir, dans laquelle le gaz est enfermé dans un cylindre à piston plongé dans un thermostat, se comprend mieux que sur l'appareil réel, moins simple, où l'attention se disperse sur des détails expérimentaux. Il est plus facile de commenter un schéma que d'apprendre à voir et à concevoir dans une expérience.

Mais la physique est une science expérimentale ! Il en résulte que la réalisation effective de l'expérience est indispensable au même titre que le schéma de principe, parce que, sans elle, l'exposé perdrait son caractère scientifique.

Par contre, beaucoup de professeurs de Mathématiques qui s'attachent à l'intuition sont poussés par des raisons pédagogiques ; ils éprouvent l'efficacité des moyens intuitifs dans des circonstances particulières. Or, la pédagogie offre des voies diverses qui mènent à des résultats également valables. Les méthodes intuitives ont fait leurs preuves, certes ; cependant, d'un point de vue purement didactique, je n'oserais condamner un cours de Mathématiques sans matériel intuitif, mais défendu par un maître de talent.

La discussion sur ce point n'est pas près d'aboutir, parce qu'on déplace le centre de gravité du problème en restant sur le terrain de la pédagogie pure.

En Mathématiques, le recours au concret ne se justifie-t-il pas aussi et avant tout par des raisons scientifiques ?

Pour pouvoir répondre par l'affirmative, il faudrait admettre que la

(1) La Société Belge de Professeurs de Mathématiques, au Congrès de laquelle, à Berchem, fut prononcée cette conférence. Voir les autres conférences de Berchem dans le Bulletin 175.

Mathématique plonge ses racines dans le monde sensible et qu'elle élabore ses concepts à partir des êtres concrets, en suivant une voie comparable à celle qui mène du fait brut à la théorie physique. Je n'ai pas l'intention de m'arrêter longtemps à ce problème philosophique, mais j'avoue que je ne vois pas la différence entre la manière dont le mathématicien forme les concepts de nombre, de ligne, de surface, et celle dont le physicien arrive aux concepts de machine simple (sans aucun frottement), de pendule simple (avec un point matériel et un fil sans masse), de rayon lumineux (indépendant du faisceau et parfaitement rectiligne), de système isolé (sans aucun échange d'énergie avec le monde extérieur), de gaz parfait (sans cohésion, ni covolume), de mouvement uniforme (où l'espace varie linéairement par rapport à un temps abstrait).

Le pendule du physicien comporte, comme la surface du géomètre, un passage à la limite.

Il en va de la Mathématique comme des autres sciences. Son stimulant principal réside dans les besoins des hommes. A l'origine, elle a pour but de reconnaître les limites des terres, de mesurer la capacité des récipients, de développer des rapports commerciaux, d'évaluer le temps. Elle a sa source dans la réalité du monde extérieur et dans l'action que nous exerçons sur elle. Mais, pour établir des relations entre les êtres réels, il faut les débarrasser de ce qui est étranger à ces relations : ainsi se forme le concept ; ainsi la connaissance s'élève du niveau sensible au niveau rationnel. Et le fait que la Mathématique se prolonge par de pures créations de l'esprit, comme les nombres complexes, n'enlève rien à ses origines concrètes.

Le concept ne se forme pas autrement en physique, ni en toute autre science. Je ne comprends pas la légende, qui fait d'ailleurs le plus grand tort à notre enseignement, selon laquelle la Mathématique occuperait une place privilégiée parmi les sciences. Il n'y a pas de « miracle mathématique », ou, si miracle il y a, il est propre à toutes les sciences.

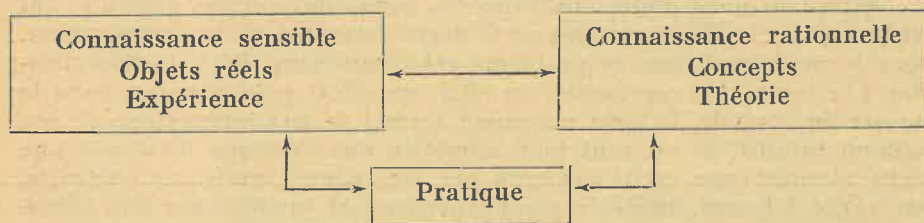
Lorsqu'on oublie les sources concrètes d'une théorie scientifique — et ne les oublions-nous pas quelquefois ? — on finit par détacher la loi abstraite de la réalité et par la considérer comme un ordre strict, indépendant du réel, auquel le monde extérieur aurait à se conformer. Avouons-le, tel est le sentiment de la plupart de nos élèves d'athénée et même de ceux qui ont terminé leurs classes. Un fait d'expérience ne concorde-t-il pas avec la théorie ? Ou bien on incrimine le fait qui aurait dû se plier à la loi, ou bien on perd toute confiance dans la théorie. Nos élèves ne se disent pas que *la théorie est sortie d'un domaine limité de la réalité et qu'elle n'est pas nécessairement valable en dehors de ce domaine.* Ne pensez-vous pas que nous sommes un peu responsables de cette situation ? Par exemple, lorsque nous déclarons, sans autre précaution, que toute mesure comporte une erreur, nous nous entendons rétorquer : « Alors, toutes ces lois physiques sont fausses », ou encore : « Nous étudions des théories qui ne sont pas vraies. » N'utilisons-nous pas trop à la légère l'expression « erreur expérimentale » ?

Dire que la théorie est utile parce qu'elle s'applique à la réalité ne fait que reculer le problème, car, *s'il était vrai que la Mathématique est un produit de la pensée humaine, indépendante de toute expérience,*

pourquoi alors s'adapterait-elle à la réalité avec une approximation aussi satisfaisante ? « La raison humaine, demande Einstein, serait-elle donc capable, sans avoir recours à l'expérience, de découvrir par son activité seule les propriétés des objets réels ? »

C'est là tout le problème de la connaissance, pour lequel des générations de penseurs ont proposé des dizaines de solutions. Il ne nous appartient pas d'en défendre une plutôt qu'une autre, mais il est intéressant de noter ceci : dans son enseignement, chacun de nous représente, d'une manière plus ou moins nette et plus ou moins consciente, une de ces tendances philosophiques.

En effet, nous avons reconnu, très schématiquement, trois jalons dans le processus de la connaissance (*) : au niveau sensible, la connaissance se base sur l'observation et l'expérience des objets réels ; au niveau rationnel, la pensée élabore des concepts et édifie des théories ; au niveau pratique, la connaissance abstraite se vérifie, se précise au contact des êtres réels.



Isoler le moment de la connaissance sensible en donnant à l'expérience une importance exclusive, c'est être empirique. C'est au fond cela qu'on a reproché aux méthodes dites nouvelles, en disant qu'elles « primarisent » l'enseignement secondaire.

Isoler le moment de la pratique en omettant d'imbriquer les connaissances dans une théorie cohérente, c'est être pragmatique.

Isoler le moment rationnel, en niant les sources concrètes de la connaissance, revient à s'adonner à une forme d'idéalisme mathématique.

Remarquez que rien ne nous oblige à nous enfermer dans des doctrines aussi exclusives. L'athénée n'est-il pas le lieu où *se rencontrent* le concret et l'abstrait ? C'est pourquoi j'essaie, pour ma part, d'axer mon enseignement sur les rapports qui existent entre ces deux aspects du savoir, de montrer le rôle de l'expérience, de la pratique et du langage dans le cheminement de la pensée qui mène de la sensation au concept.

Le passage du concret à l'abstrait est précisément une des pierres d'achoppement du secondaire. Tant que nous nous en tenons à la leçon de choses, nos élèves se sentent à l'aise ; tant que nous exposons adroitement une théorie bien délimitée, ils nous suivent encore ; mais ils trébuchent dès que nous tentons de passer de l'une à l'autre. La difficulté est-elle due à la psychologie de l'adolescent qui n'a que trop tendance à cloisonner, ou à l'enseignement qu'il a subi ? Je ne sais. Mais une chose

(*) GARAUDY : « Théorie matérialiste de la connaissance ».

me paraît certaine : pour y remédier, *il est nécessaire d'établir la coordination entre les disciplines*. Il serait paradoxal d'engager les élèves à abattre des cloisons que nous maintenons nous-mêmes dans notre enseignement. *Rendre cette coordination possible par une organisation adéquate serait, à mon avis, une tâche bien plus importante que la révision des programmes.*

En quoi un cours de physique peut-il favoriser la prise de conscience des rapports qui unissent le concret à l'abstrait ?

Je n'insiste pas sur les liens entre la théorie et la pratique, qui sont trop immédiats pour qu'il soit possible de les négliger. Aucun professeur de Mathématiques ne manque l'occasion de montrer que la vitesse et l'accélération s'expriment par des dérivées, et, à ce propos, de faire quelques exercices de cinématique. Tous les professeurs de physique profitent des précieux instruments fournis par la trigonométrie, l'algèbre, et même l'analyse, depuis que le calcul intégral figure au programme de la section latin-sciences.

Attardons-nous plutôt aux rapports, sans doute moins évidents, qui existent entre le degré sensible et le degré rationnel de la connaissance. Pour le mathématicien, ce problème est étroitement lié à l'axiomatisation. L'axiomatique représente, en effet, un effort pour séparer, dans la mesure du possible, l'aspect purement formel de la connaissance de son contenu intuitif. Si on veut bien admettre que l'axiome n'est pas une vérité absolue (une vérité évidente par elle-même), mais, au contraire, une vérité à l'essai, suggérée par l'expérience et justifiée par son efficacité, alors on ne doutera plus que les cours de physique et de mathématiques doivent conduire à une même synthèse. Un enseignement adéquat de la physique peut notamment montrer que l'axiome n'est pas une chose inutile parce que trop évidente, mais au contraire une vérité qu'il est opportun et nécessaire de dire.

Que faire pour en arriver là ? La chose n'est pas simple, car il ne peut être question de bouleverser les programmes. Certes, on peut présenter la matière avec le souci d'éclairer les rapports concret-abstrait et, pour cela, nouer des relations aussi étroites que possible entre les cours de physique et de mathématiques. Mais est-ce bien suffisant ? N'ai-je pas lu quelque part que l'enseignement moyen a l'ambition de former l'esprit de synthèse, de favoriser une prise de conscience ? A-t-on prévu, pour cela, la leçon de synthèse, je veux dire la leçon qui déborde largement du cours, réunissant des informations glanées un peu partout, la leçon qui interprète des notions étudiées au cours des années précédentes en les présentant dans un autre ordre et dans un autre esprit ? Je crois savoir que le professeur, harcelé par les programmes et par la préparation aux examens, dispose rarement du temps nécessaire. Malgré cela, j'organise, de temps en temps, une de ces synthèses dans les classes de Seconde et de Première. Le mot « synthèse » est trop fort, car il s'agit plutôt de conversations à bâtons rompus. Je propose un thème très large. Nous nous mettons d'accord sur la répartition du travail. Une documentation est fournie aux élèves ; ils retournent aussi à leurs notes des années précédentes. Je les engage à reconsidérer certains problèmes ; je leur demande notamment leur avis sur l'ordre dans lequel la matière

leur a été présentée. Nous discutons le sujet pendant deux ou trois leçons et, à cette occasion, des notions nouvelles sont enseignées d'autorité. Le plus souvent, nous finissons par nous mettre d'accord sur une structure qui nous paraît assez cohérente. Inutile de dire que je ne peux me permettre pareille initiative qu'une ou, au maximum, deux fois par an. Avant d'aborder les sujets, je tiens à dire que tous les élèves ne profitent pas de ces leçons. Les moins bons, incapables de renouveler leur optique des choses, n'en saisissent pas le sens. En revanche, les bons élèves et même les moyens coopèrent avec sympathie.

Je voudrais vous entretenir de quelques thèmes qui ont été effectivement traités et dont voici les titres : Vecteurs et espaces vectoriels ; — Les notions de temps et de mouvement uniforme ; — Le corps solide et la géométrie euclidienne ; — Les lois générales des gaz et leurs propriétés géométriques ; — Le domaine de validité de l'optique géométrique.

Dans ces études, j'ai principalement poursuivi les buts suivants :

1° Conduire les élèves de l'objet réel au concept, de l'expérience à la théorie. Montrer que le chemin suivi n'est pas direct et bien tracé ; qu'il n'est pas non plus à sens unique ; que la théorie, issue du concret, retourne à l'expérience pour la guider, préciser ses données et lui préparer de nouvelles découvertes.

2° Rendre les élèves conscients des limites de validité d'une théorie. Leur faire comprendre qu'une théorie, sortie d'un domaine limité de la réalité, ne s'applique pas nécessairement avec succès en dehors de ce domaine. Eviter ainsi leur désarroi lorsqu'un fait s'avère inexplicable par un schéma déterminé.

3° Rendre possible une ébauche d'axiomatique et préparer une notion fondamentale de la Mathématique : celle du groupe de transformation.

VECTEURS ET ESPACES VECTORIELS

Le plus souvent, sans doute sous prétexte de partir du concret, on introduit la notion de vecteur à propos de l'étude des forces. On montre qu'une force est caractérisée par son point d'application, sa direction, son sens et sa grandeur et qu'elle peut, dès lors, se représenter par un symbole appelé vecteur. Ainsi, la force est le premier vecteur qui se présente aux élèves, et c'est bien malheureux. D'abord, le caractère concret de la force est illusoire. Ensuite, on arrive à ce résultat que, pour la plupart des élèves, le vecteur continue à s'identifier à une force pendant longtemps.

J'ai demandé à mes élèves de Troisième s'ils connaissent d'autres grandeurs que les forces pouvant se représenter par des vecteurs, et d'indiquer pourquoi. Voici les réponses qui reviennent le plus souvent : le son, la lumière. Le son, par exemple, est caractérisé par : la radio, qui est le point origine ; l'intensité du son correspond à la grandeur du vecteur ; la direction et le sens sont donnés par la radio qui émet et l'oreille qui reçoit. Ces réponses ne sont pas à condamner. A leur manière, les élèves décèlent dans le fait complexe ce qui, selon eux, caractérise un vecteur. Il leur suffit de trouver un sens et une direction à un phéno-

mène pour l'identifier à un vecteur. C'est bien la preuve que la notion de vecteur doit être reprise plus tard. Elle se précisera, notamment, lorsque la loi d'addition sera connue.

Ici encore, on part presque toujours de la règle de composition des forces, établie à la suite d'une expérience directe en laboratoire. Que faut-il penser de ce procédé ? Lorsque les mesures sont assez précises et surtout assez nombreuses, on peut, quelquefois, amener les élèves à redécouvrir une loi par des questions adroitement posées. Encore ne faut-il pas abuser d'une certaine pédagogie de la redécouverte qui consiste à placer la réponse, à peine dissimulée, dans les questions. Il est d'ailleurs assez rare que, dans la discussion, le professeur ne se laisse pas guider par la connaissance préalable du résultat. « Expérience d'abord », d'accord. Mais cela ne signifie pas nécessairement « expérience de laboratoire d'abord ». Je serais étonné qu'on puisse découvrir directement la règle du parallélogramme des forces à la suite d'une expérience comme celle-ci : des masses de poids connus sont suspendues aux extrémités d'un fil qui passe dans la gorge de deux poulies ; on équilibre le système par un troisième poids appliqué entre les deux poulies ; la dernière force est égale et de sens contraire à la résultante des deux premières. Ou bien : une pièce de carton est sollicitée par deux ressorts tendus étalonnés, le système est tenu en équilibre par un troisième ressort exerçant une force opposée à la résultante des deux autres.

La voie suivante me paraît assez naturelle :

Introduire d'abord le segment orienté sur la droite. L'illustrer par l'exemple le plus immédiat : le déplacement ou, plus exactement, la translation.

Ensuite, représenter le vecteur dans le plan ; depuis la Quatrième et même avant, les élèves savent déterminer un point par ses deux coordonnées dans un système de référence xOy ; montrer que, d'une manière analogue, le vecteur est déterminé si on se donne deux vecteurs composants sur les axes.

Changer le système d'axes et en arriver à la conclusion que la décomposition du vecteur peut se faire d'une infinité de manières, mais que, en revanche, à deux composantes données ne correspond qu'une seule résultante. Remarquer que la résultante est la même quel que soit l'ordre dans lequel on porte les composantes ; un élève marchant dans la classe constate qu'il arrive au même point en effectuant $\vec{a}$ suivie de $\vec{b}$ ou $\vec{b}$ suivie de $\vec{a}$, en effectuant la résultante de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ suivie de $\vec{c}$ ou d'abord $\vec{a}$ suivie de la résultante de $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

En conclure que l'addition vectorielle jouit des propriétés suivantes :

1° Etant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, il existe un seul vecteur : $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

2° L'addition vectorielle est commutative : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

3° Elle est associative : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Nous avons fait un premier pas dans la voie de l'axiomatique.

Passons au cours de physique. Après avoir constaté qu'une force est déterminée par son support, son sens et son intensité, ne pas dire d'emblée que la force est un vecteur ; la représenter par une flèche, c'est tout.

S'appuyer sur un exemple familier : un chaland est mû par une machine qui exerce une force dans la direction du canal. On obtiendrait le même effet en remplaçant la machine par deux chevaux tirant de chacune des rives. Donc, l'ensemble des deux forces concourantes est équivalent, au point de vue de ses effets, à une force unique.

Poser alors nettement la question ? Les forces se composeraient-elles comme des vecteurs ? Ici, l'expérience de laboratoire peut nous aider.

Engager les élèves à faire les mesures avec minutie, leur laissant le soin d'étalonner eux-mêmes les ressorts. Leur faire tracer, sur le même dessin, la résultante tirée de l'expérience et la résultante obtenue par la règle du parallélogramme. Les deux résultantes ne coïncident pas, ni en grandeur, ni en direction. Discuter les causes possibles des divergences.

En conclure que l'expérience suggère la loi du parallélogramme, mais que sa précision n'est pas suffisante pour pouvoir affirmer avec certitude que les forces s'additionnent comme des vecteurs. Toutefois, nous avons confiance dans la loi du parallélogramme *parce que ses conséquences sont vérifiées par l'expérience.* La vérification d'une loi par l'ensemble de ses conséquences est pratiquée partout en physique. Elle est une raison de confiance plus profonde que la vérification directe. La loi de Newton en gravitation, les lois de Coulomb en électricité et en magnétisme, toutes les lois d'actions élémentaires de l'électro-magnétisme se vérifient de cette manière. Le fait que Le Verrier ait pu faire des prévisions extraordinaires, grâce à la mécanique céleste issue de la loi de l'attraction universelle, est une confirmation plus éclatante de cette loi que l'expérience directe de Cavendish. C'est là un argument qui convaincra les élèves.

La suite du cours de physique donne d'autres exemples de vecteurs — vitesse, accélération, champ — dont on reconnaîtra le caractère vectoriel à leurs lois d'addition. Bref, *le vecteur se reconnaît aux opérations qu'on peut lui appliquer.*

De nouvelles opérations sont définies par leurs propriétés :

Le *produit scalaire*, introduit à propos du travail et du flux, est commutatif, associatif et distributif.

Le *produit vectoriel*, illustré par l'action d'un champ magnétique sur un courant, est anticommutatif.

En rhétorique, on résout quelques exercices simples sur les courants alternatifs par le moyen du calcul vectoriel et par celui des nombres complexes. C'est l'occasion de montrer que le calcul des nombres complexes et la géométrie des vecteurs ont une base axiomatique commune. L'addition des nombres complexes a, en effet, les mêmes propriétés que l'addition vectorielle.

La notion de vecteur prend ainsi un sens plus large et, en même temps, plus abstrait (*).

(*) M. Ronsmans traitait ensuite des notions de temps et de mouvement uniforme. Nous nous réservons de publier cette partie particulièrement importante de son exposé dans un prochain Bulletin.

LE CORPS SOLIDE ET LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

La mesure des longueurs se réduit à un certain nombre d'opérations étalons, tout au moins pour des objets directement accessibles. Appliquée à un objet déformable, la mesure ainsi définie n'aurait évidemment aucun sens.

Pour qu'il soit possible d'avoir confiance dans les résultats de nos mesures, nous devons croire d'abord à l'invariance de l'étalon et de l'objet à mesurer.

Une analyse plus poussée nous montre pourtant qu'un corps ne peut jamais être rigoureusement invariable. Nous savons que l'écorce terrestre n'est pas complètement rigide ; elle se déforme sous l'influence de l'attraction de la Lune et du Soleil, comme les océans, sous cette même influence, produisent les marées (marées de l'écorce terrestre). Les objets qui nous paraissent solides et immobiles, lorsque nous les regardons en gros, ne le sont que d'une manière approchée : les pièces métalliques se dilatent lorsque la température s'élève, le bois se déforme en desséchant.

A l'échelle très grande ou très petite, l'immobilité s'évanouit complètement. Les astres sont en mouvement ininterrompu. On a cru que certaines étoiles, dites fixes, conservent les mêmes positions les unes par rapport aux autres ; mais les astronomes ont constaté, par des observations minutieuses, que ces étoiles se déplacent légèrement. L'immobilité n'existe pas davantage dans l'infiniment petit, car les atomes qui constituent la matière sont en vibration continue.

Dès lors, il n'est pas étonnant que le choix d'un étalon de longueur soit une chose difficile et qu'il ait reçu, au cours de l'histoire, des corrections successives.

D'abord, ce furent des objets supposés invariables, par exemple des coudées en bronze, que l'on déplaçait le long de l'objet à mesurer. Au XVIII^e siècle, lorsqu'on eut fait des mesures satisfaisantes du méridien terrestre, on eut l'idée de choisir le globe lui-même comme étalon. Le mètre fut défini comme étant la 40.000.000^e partie du méridien.

Mais, chaque fois que notre connaissance de la forme du globe terrestre se trouva améliorée, il aurait fallu corriger l'étalon de longueur. On sacrifia l'« étalon Terre » et on décida que le mètre serait la longueur définie à 0° par un prototype en platine. Or, la température de 0° ne peut se déterminer avec une précision absolue. En outre, la précision du mètre dépend de l'épaisseur et de la régularité des traits gravés sur le prototype. Autant dire que le mètre ne peut être défini avec une rigueur absolue ; sa précision ne dépasse pas la 7^e décimale.

Cette discussion aura convaincu les élèves qu'il ne peut être question de mesures absolument justes tant qu'elles s'appliquent à des objets réels.

Nous avons discuté le sens de la mesure des longueurs directement accessibles. Les objets que nous pouvons directement atteindre sont limités, du côté des petites dimensions, par l'atome, et, du côté des grandes dimensions, par le globe terrestre. Pourtant, les astronomes mesurent les distances entre les astres ; les physiciens déterminent certaines longueurs attachées aux atomes (longueurs d'onde). C'est dire que la science franchit chaque jour le domaine directement accessible. Mais, ici, la mesure implique des opérations d'un autre ordre. Pour mesurer la distance entre

deux points très éloignés, l'homme utilise des lunettes et recourt à l'opération de la visée. *Pour avoir confiance dans sa mesure, il doit admettre que la lumière se propage en ligne droite.* Pour mesurer des longueurs d'onde, il accepte cette fois que la lumière a un autre mode de propagation que la ligne droite.

Quoi qu'il en soit : la notion de mesure repose toujours sur une théorie physique (solide parfait, rayon lumineux), dont il suffirait de modifier une seule loi pour changer toute la signification de nos mesures.

Nous dirons avec Bauer que *notre conception même de l'étendue et de sa mesure sont fondées sur toute la physique et se modifient avec elle. On voit à quel point physique et géométrie sont étroitement liées.*

La géométrie réalise le passage du corps réel au corps solide parfait. Etymologiquement, la géométrie a pour objet la mesure de la terre. Les inondations périodiques du Nil obligeaient les Egyptiens à cadastrer les terres pour pouvoir reconstituer les limites des champs après les crues. Pour cela, il fallait pouvoir disposer de certains repères fixes. Donc, pour avoir confiance dans cette opération, il fallait croire que les dimensions de la terre ne changent pas. La question de savoir si l'invariance des dimensions de la terre est rigoureuse ou seulement approchée ne se posait pas aux Egyptiens. Ils se contentaient de résultats approximatifs et considéraient comme vraies des propriétés qui étaient plus ou moins bien vérifiées par la pratique. Leur géométrie était *empirique*.

Les connaissances des Egyptiens s'introduisirent en Grèce, mais les Grecs ne se contentaient plus d'une géométrie exclusivement pratique : ils avaient le souci de la démonstration.

Or, ils ne pouvaient raisonner avec rigueur que sur des corps parfaitement solides. Pour s'en convaincre, on se rappellera les démonstrations des cas d'égalité des triangles : on soumet l'un des triangles à une translation suivie d'une rotation et, éventuellement, d'un retournement, afin de le superposer à l'autre. En procédant de la sorte, on a admis, peut-être sans y penser, que le triangle ne change pas au cours des déplacements ; autrement dit, *on a admis que le triangle est rigoureusement un corps solide*, sans quoi le raisonnement ne serait pas valable.

Ici, nous avons franchi un pas. Le corps solide parfait n'existe pas en réalité, nous le savons ; c'est une création de l'esprit. Accepter qu'il existe, c'est formuler un *postulat*. En même temps, *la géométrie entre dans le domaine de la théorie.*

Concluons : *L'existence d'objets, ni trop grands, ni trop petits, a suffi aux hommes pour créer une géométrie empirique. Puis, elle a suggéré l'idée de substituer aux objets réels des objets idéaux, parfaitement solides, sur lesquels il est possible de raisonner avec rigueur.*

Insistons sur le fait que le corps solide parfait nous est suggéré par l'observation assez grossière d'objets réels, ni trop grands, ni trop petits. Cela nous permettra de montrer que l'application de la géométrie euclidienne est locale. Nous ne devons pas être étonnés que l'ingénieur applique journallement, sans être déçu, des propriétés de la géométrie euclidienne à des constructions à l'échelle ordinaire. Mais, quand les physiciens tenteront d'appliquer cette même géométrie à la physique des

atomes, nous ne serons pas tellement étonnés si les résultats d'expérience ne confirment pas leurs prévisions théoriques.

Nous introduisons *le groupe des déplacements* à propos du corps solide. Nous rappelons certaines notions étudiées en Cinquième : les figures obtenues par projection cylindrique d'un parallélogramme sur des écrans diversement orientés sont tous des parallélogrammes. Autrement dit, lorsque l'écran se déplace, d'une manière quelconque, les distances et les angles varient, mais les parallèles restent parallèles. Les mêmes résultats peuvent s'obtenir avec des figures articulées qui sont construites à l'aide de lattes et de chevilles et dans lesquelles les longueurs variables sont représentées par des fils élastiques. Ce procédé permet d'engendrer toute la famille du parallélogramme, comportant le rectangle, le losange et le carré, par des transformations qui conservent le parallélisme, mais non les longueurs, ni les angles. On profite de ce rappel pour grouper les propriétés affines des premiers livres d'Euclide et pour dire explicitement que ces propriétés ne comportent aucune notion d'angle ou de distance.

Après cela, nous reprenons nos figures déformables. Si nous voulons conserver les propriétés « diagonales égales et côtés égaux », nous devons serrer les articulations, faire une figure rigide. Nous ne pouvons plus alors que *déplacer* la figure. Les déplacements (translations, rotations, symétries) conservent, en effet, la distance entre deux points quelconques de la figure.

La notion de translation permet de passer d'une manière naturelle du corps solide au concept du point matériel. Pour étudier l'effet d'une force sur un solide, il est utile de décomposer le mouvement en une translation suivie d'une rotation. Pour obtenir une translation pure, on imaginera le corps transpercé de deux tiges parallèles fixes, le long desquelles le corps peut glisser. On voit immédiatement que *tous les points subissent le même déplacement. Quelle que soit l'étendue du solide*, on sera entièrement renseigné sur son mouvement de translation si on connaît le mouvement *d'un seul de ses points*. Aussi, pour simplifier l'étude d'une translation, *on dépouille le solide de ce qui est étranger à cette translation : son étendue*. Mais l'opération ne peut pas affecter le rapport de la force à l'accélération ; on ne peut donc pas priver le solide de sa masse. On imagine donc un point pourvu de masse, qui n'a évidemment pas d'existence réelle, mais dont l'étude nous informe sur le mouvement de translation des corps qui ont une étendue.

LES LOIS GÉNÉRALES DES GAZ ET LEURS PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

Le comportement des gaz est décrit par les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac : à température constante $p.v = C^*$, à volume constant $v = v_0 (1 + \alpha t)$, à pression constante $p = p_0 (1 + \alpha t)$.

Tout professeur de physique signale à ses élèves que ces lois sont obtenues en extrapolant les propriétés des gaz réels, mais qu'elles ne s'appliquent en toute rigueur qu'à un gaz idéal. A ce sujet, les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac ne doivent cependant pas occuper une place à part.

Ouvrons un manuel de physique pris au hasard ; nous y lisons à peu près ceci :

« La loi de Boyle-Mariotte n'est pas une loi rigoureuse. Les écarts que présentent les gaz vis-à-vis de cette loi sont d'autant plus faibles que les pressions sont plus petites. *La loi de Boyle-Mariotte est une loi limite*, c'est-à-dire qu'elle n'est absolument rigoureuse que pour un gaz idéal appelé gaz parfait. Elle s'applique cependant avec une approximation suffisante aux gaz réels. »

Qu'est-ce donc qu'une « loi limite » ? Y a-t-il des lois qui sont « lois limites », et d'autres qui ne le sont pas ? Y a-t-il des lois qui sont « absolument rigoureuses » pour des phénomènes réels ? Je ne vois pas, pour ma part, une différence de nature entre la loi des gaz parfaits et toutes les autres lois physiques ; toutes comportent une extrapolation ; le fait que la loi de Boyle-Mariotte ait un domaine d'application assez réduit ne justifie pas la qualification de « loi limite ». Cette appellation ne dénote-t-elle pas une mauvaise compréhension des rapports entre la réalité et la théorie ?

Quoi qu'il en soit, la loi de Boyle-Mariotte illustre bien le fait qu'une loi a une validité limitée. L'avantage ici, c'est que, même sans données expérimentales directes, les élèves ont l'impression que cette loi ne peut être valable en toute circonstance. Une courte discussion les convaincra de ce que la réduction du volume d'un gaz ne peut se poursuivre indéfiniment. J'ai posé la question suivante aux élèves de Seconde : prenons un litre de gaz sous une atmosphère ; élevons la pression d'une à deux atmosphères : le volume se divise par deux ; réduisons le volume à 1 cm^3 en comprimant très fortement. Selon vous, faudra-t-il encore doubler la pression pour réduire le volume de moitié ?

Dans leurs réponses, certains élèves expriment l'impression que « cela ne suffira plus lorsque le volume sera très petit », que « cela devient de plus en plus difficile ». L'idée m'a frappé et j'ai voulu l'exploiter dans d'autres domaines :

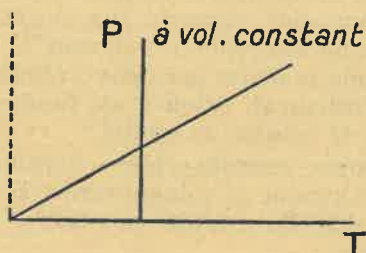
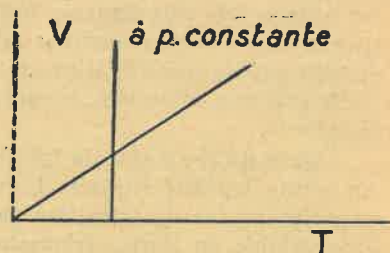
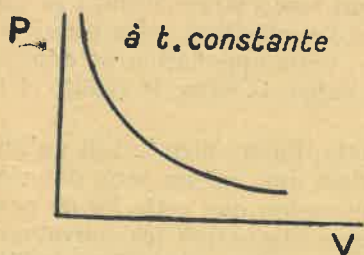
Faut-il autant de calories pour élever la température d'un corps de 10 à 11° que pour élever sa température de 1.000 à 1.001° ? Plusieurs élèves pensent que cela doit être plus difficile à 1.000° qu'à 10° . L'idée n'est bonne qu'à moitié, car la chaleur spécifique ne croît pas nécessairement avec la température. Toutefois, l'occasion est bonne pour indiquer que la chaleur spécifique n'est constante qu'en première approximation et que, dans une approximation supérieure, elle dépend de la température.

Question analogue : Est-il aussi facile d'augmenter la vitesse d'un corps de $10 \frac{m}{s}$ à $11 \frac{m}{s}$ que de l'augmenter, dans le même temps, de $1.000.000 \frac{m}{s}$ à $1.000.001 \frac{m}{s}$? Instruits par les discussions précédentes, les élèves sont presque unanimes à supposer que « cela doit être plus difficile lorsque le corps va déjà très vite ». Or, cela revient à dire que, dans la relation $F = m \cdot j$, la masse n'est plus constante, mais dépend de la vitesse. On peut alors signaler que l'on établit en relativité que :

$$F = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot j \quad (\text{où } c = \text{vitesse de la lumière}),$$

et que, pour des vitesses négligeables par rapport à la vitesse de la lumière, on est ramené à la loi connue. Ainsi, la mécanique classique est valable pour les faibles vitesses et devient grossièrement fausse lorsque les vitesses s'approchent de la vitesse de la lumière.

Les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac se représentent, graphiquement, l'une par une branche d'hyperbole, les deux autres par des droites.



Le zéro absolu est l'abscisse à l'origine de chacune des droites. Le passage de l'échelle des températures Celsius à l'échelle Kelvin correspond à une translation de l'axe des pressions ou de l'axe des volumes.

Les trois lois citées sont des cas particuliers de la loi des gaz parfaits, qui se représente par une surface dans un système d'axes p, v, T . Nous demandons à quelques volontaires de réaliser cette surface. Des sections parallèles au plan pv sont des hyperboles de Boyle-Mariotte ; des sections parallèles au plan pT sont des droites passant toutes par l'axe des volumes ; des sections parallèles au plan vT sont des droites passant toutes par l'axe des pressions. Les constructeurs devront s'astreindre à choisir des échelles convenables sur les axes, à travailler dans un système d'unités cohérent. Ils construisent point par point une famille d'hyperboles en carton, sur lesquelles s'appuient deux familles de droites. La surface est réglée.

Nous demandons alors ce qui se passerait si nous changions les unités portées sur les axes, ou encore si nous changions les échelles. La surface se déformerait, mais certaines propriétés — celles qui ont un sens

physique — résistent à la transformation ; elles doivent y résister précisément parce qu'elles ont un sens physique. Les droites restent des droites. Des directions parallèles restent parallèles. Les pentes des droites restent les mêmes, mais il est bien entendu que nous appelons pente le

rapport de l'ordonnée d'un point de la droite sur son abscisse ($\frac{p}{t}$ ou

$\frac{v}{t}$) ; l'angle que fait la droite avec l'un des axes varie évidemment, de

même que la distance entre deux points. Angles et distances n'ont d'ailleurs aucune signification physique.

Chacune des propriétés invariantes est traduite en langage géométrique et en langage physique. Ainsi, la surface engendrée par la famille d'hyperboles, et l'une des deux familles de droites, contient nécessairement l'autre famille de droites ; cela signifie que tout gaz qui obéit à deux des trois lois citées obéit nécessairement à la troisième. C'est là une propriété que l'on admet souvent implicitement dans la démonstration de la loi des gaz parfaits.

LE DOMAINE DE VALIDITÉ DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

A partir de la classe de Seconde, il nous semble que les élèves réagissent assez favorablement devant la conception d'axiomatics différentes, que la diversité de plusieurs géométries possibles ne leur apparaît plus comme une fantaisie ou une monstruosité. Comme ils restent néanmoins encore accrochés à l'absolu, ils vous posent la question : « Laquelle de ces géométries est vraie ? », ou mieux : « Laquelle de ces géométries est la plus vraie ? » La réponse est qu'un système d'axiomes nous place dans un « horizon de réalité », dont la géométrie correspondante constitue le schéma. On pourra raconter aux élèves une des fables pédagogiques par lesquelles Gonseth a si remarquablement expliqué ces notions. Mais, ici encore, le cours d'optique nous offre de larges possibilités.

Pour introduire l'optique géométrique, nous prenons plusieurs photos d'un filament de lampe à l'aide d'une chambre noire (appareil photographique sans objectif), avec des ouvertures de plus en plus petites et, naturellement, des temps de pose de plus en plus longs. Avec une ouverture relativement grande, nous obtenons une image épaisse, à bords nets. Nous ne disons pas : c'est parce que la lumière se propage en ligne droite. Nous disons : cette image peut s'expliquer en admettant que chaque point de l'objet est le sommet d'un cône de rayons lumineux limité par l'ouverture de l'appareil ; ce cône laisse une tache sur la plaque sensible : il n'y a pas correspondance point par point.

Un trou plus petit donne une image plus fine, à bords nets. Les cônes s'amincissent ; nous tendons vers la correspondance point par point. On fait remarquer que la même image peut s'obtenir géométriquement par une homothétie négative si la plaque sensible est parallèle au plan du filament-objet. S'il n'en est pas ainsi, la correspondance entre l'objet et l'image ne conserve ni les angles, ni les distances, mais à une droite de l'objet correspond une droite de l'image. Bref, *tout cela est explicable par l'hypothèse de la propagation rectiligne de la lumière en milieu homo-*

gène. A une optique de rayons lumineux correspond une géométrie de droites.

Nous disons alors à nos élèves : « Continuons à diminuer l'ouverture ; nous finirons peut-être par isoler un rayon lumineux ; nous pouvons alors nous attendre à obtenir une correspondance point par point et notre image sera parfaite. » Ils ont suivi mon conseil : un trou de 0,03 mm. et un temps de pose de trois heures. Résultat inattendu : la photo montre une image floue et des franges de diffraction. Ceci ne peut plus s'expliquer par l'hypothèse des rayons lumineux et la « géométrie de droites » n'est plus applicable. Celle-ci garde pourtant son pouvoir d'explication pour autant qu'on ne limite pas les pinceaux lumineux par des ouvertures trop petites ; elle est valable dans un certain « horizon de réalité ».

En milieu non homogène, les rayons sont réfractés. Un système optique est dit stigmatique pour deux points P et P' s'il transforme tous les rayons incidents issus de P (appelé objet) en des rayons émergents passant par P' (appelé image). On montre facilement qu'un dioptré sphérique, un miroir sphérique, une lentille ne sont pas stigmatiques pour tous les points de l'espace. Les rayons issus d'un point-objet P quelconque s'appuient, après réfraction, sur une *surface caustique*. Il n'y a pas correspondance point par point entre l'espace objet et l'espace image. Pourtant, les formules des dioptrés, miroirs et lentilles, enseignées à l'athénée, supposent qu'il y ait stigmatisme. On ne peut enseigner ces formules sans signaler que leur domaine de validité est limité. Nous montrons, en outre, qu'à ce domaine correspond une géométrie qui n'est pas euclidienne. Quel est ce domaine de validité ?

Quand on diminue (pas trop) l'ouverture du diaphragme qui limite le pinceau incident, on voit que la surface caustique tend vers un point. Un objet ponctuel donne une image quasi-ponctuelle pour des petites incidences, ce qui implique l'utilisation de pinceaux faiblement ouverts et centrés sur l'axe. On se place ainsi dans ce qu'on appelle *l'approximation de Gauss*, qui constitue un corps de doctrine complet et cohérent. Cette approximation constitue un horizon de réalité et s'inscrit dans un schéma projectif. Les expériences au banc d'optique montrent facilement que, pour un dioptré utilisé dans les conditions de Gauss :

- 1° l'image d'un point de l'axe est un point de l'axe ;
- 2° le stigmatisme, déjà réalisé sur l'axe, l'est aussi autour de l'axe ;
- 3° l'image d'un plan est un plan ;
- 4° le birapport du point-objet, du point-image, du centre de courbure et du sommet du dioptré est constant et égal à l'indice de réfraction.

On voit qu'il s'agit d'une correspondance homographique. Certaines dispositions de l'écran font voir que l'image n'est pas semblable à l'objet (il n'y a pas de similitude « en volume »), que le parallélisme n'est pas conservé. En outre, cette correspondance entre l'espace objet et l'espace image est biunivoque, mais non réciproque. Si, par exemple, un objet réel P donne une image réelle en P', un objet virtuel placé en P' ne donne pas une image en P. Mais la correspondance devient réciproque dans le cas du miroir sphérique. Ici, le birapport vaut -1 ; deux points conju-

gués forment avec le centre de courbure et le sommet du miroir un quaternaire harmonique.

Si le rayon de courbure d'un dioptré est infini, la correspondance objet-image conserve le parallélisme, sans être toutefois une similitude. Ainsi, le dioptré plan établit entre l'objet et l'image une correspondance affine. Celle-ci devient une symétrie dans le cas du miroir plan.

Nous sommes partis de la géométrie projective, nous sommes arrivés à la géométrie euclidienne en passant par la géométrie affine.

Bientôt, en rhétorique, nos élèves s'attaqueront à la géométrie analytique. Ils apprendront, à l'occasion, à distinguer les propriétés projectives, affines et métriques. La compréhension du fondement axiomatique de ces notions aura été, pensons-nous, facilitée par les leçons de physique.

P. RONSMANS,
Professeur à l'Athénée Robert-Catteau
(Bruxelles).

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS

Exemple d'utilisation d'un formalisme : Théorèmes de Simson, de Miquel et de Clifford

Lorsque l'on regarde les mathématiques toutes faites, pour ainsi dire du dehors, on est amené parfois à voir dans le formalisme uniquement un procédé d'exposition sans lien psychologique avec la recherche et la découverte. Le seul avantage qu'on lui attribue alors est d'éviter de noyer la pensée sous un flot verbal et de mettre en évidence la structure de cette pensée, ce qui justifie le formalisme comme une langue bien adaptée à l'exposé mathématique dans ce qu'il a de logique. Pourtant les chercheurs, les découvreurs, nous assurent y trouver un procédé de découverte : l'analogie de formalisation dans deux domaines de recherches permet de considérer ces domaines comme deux modèles d'une même structure, de sorte que l'expérience acquise dans l'un de ces domaines, sert à l'exploration de l'autre.

Chaque modèle comporte, non seulement la structure que l'on étudie, commune aux deux modèles, mais encore d'autres qui lui sont propres ; ainsi toute propriété du modèle n'est pas utilisable pour l'étude (cf. les modèles des molécules organiques ou de l'atome de Bohr : ils donneraient une image dangereusement erronée si on les prenait pour un agrandissement de la réalité physique !).

Je me propose d'essayer de faire sentir ce rôle du modèle et du formalisme sur un exercice élémentaire. On m'excusera j'espère de ne pas donner (et pour cause !) un exemple de découverte. Je souhaite pourtant faire pressentir que la méthode peut devenir une marche vers l'inexploré lorsqu'elle est conduite par des mathématiciens dignes d'elle.

*
**

1. *Point de départ.* — Soit une figure (F_i) constituée par un ensemble de quatre points A, B, C, D. Nommons a, b, c , les trois côtés issus d'un point (par exemple $A = a \cap b \cap c$) et a', b', c' les côtés qui leur sont respectivement opposés. L'ins-

criptibilité de A, B, C, D se traduit, suivant les couples de côtés que l'on introduit, par l'une ou l'autre des égalités (ou plutôt congruences) d'angles

$$(1) \quad (a, b) + (a', b') = 0 \pmod{\pi},$$

$$(2) \quad (b, c) + (b', c') = 0 \pmod{\pi}.$$

Le théorème de Chasles permet d'en déduire les quatre autres égalités à π près :

$$(3) \quad (a, c) + (a', c') = 0,$$

$$(4) \quad (a, b') + (a', b) = 0,$$

$$(5) \quad (a, c') + (a', c) = 0,$$

$$(6) \quad (b, c') + (b', c) = 0.$$

Si les égalités précédentes sont vérifiées pour trois couples de droites non trois à trois concourantes (fig. f_i), elles expriment l'inscriptibilité de trois ensembles de quatre points :

$$\begin{array}{llll} a \cap b, & a' \cap b', & a \cap b', & a' \cap b; \\ b \cap c, & b' \cap c', & b \cap c', & b' \cap c; \\ c \cap a, & c' \cap a', & c \cap a', & c' \cap a; \end{array}$$

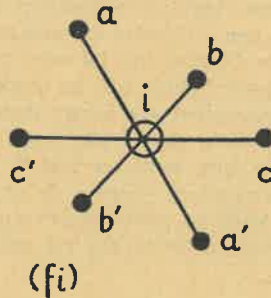
On sait que l'on exprime ceci en disant que les trois couples de droites sont anti-parallèles deux à deux.

Nous voulons construire un modèle différent de la structure qui vient d'apparaître dans le but de rendre intuitif, évident sur une figure, ce qui n'apparaît pas aussi bien sur les figures (F) et (F') et leurs circonférences.

La relation $(a, b) + (a', b') = 0 \pmod{\pi}$, qui exprime l'inscriptibilité, fait penser à la relation $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{a'b'} = \overrightarrow{0}$ entre vecteurs qui exprime l'équipollence de $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{b'a'}$. Or la seule opération que nous utilisons sur les angles mod π est celle qu'exprime la formule de Chasles, formule qui a la même forme pour les vecteurs. Une nouvelle figure f sera formée de points, images de a, b, a', b' , etc... Mais il nous reste à trouver une configuration telle que le système des égalités que nous écrirons maintenant d'une façon ambiguë

$$(1) \quad ab + a'b' = 0 \quad \text{et} \quad (2) \quad bc + b'c' = 0$$

entraîne les égalités (3), (4), (5), (6). C'est une symétrie par rapport à un point, par exemple dans un plan. D'où la figure fondamentale (f_i) d'inscriptibilité (i). Si nous supposons par exemple en outre $a \cap b \cap c = A$, nous aurons un cercle (i). Sinon, si toutes les intersections telles que $a \cap b \cap c, a \cap b \cap c',$ etc... sont vides, nous aurons trois cercles (i).



On voit que la figure (f_i) est déterminée si l'on a choisi, par exemple a, b, c, a' . Comme le centre de symétrie i est défini par $ai = ia'$, ce point doit être considéré comme image dans (f) de l'ensemble des deux directions bissectrices des couples opposés $a, a'; b, b'; c, c'$ de (F). On voit déjà combien les deux modèles ont des structures propres différentes en plus de la structure commune que nous voulons

utiliser. En particulier, nous ne pouvons pas traduire, par exemple, la relation de perpendicularité dans (F), à moins de doter (f) d'une relation d'équivalence entre certains points pour avoir $2ab = 0$, a et b distincts. Nous n'en ferons rien, de sorte que nous ne pourrions atteindre dans (F) que des figures générales.

APILICATIONS.

Théorème I. — Juxtaposons deux figures f_i , soit le schéma (f_i) . Les égalités vectorielles sont en évidence :

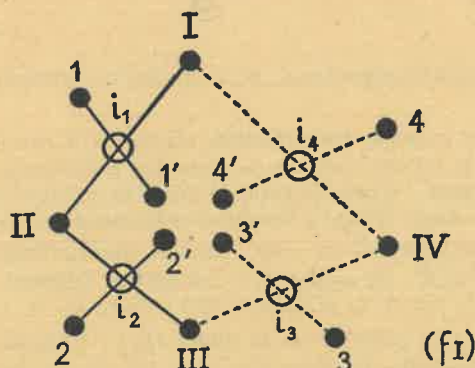
$$i_2 + i'2' = 2 \times i_1 i_2 = I, \text{ III.}$$

Si donc nous complétons la figure par les inscriptibilités (i_3) , (i_4) , nous aurons

$$i_2 + i'2' = 43 + 4'3',$$

donc

$$i_2 = 43 \Leftrightarrow i'2' = 4'3'.$$



Interprétation dans (F) : Quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 , pris en ordre cyclique, se coupent en $A, A'; B, B'; C, C'; D, D'$ (l'axe radical AA' de C_1 et C_2 est représenté par I et la corde AB par I, etc...). La condition d'inscriptibilité de A, B, C, D équivaut à celle de A', B', C', D' .

Théorème II, de Simson (généralisé pour un angle quelconque). *Description dans F :* Trois points non alignés A, B, C , forment un triangle de côtés a, b, c . Un point M est joint aux précédents par les droites α, β, γ , et à trois points A', B', C' respectivement pris sur a, b, c par des droites α', β', γ' . On nomme a' la droite $B'C'$, et de même b' et c' .

Noter que $(a', b') = 0 \pmod{\pi}$ entraîne $(b', c') = 0 \pmod{\pi}$. Nous étudions la figure dans le cas où l'on a

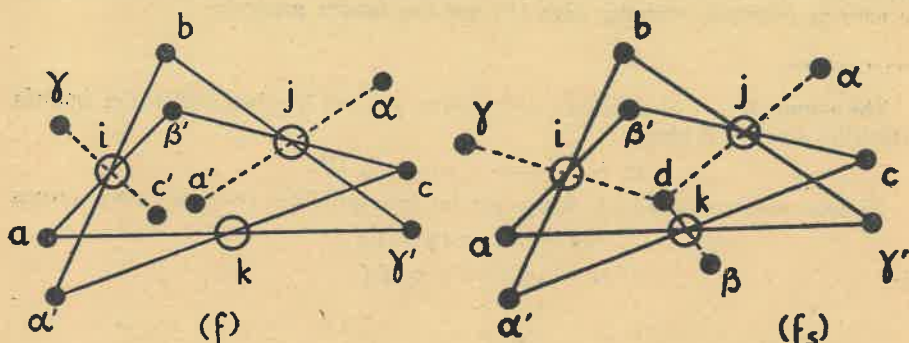
$$(H) \quad (a, \alpha') = (b, \beta') = (c, \gamma') \pmod{\pi}.$$

Traduction dans (f) : Quatre points arbitraires a, b, c, α' . Les trois points a', b, c' , sont deux à deux distincts ou tous les trois confondus. Hypothèse (H) : $a\alpha' = b\beta' = c\gamma'$ (égalités vectorielles comme nous l'avons dit).

Nous voyons les trois inscriptibilités $(i), (j), (k)$ et nous complétons la figure par le couple c', γ pour (i) et a', α pour (j) d'après le schéma (f_i) . On voit immédiatement sur la figure que $a'c' = 0$ est équivalent à $\gamma\alpha = ac$, comme égaux à $2ij$. Or $ac + \alpha\gamma = 0$ exprime l'inscriptibilité de

$$M = \alpha \cap \gamma, B = a \cap c, A = a \cap \alpha, C = c \cap \gamma.$$

D'où l'énoncé habituel sur la figure (F) : La condition d'alignement de $A'B'C'$ équivaut à l'inscriptibilité de A, B, C, M .



Nommons d les points confondus a', b', c' (droite de Simson). Nous obtenons la figure (f_s).

1) Retrouvons par exemple deux résultats classiques. Laissons fixes a, b, c, a' , donc i, k, γ', B', j , mais faisons varier α de sorte que α devienne α_1 ; d devient d_1 et $\alpha\alpha_1 = -dd_1$. D'où l'énoncé : *Quand le point M décrit la circonférence ABC, sa droite de Simson tourne d'un angle opposé à l'angle dont tournent les cordes AM, BM, CM.*

Interprétons maintenant $db = -\alpha\gamma'$ comme inscriptibilité de $A = d \cap b$, $C = b \cap \gamma'$, $M = \gamma' \cap \alpha$, $A_1 = d \cap \alpha$; on obtient l'énoncé : *La parallèle à la droite de Simson menée par A, la projetante MA' , coupe sur le cercle circonscrit.*

2) *Interprétation plus générale de la figure (f_s)* : Utilisons la figure du type (F_i) et non (F_i), c'est-à-dire ne supposons plus les six droites $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, concourantes en M. Prenons a, b, c, a' quelconques, puis β' et γ' satisfaisant à (H) et considérons $M_c = \alpha' \cap \beta'$, $M_a = \beta' \cap \gamma'$, $M_b = \gamma' \cap \alpha'$, d'où trois cercles $(AB'C'M_a)$, $(BC'A'M_b)$, $(CA'B'M_c)$.

Les droites a', b', c' , sont toujours $B'C', C'A', A'B'$, mais les droites α, β, γ , c'est-à-dire AM_a, BM_b, CM_c déterminent des points $N_a = \beta \cap \gamma$, N_b et N_c .

La condition d'alignement de $A'B'C'$ équivaut toujours à $\gamma\alpha = ac$; elle exprime ici que N_b est sur la circonférence (ABC) . De même N_c est sur cette circonférence. Donc ces points sont confondus au point N autre que A ou α coupe (ABC) . Et N_a est aussi en N. D'où l'énoncé : *Si une droite d coupe les côtés a, b, c d'un triangle ABC en A', B', C' , les trois droites α', β', γ' menées respectivement par A', B', C' et satisfaisant à (H) déterminent un triangle $M_aM_bM_c$ tel que AM_a, BM_b, CM_c concourent en un point N du cercle (ABC) . Les deux triangles sont directement semblables, homologues, et jouent le même rôle, de sorte que N est aussi sur le cercle circonscrit au deuxième triangle.*

Théorèmes de Miquel et de Clifford, relatifs à n droites : Revenons à l'interprétation de (f_s) par le théorème de Simson. Nous pouvons donner l'énoncé sous une forme telle que les quatre droites jouent le même rôle :

(E₄) *Etant données quatre droites, les quatre cercles circonscrits aux triangles formés-concourent en un point.*

Notation préparant la généralisation :

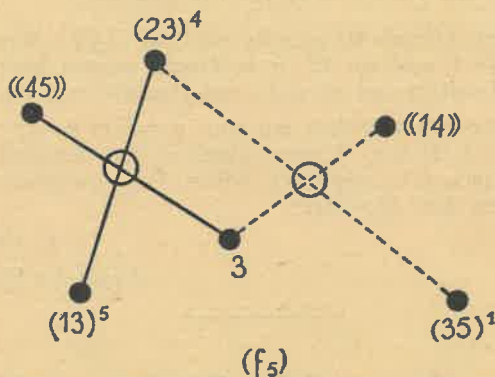
Chaque droite : notée par un nombre 1, 2, 3, 4.

Chaque point d'ordre 2 : $1 \cap 2$ est noté $M(12)$.

Chaque cercle d'ordre 3 : par exemple $C(123)$

Le point de concours, d'ordre 4 : $M(1234)$.

$n = 5$ Nommons $(12)^5$ la droite $M(12)M(1234)$ et
 $((45))$ la droite $M(1235)M(1234)$.



Considérant les deux cercles $C(123)$ et $C(235)$ nous obtenons le schéma (f_5) où l'on voit $((45)) ((14)) = (13)^5(35)^1$.

Or, dans la définition du deuxième membre de cette égalité, 2 et 4 jouent le même rôle donc $((45)) ((14)) = ((25)) ((24))$

ce qui exprime l'inscriptibilité de $M(1234) M(1235) M(2345) M(1335)$. De même, $M(1245)$ est sur ce cercle. Donc

(E_5) Etant données cinq droites, les cinq points de l'énoncé (E_4) sont sur une même circonférence (Théorème de Miquel). Cette circonférence d'ordre 5 sera notée $C(12345)$.

Théorème général de Clifford (1) : A tout ensemble de $n = 2k$ droites, on peut associer un point $M(1, 2, \dots, 2k)$ et à tout ensemble de $n = 2k + 1$ droites, on peut associer un cercle $C(1, 2, \dots, 2k + 1)$ tels que tout point M d'ordre n soit situé sur tout cercle d'ordre $n - 1$, dont l'ensemble d'indices est inclus dans celui du point, et sur tout cercle d'ordre $n + 1$ dont l'ensemble d'indices contient celui du point.

Ceci est bien vérifié pour $n = 5$. L'étude va se poursuivre par un simple examen d'indices : c'est le symbolisme adopté pour les notations qui fournit la démonstration :

$n = 6$ Considérons les quatre cercles avec leur intersection :

$$C(23456) \cap C(256) = M(2456) \cup M(2356)$$

$$C(256) \cap C(156) = M(56) \cup M(1256)$$

$$C(156) \cap C(13456) = M(1456) \cup M(1356)$$

$$C(13456) \cap C(23456) = M(3456) \cup Q.$$

Or les quatre points nommés les premiers sont sur $C(456)$, donc (th. I), les trois points d'ordre 4 nommés les seconds sont sur un cercle passant par Q ; mais ce cercle est $C(12356)$. Donc les trois cercles d'ordre 5 introduits sont concourants en Q . Permutant par exemple 3 et 4, on voit que Q est aussi sur $C(12456)$ et de même les autres cercles d'ordre 5, donc tous les cercles d'ordre 5 concourent en un point d'ordre 6 nommé $M(123456)$.

(1) L'idée d'utiliser le théorème I pour la démonstration fut indiquée par H. LERESGUE, dans un devoir à l'E.N.S. de Sèvres.

$n = 7$ Etudions quatre points d'ordre 6 :

$$C(34567) \cap C(14567) = M(4567) \cup M(134567)$$

$$C(14567) \cap C(12567) = M(1567) \cup M(124567)$$

$$C(12567) \cap C(23567) = M(2567) \cup M(123567)$$

$$C(23567) \cap C(34567) = M(3567) \cup M(234567).$$

Or les quatre points nommés les premiers sont sur $C(567)$, donc (th. I) les quatre points nommés d'ordre 6 sont sur la circonférence passant par trois d'entre eux. Donc *tous les points d'ordre 6* sont sur une même circonférence d'ordre 7, $C(1234567)$.

$n \geq 8$ Le raisonnement précédent fait pour $n = 6$ et $n = 7$ n'utilise en somme que les quatre indices 1, 2, 3, 4. Il reste valable si nous écrivons à droite de l'ensemble des indices 2, puis 4, ..., nouveaux indices. Par raisonnement par récurrence, le théorème général est donc démontré.

L. FÉLIX,
Lycée La Fontaine, Paris.

La notion de « module d'entiers » appliquée à la démonstration du théorème de Gauss sous sa forme générale

Dans un récent *Bulletin* (n° 174, décembre 1955) j'ai montré que le théorème suivant :

« Si un nombre premier $p > 1$ divise un produit ab sans diviser a , alors il divise b »

peut se déduire de la notion de « module d'entiers ». Il en est de même du théorème plus général :

« Si un nombre $m > 1$ divise un produit ab et s'il est premier avec a , il divise b . »

Je renvoie à l'article du n° 174 pour la définition et la propriété (existence d'une base) d'un module d'entiers ; il en résulte la démonstration suivante du théorème cité.

L'ensemble E des entiers x quelconques (positifs, négatifs ou nul) tels que :

$$ax \equiv 0 \pmod{m}$$

admet visiblement pour sous-ensemble l'ensemble E' des entiers y , tels que

$$y \equiv 0 \pmod{m}$$

et est un module d'entiers.

Si d ($d > 0$) est la base de ce module on a :

$$x \equiv 0 \pmod{d} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Comme $m \notin E' \subset E$ on a donc :

$$(1) \quad m \equiv 0 \pmod{d}.$$

De plus, par définition $d \in E$ d'où

$$(2) \quad ad \equiv 0 \pmod{m}.$$

D'après (1) et (2) il existe deux entiers ordinaires k et k' tels que :

$$\begin{aligned} m &= k \cdot d, \\ ad &= k' \cdot m, \end{aligned}$$

de ces deux égalités résulte

$$a = k \cdot k',$$

k diviseur commun à d et a ne peut être d'après l'hypothèse que 1 ; par suite

$$d = m \quad \text{et}$$

$$x \equiv 0 \pmod{m} \text{ pour tout } x \in E.$$

Or $b \in E$, car par hypothèse $ab \equiv 0 \pmod{m}$ d'où

$$b \equiv 0 \pmod{m} \quad (\text{C.Q.F.D.}).$$

Le théorème se trouve ainsi démontré sans la théorie du P.G.C.D. et sans faire intervenir les nombres premiers absolus. On peut évidemment exposer le raisonnement sans la notation des congruences.

Jacques LEGRAND (*Lycée de Biarritz*).

Année des saisons et année tropique

« Je déclare sans peine qu'il doit y avoir des fautes dans mon ouvrage ; je ne connais aucun livre d'Astronomie où il n'y en ait plusieurs ; ...La mémoire nous trompe, le calcul nous égare, la chaleur de la composition nous entraîne ; enfin on ignore souvent des choses qu'il aurait fallu savoir. »

LALANDE, Préface au *Traité d'Astronomie*, Paris, 1771.

Dans beaucoup de manuels de cosmographie, l'année tropique est définie comme *l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs du soleil à l'équinoxe de printemps*.

Dans son cours d'astronomie, M. DANJON écrit : « L'année tropique est le temps nécessaire pour que la longitude moyenne du soleil, rapportée à l'équinoxe moyen mobile, augmente de 360° . Elle se confond avec l'intervalle moyen de deux retours du soleil à l'équinoxe moyen. En une année tropique, l'ascension droite moyenne du soleil augmente de 24 heures. On obtient directement sa valeur en jours moyens, en déterminant le nombre de jours qui sépare deux équinoxes éloignés. Comme on dispose d'anciennes observations d'équinoxes, c'est l'une des constantes naturelles les mieux connues » (p. 113).

M. DANJON donne ensuite la valeur de l'année tropique, calculée par Newcomb, qui a discuté toutes les observations recueillies depuis l'Antiquité. A une date t , comptée en siècles juliens de 36 525 jours à partir du 1^{er} janvier 1900, l'année tropique vaut

$$365,242\,198\,79 - 0,000\,006\,14\,t$$

en jours solaires moyens 1900.

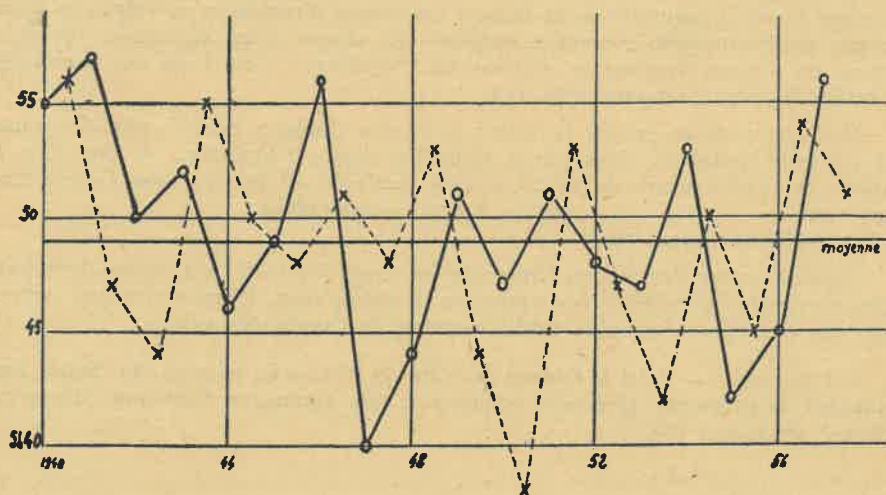
Appelons *année des saisons* l'intervalle de temps (variable) qui sépare deux passages successifs du Soleil à des équinoxes de même nom. L'année tropique pourra alors être considérée comme la valeur moyenne de l'année des saisons.

I. LES FAITS. — Voici le tableau des dates et heures du passage du Soleil aux équinoxes de printemps (première colonne) et aux équinoxes d'automne (deuxième colonne), de 1939 à 1957 :

ANNÉE	ÉQUINOXES DE PRINTEMPS		ÉQUINOXES D'AUTOMNE
	20 mars	21 mars	23 septembre
1939		12 h 28 m 34 s	22 h 49 m 35 s
1940	18 h 23 m 58 s		4 h 45 m 36 s
41		0 h 20 m 35 s	10 h 32 m 44 s
42		6 h 10 m 46 s	16 h 16 m 26 s
43		12 h 02 m 53 s	22 h 11 m 46 s
1944	17 h 48 m 48 s		4 h 1 m 32 s
45	23 h 37 m 26 s		9 h 49 m 38 s
46		5 h 32 m 57 s	15 h 40 m 46 s
47		11 h 12 m 57 s	21 h 28 m 45 s
1948	16 h 57 m 06 s		3 h 21 m 43 s
49	22 h 48 m 21 s		9 h 05 m 58 s
50		4 h 35 m 28 s	14 h 43 m 43 s
51		10 h 26 m 08 s	20 h 37 m 02 s
1952	16 h 14 m 05 s		2 h 23 m 42 s
53	22 h 00 m 43 s		8 h 05 m 58 s
54		3 h 53 m 40 s	13 h 55 m 32 s
55		9 h 35 m 20 s	19 h 40 m 59 s
1956	15 h 20 m 30 s		1 h 35 m 02 s
57	21 h 16 m 44 s		7 h 26 m 14 s

Remarques : 1° La période de quatre années, justifiant la réforme julienne du calendrier, apparaît avant tout calcul.

2° Par différence d'une date à la précédente, et en prenant des équinoxes de même nom, on trouve la valeur variable de l'année des saisons. Les résultats sont représentés dans le graphique suivant :



Les points ronds représentent la durée écoulée, de l'équinoxe de printemps de l'année indiquée en abscisse à l'équinoxe de printemps de l'année précédente ; les croix représentent les durées écoulées de l'équinoxe d'automne de l'année marquée en abscisse à l'équinoxe d'automne de l'année précédente. Toutes ces durées sont arrondies au nombre entier de minutes le plus voisin.

Les écarts de l'année des saisons avec sa valeur moyenne prise égale à 365 j 5 h 49 m, peuvent donc atteindre 11 minutes en plus ou en moins.

Quand nous signalons à nos élèves le phénomène de précession des équinoxes, il est courant de citer l'égalité

année sidérale — année tropique = 20 m.

On voit, en se limitant aux données du graphique (intervalle 1939-1956) que la différence (année sidérale — année des saisons) a varié de 12 à 31 minutes, selon les années. Une irrégularité de cette importance, facile à constater si l'on consulte simplement des calendriers ou des annuaires usuels, risque de troubler ceux qui ne sont pas prévenus.

2. CAUSES DU PHÉNOMÈNE. — Les facteurs qui altèrent la régularité du passage apparent du Soleil au point γ sont très nombreux, mais la plupart d'entre eux ont une action progressive ou de longue période.

Dans le cas présent, nous avons à rechercher la cause dans une ou plusieurs inégalités à courte période.

La cause principale est la suivante :

C'est le point G, barycentre du système Terre-Lune, qui décrit l'orbite képlérienne autour du Soleil.

Rappelons que ce point G est intérieur à la Terre. Si T est le centre de la Terre, $TG = 0,73 R$. TG est peu différent des $3/4$ du rayon terrestre.

Les astronomes observent le Soleil de différents points de la surface de la Terre et, pour unifier les résultats, ramènent leurs observations au centre T de la Terre.

Autrement dit, le passage du Soleil au point γ est supposé observé du centre T de la Terre.

Mais puisque c'est le point G qui décrit l'écliptique, la position de T est, en général, extérieure à l'écliptique et la position apparente du Soleil peut se trouver décalée de $6''5$ par rapport à ce qu'elle serait si l'observation était faite de G. Une inégalité atteignant $13''$ peut donc s'introduire entre les passages en γ et γ' ou entre γ' et γ .

Telle est la cause principale des variations dans le tableau des passages.

Incidentement, c'est pour cette même raison que le centre du Soleil ne décrit pas l'écliptique : la latitude du centre est faible, mais généralement non nulle, ce qui ne manque pas de troubler les débutants pour qui l'écliptique est la trajectoire du centre du Soleil — *ne varietur*.

On appelle « inégalité mensuelle du Soleil » cette correction périodique des observations du Soleil et des planètes supposées faites du centre de la Terre. Sa période est en effet celle de la révolution synodique de la Lune.

L'établissement des tables de cette correction fournit une détermination du point G et par conséquent le rapport des masses de la Terre et de la Lune, soit, d'après NEWCOMB, 81,1 (pour plus de détails, consulter le cours de M. DANJON, p. 272 et 276).

SECOND FACTEUR IMPORTANT D'INÉGALITÉ POUR L'ANNÉE DES SAISONS. — Le mouvement du point G est lui-même *perturbé* par l'action des autres planètes, par l'action de Jupiter en particulier. L'effet différentiel de ces perturbations peut être très sensible à six mois d'intervalle. La période synodique de Jupiter est de 399 jours ; si Jupiter était proche de sa quadrature occidentale à l'équinoxe de printemps, il sera proche de sa quadrature orientale au début de l'automne.

AUTRES INÉGALITÉS. — *La nutation*, dont la période est de 18,60 années, altère la date du passage du Soleil à l'équinoxe de printemps de dix minutes (en plus ou

en moins) au maximum, mais un tel écart ne peut être obtenu en une demi-année (de γ_1 à γ'_1 ou de γ'_1 à γ_2), ni même en une année (de γ_1 à γ_2) : la formule de la nutation le prouve.

Il faudrait tenir compte aussi des perturbations apportées par les autres planètes, des nombreuses inégalités de la Lune, de l'emploi de notre temps *moyen* conventionnel au lieu du temps vrai, pour fixer *l'heure* des passages, etc...

CONCLUSION. — S'il n'y a pas lieu de signaler aux élèves toutes les difficultés, il semble qu'on peut du moins éviter la confusion entre *l'année tropique* (valeur moyenne pratiquement constante) et l'année des saisons (éminemment variable).

D'après une série de calendriers ou d'annuaires, on peut faire relever les variations très irrégulières de l'année des saisons, construire le graphique et avertir les élèves du rôle du barycentre. Cela peut se faire dès que nous présentons le mouvement apparent du Soleil sur la sphère des fixes.

Plus tard, en parlant de la précession des équinoxes, nous signalons la nutation : nous pouvons alors, sans insister, donner un aperçu des innombrables complications de l'astronomie de position.

P. COUDERC et G. WALUSINSKI.

III. PROBLÈMES PEDAGOGIQUES

Notations et tradition

Pour écrire les relations métriques en géométrie certains professeurs semblent rester fidèles à une vieille tradition que l'emploi généralisé des mesures algébriques devrait faire abandonner complètement.

Il n'y a aucune utilité à écrire $\overline{AB}^2$ pour le carré de la mesure arithmétique du segment AB, et nous y voyons même un réel inconvénient :

1° La notation $\overline{AB}$, devenue classique, doit être exigée de nos élèves dès qu'il s'agit d'une mesure algébrique ; il est donc très fâcheux d'employer le même symbole alors qu'on parle d'une simple longueur.

Nous souhaitons, au contraire, qu'à propos des triangles rectangles, par exemple, on écrive soigneusement :

$$AB^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \quad \text{ou encore} \quad AH^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC} ;$$

les réciproques y trouveront d'ailleurs grand avantage.

2° La notation AB^2 ne paraît pas se prêter à la moindre équivoque, tandis que l'on voit parfois imprimer $\overline{AB}^2$ (le 2 au-dessous du trait), ce qui perd toute signification et verse dans l'incohérence, comme si l'on écrivait $(a + b)^2$ au lieu de $(a + b)^2$.

Si les extrémités du segment s'appelaient a et b , la notation ab^2 ne serait guère plus inquiétante (pourvu que, par inadvertance, b ne désigne pas à la fois un point et une longueur), et il reste toujours possible de recourir à la forme $(ab)^2$.

3° Pour écrire le carré de 36, la tradition ne se montre pas aussi scrupuleuse, et l'équivoque serait cependant à craindre si l'on se contente de 36^2 ; $(36)^2$ serait plus prudent et éviterait la confusion possible avec 3×6^2 (le triple de 6^2).

4° Dans le cas de $\overline{AM}^3$ il peut surgir un doute beaucoup plus grave sur l'interprétation à donner à ce symbole s'il s'agit, par exemple, d'une force attractive ou répulsive issue d'un point A.

Pour ces diverses raisons, nous avons acquis la conviction qu'il convient de

réserver la notation $\overline{AB}$ au seul cas d'une mesure algébrique ; ce qui n'interdit pas d'écrire $\overline{AB}^2$ si, au cours d'un calcul, une telle mesure doit intervenir par son carré, comme par exemple dans l'identité

$$(\overline{MA} - \overline{MB})(\overline{MA} + \overline{MB}) = \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = MA^2 - MB^2.$$

Nous constatons d'ailleurs avec plaisir que maints auteurs d'ouvrages, maints Bulletins scientifiques et de nombreux professeurs ont déjà adopté cette modeste innovation.

Pierre DEDRON,

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Réflexions sur nos problèmes de recrutement

La lecture des derniers rapports d'Agrégation, et la disproportion entre le nombre des places mises au concours et celui des reçus, m'incite à suggérer le remède suivant à nos problèmes de recrutement : la création d'une « Ecole Normale Secondaire » dans le cadre de chacune de nos Universités.

Le temps est en effet révolu où deux E.N.S. parisiennes suffisaient à une grande partie du recrutements des Enseignements Secondaire et Supérieur. Le fait que la grande majorité des normaliens de la rue d'Ulm et de Sèvres se dirige actuellement vers l'Enseignement Supérieur et la Recherche est un événement naturel contre lequel il est vain de s'élever : il est inscrit dans les chiffres qui décrivent le développement de notre Enseignement Supérieur.

Il s'agit donc de trouver d'autres sources de recrutement à l'Enseignement Secondaire. L'on me dira que la plupart des Universités organisent une préparation à l'Agrégation ou au C.A.P.E.S. A cela je réponds que le système en vigueur est d'un rendement singulièrement défectueux. Sur un effectif moyen de 8 à 10 agrégatifs environ, y a-t-il en moyenne plus d'un ou deux reçus par an (remarquez que $2 \times 17 = 34$) ? Certains de ces derniers sont déjà dans les cadres de l'Enseignement et celui-ci ne reçoit ainsi aucun sang nouveau. Beaucoup aussi sont des redoublants et des retriplants, c'est-à-dire des gens qui ont perdu du temps et de l'énergie.

Voici quelques raisons de ce mauvais rendement :

a) Insuffisance de la préparation. Ce n'est pas sans raison que les E.N.S., malgré un recrutement de haute qualité, jugent utile de donner à leurs élèves un enseignement spécial, qui s'ajoute à celui de la Licence.

b) Mauvaises conditions de travail. Rares sont les candidats qui sont des étudiants libres. La plupart sont des assistants, des stagiaires, etc..., et doivent mener de front une préparation difficile et un travail d'enseignement souvent fort lourd. A ceci s'ajoutent en général, des conditions matérielles défectueuses, dues aux faibles traitements et à la crise du logement.

c) Manque d'émulation.

d) La concurrence des Grandes Ecoles Scientifiques.

Je crois qu'il serait vain de s'attaquer à d) autrement que par la remise en ordre des traitements des enseignants, mais ceci est une autre histoire. Canaliser systématiquement les meilleurs éléments vers l'Enseignement nuirait évidemment à des professions qui sont aussi de première importance pour la vie de la Nation. Par contre, on peut s'attaquer à a), b) et c) en transposant, dans chacune de nos Universités, le système des E.N.S. Voici quelques suggestions, qu'un échange de vues collectif pourra sûrement améliorer et préciser :

1) Recrutement par concours, à la fin de l'année Propédeutique, sur les programmes de celle-ci. Trois options scientifiques, correspondant à Mathématiques Générales, M.P.C. et S.P.C.N. Environ 10 à 15 élèves scientifiques des deux sexes.

2) Système d'internat, comme dans les E.N.S. Trois ou quatre ans d'études, selon les disciplines (quatre ans paraissent nécessaires en Mathématiques).

3) Cours spéciaux s'ajoutant aux cours de Licence. Ces cours sont d'autant plus nécessaires en Mathématiques que beaucoup d'étudiants, issus des Facultés, doivent compléter leurs connaissances relatives au programme de Spéciales. On doit aussi envisager des cours de nature pédagogique (« Les Mathématiques Élémentaires vues d'un point de vue élevé »). La dernière année sera consacrée à la préparation directe des concours de recrutement.

On notera que ce projet nécessite seulement la construction d'un bâtiment modeste par Université (internat pour 80 à 100 élèves, scientifiques et littéraires), et la création d'une ou deux chaires ou maîtrises par discipline. Il a l'avantage de regrouper les meilleurs étudiants de l'Université, facilitant ainsi les contacts entre mathématiciens et philosophes, géographes et géologues, etc... (n'oublions pas qu'un bon professeur n'est pas seulement un spécialiste érudit, mais surtout un homme dont la culture est bien équilibrée). On peut aussi espérer des relations plus étroites entre professeurs et étudiants.

Il faut prévoir des moyens de liaison, souples et efficaces, entre les diverses « Ecoles Normales Secondaires » d'une part, et entre celles-ci et l'Inspection générale d'autre part (par exemple des réunions périodiques de responsables).

P. SAMUEL,

Professeur à l'Université de Clermont.

Valeur de la logique et puissance de l'exemple

Nous avons longuement hésité avant de choisir le titre de cet essai de psychologie pratique, où nous voudrions comparer l'efficacité du raisonnement déductif, qui constitue l'essentiel de la logique, et celle de l'exemple, qui est un exercice d'action avec tous ses détails d'exécution.

Le raisonnement déductif est abstrait, intellectuel, irresponsable en son essence, sinon dans ses conséquences : ce n'est pas celui qui raisonne qui paie les pots cassés lorsque son raisonnement est faux ou trop sommaire, s'il n'agit pas lui-même et fait agir les autres ! L'exemple est partiellement concret et contient une composante affective, inhérente à l'action qu'il propose : l'action engage celui qui la réalise, comprend une part de responsabilité et la prévision de cette responsabilité déclenche, dès le premier contact avec l'exemple, une contrainte émotive.

Avant d'aller plus loin, il vaut mieux définir ce que nous entendons par l'exemple. Faut-il ne considérer que la banale application de la leçon que nous venons de faire ou bien considérer l'exemple dans un sens plus large ? Faut-il définir l'exemple comme étant tout ce qui se présente à l'esprit et est assez différent des souvenirs qu'on rumine à tout instant, pour avoir une puissance, attractive ou répulsive, déterminant un réflexe d'action ? Il paraît, à première vue, que ce serait hors de propos. Pourtant c'est en pensant à l'exemple dans son sens le plus large qu'on peut apercevoir que son caractère essentiel est précisément la puissance émotive qu'il comporte.

Dans la vie courante, on sait trop combien la contagion de l'exemple, aussi bien et de la même façon que la répétition d'un slogan, peut avoir une puissance effrayante, irrésistible, et renverser tous les barrages logiques qu'on peut être tenté de lui opposer. La race des moutons de Panurge n'est pas près de s'éteindre ! Dans le même ordre d'idées, rappelons le malheureux qui « sèche » au tableau et qui ayant mal compris ce qu'un camarade lui « souffle », sort triomphalement une monumentale stupidité.

Finalement, nous avons affecté le mot « puissance » à l'idée d'exemple et le mot « valeur » à l'idée de logique, celle-ci n'étant critiquable, quant à son efficacité, que par la valeur des simplifications du réel, qui lui servent d'hypothèses, et dont elle est

pleinement responsable. Nous pensons bien que le choix de ces mots n'est pas indiscutable, mais après les explications qui précèdent, le lecteur voudra bien admettre que notre choix n'est pas trop subjectif et présente à ses yeux une signification suffisamment claire.

Ajoutons encore, pour bien définir notre vocabulaire, que lorsqu'un exemple est suivi d'une action qui peut se dérouler sans intervention extérieure brutale, et se conclure par une confrontation avec ce qui est considéré habituellement comme vrai, cette action devient alors une expérience. N'oublions pas, en effet, que le mot « expérience », contient la racine indo-européenne « per », qui se retrouve dans les mots « preuve, porte, péril... », et qui exprime l'idée de « traverser ». Ce sont seulement les expériences qui peuvent agir directement sur notre réseau d'habitudes.

Les réflexes émotifs qui accompagnent une expérience sont de même nature que ceux qui constituent la puissance de l'exemple, mais ils suivent les détails de l'action « expérience » au niveau différentiel, tandis que lorsque l'exemple est encore à l'état de « potentiel » d'action, le comportement émotif est plus global, souvent beaucoup plus fort et violent et l'imagination y a sa bonne part. Il arrive même que cette violence, devenue insupportable, contraigne à une fuite vers une action arbitraire, irrationnelle, incohérente, mais qui n'est pas vraiment libératrice et ne peut être considérée comme une expérience « concluante ».

On peut prévoir, à toutes les précautions que nous prenons à définir notre vocabulaire, que toute la discussion tournera autour du fait que le raisonnement logique est affaire de l'esprit seul, tandis que l'exemple et l'expérience qui le suit participent de l'émotivité liée à l'action. C'est sur cette émotivité que nous voulons concentrer notre effort d'analyse, de façon à avoir prise logique sur la nature de l'exemple, pouvoir le contrôler et l'utiliser au mieux dans notre action de pédagogues sinon de moralistes.

Un premier point de cette analyse apparaît précisément dans ce que nous venons de dire : concentrer l'effort d'analyse, l'effort d'attention. En effet, cette concentration fait que nous ne voyons plus qu'une zone très étroite et que le reste est dans une ombre relative, et s'il faut sauter d'un point à un autre pour une comparaison, le travail de l'esprit prend une allure hésitante, beaucoup plus proche de la démarche de l'aveugle que de celle des voyants. De plus, notre espace logique intellectuel n'étant pas homogène et isotrope, comme l'espace vide de la géométrie euclidienne, il ne contient pas l'équivalent de la ligne droite, trajectoire purement idéale de la lumière et nous ne pouvons pas « voir », raisonner bien loin. Il serait donc plus juste d'accuser une forte myopie, plutôt qu'une véritable cécité, d'être responsable de la démarche hésitante de notre esprit ; nous ne pouvons raisonner « droit » que sur de très petits parcours, et, probablement même, au niveau différentiel seulement.

Dans un autre ordre d'idées, mais conduisant à la même constatation, il faut rappeler la fragilité de notre effort d'attention, qui fait que nous savons mal lire et écouter ; on ne nous l'a jamais appris d'ailleurs ! Notre effort d'attention est oscillant, alterné comme une pulsation, mais cette nature oscillante est plus proche de la nature des oscillations de relaxation que de celle des oscillations ordinaires dues à un déphasage potentiel-intensité : l'attention se fatigue, se vide, rebondit sur un mot, un son, qui déclenche un bout de souvenir, et voilà l'esprit qui vagabonde, se fatigue de son rêve éveillé, retombe sur le discours qu'on lui fait et finalement ne retient de tout ce qu'on lui a dit que quelques bribes éparses qu'il ne peut relier que par miracle à l'aide de ses propres souvenirs. C'est toujours notre émotivité qui est responsable de cette instabilité, mais il y a une contrepartie, heureuse cette fois, car, en même temps et par le même mécanisme, elle est responsable de la sensibilité et de la finesse de notre attention.

Nous arrivons donc, d'un côté par l'exemple et l'expérience, de l'autre par l'attention, à une même constatation : il faut étudier, analyser l'émotivité de nos élèves autant que leurs facultés proprement intellectuelles. Ce n'est pas simple ni facile, mais

on y arrive lentement au cours des années, en prenant une attitude amicale vis-à-vis des élèves, en ne les jugeant pas d'après nous-mêmes, et en cas d'échec, en ne les accusant pas de stupidité définitive. Dans le même but, il est intéressant également d'étudier l'imagination et l'enregistrement des connaissances par la mémoire là où l'émotivité a une si forte part. En particulier la mémoire fraîche, immédiate, celle qui permet à deux perceptions successives d'être comparées, de la même façon que la persistance rétinienne permet la comparaison de deux positions successives et d'atteindre la notion de mouvement. Cette « persistance mentale » est fortement soumise à l'état émotif du moment, ce qui nous semble avoir une très grande importance, car c'est à son niveau qu'apparaissent l'abstraction, le raisonnement, la façon d'accueillir les exemples et évidemment la mémoire. On peut la développer et la stabiliser par des exercices de calcul mental, de géométrie mentale, plane ou dans l'espace, sans figure au tableau. Il est bon, pour que ces exercices soient efficaces et prennent toute leur force d'exemple, de parler très lentement, comme si on réfléchissait vraiment à haute voix, en parallèle avec les élèves et non en face d'eux, assis au milieu de la classe s'il le faut, et de leur laisser le temps de s'habituer aux idées qu'on leur présente.

Il faudrait aussi étudier la formation de leurs habitudes qui sont les circuits que laissent dans la mémoire des actions semblables, répétées jusqu'à ce que les réactions émotives qui les accompagnaient s'atténuent puis disparaissent. C'est d'ailleurs parfois dangereux, car la disparition des réactions émotives signale l'affaiblissement de l'attention et il y a lieu de craindre l'apparition de réflexes conditionnels et l'inaptitude à recevoir des idées nouvelles. Il est essentiel de maintenir chez nos élèves le maximum d'agilité, de vivacité mentale, force de jeunesse de l'esprit, qui comporte une grande liberté vis-à-vis des habitudes. C'est évidemment l'exemple qui a le plus grand pouvoir sur la formation des habitudes. Le raisonnement, même déductif, y est à peu près totalement inefficace.

Un fait curieux, à cet égard, surprenant et exemplaire pour nous, professeurs, est la très grande difficulté qu'éprouve l'élève à exprimer une pensée en sens inverse de l'action correspondante. Il ne sait dire que « pour » qui est ainsi le maître-mot de son langage. Les autres petits mots : « si », « dont », « or », sont des mots d'adulte. Seuls, des exemples répétés arrivent à dominer cette répugnance instinctive et naturelle de l'enfant à les employer, car leur emploi implique un arrêt dans l'action et un retour dans le passé ; un enfant ne peut « dire » que s'il vit mentalement ce qu'il dit, or, il ne peut vivre que dans le sens normal du déroulement de l'action dans le temps, du passé vers le futur. Ainsi quand il a trouvé la solution d'un problème, il ne peut la dire qu'à l'envers : « pour faire ou avoir ceci, il faut faire cela... » ; il est incapable de s'imaginer en état d'ignorance de la solution et de la décrire dans le sens déductif. De la même façon, un enfant est incapable de saisir la notion d'équivalence, de condition nécessaire et suffisante, parce qu'il lui faut regarder dans les deux sens.

Dans ce dernier « exemple » que nous donnons de l'importance du comportement émotif de l'enfant face à des problèmes scientifiques, comme à toute question d'ordre intellectuel, on peut voir que les exemples seuls ne suffisent pas. Ils doivent être suivis d'expériences complètes, totales et sincères, qui, seules, peuvent éduquer vraiment à fond. Mais dans ce but, il est nécessaire d'apprendre à nos élèves à contrôler leur émotivité et non à la détruire : « Ne rien dramatiser, ne pas s'affoler quand on se trompe, ne pas craindre la punition, savoir être responsable, ne pas laisser galoper l'imagination ni bavarder vainement, se méfier de l'amour-propre et même de l'émulation, se comparer à soi-même et non à ses camarades, etc., etc... »

Quant à nous, professeurs, ne nous impatientons pas, n'allons pas trop vite, nous ne devons pas frustrer les élèves de l'achèvement de leurs expériences personnelles, c'est la seule vraie richesse que nous pouvons leur donner.

André FOUCHÉ.

Lettre sur les Mathématiques qu'il faut enseigner *

MON CHER WALUSINSKI,

Je voudrais vous dire, pour commencer, à quel point la lecture de votre *Bulletin* me paraît captivante. Pour quiconque s'intéresse à l'éducation en France, il y a des passages des plus instructifs ; pour celui qui s'intéresse à une société de professeurs et à leurs discussions, les nombreux signes de votre activité collective ne peuvent être qu'un encouragement ; pour celui qui veut réfléchir aux diverses manières d'aborder les problèmes de la pédagogie des Mathématiques, vos textes sont une mine. Aussi n'ai-je pas besoin de vous dire que je lis vos *Bulletins* du début à la fin et que j'espère me trouver de plus en plus pris par ce que vous faites en France.

Comme vos textes me font beaucoup penser, il me semble juste de vous faire partager mes réflexions, et si vous les trouvez dignes, je serai honoré de les voir paraître dans les colonnes de votre correspondance.

Vous savez que je consacre une bonne partie de ma vie à l'étude des problèmes que pose l'enseignement des Mathématiques et que mes nombreux voyages m'apportent toujours des données nouvelles que je m'efforce d'intégrer à ma recherche. J'ai ainsi appris à ne plus considérer l'enseignement des Mathématiques comme une affaire appartenant à un pays ou même à un continent, mais comme une activité qui se développe partout, même si c'est selon des modalités diverses du fait des influences historiques et locales. Cependant, j'ai également appris que les inquiétudes de tous ceux qui se préoccupent de ces questions, ici et là, dépassent la pédagogie proprement technique et qu'ils se demandent à quoi, aujourd'hui, sert notre enseignement. En fait, si nous avions des idées plus claires sur notre activité, au lieu d'être inquiets et de consacrer nos énergies à résoudre nos conflits, nous serions tous pris par notre activité et nous prouverions le mouvement en marchant.

Je voudrais faire un peu cela ici-même.

Il semble bien que seule une arrière-garde, nombreuse mais démoralisée, lutte maintenant contre la tendance de ceux qui veulent moderniser les Mathématiques du Secondaire en y faisant régner ce qui domine aujourd'hui la pensée mathématique : la prise de conscience des relations et du dynamisme opératoire.

Mais il me semble que presque personne ne voit encore que les Mathématiques, modernes ou autres, ont, à côté de leur pouvoir de formation spécialisée et intellectuelle, un rôle à jouer dans l'ouverture des esprits sur le monde technologique. Il semble que les professeurs de Mathématiques s'arrêtent à la considération de leur fonction scolaire dans le cadre des programmes, concédant seulement aux professeurs de physique le droit d'exiger, à la rigueur, que certaines questions qui leur servent soient enseignées à certains moments précis des études secondaires.

Ne faudrait-il pas que nous nous attaquions sérieusement à cette question des Mathématiques qu'il faut enseigner pour un but autre que les examens officiels ? D'ailleurs, si les professeurs le veulent vraiment, les programmes et les examens peuvent être changés. Mais, pour le vouloir vraiment, il faut avoir la conviction qu'autre chose, de plus important, pour l'étudiant, que ce à quoi on consacre les heures réservées aux Mathématiques maintenant, existe et est à la portée des nouvelles recrues de l'enseignement.

Voilà pourtant que vos professeurs de physique ont, eux, à faire faire à leurs élèves des études qui couvrent trois siècles de conquêtes scientifiques, et cela en trois ans. A quoi peuvent-ils se consacrer, si ce n'est à une course rapide à travers des notions dites fondamentales ? Il leur faut un outil mathématique qui les aide à aller

(*) Cette lettre n'a aucun caractère personnel. Au contraire, elle intéressera de nombreux Collègues et provoquera, souhaitons-le, de fécondes réflexions.

vite ; il ne faut pas que l'étude de leur cours soit compromise par la nécessité d'enseigner, à un moment précis, les Mathématiques qui leur sont indispensables et qui seraient pourtant en avance sur les programmes officiels de Mathématiques. Cette lutte contre le temps et les programmes, entre physiciens et mathématiciens, est universelle. Elle absorbe toutes les énergies de ceux qui ont, pourtant, un grand désir de résoudre ce problème.

En étudiant cette question d'un point de vue plus détaché, puisque je ne suis pas partie dans le débat, il m'est apparu que la solution ne peut être trouvée en soumettant les programmes de Mathématiques aux besoins des physiciens plutôt qu'aux besoins psychologiques ou affectifs des élèves, et qu'il fallait chercher ailleurs.

Cet ailleurs, aujourd'hui, apparaîtra comme chimérique à cause des difficultés qu'il y aura à le faire accepter. Mais je sais bien que les circonstances et les impasses sérieuses vers lesquelles nous tendons rapidement, viendront réveiller les opposants. J'espère toutefois qu'il y aura quelqu'un, parmi les professeurs qui me liront, qui saura interpréter pour ses collègues la solution esquissée ici et que je vous soumetts comme une affaire urgente.

Le temps de la Mathématique numérique est révolu. C'est-à-dire que les machines résolvent les problèmes. Mais, penser les machines, c'est autre chose que résoudre quelques problèmes numériques. Ces derniers sont du type « atomique » ; les autres du type « agrégats structurés ». Nous devons résolument, en Physique et en Mathématiques, d'abord, changer nos propres habitudes, et ensuite, développer une pédagogie qui rendra facile l'accès aux totalités articulées. Il nous faut nous renseigner sur la façon de penser des ingénieurs des télécommunications, des sociologues, des stratèges et des technologistes et, voyant vers quoi se dirige notre âge, préparer notre jeunesse aux problèmes qu'elle rencontrera, plutôt qu'à ceux, désuets, de nos arrière-grands-pères.

A la suite de cette enquête, relativement aisée et rapide, il devrait être possible de proposer une espèce de programme fonctionnel développé sur les deux classes de la représentation concrète et de la représentation abstraite, allant de l'une à l'autre pour enrichir l'une et l'autre, et tendant à une libération de plus en plus grande de la pensée scientifique des élèves, nos futurs savants et techniciens.

Tout cela est fort vague et risque de ne pas obtenir l'assentiment de vos lecteurs. Mais j'ai eu le loisir de travailler à ce programme fonctionnel depuis trois ans d'une manière détaillée, quoique j'aie été orienté vers ce thème depuis plus de six ans. Etant moi-même parti des sciences physiques et ayant étudié les Mathématiques, momentanément depuis 25 ans, pour mieux m'équiper dans la compréhension des modèles fournis par les physiciens, je crois essentiellement que la tâche est une dans son inspiration, même si, dans le détail, elle se subdivise en deux activités distinctes.

Je commencerais mon enseignement de la physique en Sixième, non pas en donnant seulement à nos élèves des moyens de réaliser certaines expériences, mais aussi avec une étude des champs avec représentation vectorielle. Il suffit d'aller très lentement pour que les élèves acquièrent à douze ans une connaissance de ce que sont des champs uniformes représentés par des vecteurs parallèles et égaux en grandeur et signe, des champs variables et leur représentation par des lignes de force et des vecteurs tangents, compris intuitivement. L'étude se fait en créant des champs physiques et en montrant que certains moyens permettent de les mettre en évidence, mais aussi en schématisant et en utilisant la notation vectorielle. A partir de ces vecteurs, on peut introduire l'addition, la multiplication par un scalaire plus grand ou plus petit que un. De l'addition on tire la somme nulle et les vecteurs opposés, ou la multiplication par un nouveau nombre, le nombre négatif, comme équivalent à une rotation de 180° , suivie d'une multiplication par un scalaire positif.

Ces leçons de Mathématiques-Physique sont aujourd'hui enseignées dans différents pays, à des âges variant de douze à dix-neuf ans. Qu'en concluez-vous ? Pour moi, cette question d'âge est une illusion ancrée dans l'habitude. Le tout est d'aller

très lentement au début, de laisser découvrir les faits, d'aider à les schématiser, de discuter les possibilités de variation des schémas, de les énoncer et de les formaliser enfin. Chemin faisant, nous avons pris conscience de pas mal de choses qui se rapportent à l'algèbre, à la géométrie, à la gravitation, aux champs magnétiques et électro-magnétiques, aux aimants, aux lignes de force, aux tangentes, etc... Nous ne tendons pas à la rigueur, mais à la codification de l'expérience, à la formation de modèles mentaux, quelquefois assistés par le matériel utilisé judicieusement pour produire l'image palpable, et si possible dynamique, de la synthèse.

Evidemment, c'est plus difficile d'enseigner ainsi, mais c'est beaucoup plus intéressant et utile aussi.

Je ne crains pas de mettre les élèves de 12 à 18 ans en présence de circuits pour les faire penser en termes de ces schémas compliqués, afin qu'ils prévoient ce qui se passerait si l'on remplaçait l'un d'entre eux par un ensemble ayant telle ou telle propriété. Une valve et ses caractéristiques, est-ce vraiment si difficile à étudier ? Son étude comporte l'usage de papier quadrillé, le dessin d'un graphique qui a un sens, dont les points particuliers ont un intérêt spécial et dont la pente fournit une valeur importante. Pour tout ce qu'elle nous apprendra, cette étude prend sa place dans le programme, non pas dans le but de renseigner sur les lampes triodes ou autres, comme on le fait à la licence, mais elle nous apprend à connaître une unité essentielle des schémas techniques modernes qui transforment notre planète, tout en servant de prétexte pour l'étude des graphiques, de certaines mesures, de certaines erreurs, etc... Et les moteurs ? Pourquoi retarderions-nous leur étude jusque vers dix-sept ans et les écoles techniques ? Puisque tous les élèves utilisent des moteurs (dans leur tourne-disque ou leur aspirateur, etc...), ils ont déjà une introduction à ce domaine et il est permis d'en démontrer un et de voir comment le champ, à l'intérieur du moteur, entraîne la rotation, donnant une occasion de calculer des tours, d'étudier le groupe des rotations, le travail, la puissance, la consommation, la chaleur dégagée, etc... Ces diverses expériences vont s'organiser, non sous les catégories classiques, mais autour de problèmes, et il suffira qu'un certain nombre de professeurs assez savants et assez ouverts se mettent sur cette piste pour qu'une esquisse de programme en sorte, que l'on pourrait alors soumettre à la discussion de l'ensemble des Collègues.

Les critères que nous employons sont : Est-ce que les élèves peuvent avancer sur ce front élargi et synthétique ? Est-ce qu'en fin de compte, ils sont mieux équipés que leurs prédécesseurs pour servir le commerce et l'industrie de leur temps ? Est-ce que l'idéal de culture est sauf et l'esprit aussi alerte et alerté que par l'enseignement remplacé ? Est-ce que les élèves et leurs professeurs ont moins de causes de conflits et d'insatisfaction ? Est-ce que la structure administrative de notre pays en sort intacte ou améliorée, grâce à cet enseignement à la fois empirique et réfléchi ? Est-ce que la formation des professeurs gagne par là, ou entre dans de nouvelles phases difficiles ?

Et bien d'autres du même genre.

Pardonnez-moi si, tout en étant si long, je n'ai pas su être assez précis et au goût cartésien de mes amis français. Je ne pouvais que vous dire un peu de ce que la lecture de votre revue a éveillé en moi dans ce domaine où il faudrait penser neuf.

C. GATTEGNO.

*Professeur à l'Université de Londres,
Secrétaire de la Commission Internationale pour l'Etude
et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.*

IV. BIBLIOGRAPHIE

L'enseignement des Mathématiques en Allemagne Occidentale *

Nous avons donné précédemment des indications générales sur l'organisation des études et les programmes dans l'Enseignement du Second Degré en Allemagne fédérale. Nous allons examiner maintenant dans quel esprit sont appliqués ces programmes, et quelles sont les méthodes préconisées par nos voisins allemands.

Les communautés de travail. — Cette institution assez particulière était primitivement destinée à procurer l'occasion d'approfondir une matière, de guider les élèves (les plus doués naturellement) dans l'emploi de la littérature mathématique, et cela sans être gênés par la présence d'élèves plus ordinaires. Dans ce but, les plans d'études font quelques suggestions, mais laissent une grande liberté dans le choix des sujets. Citons quelques exemples, dont la plupart ont déjà été rencontrés précédemment :

Cartographie, photogrammétrie, représentation conforme, équations du 3^e et du 4^e degré, théorie des nombres, géométries non-euclidiennes.

Autrefois, ces communautés s'opposaient très nettement au travail collectif de la classe ; mais aujourd'hui se manifeste une inquiétude devant l'évolution indésirable de cette institution. L'enseignement général ordinaire manque de temps, et on se déchargerait volontiers, aux dépens des communautés, d'une partie du programme confié en principe à l'enseignement collectif. Mais tous les élèves ne se sentent pas attirés par les communautés. De là est née l'idée subtile d'« obligation volontaire » dont on ne manque pas de signaler l'hypocrisie et les dangers.

Les méthodes. — L'idée qui doit dominer dans le choix des matières et leur distribution dans les années successives, c'est qu'il ne s'agit pas seulement de développer complètement une science déterminée, mais qu'il faut, avant tout, tenir compte du degré de maturité des élèves. On considère en général qu'il y a, en quelque sorte, plusieurs étages logiques, et on distingue ainsi trois périodes dans l'évolution intellectuelle :

la première, de 7 à 12 ans, où l'enfant est tourné vers l'action immédiate ;

la deuxième, qui va de 12 à 15 ans, qui est l'époque de l'intuition basée sur la conception de l'espace ;

enfin, une période terminale, qui est celle de l'abstraction et de la déduction, et la plus importante ici, puisqu'il s'agit des élèves de 16 à 21 ans.

Pour bâtir un plan d'études, on s'impose donc maintenant que toute matière adoptée soit développée dans chacune des périodes précédentes d'évolution, dans l'esprit approprié à cette période, en s'aidant pour cela de l'expérimentation psychologique. L'importance accordée au point de vue psychologique avait déjà été mise en valeur par Klein, qui avait fait observer qu'on ne peut pas enseigner la géométrie de la même manière à un enfant de 6 ans, ou de 10 ans, ou un adolescent formé. Notons aussi que le souci d'adapter les méthodes à l'âge mental des élèves ne se manifeste pas seulement dans la répartition des matières au cours des années, mais aussi dans leur répartition au cours d'une même année scolaire ; les Instructions pour la Saxe insistent sur le point que la matière doit être distribuée au cours de l'année, non pas selon un plan préconçu, mais en tenant compte de nécessités psychologiques ; pour des raisons analogues, l'étude systématique de sujets tels que les aires, les volumes, la géométrie descriptive est délibérément écartée.

(*) Voir le début de cette étude dans le Bulletin 175.

Il est cependant curieux de remarquer que cette conviction de la dépendance où se trouve le choix des programmes par rapport au développement intellectuel des élèves ne paraît pas avoir une influence décisive sur les plans d'études. Nous avons déjà remarqué qu'il y avait des différences assez sensibles dans les époques où certains chapitres sont abordés, selon les régions. Il en est ainsi par exemple pour les logarithmes. Ces anomalies s'expliquent sans doute par l'importance que les uns ou les autres accordent à des exigences contradictoires. Le souci que les élèves comprennent les logarithmes conduit à en reculer l'étude. Mais, d'autre part, il est désirable que de telles méthodes de calcul soient utilisées le plus possible mécaniquement ; dès lors, on a tenté de ne pas reculer l'étude des logarithmes trop loin, car la satisfaction d'une activité presque mécanique peut se rencontrer chez de jeunes élèves, mais on ne peut l'escompter chez les grands élèves de la dernière période, dont l'apprentissage se fera difficilement et non sans fatigue ou dégoût.

De même, il est choquant de voir le calcul infinitésimal abordé avec trois ans d'écart selon les régions. Si l'on pense à la physique, il est très désirable que les élèves disposent au plus tôt de cet instrument de calcul ; mais si l'on pense aux difficultés qu'il y a à en donner un exposé clair et sûr, surtout à de jeunes élèves, on comprend que certains préfèrent, pour enseigner les éléments du calcul infinitésimal, que les élèves soient formés physiquement et intellectuellement, et soient parvenus au stade final de l'abstraction.

Mais s'il y a ainsi des différences assez sensibles d'une région à l'autre, il faut aussi reconnaître un caractère commun à tous les plans d'études : c'est leur prédilection pour la géométrie, les analogies et représentations géométriques, les méthodes graphiques, l'emploi du calcul vectoriel, en même temps que disparaissent des questions d'analyse qui avaient de l'importance il y a une trentaine d'années. Partout on apprécie la géométrie en tant que domaine privilégié de l'intuition, particulièrement commode pour s'élever au point de vue abstrait et déductif.

Certains remarquent cependant que les considérations d'algèbre ou d'analyse demandent une grande capacité d'abstraction, qu'il existe des types d'esprit qui possèdent ces qualités, et qu'il est regrettable de les négliger.

Le travail des élèves. — Les travaux sont, soit libres, soit obligatoires. Dans les premiers, c'est l'élève lui-même qui se fixe son objectif ; dans les seconds, c'est le maître qui dirige les élèves. On parle aussi beaucoup du travail d'équipe ; on considère que la classe est une salle destinée à la collectivité, à côté de laquelle doit se trouver un local réservé à des groupes de quatre ou cinq participants ; chacun de ces groupes s'efforce d'apporter sa contribution à un problème que la classe s'est posé collectivement. Dans certaines écoles modernes, on trouve ce local à côté de chaque classe, dont il est séparé par une cloison vitrée, ce qui permet à la classe de n'être pas dérangée par les conversations des membres de l'équipe. Grâce à cette organisation, on se promet une meilleure émulation, l'entraînement du faible par le meilleur, un développement de la personnalité, et la suppression des inhibitions ou complexes.

Le travail par équipe est particulièrement conseillé pour la géologie, mais on estime qu'il peut avoir son utilité pour les Mathématiques, si toutefois on limite son ambition ; on cite, par exemple, des études sur des courbes qui n'auraient pas été étudiées en classe, à condition de limiter rigoureusement le champ de ces recherches.

Le travail par équipe est pratiqué couramment dans l'enseignement élémentaire ; on ne le trouve pas déplacé dans les lycées, tout en percevant clairement ses limites.

Nombreux sont ceux qui lui reprochent de favoriser pratiquement une sorte de parasitisme : les meilleurs membres de l'équipe, seuls, travaillent, les autres se contentent d'un rôle purement passif.

Les buts. — L'enseignement mathématique ne doit jamais perdre de vue sa mission pédagogique, qui est, par l'exemple d'un développement irréprochable de la

science mathématique, de contribuer au développement spirituel de la jeunesse, et à la formation de précieuses qualités : loyauté vis-à-vis des conclusions de la pensée personnelle, objectivité dans la formation des opinions, persévérance dans la poursuite d'un but qu'on s'est proposé, scrupule et rigueur dans l'activité intellectuelle et manuelle, capacité de se passionner pour le travail et les problèmes, autodiscipline dans la concentration de l'attention, tout cela peut et doit inspirer l'enseignement mathématique de la jeunesse.

On insiste sur ces idées ; ce n'est pas l'acquisition de la connaissance qui est le but, c'est la culture, et la connaissance n'est pas culture. Les connaissances nues sont un moyen, et non un but, selon une opinion du philosophe Jaspers, qui est citée à l'appui ; on peut les utiliser, mais elles demeurent pour l'homme un bien qui lui reste extérieur.

L'idée de collectivité. — Se plaçant maintenant sur un terrain très pratique, on attache aujourd'hui une grande importance au fait que l'enfant montre beaucoup d'intérêt pour les rapports sociaux et les exigences de la vie collective. D'où un effort pour que le travail en commun puisse servir aussi à développer le sens de la communauté, par exemple en proposant des problèmes à caractère social ou pratique, se rapportant à des questions de la vie quotidienne.

Le point de vue historique. — Une critique a été faite souvent à l'enseignement des Mathématiques : de ce monde de formes abstraites, l'homme est singulièrement absent, et cette discipline ne peut conduire qu'à une culture incomplète. Pour répondre à cette objection, on a songé à recourir à des notions historiques, qui étudieraient la vie, l'œuvre et le caractère des grands mathématiciens. Mais cela ne va pas sans difficultés ; on n'a guère de détails sur la vie et le caractère des grands savants des temps anciens, et pour les savants modernes, ces détails risquent de manquer d'intérêt, ou de tomber dans l'anecdote futile.

On peut aussi songer à l'histoire de la civilisation intellectuelle, dans la mesure où elle se rattache aux Mathématiques. Les documents sont malheureusement assez rares sur ce sujet, et l'on ne cite guère sur ce point que le beau livre de P. HAZARD sur la « Crise de la conscience européenne », qui a été traduit en allemand en 1939 ; on y trouve en effet des renseignements précieux sur le développement des sciences au XVIII^e siècle et sur la faveur qu'elles connurent à cette époque dans toutes les classes de la société. Et ce serait une occasion, même pour nous, de faire comprendre aux élèves combien les conditions de la recherche scientifique étaient alors différentes de ce qu'elles sont aujourd'hui.

La médiocrité des organismes scientifiques, l'absence de moyens de diffusion, font qu'il est difficile d'attribuer exactement les grandes découvertes de cette époque. C'est pourquoi on est amené à un autre aspect de l'étude historique, l'étude, non plus des hommes, mais des idées. On chercherait alors à exposer de grands « thèmes », d'une manière analogue sans doute à celle dont sont traitées les notes historiques de notre « Bourbaki ». Citons, par exemple :

— les coniques, avec leur point de départ dans le problème de Délos, puis Apollonius, Hippocrate, Ménechme, Dürer, Képler, Desargues, Pascal, Brianchon, Poncellet et la géométrie projective ;

— le calcul infinitésimal, Archimède et ses travaux sur le cercle et la sphère, le segment de parabole ; Galilée, Képler, Cavalieri, Pascal, Huygens, Barrow, Leibniz, Newton, les Bernoulli, Euler, Gauss, Cauchy ;

— le développement de l'algèbre, avec les contributions des diverses nations, depuis l'Égypte, la mathématique hellénistique, l'Inde, les Arabes, l'essor de la Renaissance avec l'équation du 3^e degré ; Viète enfin, puis Abel. A ce propos, certains plaident la cause de l'équation du 3^e degré, et prétendent que c'est un pauvre point de vue de boutique que d'éliminer cette équation des programmes sous prétexte qu'elle ne sert à rien et ne donne pas beaucoup d'occasions de problèmes, alors qu'elle est à

l'origine de l'algèbre moderne et de l'invention des nombres complexes. Il est vrai que, par contre, et pour montrer peut-être ce qu'il ne faut pas faire, on fait des allusions ironiques à des tournois plus ou moins ridicules où s'affrontaient des algébristes, devant des souverains, voire des empereurs, en Italie ou ailleurs.

D'après ce qui précède, le lecteur s'apercevra sans étonnement que les questions et les problèmes qui préoccupent aujourd'hui les mathématiciens de l'Allemagne fédérale sont identiques à ceux que nous débattons. Et nous en avons ainsi terminé avec les considérations générales concernant l'enseignement des Mathématiques en Allemagne. Notons encore que cette partie de l'ouvrage que nous étudions s'achève par une réflexion à la fois confiante et désabusée. Songeant à la variété des méthodes envisagées, à la richesse des idées agitées, l'auteur termine par une réflexion de Kant, qui s'appliquait, il faut le dire, aux théories philosophiques :

« Les doctrines ont pour la plupart le destin des opinions ; ce sont des météores dont l'éclat ne signifie rien pour ce qui est de leur durée. Elles s'évanouissent, mais la Mathématique demeure. »

(*A suivre*).

A. HUISMAN.

La géométrie euclidienne.

Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne, par R. BRISAC (Gauthier-Villars, éditeur).

Cet ouvrage terminé en avril 1947 par Robert BRISAC, quelques mois avant sa disparition, vient seulement d'être publié par Gauthier-Villars. Ce livre doit rendre de très grands services à tous nos collègues qui enseignent la géométrie élémentaire et auxquels il est d'abord destiné.

Nous nous permettons, pour le présenter, de citer quelques phrases de la préface écrite par M. DE POSSEL, professeur à la Faculté des Sciences d'Alger :

« Sans prétendre faire entrer le présent exposé dans leur enseignement, tout au moins sous la forme actuelle, celui-ci leur permettra — (aux maîtres de l'Enseignement Secondaire) — de dominer les principes de la science qu'ils enseignent, de mieux comprendre eux-mêmes et de mieux faire comprendre aux meilleurs de leurs élèves un des points de vue que l'on peut adopter en géométrie...

« Ce livre s'adresse aussi à toute personne qui s'intéresse à la géométrie sans être initiée aux Mathématiques actuelles et à leur méthode axiomatique. Elle prendra contact avec cette méthode ; elle verra comment, en complétant tant soit peu les traités classiques, on peut parvenir à un exposé complet et rigoureux partant d'un petit nombre d'axiomes et ne faisant aucun appel à l'intuition.

« A l'encontre de l'exposé bien connu de HILBERT, qui prend comme données l'égalité des segments et des angles, celui-ci part de la donnée du groupe des déplacements. »

Extrait de la table des matières

Chap. I. — Droites et plans. — Axiomes d'appartenance. — Axiomes de partage.

Chap. II. — Groupes. Déplacements. — Groupes, groupes de permutations, permutations involutives, éléments invariants, déplacements.

Chap. III. — Les axiomes d'échange et les perpendiculaires.

Chap. IV. — Parallèles. Translations.

Chap. V. — Mesure des translations. — 1) Groupes archimédiens ; 2) Mesure des translations parallèles à une droite.

Chap. VI. — Produit scalaire.

- Appendices I. — Orientation.
 II. — Représentation analytique des déplacements.
 III. — Quelques applications de la mesure des groupes archimédiens.
 Mme DUBOIS-VIOLETTE (*Lycée de Sèvres*).

Photographies astronomiques.

L'Observatoire de Paris édite des photographies astronomiques de haute qualité.
 En voici la liste :

NOM	FORMAT	PRIX
1. Premier Croissant de Lune	18×20	150 F
2. Premier Quartier	»	»
3. Avant la Pleine Lune	»	»
4. Dernier Quartier	»	»
5. Croissant du dernier Quartier	»	»
6. Grande Nébuleuse d'Orion	18×24	»
7. Autour de ζ Orionis La Tête de Cheval	»	»
8. Nébulosités autour des Pléiades	»	»
9. Nébuleuse Dentelle du Cygne	»	»
10. Nébuleuse Messier 8	»	»
11. Nébuleuse Trifide Messier 20	»	»
12. Nébulosités dans la Licorne	»	»
13. Amas globulaire Messier 13	»	»
14. Spirale Messier 31 d'Andromède	»	»
15. Spirale Messier 51 (Chiens de Chasse)	»	»
16. Galaxie de Profil H.V. 24 dans Coma	»	»
17. Saturne et ses anneaux	13×18	75 F
18. La Planète Mars	»	»
19. La Planète Jupiter	»	»

Les commandes officielles passées par les établissements d'enseignement doivent être adressées au secrétariat de l'Observatoire de Paris, qui fera parvenir les mémoires réglementaires aux services d'Intendance.

Pour les achats à titre individuel, les Collègues sont priés de s'adresser sur place, au secrétariat de l'Observatoire.

G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11^e (C.C.P. Paris 1171-64), peut recevoir et transmettre les commandes des Collègues de province.

A travers les revues

Le signe (p) figure après les titres de revues dont les sommaires ne sont que partiellement reproduits.

REVUE D'HISTOIRE DES SCIENCES et de leurs applications, tome VIII, n° 3, juillet-septembre 1955 (p) : P. SPEZIALI, Une correspondance inédite entre Clairaut et Cramer ; M. DAUMAS, Nouvelles sources imprimées sur Lavoisier.

L'EDUCATION NATIONALE, n° 3, 19 janvier 1956, (p) : R. DONTOT, Les problèmes spéculatifs en Mathématiques.

NOUVELLES MATHÉMATIQUES INTERNATIONALES, décembre 1955.
BOLLETINO DELLA UNIONE MATEMATICA ITALIANA, série III,
anno IX, N. 4, décembre 1954.

THE MATHEMATICS TEACHER, volume XLVIII, n° 8 (p) : F. Lynwood WREN, Mathematics in focus ; H. O. MAYER, Testing with a tangram ; W. N. JACKSON, The role of algebra in the development of relational thinking ; M. SMITH, Integrated Mathematics and Physics ; B. RICH, The place of the variable in the teaching of mathematics ; G. HENDRIX, Developing a logical concept in elementary mathematics ; L. G. YODER, Mathematics and the technical manpower shortage.

REVISTA DE LA SOCIEDAD CUBANA DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS, vol. 3, n° 4.

GAZETA DE MATEMÁTICA (Lisbonne), n° 60-61 (juillet 1955) (p) : Le premier centenaire de la naissance de Henri Poincaré, par Ruy Luís Gomes, Texte de Poincaré : « L'état actuel et l'avenir de la Physique Mathématique » (en français).

EUCLIDES, revue de l'Association des professeurs de Mathématiques des Pays-Bas, 31^e année, volumes 1 et 2.

BECHNK, Bulletin de la Société des Mathématiciens et des Physiciens de la République Populaire de Serbie, 1954 (1 et 2) ; 1955 (1 et 2).

GLASNIK, Périodique de la Société de Mathématiques et de Physique de Croatie, série II, tome 10, 1955.

LES HUMANITES SCIENTIFIQUES, 23^e année, n° 2 (nov. 1955) (p) : Numération duodécimale et notation musicale, par G. LERAT. — N° 3 (déc. 1955) (p) : Les logarithmes à 7 décimales par une table d'une page, par EHRHART. — N° 4 (janv. 1956) (p) : Les belles figures géométriques, par V. THIBAUT.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPECIALES, 66^e année, n° 5 (déc. 1955) (p) : Une notation qui facilite l'étude de la matrice inverse d'une matrice régulière carrée, par M. BERNARD (Grenoble).

ANNALES D'ASTROPHYSIQUE, tome 18, n° 4 (1955) (p) : J. DUQUESNE et E. SCHATZMAN, Sur l'interprétation des mesures de vitesse radiale des étoiles pulsantes.

L'ASTRONOMIE, novembre 1955, (p) : A. DOLLFUS, Etude visuelle et photographique de l'atmosphère de Vénus.

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS

Agrégation de Mathématiques (Hommes)

(SESSION DE 1955)

Rapport de M. l'Inspecteur général DONTOT, Président du jury

Le jury était composé de M. DONTOT, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. MILLOUX, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, vice-président ; M. GAUTHIER, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy ; M. THÉRON, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Saint-Louis (annexe Stanislas) ; M. POUGNAND, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Janson-de-Sailly.

ÉPREUVES ÉCRITES

Elles ont eu lieu les 31 mai, 1^{er}, 3 et 4 juin, de 8 heures à 15 heures (ce qui constitue une innovation).

L'augmentation du nombre des candidats est sensible : 218 inscrits (au lieu de 187 en 1954), 191 composants (au lieu de 158) ; 182 (au lieu de 143) ont terminé les épreuves écrites. Parmi les candidats ayant terminé les épreuves écrites figurent 11 élèves de l'Ecole Normale Supérieure, rue d'Ulm, 17 élèves ou anciens élèves de l'E.N.S. de St-Cloud, 20 étudiants libres, 23 élèves des centres pédagogiques régionaux, 9 adjoints d'enseignement. Le nombre des candidats étudiants est une constante de l'agrégation, ou à peu près (20 en 1955, 21 en 1954, 19 en 1953), celui des candidats élèves dans les C.P.R. augmente (23 en 1955, 12 en 1954) au fur et à mesure que les préparations s'organisent, ce qui corrobore une opinion souvent exprimée, mais l'augmentation la plus sensible est celle du nombre des candidats qui, professeurs en exercice, souhaitent changer de catégorie et de certifiés devenir agrégés.

Le jury s'est réuni au Lycée St-Louis le 28 juin pour fixer la liste des admissibles. La composition de mécanique ayant été spectaculairement mauvaise, malgré, ou peut-être à cause de la belle simplicité du sujet, il a dû consentir à regret à proposer pour l'admissibilité tous les candidats ayant totalisé 25,5 sur 80 pour les quatre compositions écrites, c'est-à-dire ayant une moyenne de 6,4 sur 20, une des plus basses depuis 1946 ; 48 candidats ont pu, dans ces conditions, être déclarés admissibles.

La liste des admissibles en 1955 a compris neuf professeurs de lycées, six de collèges, deux professeurs de l'enseignement technique, deux assistants de Faculté et cinq élèves des centres pédagogiques régionaux, soit au total vingt-quatre candidats (contre vingt-sept en 1954) déjà dans les cadres du Second Degré, de l'Enseignement Technique ou de l'Enseignement Supérieur. Parmi les candidats étudiants nous dénombrons dix normaliens de la rue d'Ulm, neuf de St-Cloud et cinq étudiants libres, au total vingt-quatre candidats non encore dans les cadres de l'un des trois ordres d'enseignement.

Parmi les quarante-huit admissibles figuraient quatorze admissibles des sessions antérieures.

Le pourcentage des admissibles par rapport aux candidats ayant subi la totalité des épreuves écrites est de 27 % ; il était en 1950 de 18 %.

**

Les compositions écrites ont donné lieu aux observations suivantes :

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Correcteur : M. POUGNAND

Analyse : Le texte propose aux candidats une étude sur les sphères $S(P)$ dont le rayon est proportionnel à la distance du centre P à une droite fixe (D) . Ces sphères sont soumises à d'autres conditions géométriques, — soit dans la partie II A d'être centrées sur une droite fixe (Δ) , — soit dans II B d'être centrées dans un plan fixe (R) contenant (D) et d'être tangentes à une sphère fixe (V) , — soit dans II C d'être tangentes à (V) et orthogonales à une autre sphère fixe (T) . La recherche utilise les propriétés des cercles focaux d'une conique. Les propriétés des cercles focaux centrés sur l'axe focal ont été jugées classiques et la lecture des copies a confirmé ce point de vue ; pour la deuxième famille, moins connue, une étude particulière a été demandée dans la 1^{re} partie de géométrie plane.

Cette première partie d'ailleurs ne semble présenter aucune difficulté notoire. Elle a été traitée plus ou moins grossièrement par la majorité des candidats. Peu de solutions élégantes et précises. Les principaux reproches portent sur :

- l'abus de la géométrie analytique ;
- le manque de précision, soit dans l'examen des questions, soit dans les discussions ;
- l'analyse trop superficielle du texte.

L'épreuve de géométrie du concours a pour but de mettre en évidence les qualités et les connaissances en géométrie pure des futurs professeurs. Il est souvent possible — et c'est normal — d'en traiter une grande partie par la géométrie analytique. Mais ce procédé, qui n'est pas dans l'esprit du texte, est, dans la plupart des cas, bien lourd. Est-il de plus à la portée d'élèves de Mathématiques Élémentaires ou de Mathématiques Supérieures ? Nous en doutons vraiment en relevant les maladresses et les fautes qui émaillent ces pages de calcul qui constituent l'essentiel de trop nombreuses copies. Nous sommes, au contraire, persuadés que beaucoup de candidats trouveraient avantage à aborder d'abord avec calme et méthode l'analyse géométrique de la figure. Ils y gagneraient du temps et une vision plus claire de la trame du problème, de l'objectif à atteindre. Plus de la moitié des candidats, par exemple, ont jugé indispensable, dès la première question, d'égaliser, après des calculs laborieux, les ordonnées de la médiatrice de BB' et de l'axe radical ; beaucoup ont aussi construit lourdement, par des calculs analytiques plus ou moins déguisés, l'équation du lieu de M et M' . En réalité, une solution géométrique se dégageait directement de la définition et des propriétés classiques de la conjugaison de F et B par rapport à (Γ) :

— le cercle FBB' est orthogonal à (Γ) et (Γ') ; donc centré sur l'axe radical [voir aussi application dans (II, A 2)] ;

$$-\frac{MF}{MB} = \frac{M'F}{M'B} = \sqrt{\frac{AF}{AB}} = e, B \text{ décrivant une parallèle à } (\Delta).$$

Est-ce trop demander ?

Combien de candidats aussi n'ont pas vu que l'étude extrêmement facile de la réalité de M et M' , demandée dans I, 2°, facilitait l'étude du lieu de M et la solution de I, 3° en permettant d'affirmer que par tout point de la courbe (E) passe un cercle (Γ) réel qui lui est tangent ? Au sujet de ces lieux, nous attirerons, selon la coutume, l'attention des candidats sur la définition du mot « lieu » ; trop souvent encore, la recherche du lieu géométrique d'un point M se réduit à celle d'une courbe sur laquelle se trouve nécessairement le point M . Une dernière remarque au sujet de la discussion qui termine la 1^{re} partie. Les centres des cercles $C(P)$ qui passent par un point Q arbitraire du plan sont à l'intersection de l'hyperbole (E) et de l'axe radical (L) de (Γ) et du cercle point Q . Cette droite (L) , extérieure ou tout au plus tangente à (Γ) , coupe la droite MM' en dehors du segment MM' . Elle coupe donc (E) en deux points réels distincts à distance finie ou à l'infini ; il n'y a exception que si Q est en M ou M' . Cette discussion jette quelque lueur sur l'enveloppe des cercles $C(P)$ dans le cas où (E) est une hyperbole.

La partie II, A a été assez bien traitée par ceux qui l'ont abordée. Deux constatations à faire :

1) une trop faible minorité de candidats a fait une épure ; en choisissant les plans de projection de façon à rendre (D) verticale et (Δ) frontale, les résultats essentiels apparaissent immédiatement ;

2) la recherche de la méridienne se rattache naturellement à la 1^{re} partie. Pour $k = k_0$, les sphères $S(P)$ forment un faisceau linéaire à cercle de base réel ; leurs grands cercles méridiens dans un plan méridien donné passent par deux points fixes F et F' . Pour $k \neq k_0$, le rayon de $S(P)$ est donc $\frac{k}{k_0} PF$.

Signalons aussi une erreur ahurissante sous la plume d'une dizaine de candidats : « Les plans médiateurs de HH_1 et KK_1 se coupent suivant une droite dont tous les points sont équidistants de H, H_1, K, K_1 . » Passerait-il ainsi une infinité de sphères par quatre points non coplanaires ?

La partie II, B a achevé la déroute des candidats qui se sont perdus dans une étude pseudo-analytique ou dans des inversions correctes mais stériles. La propriété

du point de contact de deux sphères tangentes d'être pour elles un centre d'homothétie est-elle si peu connue ? Elle permet d'associer de suite à (D) deux droites fixes (d) et (d') parallèles à (D), situées à la distance $k\rho$ du point V dans le plan (R') parallèle à (R) mené par V. Le lieu de s , les deux familles (Φ) et (Φ'), les hyperboles (L) et (L') lieux de P, le faisceau linéaire des sphères orthogonales (Ω) apparaissent alors aisément. Les sphères (W) peuvent être obtenues simplement par la remarque suivante : (V) est centrée au sommet d'un cône de révolution contenant (L) et les sphères S(P) sont tangentes à deux sphères particulières (W_0) et (W_1) centrées aux foyers F et F' de (L). Par une dilatation du rayon, on passe des sphères S(P) à des sphères concentriques passant par F [ou (F')] et touchant le parallèle de contact du cône et de sa sphère inscrite tangente en F au plan sécant (R). Il suffit de généraliser et de considérer tous les cônes de révolution contenant (L). La deuxième question de II, B propose la construction de la figure précédente en supposant (Ω) connue et (V) inconnue. Elle permet l'étude, lorsque $k > 1$, de la famille des cercles S(P) d'un plan coupant une droite (D) sous un angle constant et orthogonaux à un cercle ou à un pseudo-cercle connu, (A). Ce cercle (A) apparaît, suivant les cas, comme un cercle focal de la 1^{re} famille ou de la 2^e famille. Là encore, s'appliquent les résultats de la 1^{re} partie.

La partie II, C a été abordée par un ou deux candidats « voltigeurs », qui ont sauté par-dessus bien des études précédentes. Aucun objectif intéressant n'a été atteint. Cette question assez difficile a été notée hors-barème.

Résultats. — La moyenne des notes atteint 6,5. Elle est meilleure que celle de l'an dernier. Mais cela semble dû au caractère assez classique et élémentaire de la première moitié du problème. En réalité, les candidats ont été arrêtés dès les premières difficultés sérieuses. Il n'y a pas de bonnes copies, complètes ; ou bien le candidat est allé assez loin en laissant de sérieuses lacunes au début, ou bien, et c'est le cas général, il s'est borné à traiter plus ou moins solidement les premières questions.

Finalement, sur 191 copies, la meilleure note attribuée est 13, avec quelque générosité d'ailleurs ; deux copies l'ont méritée ; 26 copies ont une note supérieure ou égale à 10 ; 110 copies, assez également réparties, ont été cotées entre 5 inclus et 10 (exclu). Dans l'ensemble, épreuve honnête mais terne, qui n'a mis en évidence aucune brillante individualité.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Correcteur : M. THÉRON

Le nombre des copies corrigées s'élève à 186. La courbe de répartition des notes se compose d'une part de deux « courbes en cloche » presque parfaites, la première va des notes 0 à 2 inclus et comprend 42 points, la seconde va des notes 3 à 10 inclus et comprend 135 points ; d'autre part, de 9 points représentant les meilleures copies et allant de 11 à 16.

Le but de l'étude proposée aux candidats consiste à montrer que, étant donné un faisceau linéaire ponctuel de coniques, on peut en général associer à chacune de ses coniques une conique et une seule du faisceau qui lui soit semblable ; tous les centres de similitude ainsi mis en évidence sont sur une cubique circulaire.

La section I fait étudier un problème projectivement équivalent au premier mais plus accessible.

La question 1^{re} demande d'établir deux systèmes (S) et (S') qui ont chacun leur importance pour la suite. (S) a été trouvé par presque tous les candidats, une quarantaine n'a pu aller plus loin et les notes correspondantes remplissent la première courbe en cloche. Malgré les indications de l'énoncé, beaucoup de candidats ont explicité tout au long les expressions des dérivées partielles, d'où des calculs fort

pénibles. Comme les relations $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ sont données dans l'énoncé, plus des

deux tiers des candidats les ont établies sans soin, beaucoup en particulier ont supprimé sans précaution un facteur $\alpha - \beta$ qui s'introduisait dans leurs calculs. La question relative à l'équivalence de (S) et (S') fut presque partout mal traitée : beaucoup se sont contentés d'une affirmation, d'autres n'ont pu aboutir que moyennant certaines réserves (par exemple $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$) ; deux copies sont irréprochables : en écrivant respectivement $A = O$, $B = O$, $C = O$ et $A = O$, $B = O$, $C' = O$ les conditions essentielles de (S) et (S') elles établissent une identité de la forme

$$C - 2C' = KA + K'B.$$

Enfin presque tous les candidats ont omis de noter explicitement les conditions $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq \mu$ imposées par l'énoncé, oubli qui a entraîné des erreurs dans les questions suivantes.

La correction de la question 2° montre que les candidats ne savent pas lire un énoncé. Celui-ci dit en effet : « Montrer, à l'aide des systèmes (S) et (S')... », or presque tous sont partis de (S) seul, ou de (S') seul et n'ont pu aboutir à rien de sensé. 24 concurrents seulement (soit 13 %) ont songé à utiliser les équations $C = O$ et $C' = O$, de la forme $F + vG = 0$ et $F' + vG' = 0$ qui donnent immédiatement une condition nécessaire par élimination de v . Cependant trois candidats, partis d'un seul système ont réussi le tour de force de trouver ainsi l'équation de (Γ) ; mais que de temps perdu. La définition géométrique de (Γ) est immédiate à partir des équations ci-dessus : M_0 est à l'intersection d'une conique du faisceau avec la polaire de O par rapport à cette même conique, donc (Γ) est le lieu des points de contact des tangentes menées de O aux coniques du faisceau. Deux candidats ont donné cette interprétation.

L'énoncé indique le degré de la courbe (H) demandée dans la question 3° pour aider les candidats à découvrir la mise en facteur de $\alpha - 1$ et de $\beta - 1$ respectivement dans la première et la seconde colonne du déterminant que l'on obtient aussitôt. A première vue le lieu semble donc constitué par la courbe (H) et par les droites d'équations $\alpha - 1 = 0$ et $\beta - 1 = 0$. Une discussion assez délicate est nécessaire pour s'assurer que, compte tenu des hypothèses sur A , A' et B'' , les droites sont à rejeter. Mais les candidats, sauf quatorze, qui ont montré quelques scrupules, n'ont pas été embarrassés pour si peu : les uns ont oublié les facteurs gênants, les autres ont écrit : « On a vu que toute solution $\alpha = 1$, $\beta = 1$ est à rejeter comme donnant des coniques C_μ et C_λ non distinctes, donc nous pouvons supprimer le produit $(\alpha - 1)(\beta - 1)$. » Ils ont ainsi confondu « $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ », avec « $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$ ». Quatorze candidats ne savent sans doute pas éliminer deux inconnues entre trois équations linéaires à l'aide d'un déterminant ; ils ont résolu deux équations et porté dans la dernière. La phrase : « Etudier le nombre et la disposition des points d'intersection... » n'a guère attiré l'attention, elle était destinée à faire découvrir la symétrie de (H) par rapport à O , utile pour montrer l'unicité de C_μ demandée dans la question 4°.

Cette question 4° est alors immédiate : la symétrie de (H) montre que les transformations T_0 et T'_0 conduisent à la même conique C_v d'équation $F + vG = 0$, la droite $M_0M'_0$ est la polaire de O par rapport à C_v . Toutes ces polaires passent par un point fixe, car leurs équations dépendent linéairement du paramètre v . Trois candidats ont répondu à cette question.

La section II conduit au but visé, mais quelques candidats seulement ont montré le lien entre les deux sections. Quatre ont pu montrer que pour obtenir O , il faut prendre la conique de Φ passant par le point cyclique I , celle passant par le point J , puis chercher l'intersection de leurs tangentes respectives en I et J .

Les calculs des coordonnées u_0 et v_0 demandés dans la partie 2° ont été menés à bonne fin par deux candidats ; la recherche de l'afixe $w_0 = u_0 + iv_0$ permet de ne faire qu'un seul calcul.

La partie 3° a été abordée par tous ceux qui ont cherché à glaner quelques points, personne n'a traité sa fin (décomposition de la courbe Γ).

L'impression d'ensemble n'est pas très encourageante. D'une part, si les deux meilleures copies notées 16 et 15 sont très bonnes, le nombre des bonnes copies est trop faible (une note 13, trois 11,5 et trois 11). D'autre part, les fautes les plus fréquentes relevées dans ce rapport montrent que trop de copies révèlent chez leur auteur des défauts, imprécision, confusion, manque de logique, manque de rigueur, que les maîtres ont précisément pour mission de pourchasser chez leurs élèves.

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Correcteur : M. MILLOUX

Le problème se compose de cinq parties, dont la difficulté est croissante. En fait, les véritables difficultés ne commencent qu'au quatrième paragraphe.

Le premier paragraphe propose de calculer la somme d'une série trigonométrique simple, puisqu'elle se rattache immédiatement à la série géométrique. Puis on demande d'intégrer deux fonctions trigonométriques ; les résultats s'obtiennent sans peine à partir du précédent. Pour éviter, dans les applications ultérieures, des catastrophes provoquées par des erreurs de calcul, la somme de la série et les valeurs des intégrales sont précisées dans l'énoncé. A part deux exceptions, tous les candidats ont traité ce premier paragraphe, convenablement quant à la majorité d'entre eux. Cependant, un certain nombre, méprisant une note préliminaire leur demandant de justifier leurs opérations, n'ont produit que des calculs formels ; d'autres, une trentaine tout au plus, moins prudents que les précédents, ont fourni des justifications fausses, confondant pour la plupart les convergences absolue et uniforme. Les uns et les autres ont eu leurs notes diminuées en conséquence. De plus, l'attention du correcteur se trouve évidemment attirée sur leurs cas, pour le reste de la solution. Effectivement, la suite montre, sans exception pour ces deux groupes de candidats, que leurs connaissances en analyse sont vraiment trop fragiles, et suspectes. Ainsi, un premier paragraphe très simple permettrait d'éliminer à coup sûr les candidats qui ne sont pas au niveau de l'Agrégation.

Le second paragraphe comporte l'établissement d'une formule fondamentale, immédiate à partir des résultats du premier paragraphe par développement en série et intégration terme à terme, lorsque les conditions correspondent à la convergence uniforme. Notons ici que certains candidats, heureusement peu nombreux, et faibles d'après leurs solutions du premier paragraphe, se sont égarés en partant des formules de Cauchy ; on pouvait le faire, mais avec quelle peine ! Ensuite, la formule fondamentale est à démontrer dans un cas un peu plus épineux, par utilisation de la continuité uniforme : les candidats se sont déjà bien dispersés sur cette question, un certain nombre, assez important, maniant des séries dont ils ne savent même pas si elles convergent ou non ; en fait, en général, elle divergent ! Enfin, le paragraphe se termine sur un exemple, proposé en vue d'une application ultérieure ; cet exemple conduit au calcul d'un module et d'un argument : que de fautes sur des questions aussi élémentaires !

Dans le troisième paragraphe, la formule fondamentale est à démontrer lorsque la continuité cesse d'être réalisée à la frontière, mais seulement dans un cas spécial : un seul point de discontinuité, qu'il suffit d'isoler pour retrouver la continuité uniforme, et hypothèse permettant visiblement de considérer l'accident isolé de la discontinuité comme négligeable. Ici, les candidats peu sûrs d'eux sur la convergence et sur la continuité sont tombés à cœur-joie dans le galimatias. Plus celui-ci est long, obscur et confus, semblent-ils supputer, plus on a de chances d'égarer le correcteur. Le paragraphe se termine sur une application, où l'on doit rechercher la forme d'une certaine fonction dont la dérivée se laisse facilement calculer sur un segment de l'axe réel. Bien peu de candidats, quelques unités tout au plus, se sont rendu compte

qu'il fallait justifier le passage de l'axe réel au reste du domaine d'holomorphie. Bien peu également ont su correctement vérifier l'hypothèse restrictive relative à la discontinuité.

Le quatrième paragraphe a trait à l'étude du cas où la dérivée d'une fonction holomorphe dans le cercle unité tend vers une limite finie lorsque la variable tend vers un point du cercle, d'abord radialement, puis d'une façon quelconque. La première partie se résout par l'étude de trois intégrales ; elle est immédiate pour les deux premières, moins facile pour la troisième. Une vingtaine de candidats ont résolu cette première partie, soit complètement, soit partiellement. La seconde partie (recherche d'une condition suffisante pour que la dérivée tende vers une limite finie) est plus difficile, et nécessite une certaine dextérité ; elle n'a été traitée correctement et à peu près complètement que par deux candidats.

Enfin, le cinquième paragraphe revient sur l'exemple étudié au deuxième, pour généraliser l'allure en un point frontière. Il était réservé aux très bons candidats ; en fait, seuls les deux qui viennent d'être cités ont obtenu des résultats intéressants sur cette fin de problème.

On trouve ainsi deux excellentes compositions, cotées respectivement 19,5 et 19, ayant chacune ses qualités propres. Ensuite, un vide important sépare du troisième, qui n'obtient que 13 points. Les notes s'égrènent comme d'habitude, jusqu'à l'énorme masse des candidats aux connaissances incertaines.

Cependant, il n'y a pas lieu d'être mécontent. Si la véritable tête ne comprend que deux candidats, par contre les 70 premiers sont meilleurs que ceux de l'an dernier : 21 candidats ont 10 ou plus (12 l'an dernier) ; 40 ont 8 ou plus (26 l'an dernier) ; 53 ont 7 ou plus (38 l'an dernier) ; enfin, 69 ont 6 ou plus (59 l'an dernier). Ces observations encourageantes ne sont pas, semble-t-il, uniquement une conséquence de l'augmentation du nombre des candidats (184 ont composé en analyse, contre 147 l'an dernier) mais surtout du niveau plus élevé des candidats moyens. Par contre, la moyenne générale des notes est un peu plus basse que celle de l'an dernier : 5,5 contre 5,6.

Il me semble bien inutile de reproduire dans ce rapport les sottises rencontrées chez certains candidats ; ce sont en général celles qui ont été relevées en 1954. Ceci prouve qu'un groupe de candidats médiocres ne lit pas les rapports d'agrégation.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

Correcteur : M. GAUTHIER

Le sujet proposé était un problème d'oscillateurs linéaires tout à fait classique, qui est à l'origine de l'étude de l'effet Raman, et de la théorie des filtres passe-bande. On comparera avec intérêt cet énoncé avec celui proposé en 1943 à l'agrégation masculine des Sciences Physiques : dans ce dernier, il s'agissait d'une chaîne d'oscillateurs rectilignes ; dans celui proposé en 1955, d'une chaîne d'oscillateurs en rotation. Pour sacrifier aux usages, la variable s'appelait θ au lieu de x , et ce n'est pas une modification bien substantielle. Cependant, le fait que la variable était angulaire, a troublé certains candidats, qui mêlent agréablement les $2k\pi$ sans se soucier de la signification physique des angles considérés. La moitié des candidats n'a pas eu l'idée de prendre un repère en rotation uniforme et c'est seulement après l'intégration des équations, avec second membre, du mouvement absolu, qu'ils se sont aperçus du rôle joué par les angles relatifs.

Dans la première partie on étudiait une chaîne de longueur finie, d'oscillateurs identiques. Pour rendre la difficulté progressive, on commençait par étudier deux oscillateurs, puis cinq, puis n quelconque, enfin un passage à la limite pour $n \rightarrow \infty$.

Dès l'étude de deux oscillateurs, le système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants a effrayé plus de 50 candidats :

$$\begin{aligned}x'' + 2x &= y, \\ y'' + 2y &= x,\end{aligned}$$

l'énoncé invitait pourtant à considérer $(x + y)$ et $(x - y)$. Il est vrai que la notion de mouvement antisymétrique n'a pas paru claire à certains candidats qui se livrent à une discussion oiseuse sans avoir compris que la condition

$$f(t + T) = -f(t)$$

(identité par rapport à la variable t , dans laquelle T est une constante convenable) entraîne la périodicité de f avec la période $2T$.

Le cas de cinq oscillateurs conduisait à l'équation caractéristique :

$$x^5 - 4x^3 + 3x = 0.$$

Que penser de quelque quatre-vingts candidats qui sont restés sept heures devant cette équation sans en expliciter les racines ? On se borne à des discours plus ou moins efficients. L'un affirme naïvement : « Il faudrait faire de la question une étude mathématique rigoureuse... » D'autres étalent une science mal digérée qui montre combien ils auraient mieux fait de borner leurs études à des questions plus élémentaires ; n'assurent-ils pas que « l'espace vectoriel des solutions est somme directe topologique (*sic*) de deux espaces vectoriels orthonormés (normés par quoi ?) », ou encore, que « la question ne peut être résolue proprement (*sic*) qu'au moyen des distributions de L. Schwartz ». Doit-on apprendre à ces candidats, certainement distingués pour être si cultivés, que dans un système différentiel elliptique il n'y a pas d'autres solutions que les fonctions, et que ce sont ici d'honnêtes fonctions trigonométriques.

D'autre part, le sens mécanique paraît assez généralement absent des copies : certains désirent qu'on rende les ressorts « physiquement inextensibles » ; d'autres qui n'ont pas su lire « A et B sont *entraînés* par l'axe en rotation uniforme », croient choisir les conditions initiales pour que le mouvement de A et B soit uniforme. Certains candidats partagent le couple $K(\theta_1 - \theta_2)$ exercé par un ressort, par moitié entre les deux poulies terminales, qui reçoivent ainsi chacune le couple $\frac{1}{2} K(\theta_1 - \theta_2)$

exercé dans le même sens ! D'autres, plus savants, utilisant une méthode matricielle, ont sottement écrit l'équation aux valeurs propres de façon que toutes les racines caractéristiques soient doubles : ils écrivent alors la solution en l'agrémentant de parties polynômiales. Que penserait un horloger de tous ces ressorts spiraux dont les extrémités ont un écart angulaire qui tend vers l'infini ? (d'ailleurs, la symétrie de la matrice et sa signification énergétique suffisaient à assurer mathématiquement l'absence de ces parties polynômiales).

Trois candidats seulement se sont aperçus dans leur mise en équation, que, le nombre des ressorts dépassant celui des degrés de liberté, il peut fort bien arriver que la position d'équilibre statique corresponde à un état de tension des ressorts. Tous les autres candidats ont pris comme repère la position pour laquelle tous les ressorts sont sans tension, ou, ce qui revient à peu près au même, un instant initial où tous les θ sont simultanément nuls, sans se préoccuper de l'existence d'un tel repère, ou de l'existence d'une telle éventualité. L'auteur du sujet avait laissé imprécisée la question du calage des ressorts pour pouvoir distinguer les candidats doués d'un certain sens mécanique de ceux qui se précipitent sans discernement sur des équations : trois candidats ont ainsi mérité une bonification de points. L'imprécision laissée dans l'énoncé était, naturellement, sans conséquence pour la suite : la relation

$$C = K\theta$$

donne par accroissement fini des deux grandeurs

$$\Delta C = K \Delta \theta$$

qui montre qu'en prenant comme repère les positions des poulies dans un équilibre statique, les équations du mouvement sont les mêmes que si le calage des ressorts cor-

respondait à un équilibre sans contrainte. Il en est ainsi dans toute la mécanique linéaire, bien entendu, mais ce point ne paraît pas être utilement connu des candidats.

L'étude du cas de n disques n'a été traitée effectivement que par quatre candidats. Le manque de technique mathématique des concurrents est effrayant ; on ne sait pas développer un déterminant ; dans 75 % des copies on écrit la solution générale de n équations différentielles du second ordre comme combinaison linéaire d'exponentielles avec n^2 constantes arbitraires, sans se soucier du fait que $2n$ conditions initiales devraient suffire à déterminer le mouvement. On établit des propriétés liant les polynômes cyclotomiques P_n, P_{n-1} qui signifient que le signe de P_n alterne pour les racines de P_{n-1} et on n'en tire aucune conclusion. Ou bien on affirme avec désinvolture que d'après « le principe (*sic*) de d'Alembert » une équation de degré n admet n racines et on ne se préoccupe aucunement de leur réalité, ni *a fortiori* de leur séparation.

Au surplus, la relation de récurrence directement obtenue entre les angles θ était suffisante pour étudier tout le problème, mais encore faut-il savoir résoudre une relation linéaire à coefficients constants :

$$u_n - au_{n-1} + u_{n-2} = 0.$$

A une époque où l'algèbre et l'analyse linéaire sont tellement à la mode que les Conseils les plus divers demandent sur ces chapitres l'accroissement des programmes d'enseignement, l'indigence des connaissances en ces matières des candidats professeurs inspire de l'appréhension.

Le passage à la limite pour $n \rightarrow \infty$ a inspiré beaucoup de concurrents, qui n'ont eu, hélas ! que l'occasion de montrer ainsi leur faiblesse en analyse. Le système différentiel du second ordre conduisait à l'équation des ondes ; les sommes trigonométriques, solutions du système fini, ont pour limites les séries trigonométriques dont on vérifie sans peine qu'elles sont bien solutions de l'équation des ondes, même si l'on n'a jamais étudié l'intégration de cette équation. Tous les candidats, sauf un, ont considéré comme évidente cette cohérence des deux passages à la limite, sur le système différentiel et sur ses solutions. On remplace une étude mathématique simple par de verbeux souvenirs sur les tuyaux sonores. Quel étonnant sens de l'analyse a conduit une vingtaine de candidats à obtenir comme limite d'un système différentiel du second ordre une équation aux dérivées partielles du troisième ordre ?

La seconde partie présentait l'étude d'une *très longue chaîne* d'oscillateurs. Elle a été abordée par 14 candidats, en général d'une façon insignifiante. La propagation dans une chaîne très longue, d'une oscillation sinusoïdale imposée à une extrémité, qui donne lieu à l'effet Raman, a été très bien étudiée par un candidat. La formation des battements et la notion de vitesse de groupe ne paraissent pas connues des candidats : il s'agit cependant de questions importantes de la théorie des vibrations. Le passage du fini à l'infini, qui conduit des sommes de Gauss aux fonctions de Bessel, et l'étude des chaînes infinies périodiques ne figuraient pas dans le problème de physique de 1943 : leur étude requiert quelque dextérité mathématique et n'avait été ajoutée à l'énoncé que pour le cas où un candidat exceptionnellement brillant aurait eu à se manifester. Aucun concurrent n'a abordé ces questions.

L'orthographe est toujours aussi faible que les années précédentes. Citons par exemple : l'intégral général, la règle de Kramer, le coefficient de frottement, schématique, les *sinq* solutions, les fonctions cosinales, les mouvements sinusoïdaux.

Voici, à titre comparatif, un extrait du rapport de M. CABANNES, qui a proposé le sujet de 1943, et dont j'ai eu communication grâce à l'obligeance de M. M. BRUHAT :

« La composition a été généralement traitée de manière satisfaisante. Les candidats connaissent l'essentiel du programme sur les mouvements pendulaires...

« ...ils ont effectué correctement les calculs, d'ailleurs classiques, qui leur étaient demandés...

« au total 22 des 68 concurrents ont dépassé la moyenne... »

En 1955, en mécanique rationnelle, 182 copies ont été soumises à la correction : une copie excellente a reçu la note 18 ; elle dénote chez son auteur une solide culture et une belle vivacité d'esprit. Les épreuves orales ont d'ailleurs confirmé ces appréciations puisque ce candidat n'a eu aucune difficulté à se placer en tête du classement général.

Quelques autres copies, honnêtes, ont reçu les notes 12 (une fois), 10 (deux fois), 9 (deux fois), 8 (cinq fois). Il y a 34 copies qui ont obtenu des notes supérieures à 5 ; 44 copies notées entre 3 et 5 ; 52 copies notées entre 2 et 3 ; 48 copies inférieures à 2 et quatre copies blanches.

La moyenne des notes est voisine de 3,25, très inférieure à celle des années précédentes.

Aussi ma conclusion sera-t-elle encore plus pessimiste. L'ignorance des candidats à l'agrégation de Mathématiques, sur une question tout à fait importante par ses applications aux Sciences physiques, chimiques et industrielles, leur incapacité à traiter numériquement une question qui n'exigeait aucune connaissance théorique au-delà d'une honnête propédeutique, le succès remporté par un énoncé similaire en 1943 à l'agrégation de physique, montrent assez la chute vertigineuse du niveau de l'agrégation et justifie la méfiance des physiciens et des ingénieurs à l'égard des mathématiciens que nous acceptons ; si cette situation se prolonge, les expérimentateurs ne pourront plus compter que sur eux-mêmes pour traiter les questions de Mathématiques appliquées dont ils ont besoin.

EPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au Lycée Saint-Louis. La liste d'admissibilité ayant été publiée le 28 juin, l'appel de la première série d'admissibles a eu lieu le 2 juillet, celle de la seconde série le 12 juillet à 17 heures. Les épreuves pratiques communes aux deux séries ont été subies le mercredi 13 après-midi (calcul) et le jeudi 14 dans la matinée (épure).

La note, dont on trouvera le texte dans le rapport sur l'agrégation 1954, pages 17 et 18, qui précise les conditions des épreuves orales, a été cette année polycopiée et un exemplaire en a été remis à chacun des candidats. En outre, elle leur a été lue.

Le tirage au sort des leçons jumelées a eu lieu après l'appel des candidats pour chacune des deux séries. En voici la liste :

TEXTES DES LEÇONS EXPOSÉES EN 1955.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

1. *Mathématiques Supérieures.*

Géométrie

1. Figures directement égales dans le plan. Propriétés directes et réciproques.
2. Puissance d'un point par rapport à une sphère. Sphères orthogonales. Plan polaire d'un point. Pôle d'un plan. Droites conjuguées.
3. La similitude plane directe ayant été étudiée précédemment, traiter un ou plusieurs exercices d'application.
4. Problème de la détermination et de la construction de cercles satisfaisant à des conditions géométriques telles que : passer par un point ; — être tangent, soit à une droite, soit à un cercle ; — être orthogonal à un cercle, etc...
5. Cercles tangents à une droite et orthogonaux à un cercle donné. Lieu des centres. Cercles bitangents à la parabole.
6. Une tangente variable à une parabole détermine sur deux tangentes fixes des divisions semblables. Réciproque. Applications.

7. Intersection de deux cônes, de deux cylindres, ou d'un cône et d'un cylindre circonscrits à une même sphère. On pourra donner une application de la théorie à un problème de géométrie descriptive. (Les sections planes des cônes ou cylindres de révolution ont été étudiées précédemment).
8. Faisceaux linéaires de cercles. Points limites. Faisceaux conjugués.
9. Sections planes des cônes de révolution.
10. Etude géométrique de la sphère. Plans tangents. Cônes et cylindres circonscrits.

2. Mathématiques Élémentaires

Géométrie

11. Trièdres. Inégalités entre les faces. Trièdres supplémentaires. Inégalités entre les dièdres. Sens d'un trièdre orienté.
12. Angles orientés de vecteurs et de droites dans un plan orienté. Lieu géométrique des points M tels que, A et B étant fixes et distincts, l'un des angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ ou (MA, MB) ait une mesure algébrique donnée. Exemples. Applications.
13. Cercles passant par deux points donnés tangents à un cercle donné. Applications.
14. Similitude plane définie comme produit d'une homothétie et d'un déplacement. Forme canonique. Applications.
15. Symétrie par rapport à un point. Symétrie par rapport à un plan.
16. Rotation dans l'espace considérée comme transformation ponctuelle. Symétrie par rapport à une droite (demi-tour ou transposition). Produit de deux transpositions. L'ordre choisi pour l'exposé est laissé à l'appréciation du candidat.
17. Homothétie dans l'espace (la translation a été étudiée). Applications.
18. Première leçon sur l'inversion.
19. L'inversion dans l'espace (1^{re} leçon). La définition et les propriétés de l'inversion dans le plan ont été étudiées.
20. Lieu (L) des points tels que le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant et égal à $e \neq 1$. Equivalence de cette définition avec celle du lieu des centres des cercles passant par un point fixe et tangents à un cercle fixe. Exemples de problèmes traités à partir de la définition d'une conique comme lieu (L).
21. Tangente en un point et asymptotes de l'hyperbole dans chacun des cas :
 1° Hyperbole définie par deux foyers et la longueur de l'axe focal.
 2° Hyperbole définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité.
22. Première leçon sur la parabole.

Arithmétique

23. Justification des règles pratiques pour obtenir le quotient et le reste de la division de deux nombres naturels. (Ou suppose traitée la théorie de la division).
24. Définition et propriétés élémentaires des nombres premiers. Application aux diviseurs et aux multiples.

Algèbre

25. Exemples d'étude des fonctions définies par $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$,
 a, b, c, a', b', c' étant des nombres ($a' \neq 0$).
26. Exemples des fonctions de la forme $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ à coefficients numériques. Représentation graphique.

- Trigonométrie* 27. Résolution des équations et inéquations trigonométriques qui peuvent se ramener par un changement de variable $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\operatorname{tg} x = t$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ à des équations ou inéquations déjà étudiées. L'étude de $a \cos x + b \sin x = c$ n'est pas demandée.
28. Résolution et discussion de l'équation : $a \cos x + b \sin x = c$. On traitera complètement un exemple numérique à l'aide d'une table de logarithmes.
29. Fonctions $\sin x$, $\cos x$ du nombre x . Variations. Dérivées de ces fonctions. Représentation graphique. Fonctions $\cos(ax+b)$, $\sin(ax+b)$.
- Descriptive* 30. Changement de plan de projection. Rotation. Applications.
31. Rabattement d'un plan sur un plan. Applications.
- Cinématique* 32. Intersection de deux plans. Intersection d'une droite et d'un plan.
33. Etude des mouvements suivants : circulaire uniforme, vibratoire simple, rectiligne d'équation $x = a \cos(\omega t + \alpha) + b \sin(\omega t + \beta)$.
- Statique* 34. Equilibre d'un point matériel libre ou pouvant glisser sans ou avec frottement sur une droite, un cercle, un plan, une sphère. Exemples.
- Cosmographie* 35. Mouvement apparent du soleil sur la sphère céleste. Saisons. Précession des équinoxes. Année sidérale et année tropique. Calendriers.

3. Sciences expérimentales

36. Fonction logarithme népérien de x . $\operatorname{Log}(ab) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b$. Logarithme vulgaire.
37. Fonction exponentielle : $y = \exp x$. Formule :
 $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$
38. Combinaisons. Probabilités simples.
39. Formule du binôme. Exemples.

4. Première C. M.

- Géométrie* 40. Parallélisme des droites et des plans.
41. Plan perpendiculaire à une droite. Droite perpendiculaire à un plan.
42. Sphère. Intersection avec une droite. Tangente. Section plane. Plan tangent. Exercices comportant la recherche, soit de plans tangents, soit de sphères.
43. Volume de la sphère.
44. Angle d'une droite et d'un plan. Ligne de plus grande pente. Géométrie cotée : représentation des droites et des plans. Parallélisme.
- Algèbre* 45. Problèmes dont la résolution conduit à une équation du second degré.
46. Définition et signification géométrique de la dérivée d'une fonction, pour une valeur donnée de la variable. Application à la détermination des tangentes aux courbes représentatives du trinôme et de la fonction homographique.

5. Seconde C. M.

- Algèbre* 47. Problèmes du 1^{er} degré. Discussion des résultats.
48. Première leçon sur l'équation du 2^e degré à une inconnue. Existence et calcul des racines.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

1. *Spéc.* Première leçon sur les déterminants.
2. *Spéc.* Formes linéaires. Rang d'un système de formes. Notion d'indépen-

- dance. On pourra supposer acquise ou non la théorie des équations linéaires.
3. *Spéc.* Etude du système le plus général d'équations linéaires. Le cas du système dit de Cramer est supposé déjà connu.
 4. *Sup.* Division de deux polynômes ordonnés suivant les puissances croissantes de la variable. Développement limité à un ordre donné d'une fraction rationnelle au voisinage de zéro.
 5. *Spéc.* Recherche des diviseurs communs à deux polynômes. Plus grand commun diviseur de deux polynômes. Cas où ils sont premiers.
 6. *Spéc.* La leçon : nombres complexes, opérations (addition, soustraction, multiplication, division) étant faite, donner quelques exemples d'application à la recherche de problèmes d'analyse, de trigonométrie, de géométrie.
 7. *Spéc.* Fonction inverse d'une fonction monotone et continue. Continuité. Dérivabilité. Exemples.
 8. *Spéc.* Théorème de Rolle, formule des accroissements finis. Interprétation graphique. Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction d'une variable. (On se bornera pour l'emploi de la dérivée à l'établissement du théorème général).
 9. *Spéc.* Fonction de deux variables indépendantes, dérivées première et seconde.
 10. *Spéc.* Fonction homogène de plusieurs variables. Identité d'Euler (les généralités sur les fonctions de plusieurs variables sont supposées déjà exposées).
 11. *Spéc.* Différentielle première d'une fonction de plusieurs variables indépendantes définie par $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$. Transformation de cette expression quand on remplace x, y, z , par des fonctions d'autres variables indépendantes. Applications. (La théorie des fonctions différentiables n'est pas au programme).
 12. *Spéc.* Fonction logarithmique ou exponentielle. Le candidat étudiera une seule de ces fonctions avec la méthode de son choix, en supposant seulement que l'autre fonction n'est pas encore connue.
 13. *Spéc.* Application des développements limités à la recherche de limites et à l'étude de fonctions infiniment petites ou grandes. Application à la recherche des asymptotes et à l'étude des branches infinies des courbes d'équation $y = f(x)$.
 14. *Spéc.* Intégrale définie dans un intervalle (a, b) d'une fonction $f(x)$ continue dans cet intervalle fermé.
 15. *Spéc.* Symbole $\int_a^b f(x) dx$, si $f(x)$ défini et continu dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a ou vers b . Etude théorique, exemples.
 16. *Spéc.* Longueur d'un arc de courbe gauche.
 17. *Spéc.* Exemples d'intégration de fractions rationnelles. La théorie de la décomposition en éléments simples est supposée traitée.
 18. *Spéc.* Séries à termes positifs. Méthode d'étude de la convergence ou de la divergence. On pourra admettre que l'on a déjà étudié la nature de la série $u_n = 1/n^2$ et la théorie de l'intégrale.
 19. *Spéc.* Séries entières à coefficients réels d'une variable réelle. Intervalle de convergence. Continuité. Dérivation ou intégration à l'intérieur de cet intervalle ouvert. On se bornera à étudier l'une de ces opérations.
 20. *Spéc.* Développement en série entière d'une fonction à l'aide d'une équation différentielle. On évitera le choix des exemples $e^x, \sin x, \cos x$.

21. *Spéc.* Les diverses méthodes de détermination de développement en série entière d'une fonction donnée ayant été exposées dans une précédente leçon et illustrées d'exemples classiques $\sin x$; e^x ; $(1+x)^a$, donner quelques exemples non classiques.
22. *Spéc.* Première leçon sur les équations différentielles du premier ordre. Application à l'étude des équations à variables séparées, exemples.
23. *Spéc.* Equations différentielles du premier ordre, exemples. L'intégration de l'équation à variables séparées est supposée connue.
24. *Spéc.* Equation différentielle du premier ordre homogène. Exemples.
25. *Spéc.* Application des équations différentielles du premier ordre à la détermination de courbes définies par une propriété géométrique.
26. *Spéc.* Séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante. Exemples.
27. *Spéc.* Géométrie analytique. Coordonnées homogènes. Notions sur les points à l'infini dans le plan et dans l'espace.
28. *Spéc.* Courbes dont l'équation $y = f(x)$ est résolue par rapport à une coordonnée. Tangente, normale, concavité, asymptotes. Illustrer chaque démonstration par un exemple. On supposera $f(x)$ défini continu, pourvu de deux dérivées définies et continues.
29. *Sup.* Courbes dont l'équation en coordonnées polaires est résolue par rapport au rayon vecteur. Tangente, concavité, inflexions. Exemple de construction d'une courbe sans branches infinies.
30. *Sup.* Les règles concernant la construction des courbes définies en coordonnées polaires par leur équation $\rho = f(\theta)$ étant supposées établies, montrer leur application pratique sur quelques exemples.
31. *Spéc.* Etude des branches infinies des courbes définies en coordonnées polaires par leur équation $\rho = f(\theta)$. Construction de courbes ainsi définies ayant des branches infinies. On supposera faite l'étude de la tangente, de la concavité, des points multiples et de la construction des courbes sans branches infinies.
32. *Spéc.* Construction des courbes définies en coordonnées polaires par leur équation $\rho = f(\theta)$. Les théories relatives à l'étude en un point à distance finie ou infinie sont supposées acquises.
33. *Spéc.* Courbure d'une courbe plane. Développée. Exemples.
34. *Spéc.* Enveloppe d'une famille de courbes planes représentées par les équations $F(x, y, \lambda) = 0$.
35. *Spéc.* Géométrie analytique, lieux géométriques dans l'espace.
36. *Spéc.* Recherche de l'équation d'une surface définie par un mode de génération simple : cylindre, cône, surface de révolution, par exemple.
37. *Sup.* Correspondance homographique entre deux points sur deux bases rectilignes fixes et distinctes ou entre deux rayons de deux faisceaux linéaires de sommets différents.
38. *Spéc.* Birapport de quatre points d'une conique réelle non décomposée. Applications.
39. *Spéc.* Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.
40. *Spéc.* Géométrie analytique, surfaces du second ordre : points conjugués, plan polaire d'un point, droites conjuguées.
41. *Spéc.* Géométrie descriptive. Intersection de deux cônes du second ordre ayant une génératrice commune. On donnera comme application une épure comportant deux projections.
42. *Spéc.* Géométrie descriptive. Recherche des points doubles apparents dans l'intersection de deux surfaces du second ordre.
43. *Spéc.* Géométrie descriptive. Intersection d'une quadrique de révolution et

- d'une sphère. On supposera dans l'épure que le plan défini par l'axe de la quadrique et le centre de la sphère est parallèle à un plan de projection.
44. *Spéc.* Travail d'une force. définition. Exemples. Cas d'une fonction de forces.
45. *Spéc.* Dynamique du point : théorème de la force vive, énergie cinétique et énergie potentielle d'un point placé dans un champ de forces.
46. *Spéc.* Mouvement d'un point matériel soumis à une force unique passant par un point fixe et dont l'intensité est proportionnelle à la distance du point matériel à ce point fixe.
47. *Spéc.* Mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. On se bornera au mouvement elliptique. Détermination de la trajectoire et du mouvement sur la trajectoire.
48. *Spéc.* Etude du mouvement rectiligne d'un point matériel sous l'action d'une force dépendant seulement de la distance du mobile à un point fixe de la trajectoire. Choisir un exemple où on peut pousser jusqu'au bout le calcul de x en fonction du temps et un exemple où l'intégrale des forces vives permet de déterminer l'allure du mouvement.

*
**

Les moyennes des notes de leçons d'oral sont toujours faibles, mais en augmentation sensible sur celles de l'année dernière ; 11,5 au lieu de 10,5 en Élémentaires, 9,6 au lieu de 9 en Spéciales. Cette augmentation est due en grande partie à la qualité des bonnes leçons ; cinq en Élémentaires au lieu de deux en 1954 et deux en Spéciales contre aucune en 1954 ont pu être notées au-dessus de 16 (Elémentaires : 20, 18, 17, 17, 17 ; Spéciales : 18, 18). Il est trop tôt pour se réjouir de ces résultats encourageants, cependant, comme le jury, dont la composition n'a pas changé, a montré les mêmes exigences que l'année dernière, nous sommes amenés à penser que le mérite de cette amélioration revient aux candidats et aux maîtres qui les ont préparés, auxquels nous ne témoignerons jamais trop de reconnaissance et d'admiration. Il est intéressant de constater que la leçon d'Elémentaires, cotée 20, a pour sujet : classe de Première : angle d'une droite et d'un plan, ligne de pente, application à la géométrie cotée, et que la leçon cotée 18 a pour sujet l'étude de la sphère en Mathématiques Supérieures. Les leçons de Spéciales cotées 18 ont pour objet : division selon les puissances croissantes et développement limité d'un quotient de polynômes ; définition de $\log x$. Elles ont été traitées par les mêmes candidats.

Les sujets de ces leçons sont simples ; à première lecture on pourrait penser qu'ils sont d'une extrême banalité ; ils ne prêtent évidemment à aucune démonstration spectaculaire. Le mérite des deux candidats a été de ne pas les sophistiquer, de les placer exactement au niveau des classes auxquelles elles étaient destinées, de témoigner par la qualité d'un exposé simple et dépouillé de la pénétration de leur esprit, d'un goût très vif pour la clarté et pour la logique. Nous les proposons en exemple à tous les candidats.

LEÇONS D'ÉLÉMENTAIRES

Leçons 1, 3, 14, 15, 16, 17. Elles sont choisies dans la partie du programme relative aux transformations ponctuelles, l'inversion exceptée.

Certains sujets — en 1955, l'étude des transformations — inspirent à tous les candidats des exposés à caractère axiomatique. Il est vraisemblable que l'axiomatique a été révélée à certains d'entre eux au cours de la préparation à l'agrégation ; elle présente donc pour eux l'attrait de la nouveauté, d'une part, celui d'une rigueur formelle à laquelle les mathématiciens sont sensibles d'autre part. Il faut bien dire aussi que la difficulté très réelle qu'il y a à composer et à présenter une leçon à caractère

axiomatique constitue un attrait supplémentaire, celui de la difficulté à vaincre. L'entreprise, pour les candidats dont la science axiomatique est trop neuve, n'est pas sans péril ; aussi avons-nous choisi dans les leçons énumérées et traitées avec un bonheur très inégal, deux d'entre elles — 1 et 16 — solidement construites et logiquement exposées.

Le leçon 1 : figures directement égales dans le plan, est destinée à des élèves de Mathématiques Supérieures ; ceux-ci connaissent donc les transformations ponctuelles du plan qui transforment une figure (F) quelconque plane en une figure égale ; l'égalité leur a été définie. Il est tout à fait logique, dans ces conditions, qu'un second exposé d'un sujet déjà largement traité soit l'occasion d'une synthèse à caractère axiomatique. Le candidat aurait été bien inspiré en donnant les raisons de ce choix qui a été le sien. Il n'est pas inutile de rappeler, d'abord, ce que l'on suppose exactement connu des auditeurs ; un professeur dans sa classe interrogeait ses élèves pour faire le point de leurs connaissances et construire ainsi sur des bases solides ; il indiquerait alors pourquoi il faut reprendre l'étude de ces questions déjà traitées, car les élèves subissent le dogmatisme, mais préfèrent tout de même savoir pourquoi celui-ci leur est imposé. Il est clair que la définition de l'égalité peut être donnée cette fois *a priori*, sans qu'une telle définition paraisse arbitraire, puisqu'elle vise à dégager seulement des caractères communs à certaines figures que l'on veut baptiser égales ; cette définition étant donnée, il est naturel de se poser la question de savoir, non pas s'il existe des transformations ponctuelles du plan transformant une figure F quelconque (on ne saurait trop insister sur ce « quelconque ») en une figure égale, mais s'il en existe d'autres que celles déjà étudiées. Un enseignement a bien plus de chances d'être efficace si l'intérêt de l'auditoire est éveillé et sa curiosité aiguillée vers une recherche précise. L'occasion est naturellement excellente de souligner que cette recherche n'est aucunement facilitée — du point de vue logique — par la connaissance des résultats partiels ; l'analyse ne les utilise pas.

La leçon 16 : rotation dans l'espace considérée comme transformation ponctuelle, était, par contre destinée à un auditoire d'élèves de Mathématiques Élémentaires, donc de débutants, pas très à l'aise en géométrie dans l'espace et ignorant à peu près tout de la transformation ponctuelle en question. Nous restons sceptiques sur l'efficacité d'une leçon, faite à un pareil auditoire, à partir de la définition : la rotation est un déplacement ayant plus d'un point double. Certes, il nous paraît nécessaire qu'un professeur puisse définir avec exactitude l'égalité directe de deux figures de l'espace et démontrer l'existence de la transformation ponctuelle, appelée déplacement, qui transforme une figure quelconque en une figure directement égale, qu'il soit entraîné à identifier un déplacement donné et à le réduire à ses éléments de définition, qu'il soit rompu à l'abstraction formelle et capable de raisonner sans dessiner aucune figure, mais il ne devrait pas oublier que ce qu'on exige de lui ne peut être exigé également des élèves d'une classe de Mathématiques dont 1 %, au maximum, se destine à l'enseignement. Le professeur, disent les remarquables Instructions de 1938 en traitant des questions à poser à un élève, tient compte des bornes encore étroites de ses connaissances et de son expérience (il s'agit des connaissances et de l'expérience de l'élève, bien entendu).

Notons, à propos d'une de ces leçons, sur les transformations ponctuelles, qu'il est regrettable d'entendre un futur professeur répéter étourdiment qu'il va chercher l'enveloppe du second côté d'un angle de grandeur constante, dont un côté passe par un point fixe A et dont le sommet M décrit une courbe fixe ; il s'agit plus précisément de chercher l'enveloppe d'une droite Mx , et non d'une demi-droite, faisant avec MA un angle de droites (MA, Mx) de mesure constante, le plan étant orienté.

Bien que leurs énoncés soient différents, les leçons 18 et 19 ont été traitées en suivant deux plans à peu près identiques. Les candidats définissent l'inversion dans l'espace et étudient ensuite par priorité ce que tous les manuels appellent improprement la conservation des angles. Nous avons déjà, dans un précédent rapport, fait

observer que la démonstration de l'égalité en grandeur des angles de deux courbes sécantes en A et de leurs inverses en A', inverse de A, est plus du domaine de l'analyse que de la géométrie et qu'on pourrait en Mathématiques Élémentaires se borner au cas où ces courbes sont des droites ou des cercles et dans le cas des angles de surfaces sécantes, des sphères. La hâte des candidats à démontrer ce théorème avant même d'avoir étudié la nature des figures inverses de droites, de cercles et de sphères ne se justifie guère que par ce désir de briller qui cause à quelques-uns de sévères mécomptes, car cette propriété des angles n'est pas caractéristique de l'inversion ; de très nombreuses transformations ponctuelles en bénéficient, et si les inverses de cercles et de droites (pour se borner au plan) n'étaient pas des droites ou des cercles, cette propriété perdrait singulièrement de son intérêt, dans la classe de Mathématiques au moins.

Les trois leçons 4, 5, 13, sont des exemples de problèmes spéculatifs, et l'occasion de nombreuses fautes de logique. Nous nous bornons à conseiller aux candidats de relire les observations déjà faites en 1954, page 20 et de se procurer la brochure 120 EP/SD, éditée par le Centre de Documentation Pédagogique, 29, rue d'Ulm, intitulée « Les problèmes spéculatifs dans l'Enseignement du Second Degré ».

Regrettons au passage que le normalien chargé de donner un ou plusieurs exemples de problèmes de détermination et de construction de cercles satisfaisant à des conditions géométriques telles que passer par un point, être tangent à une droite ou à un cercle, être orthogonal à un cercle, n'ait trouvé qu'un seul exemple : celui d'un cercle orthogonal à deux cercles donnés et tangent à un troisième. Encore s'est-il montré extrêmement discret sur le cas où les deux premiers cercles ne sont ni sécants, ni tangents.

Répétons encore que le problème de l'étude des cercles tangents à une droite et orthogonaux à un cercle a pour objet de découvrir une propriété *caractéristique* de cette famille de cercles.

L'introduction dans l'Enseignement du Second Degré du raisonnement par conditions nécessaires et suffisantes pose évidemment une question d'opportunité délicate. Mais nul n'ignore que la géométrie analytique est son véritable domaine : il en résulte que les problèmes qui ne sont en réalité que des problèmes de géométrie analytique, énoncés avec le langage de la géométrie, constituent un champ d'application de cette forme de raisonnement. Les exercices d'application de la leçon 12 : angles de droites, angles de vecteurs dans un plan orienté, appartiennent à cette catégorie de problèmes et devraient être une occasion d'appliquer le raisonnement par conditions nécessaires et suffisantes. Les leçons 7, 9, se prêtent également, et pour la même raison, à des études par conditions nécessaires et suffisantes.

Il va sans dire que la mise en œuvre de ce procédé nécessite des précautions. Les seules figures qui peuvent être utilisées sont des figures représentant les seules données : il n'est pas, du point de vue pédagogique, inutile de le préciser et de préciser également que si l'on ajoute à cette figure un élément nouveau, il est nécessairement *quelconque*. Il est bien entendu que tout le monde sait cela, en principe, sauf cependant les élèves auxquels la leçon est supposée faite.

Nous nous bornerons, pour les leçons suivantes, à quelques brèves observations concernant surtout des points de détail.

8. L'interprétation analytique de la définition d'un cercle d'un faisceau comme lieu géométrique des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles est constant mérite, en Mathématiques Supérieures, d'être, non seulement signalée, mais utilisée (par exemple pour calculer la puissance d'un point par rapport à un cercle défini par $MA = \lambda MB$).

25, 26. Le programme d'algèbre de Mathématiques invite à l'étude de variations de fonctions dont il est possible de calculer les dérivées et aussi à construire leurs courbes représentatives. Il impose certains exemples, mais n'interdit pas d'en étudier

d'autres, à condition bien entendu que la recherche des asymptotes, par exemple, n'exige pas la mise en œuvre de procédés dont l'étude n'est pas au programme. Il n'est pas interdit de définir dans cette classe les fonctions équivalentes pour certaines valeurs de x , définies par la condition que leur rapport tend vers 1. Il n'est pas interdit non plus de donner une définition correcte de l'asymptote.

27. On reste rêveur devant le choix d'exemples d'équations trigonométriques qui se résolvent par un des changements de variables $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\operatorname{tg} x = t$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ donnés par un candidat normalien : $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$,

$\operatorname{tg} 3x - \sqrt{2} \sin 3x = 0$, $\cos \frac{x}{2} = \sin x$, et comme inéquation $\sin x < \sin a$.

28. Nous avons signalé déjà qu'il est arbitraire de décider *a priori* que certains cas spéciaux sont « particuliers ». Il est d'usage de dire que, pour l'étude de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$, $c = 0$ ou $a = 0$ sont des cas particuliers ; ils sont cependant justiciables de la méthode générale. Si a et b ne sont pas nuls tous deux, on peut déterminer φ et φ de manière que $a = \varphi \cos \varphi$, $b = \varphi \sin \varphi$ et se ramener à l'étude de $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\varphi}$.

30, 31, 32. La vérité semble en marche. Les candidats se souviennent qu'il n'existe pas d'opération appelée : rabattement d'un point sur un plan ; en outre, un effort louable a été fait pour diminuer l'étude des cas baptisés arbitrairement particuliers.

36 à 39. La difficulté, pour les candidats, est ici de ne pas plaquer sur le texte une leçon directement tirée d'un cours de Spéciales. Pour la formule du binôme, par exemple, il est plus indiqué avec des débutants, qui ont pour tout bagage, un baccalauréat première partie, de leur apprendre à calculer les coefficients du binôme sur des exemples numériques, à développer correctement $(2x + 3)^5$, à calculer les premiers termes de $(5 - x)^{11}$, plutôt que de leur apprendre à jongler avec les C_m^p . Notons, au passage, qu'il est bon, avant d'aborder le sujet : formule du binôme, de rappeler quels sont les résultats supposés connus concernant les polynômes dont l'étude n'est pas mentionnée explicitement au programme, et surtout de préciser quelle terminologie on utilise. Si l'on appelle « identiques » des polynômes dont la valeur numérique est la même, quel que soit x , leurs dérivées sont aussi identiques, ce qui entraîne l'égalité terme à terme ; cette simple remarque éclaire fortement la leçon et suggère d'ailleurs une méthode de calcul, tout au moins des premiers coefficients de $(1 + x)^n$ très accessible.

45. La leçon sur l'équivalence d'un problème (de géométrie, par exemple) et du problème de résolution d'une équation consiste à définir d'abord cette équivalence et à en fixer les conditions. Nous l'avons déjà signalé l'an dernier.

*
**

LEÇONS DE SPÉCIALES

Elles ont, comme l'an dernier, été appréciées avec libéralité. Cependant, en consultant les notes prises pendant l'audition des quarante-huit leçons de Spéciales par le jury, nous constatons que pour seize d'entre elles, nous avons noté, soit que le candidat semblait n'avoir du sujet qu'une connaissance très superficielle, soit qu'il se bornait à une pénible reconstitution d'une branche de cours entendue ou apprise, soit même qu'il semblait dépassé par l'enseignement qu'il avait reçu.

Un admissible à l'agrégation sur trois connaît donc insuffisamment pour l'enseigner le programme des classes préparatoires aux grands concours. Nous le déplo-

rons sans en faire grief aux candidats ; les chemins qui mènent à l'agrégation ne comportent pas tous un séjour plus ou moins prolongé dans une classe de Spéciales. Certes, un candidat particulièrement doué, comme celui qui s'est classé premier au concours de 1955, peut passer directement d'une classe de Mathématiques Élémentaires de collège à l'enseignement des Facultés, mais pour beaucoup d'autres, un tel cheminement est hasardeux.

Nous souhaitons qu'à l'avenir les chemins qui mènent à l'agrégation soient mieux aménagés ; on parle d'une réforme de la licence d'enseignement ; espérons que dans les cours préparant à cette licence figurera, avec une sanction, un enseignement de la géométrie élémentaire et des Spéciales. Les programmes d'admission aux Ecoles Normales Supérieures de Fontenay et de St-Cloud ont été, en 1952, rapprochés des programmes d'admission aux Ecoles Normales Supérieures de la rue d'Ulm et de Sèvres. Les candidats reçus à St-Cloud en 1952, se sont donc présentés en 1955 à l'agrégation après avoir reçu pendant une année un enseignement très voisin de celui d'une classe de Spéciales ; il en est résulté une amélioration des leçons de Spéciales faites par ces candidats, et notamment par ceux qui ont été déclarés agrégés.

Cependant, les observations présentées dans le rapport de 1954 sont encore valables, dans bien des cas, pour le concours de 1955. Les leçons de Spéciales sont dépourvues d'exemples et d'exercices, ou, lorsque le texte impose d'en traiter, le choix de ceux-ci est pauvre, arbitraire ; seul, l'exemple rare, le cas exceptionnel, semble retenir l'attention ; les méthodes de recherche sont lourdes, souvent anciennes, tristement conventionnelles. Réjouissons-nous de constater que, grâce sans doute à la persévérante insistance des maîtres qui surveillent la préparation, une amélioration se dessine ; les candidats se soucient de l'ordre auquel il faut effectuer les développements limités et nous avons entendu une leçon raisonnable d'exemples du calcul de la primitive de fractions rationnelles.

Nous avons, par contre, constaté, dans trois exposés différents, que les conditions d'existence des solutions des équations différentielles ne préoccupaient guère les candidats.

Nous arrêterons là ces considérations générales pour présenter quelques observations particulières concernant les leçons suivantes.

1. Il faut, quel que soit le mode d'exposition choisi, définir ce qu'on appelle *terme* d'un déterminant et préciser à quels critères on reconnaît que deux termes sont *distincts*. L'omission de cette dernière définition rend la leçon inintelligible.

2. Le candidat, qui a traité cette leçon, a très exactement défini sa position : l'étude des formes linéaires précède l'étude des équations linéaires. C'est actuellement un ordre accepté par de nombreux auteurs. La dépendance et l'indépendance sont alors définies par l'existence ou la non-existence d'un système de λ_i tels que $\sum \lambda_i f_i \equiv 0$, mais il est essentiel d'ajouter : non tous nuls. La leçon, qui promettait d'être intéressante, a été gâchée par une confusion qui n'a cessé de s'aggraver entre les divers exposés possibles.

9. Nous ne saurions trop recommander aux candidats de ne pas faire plus qu'on ne leur demande ; il est déraisonnable de vouloir étudier, en 45 minutes, non seulement les fonctions de deux variables, leurs dérivées premières et secondes, mais, en outre, les fonctions composées, homogènes, les changements de variables et les fonctions implicites. Notons, à propos de cette leçon, que la démonstration, sous certaines réserves, de $f_{xy}^* = f_{yx}^*$ est toujours présentée de façon dogmatique et est l'occasion d'une faute classique que l'on commet, ou que l'on ne commet pas, selon, il faut bien l'avouer, que l'on est prévenu ou non. Or, il existe une démonstration, dogmatique elle aussi, mais de tout repos, de cette propriété. Soit (D) un domaine dans lequel les conditions d'existence et de continuité, de $f, f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ sont vérifiées ; soit A (x_0, y_0) . M (x, y) deux points de ce domaine. Faisons l'hypothèse

$$f''_{xy}(x_0, y_0) > 0, \quad f''_{yx}(x_0, y_0) < 0$$

et choisissons le domaine (D) pour qu'on ait en tout point $f''_{xy} > 0, f''_{yx} < 0$. Proposons-nous d'étudier la fonction z , définie par

$$z = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0).$$

Cette fonction est nulle en tout point M du domaine situé sur une des parallèles aux axes menées par A. Il est très simple, en faisant varier une seule des variables x, y , de trouver le signe de z en un point M du domaine situé hors de ces parallèles et de constater que, suivant que la variable choisie est x ou y , les hypothèses entraînent $z > 0$ ou $z < 0$. Il en résulte que f''_{xy} et f''_{yx} ne peuvent être de signes différents en A.

(Cette conclusion entraîne que les valeurs en A de ces deux dérivées sont égales ; s'il n'en était pas ainsi, on pourrait déterminer λ de manière que les deux dérivées de la fonction $\varphi = f(x, y) - \lambda xy$, φ''_{xy} et φ''_{yx} soient en A de signes contraires.

17. On peut toujours décomposer une fraction rationnelle, dont les pôles sont connus, en éléments simples, et intégrer chaque élément ; c'est un calcul rarement simple. L'objet d'une leçon d'exemples sur l'intégration des fractions rationnelles est de permettre la comparaison des méthodes d'intégration entre lesquelles il est possible de choisir. Il est clair, par exemple, que dans le cas d'une fraction impairé le changement de variable $t^2 = u$ économise le calcul d'un élément simple sur deux ; il y a lieu de décider si l'on retranchera, ou non, de la fraction rationnelle certains éléments connus, ou non, si l'on utilisera les éléments simples de première espèce seuls et comment. C'est sur le choix d'une méthode que portera l'enseignement tiré des exemples bien plus que sur l'exécution mécanique de calculs.

18. Très bonne leçon sur les séries à termes positifs. Lorsque u_n tend vers 1 par valeurs supérieures, on peut se borner au cas où u_n est en outre décroissant ; cette hypothèse supplémentaire n'est pas une conséquence de la première. Le symbole de Landau $O\left(\frac{1}{n}\right)$ n'a pas le sens de infiniment petit par rapport à $\frac{1}{n}$ il signifie : du

même ordre que :

$$0 < \alpha < \frac{O\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < \beta.$$

19. Il y a, sur ce sujet, des exposés classiques qui sont excellents ; les candidats peuvent naturellement en proposer d'autres, qui d'ailleurs diffèrent peu des précédents, s'ils les jugent meilleurs. Nous rappellerons seulement que pour déterminer si un exposé est meilleur qu'un autre, il convient de se souvenir que la leçon d'agrégation s'adresse à un auditoire supposé d'élèves jeunes, non blasés, rebelles à la sophistication ; il est regrettable, par exemple, que dans un tel exposé, on ne reconnaisse plus l'idée ancienne et générale du cercle de protection à l'intérieur duquel la série entière est convergente et sa somme, fonction sans singularités.

20-21. L'hypothèse : il existe un développement en série entière de la fonction $f(x)$ au voisinage de 0, entraîne la conséquence $f(x)$ est une fonction définie, continue, dérivable pour 0. Si donc la fonction $f(x)$ est définie par une équation différentielle, la sagesse serait de se placer d'abord dans le cas simple où l'existence de la fonction $f(x)$ résulte des conditions de Cauchy. Constatons simplement que, si l'on met à part les deux exemples classiques $y' = y$, $y'(1+x) = my$, les seuls exemples auxquels aient songé les candidats sont les suivants :

$$x^2 y' + y = 0, \quad x^2 y'' + x y' + y = 1 \frac{x^2}{1-x}$$

c'est-à-dire deux exemples posant des problèmes d'existence non habituels, des exemples en tout cas à ne pas donner comme premiers exemples d'application d'une méthode générale.

Notons d'ailleurs que la solution $y = 0$ de la première équation, la seule valable quel que soit x , n'a pas été signalée même après que le candidat eût constaté que le développement en série entière de la fonction y (qu'il croyait être $e^{\frac{1}{x}}$) était identiquement nul. Il paraît que la seconde équation ne peut être intégrée ; le candidat aurait été bien inspiré en expliquant ce qu'il entend par là, car pour les valeurs de x , différentes de 0, le calcul de y se ramène à des quadratures.

26. Énoncer que : deux racines consécutives de $f'(x)$ encadrent au maximum une racine de $f(x)$, sans prendre la précaution de préciser si $f(x)$ et $f'(x)$ sont, ou ne sont pas, des fonctions continues, revient à énoncer un résultat faux. Il est inutile de calculer laborieusement la valeur de $f(\beta)$, lorsqu'on a constaté ($\alpha < \beta$), que $f(x)$ est continue dans (α, β) , croissant, et que $f(\alpha)$ est positif. Il est un peu affligeant de devoir attirer l'attention de futurs professeurs sur des négligences, ou des ignorances commises par eux qui ne sont tolérables chez aucun élève de Spéciales.

29. La concavité de la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ au point A, d'abscisse x_0 , dans les conditions normales, est tournée vers les y positifs ou vers les y négatifs suivant qu'au voisinage de x_0 la dérivée $f''(x)$ est positive ou négative. L'existence de la dérivée seconde pour x_0 n'est pas exigée.

31. Nous avons fait allusion déjà au goût regrettable de certains candidats pour le rare, l'exceptionnel, ou plus simplement pour l'accessoire choisi pour son apparente étrangeté. En voici un exemple : tout ce que le candidat, qui a traité cette leçon, semble avoir retenu concernant l'étude des courbes en coordonnées polaires, c'est que le sens de la concavité dépend du signe de

$$\varphi(\omega) = \left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)''$$

Encore n'a-t-il pu retenir de quelle façon il en dépend et a-t-il montré de la surprise du fait que la courbe représentative de $\rho = e^{\theta}$ ne tournait pas sa concavité vers les y positifs.

44-45. Dans la leçon sur le travail, il n'est pas demandé une étude théorique de la notion d'intégrale curviligne.

La signification mécanique doit être nettement dégagée : le point matériel subit une évolution imposée qui n'est pas nécessairement (et n'est habituellement pas) causée par la force dont on définit le travail.

Dans un langage, qui n'est pas au programme de la classe, il s'agit de la *circulation d'un vecteur*.

Au contraire, dans le théorème de la force vive, il s'agit d'un point matériel libre et de la trajectoire de ce point sous l'action des forces appliquées.

S'il arrive parfois qu'on applique ce théorème à un point matériel gêné qui évolue sur une courbe imposée, c'est parce qu'on suppose cette liaison sans frottement : le point matériel ayant été rendu libre et soumis à des forces (imposées + réaction de liaison) qui définiront le même mouvement, le travail des forces qui produisent le mouvement se réduit à celui des forces imposées, puisque la réaction normale à la trajectoire ne travaille pas. Une telle application du théorème des forces vives, sans explication complémentaire, est un abus de langage, inadmissible dans un enseignement à des débutants, car il est de nature à suggérer une confusion éminemment regrettable.

EPREUVES PRATIQUES

Elles ont eu lieu au Lycée Saint-Louis, le mercredi 13 juillet, de 15 à 18 heures (Calcul numérique) et le jeudi 14 juillet, de 8 à 12 heures (Épure).

COMPOSITION D'ÉPURE : Sujet. — Les données sont exprimées en *centimètres*.

L'espace est repéré grâce à un trièdre trirectangle direct.

La parallèle au *grand axe* de la feuille, située à un centimètre au-dessous de celui-ci, représente la ligne de terre. Elle porte l'axe $y'y$ orienté de gauche à droite ; l'origine des coordonnées est en son milieu. L'axe $x'x$ des éloignements est porté par la droite de bout issue de ce point, orientée en avant.

Un cône de sommet S a pour base un cercle horizontal de centre O ($9 ; -15 ; 0$), de rayon 4. La projection horizontale s du sommet a pour coordonnées $x = 5$ et $y = -17$. Le point S a une cote négative et on sait que les génératrices de contour apparent frontal du cône sont rectangulaires en projection frontale.

Un second cône de sommet S_1 est circonscrit à la sphère de centre C ($12 ; -5 ; 0$), de rayon 3. La projection horizontale s_1 du sommet a pour coordonnées $x = 15$ et $y = -8$. On sait de plus que les projections frontales $s'o'$ et s'_1c' sont **parallèles**.

1° Construire l'intersection des deux cônes. Déterminer et construire un point courant et la tangente en ce point, ainsi que tous les éléments remarquables de cette courbe et de ses projections. Indiquer sur une notice les méthodes employées et les diverses remarques que l'on aura pu faire.

2° Représenter la portion de *surface* du premier cône située au-dessus de son sommet, en arrière du plan $x = 13$ et à l'extérieur du second cône.

RAPPORT DE M. THÉRON, *correcteur*. — Il s'agissait de construire l'intersection de deux cônes du second ordre, l'un à base circulaire horizontale, l'autre circonscrit à une sphère (C).

On pouvait définir le second cône par une base de Monge, méthode qui risquait de conduire ici à des difficultés graphiques. On pouvait aussi remarquer que, d'après l'énoncé, chaque cône possède une génératrice de contour apparent horizontal qui est de front, et que ces génératrices sont parallèles. Ceci indiquait que l'intersection possède une branche parabolique dans l'espace et conduisait à couper les surfaces par un plan de front. Le plan de front le plus simple, tangent à la sphère inscrite (C) se trouve justement couper les deux cônes suivant deux paraboles égales.

Enfin, chacune des projections présentait un point de rebroussement.

Toutes ces particularités se voyaient aisément en faisant une étude préliminaire sur du papier quadrillé.

L'épreuve a été dans l'ensemble très mal réussie : on ne trouve, dans la plupart des épreuves, ni remarque théorique intéressante, ni construction graphique soignée ; les candidats semblent presque tous totalement inexpérimentés.

Une bonne épure a mérité la note 16, quatre autres les notes 13, 12, 11, 10, puis très vite on arrive aux notes comprises entre 1 et 4. Trois des candidats reçus tout à fait en fin de liste ont obtenu les notes, relativement élevées, de 5, 6 et 7 ; ils doivent peut-être leur succès à ces notes. Puisse cette remarque utilitaire inciter les candidats à accorder dans l'avenir un peu plus d'importance à la préparation de cette épreuve.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE : *Sujet*. — a étant une constante réelle supérieure à 1, on pose :

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}}$$

1° Etudier sommairement la variation de I lorsque a croît depuis 1 jusque $+\infty$.
En particulier, posant $a = 1 + \varepsilon$, on démontrera que I augmente indéfiniment lorsque ε tend vers 0.

2° D'une façon plus précise, trouver deux constantes k et k' telles que la différence

$$\delta = I - k \log \frac{1}{\varepsilon} - k'$$

est infiniment petite en même temps que ε .

3° Trouver la valeur de a correspondant à $I = 5$. Dans cette question, il sera attribué une importance capitale au calcul d'erreurs. Il ne sera tenu compte que des résultats qui donnent a au centième près tout au plus, mais il faut s'efforcer de donner une valeur de a exacte au millième près tout au plus.

RAPPORT DE M. MILLOUX, *correcteur*. — L'épreuve de Calcul numérique consiste dans l'étude d'une intégrale elliptique I dépendant d'un paramètre a . A un facteur près, il s'agit de l'intégrale de Legendre.

La méthode la plus simple, pour traiter l'essentiel du problème, est, après avoir souligné la parité de la fonction à intégrer de façon à réduire l'intervalle d'intégration au segment 0,1, d'isoler dans le radical les binômes s'annulant pour les valeurs négatives de la variable. Ainsi, on peut utiliser, pour l'inverse de cette partie du radical, les développements limités ; ils donnent commodément l'approximation que l'on désire pour le calcul pratique de I ; les intégrales obtenues après développement s'obtiennent par des procédés élémentaires.

De toute évidence, ce problème est bien facile. Cependant, il a eu si peu de succès, que la moyenne des notes, évaluée d'après un généreux barème, n'atteint pas 5 sur 20.

Vingt-deux candidats seulement (sur 48 admissibles) ont résolu convenablement et correctement les questions élémentaires posées au premier paragraphe. Tous les autres, ou presque, ont échoué devant la dernière, qui consiste à établir que l'intégrale I ne reste pas bornée lorsque le paramètre tend vers la valeur critique 1. On aurait pu comprendre, à la rigueur, l'embarras des candidats si l'énoncé avait exigé dix méthodes différentes pour résoudre cette question !

Ensuite cinq candidats ont trouvé sans erreur la valeur asymptotique de I lorsque le paramètre est voisin de la valeur critique. Quant au calcul proprement dit (valeur du paramètre quand $I = 5$), il a eu encore moins de succès : deux candidats seulement ont proposé un ordre de grandeur acceptable, quoique grossièrement approché. Pourtant, avec la seule connaissance des logarithmes vulgaires de 2 et de e , on peut obtenir en peu de temps le résultat à un dix-millième près.

Que dire pour terminer ce rapport ? Répéter ce que les examinateurs de Calcul numérique répètent chaque année : dans leur préparation, les candidats négligent par trop cette matière. Pour un certain nombre d'entre eux, c'est grave, car leur échec eût été transformé en succès si, compte tenu de leurs notes dans les autres épreuves, ils avaient réussi à résoudre ce modeste problème pratique.

RESULTATS GENERAUX

Les totaux des notes obtenues par les admissibles pour l'ensemble des épreuves en 1955 s'échelonnent entre 98 et 295 ; ils étaient en 1954 compris entre 113 et 316. Le nombre des admissibles est resté le même (48 en 1955, 47 en 1954) ; 191 candidats se sont effectivement présentés en 1955 contre 157 en 1954. Les faits marquants du concours de 1955 sont donc une augmentation sensible du nombre des candidats (+ 35), une faiblesse également sensible des totaux par rapport à 1954 et le succès très régulier d'un candidat, classé premier à l'écrit, premier au classement général, ancien élève du Collège Guillemin à Alger, passé directement du Collège à la Faculté.

La faiblesse des totaux n'a pas permis d'augmenter le nombre des agrégés. La liste de ces derniers, publiée le lundi 25 juillet à 11 heures, comprend 25 noms, ceux

des candidats totalisant 184 points au moins, c'est-à-dire ayant pour l'ensemble des épreuves une moyenne égale ou supérieure à 9,2. Les agrégés se répartissent ainsi : 7 élèves de l'Ecole Normale Supérieure (Ulm), 3 élèves de l'Ecole Normale Supérieure (St-Cloud), 2 assistants de Facultés, 2 étudiants, 2 élèves des C.P.R., 9 professeurs titulaires (parmi lesquels 1 détaché et 1 professeur E.T.). Six candidats, anciens admissibles, sont devenus professeurs biadmissibles, cinq autres ont été dispensés des parties théorique et pratique du C.A.P.E.S., et cinq autres encore de la partie théorique seulement. Ceux-ci (trois élèves de St-Cloud et deux de la rue d'Ulm) ont été nommés élèves des C.P.R., à l'exception de l'un de ces derniers qui renonce à l'enseignement.

*
**

Le bilan de l'agrégation, établi comme nous l'avons exposé dans les deux derniers rapports, résulte de la comparaison de deux nombres :

1° celui des candidats en provenance des Ecoles Normales Supérieures, des Facultés et des C.P.R., qui ont été nommés agrégés (nous dénombrons parmi ceux-ci les assistants de Facultés). Il est pour 1955 de 16, pour l'ensemble des deux années 1953-54 de 30, donc pour les trois années de 46.

Ces nombres traduisent l'apport de l'agrégation en tant que concours de recrutement ; ils représentent les nombres de nouveaux agrégés qui n'étaient auparavant, ni professeurs titulaires, ni adjoints d'enseignement titulaires dans les lycées, collèges, écoles normales ou enseignement technique (ils comprennent cependant les élèves des C.P.R.) :

2° celui des agrégés reçus au concours de 1955 ou dans les concours précédents qui ont sollicité et obtenu en 1955, soit une première nomination dans l'Enseignement du Second Degré, dans les Ecoles Normales ou dans l'Enseignement technique, soit leur réintégration après congé pour études ou pour services militaires. Ces nombres définis par l'examen de listes nominatives pour les années 1953, 1954, 1955, sont corrigés chaque année en tenant compte des mises à disposition ou des détachements dans l'Enseignement Supérieur. Ils sont actuellement de 9 pour l'année 1953, 17 pour l'année 1954, 12 pour l'année 1955, soit au total 38 agrégés devenus ou redevenus professeurs depuis 1953, parmi lesquels on dénombre 14 élèves de la rue d'Ulm et 11 élèves de St-Cloud. Il est donc inexact de dire que les Ecoles Normales Supérieures ne fournissent plus de professeurs à l'Enseignement du Second Degré.

*
**

Il serait vain de constater seulement pour le déplorer qu'il n'a pas été possible en 1955, pas plus d'ailleurs que dans les années précédentes, de proposer la nomination d'autant d'agrégés qu'il y a de places mises au concours. La disproportion entre ces deux nombres — celui des agrégés et celui des places mises au concours — est, peut-être, pour des raisons particulières, plus accusée pour l'agrégation de Mathématiques que pour d'autres, mais le phénomène est général ; le problème du recrutement des professeurs agrégés n'est qu'un aspect du problème de la formation des maîtres, qui n'a jamais été si passionnément étudié qu'à l'heure actuelle. Ce problème a déjà reçu une solution, la création de Centres Pédagogiques Régionaux, d'autres sont à l'étude ou en projet ; nous souhaitons, pour terminer ce rapport, examiner brièvement si les dispositions déjà prises ou celles qui sont à l'étude, se révèlent ou se révéleront dans les années qui viennent efficaces pour une amélioration du rendement de l'agrégation de Mathématiques.

Cette dernière fonctionne à la fois comme concours de recrutement et comme concours de changement de catégorie, suivant qu'elle transforme en professeurs

agrégés des étudiants ou des fonctionnaires déjà dans les cadres. Le rendement de l'agrégation que l'on souhaiterait augmenter est celui du concours de recrutement. Il n'existe pas d'autres moyens d'y parvenir que les moyens classiques : augmentation du nombre des candidats, amélioration des conditions de la préparation.

La clientèle de l'agrégation, concours de recrutement, se compose des élèves des E.N.S. dont le nombre varie très peu (en 1955 : 11 normaliens de la rue d'Ulm, 18 de St-Cloud) et d'étudiants dont le nombre est aussi une quasi-constante (il oscille entre 18 et 20 depuis plusieurs années). On constate en 1955 la candidature de cinq assistants de Faculté ; l'expérience prouve qu'une fois agrégés ils ne prennent pas de poste. Il paraît donc inutile de les décompter. En résumé, l'agrégation de Mathématiques a une clientèle stable de candidats non encore dans les cadres, de 25 à 30 normaliens et d'une vingtaine d'étudiants, clientèle suffisante pour recruter 10 à 15 agrégés, insuffisante lorsqu'il en faut entre 30 et 50.

La création des Centres Pédagogiques Régionaux a eu pour premier effet, en groupant à proximité des Facultés, donc des préparations, un nombre important de licenciés sélectionnés par un concours, de permettre à 25 candidats nouveaux (en 1955) de s'ajouter aux précédents. Cet apport a contribué, d'une part à l'augmentation déjà signalée du nombre des candidats (+ 35), mais surtout à revigorer les préparations et même à entraîner la création de préparations nouvelles. Nous signalons, avec une satisfaction toute particulière, que grâce à l'initiative de M. le Doyen Pérès et au dévouement de professeurs de la Faculté des Sciences et de l'Enseignement Secondaire, une préparation à l'agrégation de Mathématiques est enfin organisée à la Sorbonne et groupe, dès sa création, un nombre important de candidats.

La création des C.P.R. n'a pas eu pour résultat seulement une augmentation très sensible du nombre des candidats et le développement ou la création des préparations ; les Centres jouent, à côté de ces préparations, le rôle dévolu aux Ecoles annexes auprès des Ecoles Normales, et ce rôle est très important. Il ne suffit pas pour être reçu à l'agrégation d'avoir des connaissances, il faut aussi savoir les exposer, dans un temps limité, à un auditoire supposé d'élèves, d'où la nécessité d'un stage ; mais l'expérience prouve qu'un stage de six mois a une efficacité incomparable à celle d'un stage de trois semaines. Tel candidat à l'agrégation, admissible en 1954 et éliminé par deux leçons catastrophiques, a été dispensé par le jury des épreuves théoriques du C.A.P.E.S. et envoyé dans un C.P.R. ; le même jury a eu la satisfaction de le proposer en 1955 pour le titre d'agrégué après un examen des plus homogènes.

Il est peu probable cependant que cette augmentation du nombre des candidats, même si, comme on est en droit de l'espérer, elle s'amplifie dans les prochaines années et l'amélioration des conditions dans lesquelles se feront les préparations, suffisent à permettre le doublement du nombre des agrégés. Il reste, en effet, à aménager les voies qui mènent à l'agrégation.

Les candidats à l'agrégation, concours de recrutement, sont les élèves des Ecoles Normales Supérieures et les étudiants. Les premiers après une scolarité normale ont suivi les cours d'une classe préparatoire sur un programme de Spéciales, qui sera ultérieurement le programme de Spéciales de l'Agrégation, les autres se sont en général contentés d'une année de Mathématiques Supérieures, ou de Mathématiques Générales avant d'aborder les études de licence. Ils auront, par conséquent, à compléter leurs connaissances du programme de Spéciales au cours de l'année qu'ils consacreront à la préparation du concours, à un moment où ils auront bien d'autres sujets de préoccupations. Nous pensons que la création dans l'Enseignement Supérieur d'un troisième cycle devrait permettre dans le premier cycle la création d'une véritable licence d'enseignement, n'exigeant pas plus de trois années d'études, dont l'aboutissement normal serait l'agrégation. Cette réforme nous paraît sur le plan technique la seule qui puisse ramener vers les fonctions d'enseignement des candidats

que décourage actuellement la longueur des études (nous avons inspecté un maître auxiliaire de qualité qui a mis sept ans pour obtenir sa licence) et leur difficulté. Nous disons bien : sur le plan technique ; nous n'avons pas dans ce rapport à analyser les raisons d'ordre général pour lesquelles tant de licenciés scientifiques renoncent à toute carrière de professeur dans le Second Degré.

Nous terminerons ce rapport en signalant que l'Inspection Générale de Mathématiques a proposé la nomination d'un agrégé de 1955 et de deux agrégés de 1954, libérés du service militaire, dans deux chaires de Mathématiques Supérieures et dans une classe préparatoire à l'Ecole Supérieure d'Electricité. Tous trois, bien que débutants, y ont été nommés. Ce choix témoigne de la confiance de l'Inspection Générale dans les agrégés des promotions récentes et de son souci de leur donner l'occasion, comme l'ont eue leurs aînés, de montrer dans des postes difficiles ce qu'ils sont capables de faire. Nous ne doutons pas de leur succès.

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION

Réunion du Comité

2 février 1956

Présents : Mlles FÉLIX, MASSON ; MM. BAY, BIGUENET, CHAZAL, EDDE, FAVRELLE, FOUCHÉ, GIRARD, GUITTON, ITARD, LEGRAND, MINOIS, ROSTOLLAND, WALUSINSKI.

Excusés : BERTRAND, CROZES, DELTHEIL, MAILLARD, PÉTRUS, THOVERT.

La séance est ouverte à 17 heures.

WALUSINSKI donne lecture des lettres de MM. BERTRAND, DELTHEIL et THOVERT. ITARD transmet un vœu de MAILLARD : que les Conférences de la Société Mathématique pour les professeurs soient publiées ; cela sera fait.

1. Démarches du Bureau. — 1° WALUSINSKI donne lecture de la réponse de M. le Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré au vœu adopté par le Comité du 22 décembre (sur les séances de travaux pratiques de Mathématiques) :

Le 13 janvier 1956.

MONSIEUR LE PRÉSIDENT,

J'ai pris connaissance du vœu émis par le Comité de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public, en vue de l'organisation de séances hebdomadaires de travaux pratiques de Mathématiques dans toutes les classes de l'Enseignement du Second Degré.

Il est certain que l'organisation de telles séances présenterait de nombreux avantages et le projet de réforme tend précisément à instituer des activités dirigées plus nombreuses et placées sous le contrôle de professeurs. Toutefois, il n'est pas possible d'envisager actuellement l'augmentation des horaires d'une discipline sans risquer d'entraîner des demandes analogues pour toutes les autres disciplines.

Dans ces conditions, il n'est pas possible, à mon grand regret, de donner une suite immédiatement favorable au vœu de l'Association des Professeurs de Mathématiques.

Veuillez agréer, Monsieur le Président, l'expression de mes sentiments les plus dévoués et les meilleurs.

Le Directeur Général
de l'Enseignement du Second Degré.

Le Comité décide de faire reprendre le vœu par l'Assemblée générale statutaire du 25 mars 1956.

2° WALUSINSKI rend compte de la réunion commune avec des délégués de l'Union

des Physiciens et de l'Union des Naturalistes. Y participaient pour l'A.P.M., Mlle FÉLIX, MM. BAY et WALUSINSKI. Nos Collègues physiciens ont rappelé leur vœu de commencer, en Troisième, une initiation aux Sciences Physiques. Si la spécialisation scientifique n'est pas apparue souhaitable dans le premier cycle, un certain renforcement général des études scientifiques a été souhaité (une section réservée aux élèves à vocation littéraire marquée pourrait seule en être dispensée).

Dans le second cycle (Seconde et Première), deux sections scientifiques peuvent être conçues : l'une (Mathématiques-Physique) assez semblable aux actuelles C ou M, l'autre avec des Sciences Naturelles et des Mathématiques plus adaptées aux sciences de la Nature.

Dans les classes terminales, trois sections scientifiques reproduiraient la classification A, B, C des propédeutiques. La classe de Mathématiques (horaire : Mathématiques 9 h. + interrogations, Sciences Physiques 7 h., Sciences Naturelles 2 h.), ou section A, serait orientée vers les sciences théoriques. La classe de Physique (horaire : Mathématiques 7 h., Sciences Physiques 7 h., Sciences Naturelles 4 h.), ou section B, serait orientée vers les sciences expérimentales. La classe de Biologie (horaire : Mathématiques 5 h., Sciences Physiques 6 h., Sciences Naturelles 7 h.), ou section C, serait orientée vers les sciences biologiques et attirerait plus particulièrement les futurs médecins, voire les futurs agronomes.

Le Comité discute ces conclusions. MM. CHAZAL et GUITTON jugent inutile la distinction des sections A et B et M. LEGRAND souligne la difficulté d'organiser des sections multiples dans les petits établissements.

Le problème sera posé à l'Assemblée générale.

3° WALUSINSKI rend compte de deux réunions de la Commission Pères. La réunion du 3 janvier a été consacrée au programme de la classe de Mathématiques ; parmi les questions soulevées citons : l'introduction, sans vain appareil de formules, de la géométrie analytique quand elle peut simplifier les exposés ; en algèbre, la division des polynômes par $(x - a)$; en arithmétique, le souhait de la voir présenter à neuf, sans omettre les nombres négatifs et en utilisant la notion féconde de congruence.

La question d'une distinction à faire entre le programme des classes et le programme du Baccalauréat a été posée. *Le Comité, tout en considérant que cela touche incidemment à l'existence de la question de cours, décide de poser la question à l'Assemblée générale.*

La séance du 28 janvier a été plus particulièrement consacrée au problème de la formation des maîtres. Nous connaissons quelles difficultés se posent : manque de candidats, urgence d'une réforme de la licence. On peut, à ce sujet, souhaiter la création d'un certificat de physique pour les futurs professeurs de Mathématiques ; une partie importante du second cycle de l'Enseignement Supérieur devra être consacrée à la préparation d'une licence d'enseignement mieux adaptée aux besoins réels de l'Enseignement du Second Degré.

M. l'Inspecteur Général DESFORGE a posé aux membres de la Commission Pères qui appartiennent à l'Enseignement Supérieur, la question fondamentale suivante : « Qu'est-ce que les professeurs du Second Degré doivent mettre en évidence dans l'enseignement des Mathématiques ? » Il est évident que nous sommes tous invités à réfléchir à cette question.

4° MM. CHÂTELET et DESFORGE ont provoqué une petite réunion pour organiser le travail des Collègues français en vue de la préparation des questions à l'ordre du jour du Congrès International de Mathématiques (Edimbourg, 1958). Pour la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, ce sont :

- I. L'enseignement des Mathématiques jusqu'à l'âge de quinze ans.
- II. Les bases scientifiques des Mathématiques dans l'Enseignement Secondaire.
- III. L'étude comparée des méthodes d'initiation à la géométrie.

Les Collègues seront informés des réunions d'étude prévues pour préparer ce Congrès. M. DESFORGE nous a demandé de réunir la documentation sur le premier sujet ; le Comité décide de confier ce travail à la Commission des Programmes (voir plus loin).

2. Situation de l'A.P.M. — M. LEGRAND donne connaissance de la situation financière (voir plus loin le rapport financier pour l'A.G.). Au 2 février, 2 037 cotisations ont été versées. Malgré l'augmentation des dépenses (dues à l'accroissement du *Bulletin*), la situation est saine.

WALUSINSKI, au nom du Comité, remercie M. LEGRAND pour son constant dévouement et pour le succès de sa gestion.

Il propose qu'une indemnité soit demandée à la Direction du Second Degré pour couvrir partiellement les frais provoqués par la publication des rapports officiels.

Le tarif réduit (300 francs), réservé aux élèves des E.N.S. et aux stagiaires des C.P.R., est étendu aux agrégatifs qui n'exercent pas (à condition que leur demande soit transmise par un professeur de leur centre de préparation).

3. Ordre du jour de l'Assemblée générale. — Il est fixé ainsi qu'il suit :

1. Rapport moral du Président (1).
2. Compte rendu financier (2).
3. Modification des statuts (3).
4. Les épreuves de Mathématiques aux divers examens et concours (les rapports seront publiés ultérieurement).
5. Sur les définitions de mots et notations (4).
6. Mathématiques et réforme de l'enseignement (5).
7. Problèmes de formation des maîtres et de recrutement ; rapport d'information sur la création d'une agrégation de l'Enseignement Technique (6).

Il est ensuite fait état des candidatures pour le renouvellement du Comité.

4. Stage de Sèvres. — La date des 22, 23 et 24 mars a été retenue par l'Administration. Le Comité d'organisation désigné par le Comité du 22 décembre a choisi les thèmes d'étude qui ont reçu l'approbation de l'Inspection Générale. Le Comité remercie MM. ITARD et SCHWARTZ qui ont accepté de faire des conférences d'introduction.

Note importante :

Depuis la réunion du Comité, les dates précédentes ont dû être reportées aux 1^{er}-3 novembre 1956, pour des raisons administratives indépendantes de notre volonté. Ce plus long délai devra être mis à profit pour préparer, de façon plus approfondie, les discussions qui porteront sur les thèmes suivants :

1. La vision dans l'espace, problème de l'enseignement de la géométrie dans l'espace.
2. Les problèmes posés par l'initiation à l'algèbre.
3. Mathématiques, langage et symboles.

Dans le *Bulletin* 177, nous publierons des questionnaires relatifs à ces trois thèmes, ainsi que les remarques que nos Collègues voudront bien nous adresser. En temps voulu, nous publierons tous les renseignements pratiques sur l'organisation du stage.

- (1) Voir p. 363.
- (2) Voir p. 367.
- (3) Voir p. 274.
- (4) Voir p. 367.
- (5) Voir p. 367.
- (6) Voir p. 367.

5. Questions diverses. — 1. WALUSINSKI rend compte de l'organisation des conférences de la Société Mathématique de France à l'intention spéciale des professeurs.

Le programme de ce premier cycle, consacré à l'algèbre, est le suivant :

- 1) Jeudi 9 février 1956, H. CARTAN : Structures algébriques.
- 2) Jeudi 8 mars 1956, G. CHOQUET : Espaces vectoriels, formes et équations linéaires.
- 3) Jeudi 15 mars 1956, P. DUBREIL : Anneaux, idéaux, congruences arithmétiques.
- 4) Jeudi 19 avril 1956, A. LICHNEROWICZ : Espaces vectoriels, les opérateurs.
- 5) Jeudi 26 avril 1956, A. LICHNEROWICZ : Espaces vectoriels, les opérateurs. (2^e conférence).
- 6) Jeudi 17 mai 1956, P. LELONG : Formes quadratiques et hermitiennes.
- 7) Jeudi 31 mai 1956, L. LESJEUR : Groupes classiques.
- 8) Jeudi 14 juin 1956, A. REVUZ : Espaces projectifs.

Chaque conférence aura lieu à l'Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5^e, *salle 116* (1^{er} étage), à 14 h. 15 précises.

Le Comité de l'A.P.M., sûr d'exprimer le sentiment de tous les membres de l'Association, exprime sa gratitude : aux conférenciers, qui ont accepté avec un empressement sympathique et malgré leurs occupations de se charger des exposés ; aux Secrétaires de la S.M.F., MM. BELGODÈRE, CHOQUET et LELONG, pour la part déterminante qu'ils ont prise à l'organisation de ce programme.

Il est entendu que les conférences seront publiées au *Bulletin*.

2. A l'issue de la conférence du 9 février, une réunion de Collègues volontaires organisera le travail de la Commission des Programmes.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée à 19 h. 15.

Rectification importante :

A l'occasion de la préparation de l'Assemblée générale 1956, nous avons constaté une omission regrettable : nos Collègues GIRAULT (*J.-B.-Say*), MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) et Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*), membres élus du Conseil de l'Enseignement du Second Degré, auraient dû figurer parmi les *membres de droit* du Comité de l'A.P.M. Nous nous excusons auprès de nos Collègues de cette erreur bien involontaire et nous les rétablissons aussitôt dans leur droit.

Pour l'Assemblée Générale du 25 mars 1956

N.-B. — Si vingt membres de l'Association au moins en font la demande, le Bureau de l'A.P.M. se chargera de faire les démarches pour leur permettre de bénéficier d'un billet de Congrès (30 0/0 de réduction). Adresser les demandes à M. Walusinski, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11^e.

I. Rapport moral du Président.

La rédaction de ce rapport statutaire comporte un agréable préambule. C'est un plaisir de souligner combien sont toujours excellents les rapports entre nous, membres de l'A.P.M. ; l'atmosphère des réunions du Comité en témoigne et la cordialité des propos ne nuit en rien à la vivacité des discussions, non plus qu'à l'efficacité du travail. Nous sommes tous conscients des difficultés que nous avons à affronter. Il y a celles qui tiennent à la nature de notre métier, je veux dire à la pédagogie des

Mathématiques. Il y a celles qui nous attendent, alors que la Réforme de l'Enseignement tarde à se faire, alors que les motifs qui la rendent urgente se font de plus en plus pressants, alors que toutes les sciences, — et la Mathématique comme les autres —, évoluent rapidement. Avec les nuances inévitables (et heureuses) de nos tempéraments respectifs, nous avons tous le même désir d'agir efficacement pour le progrès de notre enseignement.

Dans ces conditions, la tâche du Bureau et du président de l'A.P.M. est grandement facilitée.

Je note donc pour commencer les signes évidents de bonne santé de notre Association.

Il faut, d'abord, y voir la réussite de notre Trésorier. Lisez son bilan réconfortant. Depuis plusieurs années, nous profitons de cette bonne gestion de nos finances. Mais lisez ce bilan en pensant à l'effort continu, au travail souvent accablant, et pas toujours distrayant..., dont il témoigne. Si l'aisance relative de notre trésorerie rend facile l'action générale de l'A.P.M. et, en particulier, le développement de son *Bulletin*, il faut préciser que c'est au constant dévouement de notre Collègue LEGRAND que nous la devons.

Cette bonne santé de l'Association se manifeste aussi par la croissance régulière de nos effectifs. Sur ce plan, il ne faut pourtant pas se satisfaire trop facilement : un effort reste à développer, par chacun de nous, pour faire connaître l'A.P.M. aux Collègues qui l'ignorent encore. Si notre effectif a dépassé le cap des 2.000, cette année, il faut se fixer l'objectif des 2.500 pour 1957.

Dans ce domaine de la propagande, il y a eu une innovation : l'abonnement à tarif réduit pour les élèves des E.N.S., pour les stagiaires des C.P.R. et pour les agrégatifs. Il dépend de l'intervention des Conseillers pédagogiques et des responsables de préparation aux concours de recrutement d'attirer nos futurs Collègues dès avant leur entrée dans la carrière.



L'an dernier (voir *Bulletin* 169 de juin 1955) j'avais formulé nos projets :

— développer la vie interne de l'Association, en particulier en donnant plus d'importance au *Bulletin* ;

— affirmer, dans toutes les discussions sur la Réforme de l'Enseignement, les besoins de l'enseignement des Mathématiques.

C'est, chers Collègues, sur ce qui a pu être réalisé de ces projets, que je demande votre jugement.



Vous devez dire ce que vous pensez des publications de l'A.P.M. : le *Bulletin* et les recueils d'énoncés. Nous avons augmenté la fréquence des *Bulletins* ; l'expérience de la préparation de chaque numéro me fait penser qu'il serait difficile, — sans rechercher une autre organisation du travail —, d'augmenter encore la fréquence jusqu'à la périodicité mensuelle (comme c'est le cas de la revue de *The National Council of Teachers of Mathematics* des U.S.A.). Il faudrait d'ailleurs savoir si cette périodicité mensuelle est souhaitable.

Que pensez-vous des sommaires de nos *Bulletins* ? Je ne pense pas que vous puissiez tous en être satisfaits et je crois que vos critiques seront très utiles pour améliorer les prochains numéros. Pour ma part, je vois surtout la trop grande rareté de ces comptes rendus d'expériences pédagogiques réellement vécues ; elles seraient pourtant d'un grand profit pour les Collègues les plus jeunes, mais pas seulement

pour ceux-ci. Ces expériences se déroulent partout, à longueur d'année ; leurs auteurs doivent vaincre cette pudeur excessive qui les empêche de témoigner devant tous. Est-ce que le *Bulletin* n'est pas notre école à nous, professeurs, je veux dire l'école où nous venons pour apprendre, chacun, des autres ?

C'est pourquoi il me paraît que la formule actuelle peut être maintenue. Nous n'avons que faire d'une revue savante ; nous devons signaler, — ce que nous n'avons pas pu faire aussi largement que nous l'aurions souhaité —, ce qui est publié dans les revues savantes. Mais c'est l'enseignement des Mathématiques qui nous intéresse au premier chef. Cela ne veut pas dire que nous nous contenterons d'être un recueil des meilleurs procédés pédagogiques (s'il y en a) ; la pédagogie se construit sur des connaissances scientifiques plus assurées. En fin de compte, culture mathématique et recherches pédagogiques ne peuvent être dissociées ; par là-même notre formule se doit de vivre dans cette ambiguïté qu'on lui a parfois reprochée.

Il est vrai que la formule ne vaut que par le contenu réel des numéros. Au Bureau de rechercher les collaborateurs dévoués ; il déclare avoir fait ce qu'il a pu et il remercie les auteurs d'articles et de comptes rendus qui ont répondu à ses appels. Mais, je le répète, il dépend aussi de tous ceux qui peuvent collaborer de se révéler, sans fausse modestie. Nous en profiterons tous.



Le Bureau de l'A.P.M. est heureux d'avoir pu multiplier les contacts avec des Associations voisines de la nôtre. Avec l'Union des Physiciens et avec l'Union des Naturalistes, nous nous trouvons aisément d'accord pour souhaiter le renforcement des études scientifiques dans le Second Degré, et y travailler, en conjuguant nos efforts.

Auprès de la Société Mathématique de France, nous avons rencontré l'accueil le plus sympathique. Les conférences sur l'Algèbre, dont le programme est publié d'autre part, sont un premier cycle d'études qui doivent se prolonger dans les années à venir. Les sommaires de notre *Bulletin* en seront enrichis. Surtout, notre contact avec les nouveaux courants mathématiques sera plus direct.

Je veux faire une place à part aux relations si amicales que nous avons eues avec nos Collègues belges. Leur contribution à notre *Bulletin* est le plus juste hommage (profitable par surcroît) que nous pouvions rendre à leurs travaux. A ce propos, il faut reconnaître que la coopération internationale entre associations de professeurs de Mathématiques est encore dans l'enfance. L'expérience prouve, — même si avec nos Amis belges les difficultés de langue sont évitées —, que ce stade devrait être dépassé. Ne faudrait-il pas accueillir favorablement tout effort tenté dans ce sens ? Pour ma part, je le souhaite vivement.

Enfin, le Bureau et le Comité ont accueilli avec empressement l'offre de M. Brunold d'organiser un stage à Sèvres, sur l'enseignement des Mathématiques, à la veille de notre Assemblée générale. Au jour où ce rapport est écrit, il est évidemment prématuré de porter un jugement sur ces journées d'étude ; mais l'exemple des stages passés est encourageant. Celui de l'an dernier a permis une confrontation des enseignements dans divers pays. Celui de cette année sera spécialement axé sur les problèmes pédagogiques tels qu'ils se présentent dans notre pays. Il serait puéril d'attendre, de telles confrontations, une révolution de nos conceptions. Mais tous les Collègues ne peuvent manquer de tirer parti des échanges d'idées et d'informations ainsi facilités ou même provoqués.



J'ai gardé pour la fin de ce rapport les regrets qui marqueront nos commentaires sur le présent et l'immédiat avenir de la Réforme de l'Enseignement. L'urgence de

celle-ci est soulignée par l'évolution de la société aussi bien que par celle de la science. Cependant la Réforme est simplement maintenue à l'ordre du jour, ce qui signifie qu'aucun commencement de réalisation n'est envisagé. Pour cette année tout au moins, nous ne pouvons faire état d'aucun progrès.

Par ses contacts avec les autres associations de spécialistes, par sa représentation dans les Commissions officielles où notre participation était sollicitée, le Bureau a rempli ses devoirs élémentaires. Il n'a pas la fatuité de penser que toutes ses démarches aient été fructueuses ou utiles ; les résultats acquis l'invitent plutôt à la modestie. Pourtant, à chaque fois que nous avons pu le faire, nous avons rappelé les vœux de l'A.P.M., tels qu'ils ont été formulés par son Comité ou son Assemblée générale. Et il faudra bien qu'un jour, on nous entende.

Lors de l'audience qu'il nous a accordée, M. le Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré nous a assurés qu'il envisageait avec faveur une augmentation raisonnable de l'horaire de Mathématiques dans les classes du premier cycle. Cependant la date de la réalisation de cet aménagement reste très indéterminée. Pour la rentrée 1956, la lettre de M. Brunold, publiée dans ce *Bulletin*, nous informe qu'il n'y aura rien de changé.

L'opinion publique et les journaux qui la font continuent à affirmer qu'il faut former des scientifiques. Mais en même temps une partie éloquente ou pour le moins bruyante de cette opinion ne manque pas de pousser des hauts cris dès qu'il est question d'adapter la formation de la jeunesse aux conditions actuelles de la culture.

C'est pourquoi il nous arrive, à chacun d'entre nous, d'éprouver parfois quelque découragement ou de laisser échapper un mot trop amer. Mais je suis persuadé que nous aurions tort de nous décourager ; nous pouvons avoir confiance. Les résistances actuelles sont des combats (désespérés) de retardement, des escarmouches d'arrière-garde. L'enseignement scientifique a, devant lui, un immense avenir. Il dépend de notre clairvoyance, de notre audace et de notre détermination, que ce champ immense puisse être exploité au mieux de l'avenir de la culture, et par conséquent au mieux du bonheur des générations à venir. Il dépend aussi de nous que les résistances retardatrices, dont plusieurs promotions d'écouliers peuvent avoir à souffrir, soient rapidement balayées.

Grâce à notre ami J. ITARD, notre *Bulletin* a pu donner une large place à l'histoire des Mathématiques. J'espère que personne n'y a vu une prédilection pour les closes du passé ou la peur devant le présent et la recherche d'un refuge confortable (?). Tout au contraire, ces retours historiques doivent nous aider à prendre mieux conscience des évolutions indispensables. Admironons et surtout comprenons ceux de nos ancêtres qui ont fait progresser les Mathématiques et leur enseignement. Que leur exemple nous enseigne à être, non des freins aveugles, mais les acteurs clairvoyants.



Essayons, tout au moins, d'agir avec clairvoyance. Les résultats de notre action sont dérisoires en comparaison de ce qu'il aurait fallu faire. Nous voulons, comme le disait si bien Lalande, « *abréger les premiers pas à ceux qui entreront dans la carrière pour empêcher qu'ils ne soient rebutés par les difficultés* ». Et pourtant, nous savons que les difficultés ne seront jamais tout à fait supprimées.

Quelle chance si, un jour, nous parvenions à débarrasser la machine du grain de sable qui la fait tant grincer !

G. WALUSINSKI.

II. Compte-rendu financier du 29 mai 1955 au 26 février 1956.

RECETTES

En caisse le 29 mai 1955	852 266
Cotisations. Compléments et dons	I 276 247
<i>Bulletins</i>	26 890
Recettes brutes de publicité	148 800
Total des recettes	2 304 203

DÉPENSES

Frais d'impression et d'expédition des <i>Bulletins</i> n ^{os} 169, 170, 171, 172 et 174	674 765
Frais de secrétariat et de gestion	42 072
Total des dépenses	716 837
Actif au 26 février 1956	I 587 366

L'actif comprend un fonds de réserve de 5.930 francs concernant 33 rachats de cotisations.

III. Sur les définitions de mots et notations.

Question posée par le Comité :

Doit-on maintenir l'expression « nombres algébriques » pour désigner les nombres réels positifs, négatifs ou nuls ; ou bien faut-il adopter l'expression « nombres relatifs » ?

(On éviterait ainsi la confusion avec les véritables nombres algébriques).

IV. Questions sur les programmes des diverses classes.

(Voir les questions 1 à 6 dans le *Bulletin* 175).

7. Approuvez-vous le vœu formulé par le Comité dans sa réunion du 22 décembre (*Bulletin* 175, p. 272) concernant l'organisation de travaux pratiques de Mathématiques dans toutes les classes, dès la rentrée 1956 ?

8. Structure des classes scientifiques du second cycle : approuvez-vous les conclusions de la réunion commune signalée plus haut, compte rendu du Comité, p. 360 ?

9. Pensez-vous que le programme des classes doive être identique ou différent du programme des examens de fin d'année ?

V. Problèmes de la formation des maîtres.

1. Souhaitez-vous que la réforme de la licence d'enseignement comporte la création d'un certificat de physique pour les mathématiciens ?

2. Souhaitez-vous la division du programme de calcul différentiel et intégral dont une partie seulement serait exigée pour la licence d'enseignement ?

3. Approuvez-vous le principe de la création d'une agrégation de Mathématiques pour l'Enseignement Technique ? (Voir, ci-dessous, le rapport de notre Collègue BIGUENET).

L'Agrégation dans l'Enseignement Technique

Il est question de constituer un cadre d'agréés dans l'Enseignement Technique. Le Comité de notre Association me demande mon opinion en ce qui concerne l'agré-

gation de Mathématiques. Je la donne bien volontiers aux membres de l'A.P.M. en m'excusant toutefois de ne pouvoir me dispenser de la situer dans le cadre plus général des agrégations dans l'Enseignement Technique.

*
**

Nos écoles sont le refuge des enfants insuffisamment doués intellectuellement pour tirer profit de l'Enseignement Secondaire. Pour certains, elles ne sont que cela. Ils se trompent. L'Enseignement Technique, en effet, réclame sa part de l'élite intellectuelle de notre jeunesse pour préparer les ingénieurs et les techniciens que réclame en nombre de plus en plus grand la Production. Ce qui caractérise nos diverses écoles, c'est de conduire la totalité des élèves au terme de leurs études : Certificat d'aptitude professionnelle, Brevet d'enseignement industriel, commercial, social ou hôtelier, Diplôme d'élève breveté des Ecoles nationales professionnelles, Baccalauréat, Ecoles d'ingénieurs.

Il est aujourd'hui admis que l'Enseignement Technique peut être un enseignement de culture. La création du Baccalauréat technique a permis à un certain nombre d'élèves formés dans nos établissements d'accéder aux Grandes Ecoles (même à l'Ecole Normale Supérieure). La valeur culturelle d'un enseignement professionnel long n'est pas niable non plus et l'on a envisagé la possibilité d'accès, dans certaines conditions, de « techniciens supérieurs » dans l'Enseignement Supérieur.

La nécessité d'un très grand développement de l'Enseignement Technique n'échappe à personne. Il importe que le public sache bien qu'il n'est pas, en qualité, inférieur à l'Enseignement Secondaire. Or l'enseignement est donné, dans les lycées et collèges, par des professeurs agrégés ou certifiés, alors que dans nos écoles techniques il est donné par des professeurs certifiés seulement. Nous pensons que « les maîtres qui enseignent dans nos écoles doivent avoir une culture, une qualification et un statut comparables à ceux de leurs collègues des lycées et collèges ; pourquoi les enfants qui nous sont confiés ne seraient-ils formés que par des certifiés, alors que les élèves des lycées sont enseignés aussi par des agrégés ? » (1).

Il est souhaitable que l'Enseignement Technique possède une réserve de professeurs d'élite d'où il tirera les professeurs de ses écoles d'ingénieurs, de ses écoles supérieures d'enseignement commercial et ses inspecteurs généraux :

— Les professorats d'écoles d'ingénieurs Arts-et-Métiers sont d'un niveau élevé, les concours sont rares et il n'existe aucune préparation organisée ; comment s'étonner qu'il y ait si peu de candidats à ces concours ?

— Des établissements donnent un enseignement commercial supérieur ; pourtant le recrutement des professeurs de ces écoles n'est pas même défini.

— Il semblerait normal que l'Enseignement Technique choisisse ses inspecteurs généraux parmi les meilleurs de ses professeurs. Or cela n'est pas possible pour les disciplines littéraires ou scientifiques si ces professeurs ne sont pas agrégés ou docteurs. Ce choix n'est possible que pour les disciplines techniques. Les professorats de lettres et de sciences n'auraient-ils pas cependant une valeur égale à celle des professorats techniques ?

La création d'un cadre d'agrégés permettra, dans l'avenir, de choisir les professeurs des écoles techniques supérieures et les inspecteurs généraux.

Le recrutement futur des professeurs de l'Enseignement Technique dépend de la création d'un cadre d'agrégés dans l'Enseignement Technique. Le prestige considérable de l'agrégation détourne, en effet, de l'Enseignement Technique un grand nom-

(1) « Le Travailleur de l'Enseignement technique », janvier 1956, n° 98, article de LAURÉ : « Les Agrégations dans l'Enseignement technique ».

bre de candidats : parce que celui-ci n'offre pas à de jeunes et légitimes ambitions un débouché analogue.

On me dira — on m'a déjà dit — : « Mais vos candidats ne réussiront pas à ces concours. » Je réponds à cela que la qualité du recrutement de l'E.N.S.E.T. nous permet d'avoir confiance. D'ailleurs, malgré de sérieux obstacles administratifs, on voit tous les ans d'anciens élèves de cette école réussir à l'agrégation, parfois brillamment.

Ces problèmes n'ont pas échappé à d'Administration, puisque l'avant-projet de Réforme de l'Enseignement prévoit, dans son article 68, que : « Les maîtres chargés de l'enseignement général (classique, moderne, technique) sont des professeurs munis, soit de l'agrégation, soit du certificat d'aptitude à l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S.), soit du certificat d'aptitude à l'Enseignement Technique (C.A.P.E.T.), soit de certificats d'aptitude à l'enseignement de disciplines spéciales.

Les maîtres chargés de l'enseignement professionnel sont munis, pour les disciplines générales :

« a) Dans les lycées techniques et collèges techniques, des mêmes titres que les maîtres chargés de l'enseignement général et visés au premier alinéa du paragraphe précédent... »

*
**

En ce qui concerne les Mathématiques, trois solutions peuvent être envisagées :

1) Si l'on pense que l'agrégation de Mathématiques répond aux besoins de l'Enseignement Technique, il faudrait, d'une part, que l'E.N.S.E.T. mène normalement à cette agrégation ses meilleurs éléments ; d'autre part, qu'on dispense les titulaires du professorat de l'Enseignement Technique de l'obligation de posséder une licence complète, — qu'on les dispense au moins du certificat de physique générale, dont le contenu est inclus dans le programme du professorat.

2) On peut aussi penser à une option technique à l'agrégation de Mathématiques (en renforçant, par exemple, l'importance de la mécanique). Rappelons à ce sujet que la Commission de l'Agrégation, instituée par l'A.P.M., d'accord avec l'Union des Professeurs de Spéciales, avait émis l'avis suivant (2) :

« La création d'une agrégation de l'Enseignement Technique, section Mathématiques, souhaitée par l'Enseignement Technique apparaît à la Commission comme légitime et possible, pourvu que certaines épreuves communes avec l'agrégation de Mathématiques (épreuve d'Elémentaires et de Spéciales, par exemple), garantissent l'égalité des niveaux. »

3. On peut enfin créer un concours, propre à l'Enseignement Technique, analogue à celui qui est organisé pour recruter les professeurs des Ecoles nationales d'ingénieurs Arts-et-Métiers.

*
**

De toutes façons, il faut permettre à l'élite de l'Enseignement Technique de se compter pour constituer un cadre ayant *les mêmes avantages, le même niveau de culture et le même prestige* que celui des professeurs agrégés.

A. BIGUENET.

(2) *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques*, n° 129, mai 1949, pages 128-129.

Régionale de Nancy

La Régionale de Nancy s'est réunie le 2 février 1956, au Lycée Henri-Poincaré. L'ordre du jour comportait l'étude des questions devant paraître dans le *Bulletin* de janvier, et dont quelques éléments étaient déjà proposés :

1^{re} partie : La réforme de la licence d'enseignement.

2^e partie : 1° L'emploi des modèles est-il favorable au développement des facultés intellectuelles que nous voulons cultiver ?

2° La construction des modèles par les élèves ne peut-elle favoriser chez les enfants le goût pour la recherche (à propos des problèmes suggérés par la construction de ces modèles ou par l'étude de leurs propriétés plus ou moins imprévues) ?

3° La construction de modèles spatiaux peut-elle favoriser l'étude de la géométrie dans l'espace tout au long de la scolarité, en évitant ainsi certaines des difficultés rencontrées en Première ?

4° Cette méthode exige-t-elle une amélioration de nos horaires ?

5° L'emploi des modèles peut-il être généralisé aux divers secteurs des Mathématiques ?

6° Problème de la coordination Mathématiques-Physique : on le conçoit le plus souvent dans le sens unique : « Quelles Mathématiques étudier pour rendre possible l'étude de la physique ? ». Mais le sens inverse n'est pas moins intéressant : quels problèmes de Mathématiques l'étude de la nature propose-t-elle ?

COMPTE RENDU DE LA RÉUNION

Assistance fort nombreuse malgré le froid. Les décisions ci-dessous ont été prises à l'unanimité.

Première question : Réforme de la licence d'enseignement.

Il est décidé de diviser la question en deux : 1) propédeutique ; 2) licence proprement dite.

La question de la licence est d'abord examinée. L'Assemblée pense que c'est une question du ressort de l'Enseignement Supérieur et qu'elle ne peut émettre que des vœux. Elle déplore la fantaisie qui règne quant à l'ensemble des matières traitées et regrette qu'un programme minimum ne soit pas traité. Il est inadmissible que les candidats aux concours d'agrégation de Mathématiques aient à apprendre seuls, dans les traités classiques, presque toutes les matières des certificats de licence, calcul différentiel et mécanique rationnelle. En conséquence, l'Assemblée émet les vœux suivants :

a) que l'Enseignement Supérieur fixe ses exigences quant aux connaissances que doivent avoir les étudiants quand ils abordent les certificats de licence ;

b) que les professeurs du Supérieur respectent le programme minimum de l'agrégation, quitte à modifier ce dernier dans tel sens qu'il leur plaira si celui-ci ne leur convient plus.

Propédeutique : L'Assemblée pense que c'est une question à propos de laquelle l'A.P.M. doit intervenir énergiquement. Comme en Lettres, il est souhaitable de solliciter la collaboration des professeurs du Second Degré, aussi bien pour les cours que pour les examens. Quant aux programmes, quand ils existent, ils doivent être respectés et mis en harmonie avec ceux des propédeutiques des lycées. Si les cours des certificats de M.P.C. et de Mathématiques Générales devaient rester, dans l'avenir, aussi fantaisistes que ceux de la Faculté de Nancy en particulier, les propédeutiques devraient être confiées uniquement aux professeurs de lycée.

Cette question est du ressort de l'A.P.M., qui doit intervenir auprès de la Direction du Second Degré.

Toutes ces questions ont donné lieu à un débat très animé. Certains professeurs sont surpris de ne pas pouvoir aider leurs anciens élèves qui les ont quittés l'an dernier. Or, eux-mêmes ont quitté les bancs de la Faculté il y a peu de temps et ils ne sont pas des fossiles. La propédeutique est une initiation et il ne faut pas dégoûter les étudiants déjà trop peu nombreux. Comme le cours est traité d'une façon trop abstraite, le problème est remplacé par une question de cours, ce qui est déplorable dans une licence de Mathématiques. Il faut remarquer également que les étudiants doivent se contenter de leurs notes, puisqu'il n'existe aucun traité classique. De tels procédés ne contribuent pas à l'amélioration du recrutement déjà si insuffisant des professeurs de Mathématiques.

Seconde question : Classes de Cinquième, Quatrième, Troisième et Seconde.

L'ensemble des professeurs rejette en bloc la construction des cocottes en papier et ses applications.

En échange, il est proposé le rétablissement du dessin graphique jusqu'en Troisième au moins.

On regrette également que, malgré les progrès du cinéma, il n'y ait pas plus de films sur la géométrie, lesquels sont beaucoup plus éducatifs que toutes les constructions de modèles.

Une amélioration des horaires est demandée pour les classes de Cinquième, Quatrième et Troisième : il est impossible, avec les horaires actuels, de faire convenablement du calcul algébrique.

Les professeurs regrettent qu'il n'y ait pas de crédits spéciaux pour les Mathématiques. Ils pensent que l'A.P.M. devrait intervenir auprès de la Direction du Second Degré. En cas de rétablissement du dessin graphique, ces crédits seraient indispensables.

Troisième question : La coordination Mathématiques-Physique.

A l'unanimité on pense que la question a déjà été traitée au Congrès de Nancy, en 1950, et que la coordination exige d'abord celle des programmes.

L. COLLOT.

N.D.L.R. — A la lecture des épreuves, il me paraît nécessaire de préciser que si nous sommes heureux de publier ici tout ce qui peut témoigner de l'activité des « Régionales », cela ne signifie pas que la rédaction du *Bulletin* fasse siennes les conclusions ou observations communiquées.

Les difficultés de la coordination entre propédeutiques des Facultés et classes de Mathématiques Supérieures peuvent être examinées autrement qu'en tranchant : les propédeutiques aux professeurs de lycée seuls.

Quant à l'utilisation des modèles pour l'enseignement, nos Collègues auront lu depuis, dans le *Bulletin* 175, qu'il ne s'agit pas *seulement* de cocottes en papier. Les films sur la géométrie peuvent être utiles ; il reste à prouver que la simple vision d'un film soit plus éducative que la construction d'un modèle, par l'élève lui-même. L'expérimentation des deux méthodes par les mêmes maîtres peut seule éclairer le débat. — G. W.

Quelques lettres....

A l'occasion de la publication de quelques extraits d'une de ses lettres, nous sommes heureux de rappeler que la thèse de Mlle GUITEL, « Etude métrique des familles de tétraèdre et de figures apparentées » (et dont il a été rendu compte dans le *Bulletin* 165), a été couronnée par l'Académie des Sciences. Mais, aujourd'hui, c'est de la réforme de l'enseignement que nous entretenons notre Collège :

Il n'y a aucun espoir pour l'Enseignement Secondaire des Mathématiques — même pour un enseignement traditionnel — si les horaires ne sont pas augmentés pour les sections scientifiques ou non spécialisées.

Comme il nous faudra jeter du lest, je propose qu'on supprime purement et simplement l'enseignement des Mathématiques, à partir de la Seconde, pour les sections littéraires : 1 h. 1/2 par semaine, ceci conduit à une caricature d'enseignement.

Il serait si simple de dire : on ne peut pas consacrer suffisamment d'heures à l'enseignement scientifique ; mieux vaut n'en pas faire que de le mal faire.

Un candidat de Philo m'a dessiné la lune au premier quartier . Il a avoué, assez piteusement ne l'avoir jamais vue, heureusement !

Dans vingt ans, dans trente ans, ces littéraires, cancren en Mathématiques, auront peut-être de hautes situations dans l'enseignement (littéraire !), dans le droit, dans la médecine, et ils se riront de l'Enseignement Secondaire en disant qu'ils n'ont jamais rien compris aux Mathématiques.

S'ils n'ont plus fait de Mathématiques depuis la Troisième, ils seront plus modestes dans leurs appréciations.

De C. DELAPIERRE, professeur à l'Ecole Militaire Préparatoire, Les Andelys (Eure) :

Nouveau membre de l'A.P.M., que je regrette n'avoir connue que de loin depuis dix ans que j'enseigne, j'applaudis tout à fait à votre idée d'une « initiation aux applications pratiques des Mathématiques ». Nos meilleurs élèves sont en effet déconcertés, comme vous le dites très bien, quand on les met à même d'appliquer leurs connaissances à des problèmes concrets : « comme si les Mathématiques n'étaient que la langue des concepts abstraits et non pas aussi la langue la mieux adaptée à la description du réel et à son explication ».

Cet état d'esprit, dont nous sommes bien entendu responsables, dénature complètement la signification même de la Mathématique. Les démarches de la pensée la plus pure se sont toujours entrecroisées en effet avec des recherches d'applications. Que l'on fréquente par exemple les grands mathématiciens du XVIII^e siècle, et l'on sera surpris, et charmé tout à la fois, de les voir appliquer leur sagacité à des problèmes d'importance pratique, tel celui de la stabilité des vaisseaux. A vrai dire on ne saurait expliquer la considération publique dont jouissaient ces théoriciens, considération dont, par exemple, les lettres font foi, que par le caractère éminemment vivant, et par conséquent authentique, de leur science. Tant s'en faut aujourd'hui que le mathématicien soit pareillement honoré : nous, professeurs, en notre petit rôle, n'en savons-nous pas quelque chose ? Ce qui est navrant, c'est que nous ayons été les propres artisans de notre ingrate situation.

Comment une telle aberration, et pour nous-mêmes et pour nos élèves, a-t-elle pu dominer des générations ? C'est tout un problème pour nos penseurs... Notre problème immédiat, à nous professeurs de Mathématiques, est seulement de ranimer notre enseignement en l'inspirant largement d'applications, « étant entendu, comme vous le marquez aussitôt, que la rigueur finale sera la même ».

Certes, remplir ces deux conditions à la fois peut soulever d'emblée un débat.. Mais si vraiment on renoue avec le sens même de la Mathématique, laquelle, nous l'avons vu, ne fait pas même la différence entre elles, alors on comprend à l'instant qu'un pareil débat ne saurait s'ouvrir. Le problème n'existe pas. C'est bien d'ailleurs ce que vous pensez : « La culture ne peut pas être désintéressée. » Vous effleurez forcément ce grand problème de l'aberration collective, qui dépasse notre question, mais que nous devons au moins sentir.

Ce qui vient confirmer magistralement votre point de vue, c'est précisément qu'un renouveau de la culture mathématique ainsi comprise coïncidera, et je pèse ce mot, avec la formation de techniciens. Les applications, tout en restituant à la pensée

mathématique sa véritable portée, ouvriront en effet notre enseignement à de bien plus nombreux esprits. Rien que ce souci les commande ; comme vous l'a justement dit, lors d'une audience, M. le Directeur général Brunold : « Peu d'élèves peuvent accéder de plain-pied à l'abstraction : il ne faut pas hésiter à mettre un « escabeau » pour aider les moins doués... Moins de 0,07 % des élèves de Spéciales deviendront professeurs de Mathématiques. Autant dire que, pour tous, les Mathématiques seront essentiellement un outil, l'outil puissant qu'elles sont effectivement pour comprendre le réel et pour le transformer. »

*
**

Voici donc notre enseignement enfin tiré, comme eût dit Kant, de son « sommeil dogmatique ». Bien entendu, on songe aussitôt à faire appel à la Physique, et, comme suite à votre propos, — qui réserve en outre la question des Mathématiques modernes, — le Bulletin de l'A.P.M. nous communique les projets, les plus sensés, déjà réunis par l'Union des Physiciens. Mais c'est là, tout de même, que je crois devoir élever un doute.

Certes, il est plus concret pour un élève de traiter un problème du second degré à propos d'un miroir sphérique, par exemple, plutôt que dans l'arbitraire : le jeu des paramètres, la variation des figures et de leurs grandeurs y prend tout son sens. Toutefois, sommes-nous bien certains, en si belles dispositions, d'animer notre enseignement, de ne pas nous arrêter à mi-chemin ? Le problème de Physique, considéré en lui-même, tel que la tradition l'a établi, quelle est en fin de compte sa portée ? Le problème du miroir sphérique par exemple, qui le représente assez bien, qu'est-ce plus qu'une simple curiosité, dans l'ensemble des connaissances ? Et parler même de curiosité, mot qui doit éveiller le plaisir, c'est être assez généreux... Qu'on interroge donc nos élèves, principaux intéressés.

Pour tout dire, il est à craindre que l'enseignement de la Physique ne souffre exactement du même défaut que le nôtre. Et d'ailleurs, rien qu'« a priori », comment en irait-il autrement, dès l'instant, vous l'avez dit, que c'est toute la culture qui est en cause ? Et il y a là un immense problème... Comment la Physique échapperait-elle, sinon par miracle, à l'entraînement général ? Comment pourrait-elle bien nous prêter une vie qu'il n'est pas sûr du tout qu'elle possède elle-même ?

Je dois dire que, personnellement, j'ai ressenti cette difficulté il y a quelques années. Aussi je me suis demandé, non peut-être sans témérité, s'il ne serait pas possible, par hasard, d'introduire directement des applications techniques dans l'enseignement que je dispensais. J'ai donc entrepris d'étudier un certain nombre de techniques, et je suis en mesure aujourd'hui d'affirmer ceci :

Il existe des techniques dont les données indispensables sont des plus simples et ne recourent aucunement à des préparations systématiques ; ces données peuvent être fournies aux élèves en quelques minutes, seulement au fur et à mesure des besoins, au moment même d'éclairer telle théorie aride par une application bien choisie. Il en va ainsi par exemple en topographie, ou en navigation. Généralement, d'ailleurs, ces données sont dans l'air, car une observation étonnante que peut faire un professeur, à propos de ses élèves, est de découvrir comme ils apprennent de choses utiles, et dûment profitables à la culture, en dehors de son enseignement...

J'ai donc introduit effectivement ces applications dans mes cours, du moins au second cycle. Ou bien je m'illusionne d'une façon inquiétante, ou bien vraiment elles captivent mes élèves. Ces applications, pensez, sont pour ainsi dire à même la vie. Telle construction géométrique parfaitement régulière du programme de Seconde, avec tous les lieux à l'appui, donne un procédé pour faire le point en mer ; telle formule des petits angles donne, du haut d'un phare ou d'une falaise, la distance de l'horizon... Oserai-je ajouter, enfin, que ces applications sont belles ?

Certainement, mes élèves doivent continuer de traverser de longs déserts : les applications que je dis ne peuvent intervenir que de temps en temps, disons, par exemple, une fois par semaine. Cependant, pendant les peines indispensables, je puis au moins garantir une chose : c'est que l'attention de la classe est meilleure. En effet, c'est d'un moment à l'autre qu'une application inattendue, dans l'ordre de la vie, peut survenir... Les élèves sont tenus en haleine. Je me permettrai de dire, puisque des circulaires nous demandent précisément de déclarer ce que nous faisons, chacun dans son enseignement, pour cultiver l'attention, que mon ressort est l'espoir.

Les résultats scolaires, dans ces conditions, sont ce qu'eût dit Leibniz : le maximum du bien possible et le minimum du mal possible. Qui prétendrait à davantage ? Il me reste des élèves très peu aptes, qui ne sauront jamais exécuter le moindre morceau brillant. Mais du moins, pour reprendre la belle image d'un Collègue, M. MOUGENOT, dans les Cahiers Pédagogiques du 15 novembre, ils seront plus tard comme tant de non-musiciens qui admirent cependant la Musique. Pour la cause de notre enseignement, loin des aigreurs si fréquentes, quel plus bel hommage à chercher ?

C. DELAPIERRE.

Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

Programme des prochaines séances :

- Jeudi 15 mars, C. NAUX : Berkeley et les Mathématiques.
- Jeudi 19 avril, C. NAUX : Le premier livre du « Traité des fluxions », de Maclaurin.
- Jeudi 3 mai, J. ITARD : Legendre et le postulat des parallèles.
- Jeudi 17 mai : Discussion d'ensemble sur l'œuvre géométrique de Saccheri, d'après l'exposé de F. RUSSO.

Toutes ces séances ont lieu à 15 h. 30, salle 116, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5^e.

ATLAS DU CIEL

par

V. DE CALLATAY

Préface de E. Delporte

Directeur honoraire de l'Observatoire royal de Belgique

L'ATLAS comprend essentiellement :

- a) 36 grandes planches à fond noir couvrant ensemble la totalité de l'Univers.
 - b) 45 cartes complémentaires représentant, dans leurs délimitations, chacune des 88 constellations existantes et indiquant les étoiles dont l'éclat est supérieur à la magnitude 4,5.
 - c) Des textes succincts commentant les caractéristiques de chaque région céleste représentée et signalant les objets remarquables.
 - d) 26 théories élémentaires sur les principales questions qui intéressent l'Astronomie.
 - e) Des tableaux synoptiques facilitant la recherche des constellations parmi les différentes planches et cartes.
 - f) La reproduction de 12 photographies prises au télescope.
- Un volume cartonné au format 24 × 32 sous jaquette illustrée en 2 couleurs : 3.200 francs.

GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS - VI •

LIBRAIRIE VUIBERT

NOUVEAUTÉS :

**INITIATION
AU
CALCUL MATRICIEL**

**MATRICES, DÉTERMINANTS, APPLICATIONS
A L'ALGÈBRE ET A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE**

par

A. MONJALLON

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
PROFESSEUR AU LYCÉE ST-LOUIS

VOLUME 16/25 de 132 pages 700 F



**ÉLÉMENTS
d'ALGÈBRE MODERNE**

par

A. LENTIN

AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR AU LYCÉE JACQUES DECOUR

et

J. RIVAUD

AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉ-
RIEURES AU LYCÉE JANSON-DE-SAILLY

VOLUME 16/25 SORTIRA EN MARS

63, Bd. St-Germain, PARIS V^e

Nouveautés

M. WALUSINSKI
AIDE-MÉMOIRE
DE
COSMOGRAPHIE

Classes de Mathématiques,
Sciences Expérimentales,
Philosophie.

Un volume (11,5×18,5),

H. SHAEFFER et J. LEBAILLE

MATHÉMATIQUES

Classe de Quatrième

Un volume (14,5×20) broché. 520 »
cartonné. 620 »

Rappel :

ARITHMÉTIQUE, cl. de 6^e

Un vol. (14,5×20) br. 255 », Cart. 345 »

MATHÉMATIQUES cl. de 5^e

Un vol. (14,5×20) br. 390 », Cart. 480 »

MASSON & C^o, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

COURS DE DESSIN TECHNIQUE

par

R. RUBIO DE TERAN

Ancien élève de l'E. N. S. E. T.
Professeur au Collège National Technique de Dijon

VIENT DE PARAÎTRE :

TOME 2. — Géométrie descriptive
par la méthode directe

1^{re} fasc. : REPRÉSENTATION DES OBJETS ET DÉTERMINATION DE LEURS ÉLÉMENTS
GÉOMÉTRIQUES (POLYÈDRES - CYLINDRE - CONE DE RÉVOLUTION). — Un vol. (15,5×22,5)
avec 318 figures et exercices; broché 980 F — cartonné 1.100 F

2^e fasc. : SURFACES COURBES En préparation

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 89.031. — Dépôt légal : I-1956

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE
MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6° (<i>Jusqu'à épuisement</i>)	220 fr.
ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour	330 »
<i>Corrigé des exercices de 6°</i>	300 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5°	185 »
GÉOMÉTRIE 5° et 4°	400 »
ARITHMÉTIQUE 5°	350 »
<i>Corrigé des exercices de 5°</i>	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4°	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3°	350 »
GÉOMÉTRIE 3°	325 »
GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3°	800 »
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages cartonné).	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.	100 »
ALGÈBRE 2° A.B.C.M.	500 »
GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M.	465 »
ALGÈBRE 1 ^{re} A.B.	180 »
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1 ^{re} C.M.	550 »
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A.B.C.M.	500 »

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	390 »
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	410 »

Roland MAILLARD et
 Professeur de Mathématiques Spéciales
 au Lycée Charlemagne
 Chargé d'un cours
 à l'École Normale Supérieure

Albert MILLET
 Professeur agrégé
 au Lycée Janson-de-Sailly
 et à l'École Normale Supérieure
 de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second degré

- Classe de Sixième.** *Un volume.* + Corrigés.
- Classe de Cinquième.** *Un volume.* + Corrigés.
- Classe de Quatrième.** *Un volume.* + Corrigés.
- Classe de Troisième** (Nouvelle édition). *Un volume.* + Corrigés.
- Classes de Seconde Classique A et B.** *Un volume.*
- Classes de Seconde Classique C et Moderne :**
 Algèbre. *Un volume.*
 Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.
- Classes de Première Classique A et B.** *Un volume.*
- Classes de Première Classique C et Moderne :**
 Algèbre et Trigonométrie. *Un volume.*
 Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.
- ★ **Classe de Sciences expérimentales.** *Un volume.*
- Classes de Philosophie et Sciences expérimentales :**
 Cosmographie. *Un volume.*
- Classe de Philosophie :**
 Trigonométrie et Algèbre. *Un volume.*
- ★ **Mathématiques** (Trigonométrie, Algèbre et Cosmographie).
Un volume.
- Classe de Mathématiques :**
 Algèbre. *Un volume.* Géométrie descriptive.
 Arithmétique. *Un volume.* *Un volume.*
 Cosmographie. *Un vol.* Trigonométrie. *Un vol.*
 Géométrie. *Un volume.* ★ Mécanique. *Un vol.*
- Classe de Mathématiques** (Technique) :
 ★ Algèbre. *Un volume.*
 Géométrie. *Un volume.*
 Trigonométrie. *Un volume.*

Cours Complémentaires

- ★ **Classe de Sixième.** *Un volume.* + Corrigés.
- ★ **Classe de Cinquième.** *Un volume.* + Corrigés.
- ★ **Classe de Quatrième.** *Un volume.* + Corrigés.
- ★ **Classe de Troisième.** *Un volume.*

+ Les **Corrigés**, hors commerce, sont exclusivement réservés à MM. les Professeurs de Mathématiques.

★ **NOUVEAUTÉS.**

