

Projection cylindrique d'une surface plane

Il est de tradition, en Première, de traiter les projections cylindriques dans le seul cas de la projection orthogonale. Cette tradition ne se justifie, ni logiquement, puisque les principaux théorèmes relèvent de la géométrie affine et sont valables en projection oblique (conservation du parallélisme de deux droites, et du rapport de deux vecteurs parallèles), ni pédagogiquement, puisque les démonstrations sont exactement les mêmes dans les deux cas et que les résultats acquis seraient fort utiles dans de nombreux problèmes effectivement posés par les manuels, sur les cylindres quelconques ou le paraboloid hyperbolique.

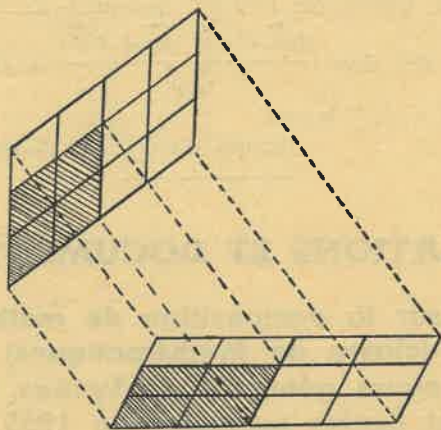
Autre tradition, qui couvre, cette fois-ci, toutes les classes : la notion d'aire d'une surface plane est présentée comme relevant de la géométrie euclidienne, alors qu'elle est du domaine de la géométrie affine. Le tort est plus grave ici, car c'est de ce dernier point de vue que nos élèves ont à la considérer quand ils calculent une aire sur un graphique dont les coordonnées représentent deux grandeurs physiques

différentes (diagramme de Watt, graphiques des courants alternatifs, etc..., et même dans les applications des primitives chaque fois que l'unité choisie sur les deux axes n'est pas la même). L'unité d'aire n'est plus, alors, 1 cm^2 , mais $1 \text{ kg/cm}^2 \times 1 \text{ cm}^3$ ou $1 \text{ A} \times 1 \text{ s}$. Ce derniers travers des auteurs de manuels secondaires relève de l'incroyable habitude de traiter des chapitres entiers de géométrie analytique sans faire allusion à l'unité choisie sur les axes, de confondre pente et coefficient angulaire (1), etc...

On remarquera que ce sont là deux types de questions où le retard de l'Enseignement Secondaire sur les habitudes de pensées relativement « modernes » est aussi fâcheux que dépourvu d'excuse. Sans aucune modification des programmes, ni effort supplémentaire pour nos élèves, on pourrait répandre quelque clarté et exactitude sur notre enseignement et réduire ainsi le fossé qu'ont à franchir les étudiants en sciences à un moment ou l'autre de leurs études.

Au carrefour de ces deux questions se trouve la question de la projection cylindrique d'une surface plane. Là, au lieu de montrer que le rapport des aires de deux surfaces est un invariant linéaire, on découpe des triangles en deux et on projette orthogonalement leur hauteur, au mépris, non seulement de la classification correcte de cette propriété, mais aussi de l'intuition la plus élémentaire.

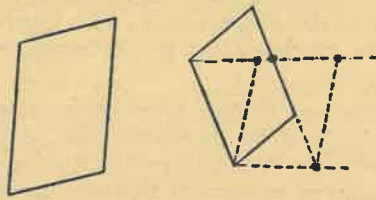
Cette méthode masque en effet la simplicité extrême du théorème à démontrer : mesurer une aire, c'est simplement compter des pavés en forme de parallélogrammes. La projection cylindrique conserve l'égalité des pavés et leur nombre, donc le rapport des aires.



La seule difficulté, pour faire passer cette intuition dans le domaine démonstratif, provient, comme d'habitude en pareille matière, du passage à la limite requis lorsque le pavage exact s'avère impossible.

(1) On remarquera que le poids de la tradition est autant le fait des auteurs de manuels que des fabricants de programmes. Citons l'exemple suivant : quatre auteurs, publiant à des années d'intervalle, proposent tous quatre, en arithmétique (2^e partie), le même exercice de calcul numérique sur la masse spécifique d'un corps, dont les données ($m = 625 \text{ g}$, $v = 81 \text{ cm}^3$) sont purement fantaisistes et ne correspondent à la densité d'aucun corps connu !

Pour s'en tenir, conformément au programme, aux polygones, en évitant ces passages à la limite, je propose le schéma suivant :



1. la transmuée d'une translation, par une projection cylindrique, est une translation ;

2. le rapport des aires de deux parallélogrammes coplanaires est invariant dans une projection cylindrique :

a) cas des parallélogrammes à côtés parallèles,

b) cas général : on se ramène au précédent par addition et soustraction d'aires égales, suivant des opérations conservées en projection d'après le n° 1 ;

3. passage aux polygones par l'intermédiaire des triangles.

Les vecteurs libres fourniraient évidemment un instrument mieux adapté pour une telle démonstration. On exprimerait les vecteurs-côtés d'un des parallélogrammes au moyen de la base fournie par l'autre : $\vec{w} = a\vec{v} + a'\vec{v}'$ $\vec{w}' = b\vec{v} + b'\vec{v}'$ et on

aurait pour rapport des aires : $\frac{(a\vec{v} + a'\vec{v}', b\vec{v} + b'\vec{v}')}{\vec{v} \vec{v}'} = ab' - ba'$, invariant par projection, puisque a, a', b, b' le sont.

Jacques WEIL (*Ecole Normale, Carcassonne*).