

Construction d'un trièdre connaissant les trois faces

Discussion

Soit un trièdre $SABC$, un point M de l'arête SA se projette en m sur le plan de la face BSC . Nous rabattons le plan ASB (charnière SB) sur le plan BSC et aussi la face ASC (charnière SC). Nous appelons β et γ les rabattements de M ainsi obtenus.

$S\beta = S\gamma = SM$ et les droites $m\beta$ et $m\gamma$ sont respectivement perpendiculaires aux charnières SB et SC . $Sm < SM$, le point m est intérieur (strictement) au cercle (C) , de centre S , qui passe par β et γ .

Soit $\beta\beta_1$ la corde du cercle (C) perpendiculaire à SB . Dire que m est intérieur à (C) , c'est dire qu'il est intérieur au segment $\beta\beta_1$ ou encore que la droite $m\gamma$ est intérieure à la bande limitée par les perpendiculaires abaissées de β et β_1 sur la droite SC .

L'un des angles $\widehat{CS\beta}$ ou $\widehat{CS\beta_1}$ est égal à $|\widehat{BSA} - \widehat{BSC}|$, l'autre à $\widehat{BSA} + \widehat{BSC}$.
 Nous choisissons les lettres β et β_1 de manière que $\widehat{CS\beta} = |\widehat{BSA} - \widehat{BSC}|$, que
 $\widehat{CS\beta_1} = \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$.

Soit $\gamma\gamma_1$ la corde de (C) portée par la droite $m\gamma$. La condition obtenue précédemment se traduit par les deux conditions :

$$\widehat{CS\gamma} \text{ (ou } \widehat{CS\gamma_1}) < \text{angle saillant } \widehat{CS\beta_1},$$

$$\widehat{CS\gamma} \text{ (ou } \widehat{CS\gamma_1}) > \widehat{CS\beta}.$$

Nous avons $\widehat{CS\gamma} = \widehat{CS\gamma_1} = \widehat{CSA}$. Distinguons maintenant deux cas :

1^{er} cas : $\widehat{BSA} + \widehat{BSC} \leq \pi$, angle saillant $\widehat{CS\beta_1} = \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$.

Nos conditions s'écrivent : $|\widehat{BSA} - \widehat{BSC}| < \widehat{CSA} < \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$.

2^e cas : $\widehat{BSA} + \widehat{BSC} \geq \pi$, angle saillant $\widehat{CS\beta_1} = 2\pi - (\widehat{BSA} + \widehat{BSC})$.

D'où les deux conditions : $|\widehat{BSA} - \widehat{BSC}| < \widehat{CSA}$ et $\widehat{BSC} + \widehat{CSA} + \widehat{ASB} < 2\pi$

(On vérifie facilement que l'inégalité : angle saillant $\widehat{CS\beta_1} > \widehat{CS\beta}$, utilisée implicitement ci-dessus, est exacte dans les deux cas).

Dans le premier cas : la condition $\widehat{BSA} + \widehat{BSC} \leq \pi$ entraîne

$$\widehat{BSC} + \widehat{CSA} + \widehat{ASB} < 2\pi.$$

Dans le deuxième cas : $\pi \leq \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$ entraîne $\widehat{ASC} < \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$.

Inversement, soit à construire un trièdre connaissant les trois faces, a, b, c ($0 < a < \pi$; $0 < b < \pi$; $0 < c < \pi$). On peut construire la figure du plan BSC. Si les conditions $|c - a| < b < c + a$ et $a + b + c < 2\pi$ sont vérifiées, le point m est intérieur au cercle (c) et on peut le relever : il existe un trièdre (à un déplacement ou une symétrie près) ayant comme faces a, b et c .

G. DELPLA, professeur au Lycée de Nancy.