

Sur les confusions pseudo-égalitaires

Les confusions déplorables que signale Mlle FÉLIX, dans le *Bulletin* n° 170 et qui se manifestent par un usage abusif du signe d'égalité, sont révélatrices de difficultés très profondes de notre enseignement. Nous devons longuement nous borner, à cet égard, à donner à nos élèves de bonnes habitudes d'écriture, sans être en mesure de justifier pleinement notre attitude. Ce n'est que tardivement que l'élève pourra disséquer la structure logique de ses connaissances et concentrer son attention sur la langue mathématique elle-même. Alors seulement se sépareront dans son esprit trois notions qui l'auront souvent mystifié :

- la relation logique d'équivalence entre propositions ou entre relations ;
- les relations mathématiques d'équivalence entre termes ;
- la relation linguistique de définition, appliquée, soit à des propositions, soit à des relations, soit à des termes.

Voici, sur ces trois points, quelques observations.

I. — L'ÉQUIVALENCE ENTRE PROPOSITIONS OU ENTRE RELATIONS. — Il s'agit là d'une relation logique binaire entre propositions ou entre relations qui exprime leur implication réciproque et qu'on peut noter $\leftrightarrow$.

Certes, nous pouvons et nous devons tenter de précipiter chez nos élèves une prise de conscience à cet égard. Il y a intérêt, dès la classe de Seconde, à familiariser nos auditoires avec les relations logiques les plus proches de l'intuition courante : *négarion* (non), *disjonction* (ou), *conjonction* (et), *exclusion réciproque* (ex), *implication* ($\rightarrow$), *implication réciproque* ($\leftrightarrow$). Une bonne méthode paraît être d'utiliser ces symboles au tableau aussi souvent que possible, sans exiger des élèves qu'ils les utilisent eux-mêmes ; ceux qui auront déjà une capacité d'abstraction suffisante commenceront librement à en faire usage (un usage qu'il nous appartient, bien entendu, de contrôler). Toutefois, la notion de *proposition* ne semble pouvoir être dégagée utilement qu'au moment où sont abordées, par ailleurs, les études philosophiques. Il est permis d'espérer que, dans la classe terminale du second cycle, les relations deviendront pour nos meilleurs élèves ce qu'elles sont réellement, c'est-à-dire ces « moules à propositions » que la logistiquie nomme fonctions propositionnelles. Si l'on songe qu'il faut attendre si longtemps pour voir la distinction fondamentale entre *termes* et *relations* prendre corps, on comprend que les notions d'équivalences entre termes et d'équivalences entre relations aient pu être l'objet de méprises innombrables. Notons encore ceci : bien que la structure de l'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité) ait sans doute été mise en lumière à l'occasion de maintes relations mathématiques rencontrées en Seconde et en Première, l'application de cette structure logique à la relation elle-même logique de l'implication réciproque exige un nouvel effort d'abstraction. Ainsi la « fermeture » du signe d'implication réciproque dans l'entendement ne se produira, en général, qu'à un âge assez avancé.

Je voudrais ajouter qu'il est bien regrettable qu'au cours de leur année de Mathématiques Élémentaires les élèves qui, d'une part, étudient la logique en classe de Philosophie et, d'autre part, se rendent enfin compte que les Mathématiques sont construites sur la logique, ne soient guère mis en mesure par les programmes — ou par la tradition qui les interprète — de faire d'utiles rapprochements entre ce qui, ici et là, porte pourtant le même nom. Cette situation devrait évoluer. Au point où nous le supposons parvenu, l'élève qui ne serait pas capable de « faire » un peu de logique moderne n'est pas capable non plus de comprendre les Mathématiques qu'il « fait ».

Une dernière remarque : tant qu'on ne sort pas du domaine de la logique propositionnelle, il doit être vivement déconseillé, mais il est néanmoins loisible de noter l'implication réciproque à l'aide du signe $=$. Il arrive que nos élèves rencontrent ce

signe ainsi employé dans un manuel de philosophie, et c'est pour eux une source supplémentaire de confusion lorsqu'ils abordent les Mathématiques.

II. — LES ÉQUIVALENCES ENTRE TERMES. — Il s'agit là de relations mathématiques binaires entre termes, qui sont réflexives, symétriques, transitives, et qu'on peut noter $\equiv$ à condition d'affecter généralement ce signe d'une indication spécifique.

Une vision claire du spectre des équivalences entre termes n'exige pas seulement que la structure générale de l'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité) ait été bien assimilée ; il faut encore que l'élève ait acquis la pensée précise que, parmi toutes ces relations d'équivalence, il en est une *plus forte* (ou *plus fine*, dit BOURBAKI) que toutes les autres. Nous avons tous de bonne heure l'intuition de cette équivalence première, que cherchent à exprimer, suivant le cas, des mots tels qu'identité, indiscernabilité, confusion, coïncidence (« les deux termes sont les mêmes », « les deux termes ne font qu'un »). Mais l'intelligence devra s'aiguiser patiemment avant de concevoir l'introduction axiomatique dans la théorie mathématique d'une relation binaire entre termes x et y qui entraîne, pour toute relation R qui figure dans la théorie, l'implication réciproque des formes qu'elle revêt lorsque x ou y sont indifféremment substitués à telle lettre ou telle autre dont R puisse dépendre :

$$(x = y) \rightarrow [R(\dots \overset{x}{y} \dots) \rightarrow R(\dots \overset{y}{x} \dots)](*).$$

Ce schéma donnera, en particulier, pour toutes les propriétés $R(x)$ qu'on rencontre dans la théorie

$$(x = y) \rightarrow [R(x) \leftrightarrow R(y)] \quad (1)$$

et pour toutes les relations binaires $R(x, y)$ qu'on y rencontre

$$(x = y) \rightarrow [R(x, y) \leftrightarrow R(y, x) \leftrightarrow R(x, x) \leftrightarrow R(y, y)]. \quad (2)$$

Postulons de plus que, pour tout terme x donné, il existe au moins un terme y qui lui est égal

$$(\forall x)(\exists y)(x = y) \quad (3)$$

Dès lors :

1° *La relation d'égalité est une relation d'équivalence*, car :

- a) *elle est transitive* : en appliquant (1) à la relation $x = z$, on a
 $x = y \rightarrow (x = z \leftrightarrow y = z)$ d'où $x = y$ et $y = z \rightarrow x = z$
- b) *elle est symétrique* : en appliquant (2) à la relation $x = y$, on a
 $x = y \rightarrow (x = y \leftrightarrow y = x)$ d'où $x = y \rightarrow y = x$

(*) Mlle FÉLIX me fait remarquer à très juste titre que le schéma général de l'égalité est écrit plus haut de manière si condensée que sa signification n'apparaît pas immédiatement ; de plus, l'aspect tautologique illusoire du second membre peut surprendre. Soit donc z_k un symbole qui représente la lettre x ou la lettre y suivant que l'indice k prend l'une ou l'autre de deux valeurs données, 0 et 1, si l'on veut. Pour une relation R dépendant de n lettres, le schéma de l'égalité s'explique de la façon suivante :

$$(x = y) \rightarrow [R(z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow R(z_1, z_2, \dots, z_n)]$$

la deuxième implication ayant lieu pour tout système de valeurs possibles attribuées aux $2n$ indices ; la relation $x = y$ entraîne ainsi 2^{2n} implications ; 2^n d'entre elles sont des tautologies ; les $2^n(2^n - 1)$ autres implications se trouvent toutes notées à l'aide d'une suite d'implications réciproques liant en chaîne $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{2^n} = 2^n$ relations. Par exemple, s'il s'agit d'une relation R dépendant de trois lettres, on aura au second membre, après élimination de huit tautologies, une suite d'implications réciproques liant en chaîne les huit relations $R(x, x, x)$, $R(y, x, x)$, $R(x, y, x)$, $R(x, x, y)$, $R(x, y, y)$, $R(y, x, y)$, $R(y, y, x)$, $R(y, y, y)$.

c) elle est réflexive : en appliquant (2) à la relation $x = y$, on a $x = y \rightarrow (x = y \leftrightarrow x = x)$ d'où $x = y \rightarrow x = x$; si l'on prend alors pour y un égal à x fourni par (3), $x = y$ est vraie, donc aussi $x = x$.

2° La relation d'égalité est une relation univoque, car $x = y$ et $x = z$ entraîne (symétrie) $y = x$ et $x = z$, qui entraîne à son tour (transitivité) $y = z$; (3) se complète par l'affirmation que, pour tout terme x donné, il existe un terme y , et, à une égalité près, un seul qui lui est égal.

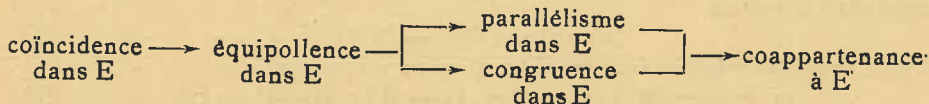
3° La relation d'égalité est plus forte que toute autre relation réflexive $R(x, y)$, c'est-à-dire qu'elle l'implique ; en effet, il résulte de (2) que

$$x = y \text{ et } R(x, x) \rightarrow R(x, y) ;$$

si $R(x, y)$ est réflexive, $R(x, x)$ est vraie, donc aussi l'implication $x = y \rightarrow R(x, y)$.

4° La relation d'égalité est plus forte que toute autre relation d'équivalence $R(x, y)$, c'est-à-dire qu'elle l'implique : conséquence immédiate du résultat précédent, puisque, si $R(x, y)$ est une relation d'équivalence, elle est notamment réflexive.

Quand ces idées fondamentales seront acquises, on pourra faire fonctionner utilement le schème de l'équivalence sur tel ensemble E de termes qu'on aura choisis. Toute équivalence dans E se situera logiquement alors entre la coïncidence dans E ($x \in E$ et $y \in E$ et $x = y$), qui sera l'équivalence la plus forte, et la coappartenance à E ($x \in E$ et $y \in E$), qui sera l'équivalence la plus faible. Si E est l'ensemble des segments orientés du plan, par exemple, on pourra décrire des chaînes d'équivalences :



qui, tout en justifiant le recours à des notations radicalement diversifiées (telles que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AB} \not\sim \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AB} \oslash \overrightarrow{A'B'}$), dégageront clairement la signification d'une écriture « plus savante ». Cette écriture-là, il n'est nul besoin que les élèves l'utilisent ; mais c'est un fait que comprendre signifie ici concevoir la possibilité de l'employer.

En réalité, l'introduction du signe d'égalité dans nos théories déductives pose un immense problème. Ce que nous avons irrésistiblement dans l'esprit, c'est un schéma d'implication réciproque où nous logeons un quantificateur universel portant sur les relations R elles-mêmes :

$$(x = y) \leftrightarrow (\forall R) [R] \dots \overset{x}{y} \dots \rightarrow R(\dots \overset{x}{y} \dots).$$

Mais ce schéma, qui fournirait d'ailleurs aisément les propriétés de l'égalité indiquées plus haut, nous fait sortir du calcul fonctionnel restreint, où les relations sont toujours déterminées. Et l'on sait que le calcul fonctionnel général ouvre la porte aux paradoxes. L'affaire est d'importance, car le schéma qui précède fournirait une définition directe de l'égalité entre termes, qui deviendrait de la sorte une relation purement logique. Ce que ces difficultés mettent en cause, c'est donc le point d'insertion de la mathématique sur la logique.

III. — LA DÉFINITION. — Il s'agit là d'une relation binaire qui n'appartient, ni à la logique, ni aux Mathématiques, mais qui les concerne ; elle est posée entre une proposition, ou une relation, ou un terme, et une désignation qu'elle leur attribue ; on peut la noter *def* (ou, ce qui est souvent le cas, ne pas la formaliser).

Nos élèves ne remarquent évidemment pas que les lettres ou les signes qu'ils écrivent représentent, tantôt des termes ou des relations, tantôt des noms qui leur servent à les désigner. Il nous deviendrait pratiquement impossible de parler si nous prétendions éviter tous les abus de langage qui encouragent sans cesse cette confu-

sion. Nous pouvons toutefois appeler, de temps à autre, leur attention sur ce point, en écrivant, par exemple : « a » désigne le terme a , « $x < y$ » désigne la relation $x < y$. Au demeurant, ce n'est là qu'une difficulté mineure. Mais il est plus délicat de faire entendre comment les Mathématiques mettent en œuvre, tantôt des « termes déterminés » (constantes $a, b, c, \dots$), tantôt des « termes indéterminés » (*variables* $x, y, z, \dots$), dont la désignation littérale nous sert seulement à suivre le jeu dans l'écriture. Ce rôle des lettres muettes est un obstacle préalable à la compréhension des expressions : « pour tout x , on a $R(x)$ » — « il existe au moins un x tel qu'on ait $R(x)$ » — « le terme x , s'il existe, tel qu'on ait $R(x)$ », notée plus bas $\tau_x [R(x)]$ — qui interviennent toutes dans nos processus de définition.

Le mécanisme complet de la définition d'un terme à partir d'une propriété $R(x)$, par exemple, s'analyse comme suit : si l'on a le théorème

$$(\forall x) (\forall y) (R(x) \text{ et } R(y) \rightarrow x = y)$$

et si « a » est une désignation actuellement libre dans la théorie, il est légitime de poser la définition :

$$\text{« } a \text{ » def } \tau_x [R(x)] \quad (4)$$

qui autorise le théorème

$$R(a) \leftrightarrow a = \tau_x [R(x)],$$

mais cette définition n'aura d'intérêt définitif que si l'on a de plus le théorème

$$(\exists x) [R(x)]$$

auquel cas elle autorise en outre le théorème $R(a)$ et le théorème équivalent

$$a = \tau_x [R(x)]. \quad (5)$$

Il serait surprenant que nos élèves réussissent à dominer — formalisé ou non — un tel matériel logico-mathématique. Que retiennent-ils de tout cela ? Il en reste surtout à leurs yeux qu'en fait, dans la pratique courante, la définition (4) autorise le théorème (5). A partir du moment où une écriture négligée supprime les guillemets dans (4), la confusion entre le *signe de définition* et le *signe d'égalité* devient presque inévitable. Et pourtant, alors que (5) propose une relation entre deux termes qui est une équivalence, (4) propose une relation entre une désignation et un terme qui n'est évidemment pas réflexive, pour laquelle la question de la transitivité ne se pose même pas, et dont la symétrie ne saurait être que purement conventionnelle. S'il s'était agi de la définition d'une relation, c'est la distinction entre le *signe de définition* et le *signe d'implication réciproque* qui serait devenue, de même, apparemment insaisissable.

En conclusion, je suis bien d'accord avec Mlle FÉLIX ; mais, si la dévaluation du signe d'égalité peut apparaître comme un phénomène actuel, je crains fort que sa non-évaluation ne soit, dans une certaine mesure, une fatalité permanente de l'enseignement dit élémentaire — et certes audacieusement nommé !

J. CHAUVINEAU, professeur au Lycée Henri-IV.