

# **BULLETIN** de l'**ASSOCIATION** des **PROFESSEURS** de **MATHÉMATIQUES** de l'**Enseignement Public**

## **SOMMAIRE**

### **I. ETUDES.**

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| J. DESFORGE : Sources concrètes et intuitives de la mathématique                                          | 193 |
| W. SERVAIS : Modèles, objets concrets et symboles                                                         | 195 |
| L. JERONNEZ : Géométrie intuitive                                                                         | 206 |
| G. BOSTEELS : Les transformations géométriques comme introduction intuitive aux mathématiques supérieures | 210 |
| A. BIGUENET : Retour de Belgique                                                                          | 222 |
| G. WALUSINSKI : « Des exercices naturels, vraies et non écrites »                                         | 231 |
| J.-V. PONCELET : Souvenirs d'un prisonnier de guerre                                                      | 236 |

### **II. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.**

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| L. FÉLIX : Pour le progrès de l'enseignement des mathématiques         | 240 |
| A. HUISMAN : L'enseignement des mathématiques en Allemagne Occidentale | 244 |
| J. ITARD : L'histoire de la mécanique                                  | 247 |
| G. W. : L'enseignement de la mécanique                                 | 248 |
| G. W. : Les problèmes de l'Univers                                     | 250 |
| A travers les revues ; livres reçus                                    | 253 |

### **III. ESSAIS ET VARIÉTÉS.**

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| J. LELONG-FERRAND : Sur la réforme de la licence mathématique     | 254 |
| J. CHAUVINEAU : Sur les confusions pseudo-égalitaires             | 256 |
| L. F. : Retour à l'expérience pédagogique                         | 259 |
| G. DELPLA : Construction d'un trièdre connaissant les trois faces | 261 |
| J. WEÏL : Projection cylindrique d'une surface plane              | 262 |

### **IV. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.**

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| P. ROBERT : Rapport sur le Concours Général de Mathématiques 1955 (classe de Mathématiques) | 264 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

### **V. LA VIE DE L'ASSOCIATION.**

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| Réunion du Comité du 22 décembre 1955 | 271 |
| Pour l'Assemblée Générale 1956        | 274 |
| Quelques lettres...                   | 276 |
| Le bloc-notes de l'A.P.M.             | 277 |
| Réponses à quelques questions...      | 278 |
| Questions sans réponse...             | 278 |

**Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public**  
**29, rue d'Ulm, Paris (5<sup>e</sup>)**  
**Paris, Cc. 5.708-21**

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

|                                                                        |         |
|------------------------------------------------------------------------|---------|
| Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ... | 300 F   |
| Prix de l'abonnement au <i>Bulletin</i> .....                          | 1 000 F |
| Prix du numéro .....                                                   | 200 F   |

*Présidents d'Honneur*

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

**Bureau :**

|                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Président :</i>                           | M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11 <sup>e</sup> ).<br>OBE. 56-95.                                                                                                                                                                              |
| <i>Vice-Présidents :</i>                     | Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14 <sup>e</sup> ).<br>M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelin, Neuilly-sur-Seine.<br>M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris (9 <sup>e</sup> ).<br>M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14 <sup>e</sup> ). |
| <i>Secrétaires :</i>                         | M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16 <sup>e</sup> ).<br>M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14 <sup>e</sup> ).<br>M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).                                                               |
| <i>Trésorier :</i>                           | M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).                                                                                                                                                                                                    |
| <i>Comité de rédaction du « Bulletin » :</i> | Mlle FÉLIX, MM. CHAZAL, GIRARD, THOVERT, WALUSINSKI.                                                                                                                                                                                                                |

**Comité :**

*Membres élus*

*Sortants en 1956 :* Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (*Fac. Sc. Toulouse*) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

*Sortants en 1957 :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (*Nice*) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (*Lyon, Ampère*).

*Sortants en 1958 :* Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. Saint-Ouen*) ; M. CHAZAL (*Saint-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (*Compiègne*) ; M. WALUSINSKI (*Voltaire*).

*Sortants en 1959 :* Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

*Membres de droit*

Mme NICOUX (*Lyon, Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (*Montpellier*) Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*).

**Rapporteurs**

*Classes Nouvelles :* Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. BIGUENET ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (*Sciences Expérimentales*) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques : Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales ; M. EDDE. — *Baccalauréat :* M. FAVRELLE. — *Grandes Ecoles :* M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

**Correspondants**

*Aix-Marseille :* M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (*Montpellier*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULD (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. EHRLHART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (*Casablanca, Lyautéy*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

Bulletin de l'Association  
des  
**Professeurs de Mathématiques**  
de l'Enseignement Public

---

**I. ETUDES**

---

**Sources concrètes et intuitives  
de la Mathématique**

« Les sources concrètes et intuitives de la Mathématique » : tel était le thème d'étude choisi par la Société belge de Professeurs de Mathématiques, à l'occasion de son III<sup>e</sup> Congrès, qui s'est tenu, les 12 et 13 novembre 1955, à l'Athénée Royal de Berchem-lez-Anvers. La participation de plusieurs pays, dont les représentants ont été accueillis par nos amis belges avec une cordialité et une gentillesse qu'ils ne pourront pas oublier, marquait le sens véritable de cette réunion, car la question ainsi offerte à nos réflexions se rattache étroitement à un ensemble de préoccupations qui, plus ou moins consciemment, se manifestent un peu partout dans le monde. Citerai-je, pour preuve de cette actualité, les trois sujets d'enquête qui viennent d'être proposés, par la Commission internationale de l'Enseignement mathématique, à ses différentes Commissions nationales, et qui donneront lieu à des rapports et à des discussions lors du prochain Congrès international des mathématiciens (en 1958, à Edimbourg) : l'enseignement des Mathématiques jusqu'à l'âge de quinze ans ; — les bases scientifiques des Mathématiques dans l'Enseignement secondaire ; — étude comparée des méthodes d'initiation à la géométrie ?

Il est évident qu'une évolution considérable s'est produite depuis une cinquantaine d'années, avec quelques étapes particulièrement brutales, dans les conditions générales de la vie. Mais nos conceptions touchant l'enseignement ont-elles été affectées de façon sensible par ce courant ? Sans doute, la recherche pédagogique n'a-t-elle cessé d'être intense, et je n'ai pas besoin de le rappeler ici à nos amis belges, qui se sont associés, dirai-je avec enthousiasme, en y prenant une bonne part, au mouvement d'idées suscité par l'institution des « classes nouvelles », créées, en 1945, comme une sorte d'avant-garde pour préparer les voies à une réforme dont la nécessité n'est guère contestée, mais qui ne peut

être œuvre d'improvisation, tant elle met en cause pour l'avenir, au-delà des opinions et des tendances, certaines structures essentielles de la vie sociale. Cependant, les « programmes » — bornons-nous, bien entendu, aux Mathématiques — n'ont pas subi, depuis longtemps, de modifications profondes, non sans juste raison du reste, car la synthèse longuement réfléchie que constitue un plan d'études ne saurait être remaniée constamment, au gré de telle ou telle influence, peut-être valable et durable, peut-être aussi éphémère et moins novatrice qu'il n'avait semblé d'abord.

Mais il est des moments où apparaît l'obligation d'un sérieux inventaire, peut-être faut-il dire d'un examen de conscience. Nous en sommes là justement, et ce n'est pas par hasard que M. le Directeur général BRUNOLD nous a, tout récemment, demandé de nous pencher sur ces questions, discipline par discipline, et de nous efforcer de les saisir dans toute leur ampleur et dans toute leur réalité.

Aussi devons-nous être très reconnaissants à nos amis belges de permettre la publication, dans ce Bulletin, d'un aperçu de la très remarquable exposition « de modèles de géométrie et de dispositifs expérimentaux relatifs à l'enseignement des Mathématiques », organisée à l'Athénée Royal de Berchem, ainsi que celle des Conférences faites, le 13 novembre, au Congrès. Qu'il s'agisse de la magistrale leçon inaugurale de M. SERVAIS, Professeur à l'Athénée de Morlanwelz et Président de la Société belge de Professeurs de Mathématiques, qui, à partir d'une pertinente analyse de la nature philosophique du problème de l'enseignement des Mathématiques, dégagea avec maîtrise le sens et la portée du thème mis à l'étude, — qu'il s'agisse des exposés si vivants, si pleins d'idées et de faits, solidement appuyés sur des exemples vécus, de M. JÉRONNEZ, Préfet des Etudes de l'Athénée Royal de Binche et Secrétaire de la Société, sur la géométrie intuitive et sur les liaisons à maintenir entre le concret et l'abstrait sans sacrifier la rigueur logique, — de M. BOSTEELS, Préfet des Etudes de l'Athénée Royal de Berchem, sur les transformations géométriques et leur réalisation effective (par le dessin, par l'exécution de mécanismes et de modèles matériels), envisagées comme sources intuitives des Mathématiques supérieures, — de M. RONS-MANS, Professeur de Physique à l'Athénée Robert-Catteau à Bruxelles, sur les liens naturels entre la Mathématique et les Sciences physiques et sur la pratique, fort riche en promesses, des « leçons de synthèse », il est trop certain que tous ces textes constituent une contribution de qualité à nos recherches, et nous offrent une belle occasion de réfléchir encore sur des questions, déjà posées sans doute, mais qui restent toujours actuelles, et, par quelques côtés, toujours neuves.

J. DESFORGE,

*Inspecteur général de l'Instruction publique.*

---

## **Modèles, objets concrets et symboles**

Le thème de notre troisième Congrès : « Sources concrètes et intuitives de la Mathématique », est un des plus captivants.

Tout d'abord, il est illustré par l'exposition de matériel didactique, ensuite l'usage de ce matériel provoque l'enthousiasme des uns, la résistance de combien d'autres, l'indifférence de certains. L'emploi des modèles mathématiques est une question controversée : c'est donc un excellent sujet de discussion.

Nous l'avons choisi pour thème de nos débats, non seulement parce que l'histoire des Mathématiques nous montre toute la part d'inspiration trouvée par de grands mathématiciens dans l'étude des questions posées à propos de la réalité physique, non seulement parce que notre vie quotidienne et le travail scientifique montrent toute la valeur pratique des Mathématiques dans notre action sur le réel. Nous l'avons choisi parce que, d'un point de vue pédagogique, nous partageons la conviction qu'un usage rationnel et raisonnable de modèles concrets peut insuffler une vie nouvelle à l'enseignement des Mathématiques.

On peut faire des Mathématiques, de très belles et de très hautes, coupées du réel, sans se soucier ni de l'origine expérimentale et psychologique des notions de base et des problèmes, ni de l'emploi concret des résultats : l'œuvre de Charles HERMITE est là pour le prouver.

Mais, s'il s'agit d'enseigner les Mathématiques, il faut apprendre à élaborer les concepts fondamentaux, apprendre à se poser des problèmes, apprendre à les résoudre et à interpréter les résultats. Pourquoi ne pas prendre appui sur le concret, habituer à y découvrir des relations abstraites, raisonner sur elles et confronter les conclusions avec l'expérience ? Expérience étant pris au sens le plus large, on peut faire une expérience de logique, une expérience d'arithmétique, une expérience de géométrie... ; toutes les branches de la Mathématique : logique, arithmétique, géométrie, algèbre, ont un de leurs visages tourné vers l'expérience.

En alimentant la Mathématique par l'expérience, on lui donne tout l'intérêt et l'efficacité d'une langue vivante toujours au contact de l'objet de son expression. Quoi d'étonnant si on la rend plus accessible au plus grand nombre et aussi si on la fait intégrer avec une vigueur plus complète par les bien doués ?

A la base d'un enseignement, il y a une philosophie de cet enseignement. Cette philosophie peut être consciente et s'exprimer en principes, elle peut rester implicite et se montrer dans une façon de faire. Tout enseignement de la Mathématique et de la Physique résout à sa manière le problème des rapports du réel et du pensé, la question des liens du concret et de l'abstrait. Il répond à une vue sur la nature de la Mathématique.

Comme le prétendent les philosophes idéalistes, les relations mathématiques préexistent-elles dans l'esprit indépendamment de toute expérience du réel ? Résultent-elles purement de l'activité créatrice de

l'esprit ? Sont-elles, au contraire, imposées par l'expérience ? Sont-elles extraites du concret comme le veulent les empiristes ?

Ces deux thèses antagonistes décrivent plutôt chacune un aspect de la Mathématique. Elles conviennent sans doute à des mathématiciens de tempéraments et d'esprits opposés et leur donnent des styles de pensée différents. Rappelez-vous comment Henri Poincaré distingue ce qu'il appelle les analystes : Méray, Hermite, Weierstrass, des géomètres : Klein, Riemann, Lie. « Les uns sont avant tout préoccupés de logique ; à lire leurs ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais précaires... » (1).

Les deux thèses radicales des idéalistes et des empiristes sont incapables de rendre compte, de façon satisfaisante, de la Mathématique dans son ensemble, en tant qu'activité intellectuelle créatrice ayant une portée sur le réel. Aussi, les thèses conciliatrices n'ont-elles pas manqué. Nous citerons celle de H. POINCARÉ : les notions mathématiques ont été suggérées par l'expérience, mais ensuite reconstruites par l'esprit, qui les a dégagées de tout contenu expérimental. Nous ne nous arrêterons pas à discuter cette formule qui sépare un peu trop le moment rationnel du moment expérimental. Nous remarquerons simplement que les penseurs tels que Brunschwig, Enriques et Gonseth, qui ont apporté sur l'activité mathématique le plus de clarté, ont eu un même souci d'unir et de distinguer la Mathématique abstraite et la réalité physique dans une évolution dialectique.

Il ne s'agit pas ici d'ouvrir un débat philosophique, mais de discuter d'enseignement. Comme enseignants, nous avons une philosophie moins théoricienne, que nous pouvons contrôler et ajuster d'une façon un peu pragmatique d'après nos expériences quotidiennes. Celles-ci nous ont appris que toute intelligence, quel que soit son donné congénital, se développe au cours de l'enfance et de l'adolescence. Notre façon de traiter le problème du concret et de l'abstrait devra considérer non une intelligence adulte, plus ou moins mûre, mais des intelligences juvéniles en devenir dans un milieu naturel et un milieu social. Notre enseignement tiendra compte d'une acquisition génétique des Mathématiques et tirera parti des apports de la psychologie. Et, quand je parle de psychologie, je n'entends pas une psychologie toute faite qui dicterait à l'enseignant ce qu'il doit faire, mais une psychologie que le maître éprouvera par son action et complétera par ses propres constatations.

Les exposés que vous allez entendre mettront l'accent sur certains aspects pédagogiques du passage de l'intuition sensible à la construction rationnelle. C'est pour servir d'introduction, situer la question, éviter des redites et des malentendus que le Comité m'a chargé de présenter les rapports du concret de l'abstrait.

Tâche redoutable si nous avons voulu examiner les solutions que les philosophes et les mathématiciens ont proposées. Tâche plus aisée si

---

(1) H. POINCARÉ : « La Valeur de la Science », première partie, ch. 1<sup>er</sup>, p. 11 et 12.

nous acceptons d'envisager la question au niveau de notre enseignement et de prendre appui sur ce que les élèves nous apprennent quand nous nous mettons à leur école.

L'usage des moyens intuitifs et concrets en Mathématique doit être situé dans notre pédagogie. Nous devons préciser ce que nous attendons de ces moyens, savoir le rôle qu'ils jouent ou que nous voulons ou pouvons leur faire jouer.

Pour éclairer notre travail, je vous préviens que dans les exposés qui vont être faits, ainsi que vous pourrez en juger, les rapporteurs s'entendent tous pour avoir raisonnablement recours au concret. Mais aucun d'eux ne veut défendre un usage en quelque sorte intégral des moyens intuitifs, en toute occasion, à tout propos et hors de propos.

Nous avons pensé que, pour examiner ensemble le rôle du concret, il convenait que ceux qui en sont partisans parlent de leur expérience et expliquent leur point de vue. C'est à partir de ce qui sera ainsi proposé clairement que nous ouvrirons le débat. S'il y a des adversaires de l'emploi du concret, ou de tel recours au concret, ils pourront alors formuler nettement leurs critiques et présenter leurs observations d'une manière positive. Ils nous aideront à mieux poser ensemble les problèmes relatifs à la place de l'intuition sensible dans notre enseignement.

Nous voulons considérer des faits et discuter des idées nettes, effectivement défendues. Nous ne pouvons nous attarder à nous battre contre des moulins à vent, je veux dire à disputer d'opinions caricaturales que les uns pourraient prêter aux autres.

En premier lieu, sommes-nous d'accord pour dire qu'aucun professeur de Mathématiques ne veut remplacer les démonstrations par des démonstrations concrètes ? Dans notre enseignement, les moyens intuitifs seront accompagnés d'abstraction et de raisonnement.

Inversement, tout professeur, même s'il se veut très rigoureux, très logicien, a recours à l'intuition. Qui de nous, dans ses calculs, quelle que soit d'ailleurs leur signification abstraite, ne se repose-t-il pas constamment sur la constatation que les manipulations concrètes de symboles sont bien effectuées ? Qui de nous dirait-il que les figures tracées au tableau sont inutiles, que les élèves pourraient s'en passer ? Qui de nous oserait prétendre que les démonstrations fort honnêtes qui sont faites en classe ne sollicitent dans aucun cas la figure ? En particulier, les questions relatives aux régions déterminées sur une ligne, ou dans un plan ou dans l'espace, par une configuration donnée, sont-elles toujours, et même parfois, étudiées avec rigueur ? Je ne le pense pas.

Depuis qu'il y a des géomètres, ils tracent des figures et s'en servent dans leurs raisonnements. Et qu'est-ce qu'une figure tracée sur le sable ou au tableau noir, sinon un modèle géométrique, un objet concret dans lequel on considère des relations géométriques ? Ces figures concrètes, décrites par nos gestes, parcourues par nos yeux, sont perçues comme un donné sensible pour former dans notre cerveau des images qui sont finalement conçues, c'est-à-dire appréhendées par notre intelligence à l'aide de relations mathématiques abstraites.

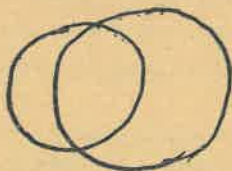
Notre expérience de tous les jours montre que des dessins plans peuvent être très propres à faire concevoir les relations entre les éléments des figures planes. Cette expérience montre aussi que tous les élèves ne sont pas aptes, au même degré, à « voir dans l'espace », c'est-à-dire, plus exactement, à concevoir des relations spatiales souvent d'après des figures planes tracées en fausse perspective. Une telle représentation, basée sur des conventions qui n'ont peut-être pas été introduites, a une signification symbolique qui peut échapper, surtout à un débutant. Et cela, d'autant plus qu'il aurait été plus longtemps conditionné par l'étude exclusive de la géométrie plane. C'est pourquoi des professeurs ont pensé qu'il était plus raisonnable, pour amener à concevoir les relations dans les figures de l'espace, d'étudier d'abord ces figures sur des modèles spatiaux plutôt que de s'entêter à dessiner tout sur un même plan. D'autre part, le programme a prévu une initiation à la géométrie des solides dès les premières années.

Vous le savez, les modèles spatiaux peuvent et doivent être empruntés à l'expérience géométrique des élèves, au local de la classe avec ses murs, ses portes, ses fenêtres et ses meubles. Il est aussi très utile, certains diront indispensable, que les élèves contruisent eux-mêmes quelques modèles spatiaux avec des moyens divers : carton, baguettes et plastique, fil de métal, plexiglass, etc... Il tombe sous le sens que, pour construire un polyèdre par exemple, à partir de ses faces ou de ses arêtes, il est nécessaire, si le professeur a le bon esprit de ne pas commander les opérations successives et de ne pas dicter une définition, de parvenir à dégager pour soi, d'après des exemples connus, une définition convenable du solide à réaliser, et de connaître effectivement des relations entre ses éléments. Pour être construits, les modèles doivent d'abord avoir été conçus d'une façon suffisante. C'est afin que les élèves, même les plus faibles, arrivent à cette conception, qu'il est utile qu'ils prennent part à la construction des modèles.

Mais il convient de souligner que construire des cubes pour construire des cubes, que fabriquer des modèles pour bricoler, n'est pas faire un enseignement de la géométrie comme nous l'entendons. S'il importe d'intéresser les élèves en les mettant en présence de situations mathématiques auxquelles ils s'attachent, nous ne croirions pas trouver une justification suffisante de l'usage du matériel intuitif si nos élèves n'y voyaient que des objets concrets considérés pour eux-mêmes. Nous le disons et le répéterons tous, le matériel concret ne trouvera sa motivation pédagogique que s'il apporte à l'élève l'occasion de s'exercer à la pensée abstraite des relations mathématiques. A ce point de vue, par exemple, un exercice particulièrement fructueux est le passage des modèles spatiaux à leur représentation plane, en perspective cavalière, en projections orthogonales, en axonométrie ou autre. Il suffit d'observer une classe de Sixième traitant, sur une perspective cavalière du cube, des problèmes relatifs au cube, pour comprendre tout ce qu'un tel transfert apporte de connaissance et de formation mathématiques. D'une manière générale, les exemples concrets ne seront vraiment des modèles mathématiques que s'ils favorisent l'activité mathématique qui est

d'appréhender et de concevoir les relations abstraites, de les généraliser, de les spécialiser et de raisonner sur elles.

Mais si des affirmations qui prétendent à tant de généralité ont leur intérêt, il nous faut examiner de plus près l'abstraction mathématique en tant qu'activité pratiquée par les élèves à partir du concret. Lorsqu'une situation concrète se présente, la manière d'y saisir des relations n'est pas univoque. Proposons, par exemple, à nos élèves, et à vous tous, la figure suivante, tracée à main libre (fig. 1).



(fig. 1)

Demandons : Que voyez-vous ?

Les élèves qui sont conditionnés par l'étude exclusive du point de vue euclidien, comme beaucoup de professeurs sans doute, voient l'intersection de deux circonférences, l'intersection de deux cercles, deux circonférences qui se coupent, deux cercles sécants, deux circonférences de rayons inégaux sécantes.

On pourrait croire que les expressions : « deux circonférences qui se coupent » et « l'intersection de deux circonférences », sont équivalentes. Il n'en est rien ; les élèves vous le font comprendre en décrivant des deux mains des circonférences qui viennent se couper ou en circonscrivant uniquement la partie commune intérieure aux deux cercles. Un élève, lui, reconnaît la représentation de deux sphères sécantes ayant leurs centres dans le plan du tableau. D'autres prennent plus de liberté et voient deux lignes fermées qui ont deux points communs, l'intersection de deux surfaces, la réunion de deux surfaces. D'autres disent que la figure représente la réunion, l'intersection de deux ensembles. Un élève affirme explicitement : « C'est la représentation concrète des idées exprimées ci-dessus » ; un second : « Je pense que cette reproduction représente la même chose dans l'abstrait. » Ces deux dernières réponses évoquent, avec le même mot, le rapport concret-abstrait, dans les deux sens, en parlant de représentation concrète d'idées abstraites et de reproduction qui représente dans l'abstrait.

Notons, à partir d'un tracé tout simple, une abondance de réponses variées, toutes correctes d'un certain point de vue. Si nous interprétons ces réponses, nous pouvons dire que, suivant la relation ou les relations saisies, la figure tracée est considérée comme appartenant à des classes diverses, qui peuvent, dans l'exemple, être incluses les unes dans les

autres. Il y a une réponse que je n'ai pas reçue : « Ce sont deux ronds à la craie tracés au tableau. » Aucune indication non plus relative à la mesure des rayons, à la distance des centres, à la détermination de ceux-ci. Le concret pour le concret et l'objet individuel pour lui-même n'intéressent pas l'apprenti mathématicien. Pour tous les élèves, le dessin, le modèle, est un symbole, c'est-à-dire un objet concret qui représente autre chose que lui-même pour le sujet qui interprète ce symbole. Mais alors que les modèles géométriques sont, à première vue, des symboles dont la signification apparaît par une sorte d'évidence naturelle, d'ailleurs variable d'un sujet à l'autre, les expressions littérales de l'algèbre, qui sont à leur manière des modèles concrets, sont des symboles de relation et d'opérations par un décret conventionnel.

Comme on l'a fait pour un tracé, on peut demander aux élèves : Que représente :  $a.b = c$  ?

Suivant leur degré de compréhension et de formation, ils passeront de la multiplication entre nombres connus à la loi de composition entre objets abstraits écrite de façon multiplicative.

Revenons à la question initiale. Si nous désirons avoir une réponse non verbale et observer l'activité, nous pouvons demander de dessiner la figure que nous avons tracée. Certains élèves décrivent des circonférences au compas, d'autres esquissent largement deux courbes convexes fermées ayant deux points communs. La reproduction par un tout jeune enfant (2-3 ans) donne, J. PIAGET l'a observé, et vous pouvez le contrôler :



(fig. 2)

La question est posée de savoir si ce dernier dessin est une bonne reproduction. Comme il fallait s'y attendre, les avis sont partagés. L'un affirme : « Du point de vue rigoureux de la géométrie, l'enfant n'est pas formé pour tracer des figures géométriques. » Un autre répond : « Les ensembles représentés par l'enfant sont sécants, c'est une bonne illustration du modèle donné. » Entre des avis tranchés, des opinions plus nuancées : « Cela dépend du point de vue... » ; « Les ensembles sont mieux représentés dans le dessin de l'enfant qui ne voit que deux lignes fermées qui se coupent. Les dessins sont mauvais pour les circonférences. » Ainsi, la reproduction d'une figure apparaît comme la substitution à cette figure d'une autre équivalente par rapport à certaines relations. Les données d'un problème, l'hypothèse d'une implication circonscrivent une classe d'équivalence. Toute figure concrète répondant à ce que l'on donne convient pour la démonstration, à condition de ne considérer la figure que sous l'angle des relations données, c'est-à-dire comme représentant de la classe définie par ces relations.

Alors que les jeunes enfants ont tant de liberté dans leur manière de copier une figure, comment se fait-il que les débutants en géométrie, tels que nous les connaissons, ont une tendance inflexible à dessiner sur leur cahier une figure semblable à celle tracée au tableau ? Faut-il y déceler une inertie ou la crainte, qu'ils confessent parfois, de prendre une liberté qui compromettrait la démonstration ? Au contraire, faut-il voir, dans le sentiment de sécurité que donne une figure semblable à celle du tableau, la reconnaissance instinctive que toute proposition de la géométrie qu'on lui enseigne reste inaltérée, si on soumet les données à une similitude ? Est-il risqué d'entrevoir que, dans l'expérience de l'élève qui ne connaît pas la théorie de la similitude, se trouve déjà en germe ce que nous énoncerons, avec des concepts élaborés : la géométrie euclidienne a pour groupe fondamental le groupe des similitudes ? De toute façon, faire prendre conscience de cette invariance et amener à concevoir librement la figure générique quelconque correspondant aux données sont, n'est-il pas vrai, deux points importants.

Considérons à nouveau la première figure tracée et, pour amener des élèves à y voir des relations topologiques, qui semblent si bien appréhendées par les jeunes enfants, demandons-leur — autre activité enfantine — de colorier cette figure.

Ne vous récriez pas. J'ai été opposé à l'usage des couleurs en Mathématiques, pour une raison péremptoire autant que myope : parce que les Mathématiques ne traitent pas de couleurs. Mais, depuis que les nombres en couleurs de Georges Cuisenaire ont montré avec quelle vivacité les enfants réagissent aux couleurs, il serait impardonnable de ne pas en tirer parti pour faire ressortir des relations mathématiques. D'ailleurs, le problème du coloriage des cartes n'est-il pas classique en *analysis situs* ?

Un quart d'heure de coloriage vous en apprendra long sur l'entrain des élèves, sur leur imagination et sur leur méthode. Vous constaterez que certains ne colorient pas l'extérieur des cercles. « Je n'y ai pas pensé », diront-ils. Tous couvrent des régions. Il est malaisé de les amener à colorier les arcs de courbes. Cela explique sans doute pourquoi les relations de l'algèbre des ensembles, ou de la logique des classes, trouvent un modèle si commode dans les cercles sécants d'Euler.

Envisageons enfin la figure d'une manière plus conforme à la tradition. Convenons à présent que notre dessin représente deux circonférences sécantes. Demandons aux élèves ce qu'ils désirent faire sur cette figure. Une réponse immédiate : y tracer des droites ; naturellement, la corde commune, la droite des centres médiatrice de cette corde et axe de symétrie de la figure, les tangentes communes, etc...

De même, un modèle spatial pourra s'enrichir progressivement par des constructions qui ouvriront des investigations nouvelles.

Suggérons que les circonférences peuvent varier. Les élèves déplaceront les deux circonférences et étudieront leurs positions relatives. Laissant l'une fixe, ils feront rouler l'autre sur elle, ils parleront du lieu du centre de la circonférence mobile ou de l'hypocycloïde décrite par un

de ses points. Ici, des cercles découpés en carton, en bois, en plexiglass aideront à concevoir les relations entre figures mobiles, à découvrir des propriétés et des lieux qui seront établis par le raisonnement.

Fixons les deux points communs aux cercles : ceux-ci formeront un faisceau ; leurs centres décriront la médiatrice de la corde commune, laquelle a pour support l'axe radical.

Rendons fixes les centres, nous obtenons deux faisceaux. Entre les circonférences de l'un et celles de l'autre, établissons une correspondance par une relation entre les rayons et considérons le lieu des points d'intersection des circonférences homologues. Les relations les plus simples : rayons égaux, somme ou différence de rayons constante, rapport des rayons constant, produit des rayons constant, donneront la médiatrice du segment joignant les centres fixes, des ellipses et des hyperboles ayant ces points pour foyers, les cercles d'Apollonius, les ovales de Cassini.

Dans de telles études dynamiques, dont l'intérêt a été tant de fois souligné par M. CATTEGNO, les modèles qui se déforment, les systèmes articulés, les dessins de familles de figures, les dessins animés, les films, les dispositifs physiques variables sont un soutien de la représentation, un aiguillon de l'imagination : ils ouvrent un vaste champ de découvertes.

Il suffit de quelques barres et tiges de meccano, de quelques aiguilles à tricoter, de quelques élastiques pour créer et multiplier des modèles vivants, pour réaliser des translations, des rotations, des symétries, des homothéties et des inversions. Un lien élastique trace à volonté les sections sur un solide en plexiglass ou les configurations du géoplan. Un plan de lumière donne toutes les sections que l'on veut dans un modèle à fils.

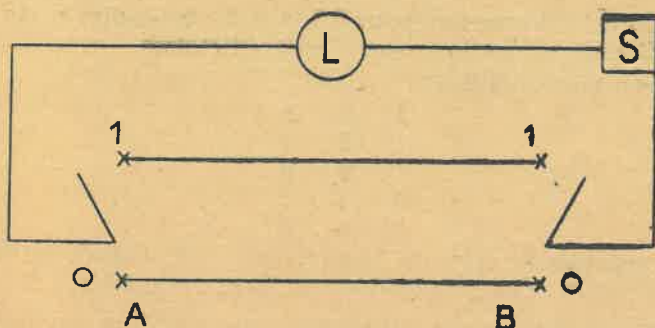
Comment ne pas vouloir favoriser l'acquisition de cette expérience géométrique, dynamique à la mesure de notre temps ? Comment ne pas réussir à donner le goût de l'exploration mathématique ?

Que d'occasions d'exprimer pour soi ce qu'on découvre et d'apprendre à le communiquer avec une rigueur suffisante ! Autant de motivations pour rechercher, au niveau théorique, les démonstrations des découvertes faites sur le plan concret.

À côté des modèles géométriques, la physique nous offre tant de ressources. Et d'abord la lumière qui donne les ombres, les symétries par rapport à un plan, les projections parallèles ou centrales, les surfaces caustiques. Notre collègue RONSMANS vous dira toute la richesse des relations mathématiques contenues dans les chapitres de la physique. Sans vouloir empiéter sur son exposé, je voudrais présenter en bref une situation physique et montrer une manière de l'envisager en mathématicien.

Il s'agit de schémas de montages électriques. Ils comprennent une source S, une lampe L, deux inverseurs A et B dont le levier, dans ses deux positions, permet d'établir le contact respectivement avec deux bornes marquées 1 et 0. Ces éléments sont connectés par un réseau de fils conducteurs.

Prenons le schéma classique de l'allumage d'une lampe à partir de deux interrupteurs à deux directions (fig. 3).



(fig. 3)

Faisons l'inventaire des cas qui se présentent pour les différentes positions des interrupteurs. Il y a deux possibilités 1 et 0 pour A et deux possibilités pour B. Cela donne pour le couple AB les quatre cas :

11, 10, 01, 00

La lampe ne s'allume que pour 11 et pour 00, c'est-à-dire lorsque les positions des leviers de A et de B sont les mêmes.

Il y a donc, dans ce sens, équivalence entre A et B.

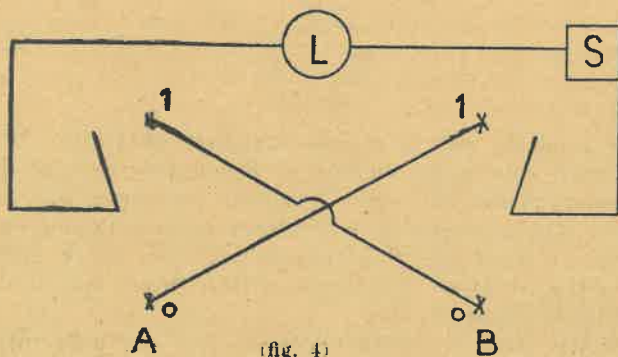
Si nous faisons correspondre 1 à l'allumage de la lampe et 0 à l'extinction, nous pourrions résumer notre inventaire dans le schéma :

| A $\longleftrightarrow$ B |   |
|---------------------------|---|
| 1                         | 1 |
| 1                         | 0 |
| 0                         | 0 |
| 0                         | 1 |

Convenons que A et B représentent deux propositions susceptibles d'être vraies ou d'être fausses, ou deux propriétés qui peuvent s'appliquer ou non. Le tableau précédent, où 1 et 0 désignent respectivement la valeur « vrai » et la valeur « faux », est la matrice de définition de l'équivalence logique (dont le symbole est  $\longleftrightarrow$ ). Il est aussi d'ailleurs le schéma de l'égalité entre les valeurs numériques 1 et 0.

Le montage électrique considéré est donc un modèle de l'équivalence logique ou de l'égalité entre des 1 ou des 0.

Dans le schéma précédent, croisons les fils qui relient les bornes de A à celles de B. Nous obtenons (fig. 4) :



(fig. 4)

La lampe ne s'allume que pour 1 0 et 0 1, c'est-à-dire si les positions de A et de B sont, en quelque sorte, contradictoires.

Le tableau correspondant :

| A | w | B |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

obtenu par négation de celui de l'équivalence, est celui de la disjonction exclusive (w) entre deux propositions ou deux propriétés.

Remarquons que si nous effectuons une addition module 2, nous avons :

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 0 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 0 + 1 &= 1 \pmod{2} \\ 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

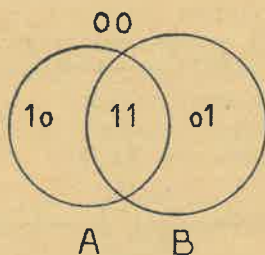
Le montage électrique réalise donc l'addition module 2.

On peut continuer de la sorte et reconnaître que le montage en série des deux interrupteurs est un modèle de la conjonction logique  $A \wedge B$  (A et B) et de la multiplication module 2. Le montage en parallèle est un modèle de la disjonction inclusive  $A \vee B$  (A ou B).

Les schémas considérés sont donc au même titre que les cercles d'Euler des modèles des opérations sur les propositions ou sur les ensembles. La clef interprétative suivante :

- 1 1 : A et B
- 1 0 : A et non B,
- 0 1 : non A et B
- 0 0 : non A et non B.

permet immédiatement le transfert.



(fig. 5)

Tous ces modèles ont la même structure abstraite : on peut leur faire correspondre une même algèbre de Boole dont ils sont des modèles.

Nous n'avons relevé, dans une situation physique, que des relations très sommaires. On pourrait les considérer comme dépourvues d'intérêt si on ne savait le parti que l'on tire de schémas de ce genre dans les machines à raisonner et les machines arithmétiques qui sont des modèles mathématiques géants.

Un physicien, dont le contact avec le réel est plus intime, verrait

dans nos montages bien d'autres relations. Il nous ferait d'abord remarquer que les fils peuvent être déformés, en gardant la même longueur, sans établir de mauvais contacts ; ce qui donne une géométrie des montages. Si, aux fils, on en substitue d'autres, il y a lieu de tenir compte d'un invariant de chaque fil dans tous les montages : sa résistance électrique. Pour calculer l'intensité du courant dans un fil conducteur, il faut faire intervenir la loi d'Ohm, et, pour calculer le réseau, les lois de Kirchhoff ; ce qui conduit à un système d'équations linéaires.

Il n'est pas nécessaire d'en dire autant pour notre objet. Nous avons voulu montrer le rôle des modèles. Afin de parler concrètement, nous avons pris deux exemples simples. Il suffira maintenant d'abstraire.

Pour le mathématicien, un modèle est une situation appartenant soit au concret physique, soit à un niveau de conception devenu concret par l'usage et qui présente les relations que l'on peut ou veut abstraire pour parvenir à les étudier pour elles-mêmes dans leur structure. C'est dans ce sens qu'un cube concret est un modèle du cube de la géométrie euclidienne, que les relations algébriques de la géométrie analytique classique fournissent des modèles de la géométrie euclidienne, de la géométrie affine, de la géométrie projective.

Pour le physicien, un modèle est un schéma qui lui fournit un jeu de relations propres à être engagées dans l'étude du réel. C'est dans ce sens que sont à considérer les modèles mécanistes de lord Kelvin ou les modèles d'éther et, plus près de nous, l'atome de Bohr, l'algèbre matricielle de Heisenberg.

Nous comprenons alors pourquoi, dans la recherche et l'usage des modèles, le mathématicien et le physicien ont des activités complémentaires, chacun pouvant trouver des modèles dans le champ de connaissance de l'autre.

Dans notre enseignement, les modèles doivent être à la fois des objets concrets et des symboles ; comme tels, ils doivent remplir leur double rôle. Nous devons faire en sorte qu'ils servent de moyen d'échange du concret et de l'abstrait et qu'ils soient l'occasion d'un dialogue et d'un ajustement ininterrompus.

Etant tour à tour réalité offerte à la pensée et réalisation dans laquelle la pensée se projette, les modèles permettent de mieux saisir dans les deux sens du mot : comprendre les relations abstraites et avoir une prise sur le réel concret.

W. SERVAIS,

*Athénée du Centre, Morlanwelz.*

## Géométrie intuitive

(Extraits) (\*)

Avant d'entreprendre un exposé rationnel et cohérent de la géométrie élémentaire, nous voulons organiser un premier enseignement dans lequel les fondements ont un caractère concret et où des raisonnements rigoureux apparaissent graduellement. Proclamons donc avec force que nous voulons apprendre à abstraire et que nous ne voulons pas présenter de l'abstraction toute faite.

*Ce programme implique à la fois des méthodes de découverte et de redécouverte et des procédés d'enseignement basés sur l'intuition.*

Une collègue étrangère visitait dernièrement des Athénées belges afin de s'initier aux méthodes de la géométrie intuitive. Si elle n'identifiait pas cette géométrie à ce fameux bricolage qu'on a caricaturé comme à plaisir, elle nous plaignait du fond du cœur, s'imaginant que la belle ordonnance de la géométrie d'Euclide était à jamais perdue pour les jeunes générations, l'habileté à plier du papier et à manier les ciseaux ayant fait place à l'aptitude à échafauder une démonstration rigoureuse, nos étudiants se contentant de construire des modèles et se satisfaisant de vérifications expérimentales plus ou moins heureuses. Quel ne fut pas son étonnement de rencontrer des professeurs soucieux dans telle classe de présenter aux élèves une axiomatique de la géométrie élémentaire, dans telle autre d'exposer rigoureusement une théorie des nombres irrationnels ! Elle nous écrivait quelques jours plus tard : « Mais vous attachez autant de prix que nous à la rigueur du raisonnement ! Les préoccupations de vos professeurs sont les nôtres. La différence avec notre enseignement, c'est que vos cours de géométrie ont une large base de sustentation expérimentale, exploitée à ciel ouvert ; les manipulations de modèles servant de base et de point de départ à de nouveaux problèmes résolus par le raisonnement. »

On pourrait ajouter à cette heureuse mise au point de notre collègue que, chaque fois que des professeurs ont tenté de présenter des questions classiques sous une forme plus moderne, c'est-à-dire plus rigoureuse et plus abstraite que les exposés traditionnels, ils ont généralement été compris des élèves. Mieux même, ceux-ci — à condition d'y avoir été quelque peu préparés — ont marqué une préférence pour la démonstration la plus abstraite. Nous n'y voyons aucun paradoxe, pas plus qu'au fait que le professeur d'université, qui a été le promoteur en Belgique des méthodes intuitives dans l'enseignement des Mathématiques, est sans doute un des esprits les plus abstraits que nous ayons connus...

*...L'enfant doit être au centre de nos préoccupations.* Tel que nous l'accueillons au seuil de l'Enseignement secondaire, il a de grandes possibilités, il possède une expérience mathématique assez vaste qu'on est

---

(\*) Faute de place, nous avons dû nous résoudre à quelques coupures dans la conférence de M. Jéronnez. Nous retenons les remarques de portée générale et les instructifs détails sur la progression des études dans les classes secondaires belges. On se reportera à l'article que M. Jéronnez avait bien voulu nous donner (Bulletin 167).

loin d'avoir complètement explorée et dont, en tout cas, on n'a pas tiré suffisamment parti. Perdre cette richesse précieuse est une maladresse ! Mais, *traumatiser* de jeunes cerveaux au contenu si riche, en leur imposant toutes faites et complètement élaborées nos Mathématiques d'adultes, est sans doute beaucoup plus grave !...

...Laissez donc l'enfant manier des réglettes et des bâtonnets, découper du carton, plier du papier, tendre des élastiques entre les clous du géoplan, assembler des tiges de meccano, tendre des fils, manier les ciseaux, la scie à découper, et même le fer à souder ! *C'est à partir de ces actions extérieures qu'il intériorise constamment des abstractions...*

\*\*

*En Sixième*, nous partons de solides connus globalement avant l'entrée à l'Athénée ou à l'Ecole Moyenne : cubes, parallélépipèdes, prismes réguliers, pyramides régulières, cylindres et cônes. Les sections planes réalisées par les élèves dans ces solides détermineront des *familles de figures* que nous considérons plutôt qu'une figure particulière. C'est ainsi que nous obtenons des familles de rectangles ou de parallélogrammes semblables, des familles de losanges ayant une diagonale commune, des familles de rectangles ayant une même dimension, etc... Il est inutile de mettre en évidence la nécessité de considérer des familles d'objets plutôt qu'un objet isolé. Insistons pourtant sur le fait que, lors de l'étude du triangle isocèle, par exemple, nous faisons construire par nos élèves des triangles très pointus ou très aplatis, de ces triangles qu'on ne dessine jamais parce qu'il est peu commode d'y tracer des hauteurs ou des bissectrices, ou parce que le centre du cercle circonscrit sort des limites de l'épure. Des enquêtes récentes l'ont prouvé : nos élèves admettent difficilement, lors d'une première étude, qu'une propriété démontrée pour un triangle isocèle bien déterminé — pour donner un exemple suggestif — soit encore vraie pour un triangle isocèle de forme très particulière, ou pour un très grand triangle.

Ajoutons enfin que, dès la Sixième, nous considérons des *figures semblables* : par exemple, les polygones obtenus en coupant une pyramide par des plans parallèles à la base. Nous ne manquons pas, évidemment, d'attirer l'attention des élèves sur les propriétés de ces figures pour arriver à des définitions dégagées du concret et à des implications équivalentes entre propriétés.

*En Cinquième*, la construction de modèles a pour but de maintenir la liaison plan-espace et d'éviter toute solution de continuité avec le cours de l'année précédente. C'est aussi l'occasion de rencontrer des figures planes égales qui ne sont pas situées dans le même plan : la géométrie plane est celle des figures planes et non celle de figures qui ne pourraient jamais sortir d'un seul plan, une espèce de géométrie entre deux plaques de verre.

C'est encore le souci de faire construire par les élèves eux-mêmes des figures, qui doivent être l'objet d'une étude particulière, qui provoque la réalisation de modèles.

Telle pyramide à base carrée, obtenue en décomposant le cube en

trois parties égales, est coupée par un plan perpendiculaire à la base et passant par une diagonale de cette base. Quelle est la nature du triangle obtenu ? Si nous coupons le solide considéré par des plans parallèles au premier plan de section, avons-nous encore un triangle isocèle ? Les triangles ainsi formés sont-ils semblables ? Obtient-on toujours un triangle ?, etc... Bien entendu, les constructions en question ne sont pas faites par tous les élèves et toutes les sections ne sont effectivement réalisées sur le modèle concret, mais suggérées, évoquées à la représentation mentale.

En procédant de cette façon, le sujet d'étude se développe à partir de l'élève et par lui : les difficultés se présentent d'elles-mêmes ; la curiosité et l'activité sont provoquées naturellement. Au contraire, la figure tracée par le professeur, qui impose la recherche d'une propriété déterminée, aura-t-elle jamais, pour l'élève, le même intérêt ?

Notons encore que, lorsque le professeur se contente au moment propice de faire imaginer le modèle et non plus de le construire, il quitte l'intuition sensible et fait alors appel à l'intuition mentale, à cette représentation intérieure abstraite, sans laquelle la Mathématique est impossible.

*En Quatrième*, nous travaillons dans le même esprit qu'en Cinquième. On fait davantage appel à l'intuition mentale. On continue à considérer des sections dans les solides. Mais, de plus en plus, il s'agit de sections par des plans qui varient suivant une loi déterminée. Il s'ensuit des calculs de variation de longueurs, d'aires, de volumes. L'activité manuelle peut ici n'être qu'un prétexte à l'activité intellectuelle.

Des systèmes articulés illustrent l'étude de lieux géométriques. Quant aux notions de géométrie dans l'espace figurant au programme de Quatrième, elles s'introduisent naturellement et facilement en utilisant les constructions des années précédentes.

Cette partie du cours de Quatrième a le mérite de clôturer un premier cycle d'études de la géométrie en revenant au point de départ, c'est-à-dire aux modèles réalisés en Sixième. Il était inutile d'attendre le cours de Seconde — comme on le faisait traditionnellement — pour commencer l'étude très simple et raisonnée de cette géométrie des solides.

*Le cours de Troisième* constitue, à nos yeux, un nouveau seuil de l'enseignement de la géométrie : il a un caractère nettement déductif. La conception des figures abstraites se précise par le retour aux premiers éléments de la géométrie démontrée. Si, pour nous, il ne s'agit peut-être pas de tout reprendre, il faut cependant qu'il y ait, de la part de l'élève, à l'occasion d'une révision synthétique, une prise de conscience que nos raisonnements se rapportent aux figures abstraites du mathématicien. *Cela ne veut pas dire que nos cours ne conservent pas une large base concrète.* Et à cet égard, malgré l'accent porté sur l'abstrait, il ne peut y avoir de rupture avec la méthode des cours précédents.

La géométrie enseignée en Troisième continuera à s'enrichir du contact avec le monde physique. On fera encore construire des modèles, on réalisera une géométrie de mouvement, on tirera parti d'expériences du cours de physique comme d'observations faites dans la pratique des

métiers. Il ne s'agit donc pas d'en revenir à ce que le géomètre anglais SIMPSON appelait déjà « un conformisme euclidien trop étroit ».

Il convient de souligner combien le recours aux modèles construits dans les trois classes inférieures facilite l'étude du cours de *Seconde* de géométrie dans l'espace.

La seule difficulté est le passage aux éléments infinis ou illimités : droite, plan, parallélisme. Mais il est possible de préparer ce passage — qui peut être une source de difficultés ou même d'échecs pour certains élèves — dans les classes précédentes. Citons l'exemple très simple de la juxtaposition de cubes ou de parallélépipèdes égaux (construits en Sixième) placés sur une table et formant une espèce de pavage.

On donne ainsi une idée de ces portions de plan « indéfiniment » prolongées. On peut concevoir de même des manipulations préparant une axiomatique que nous verrions volontiers incorporée au programme des *classes de Première*, à la place (nous parlons de la classe de Première latin-grec) des calculs d'aires et de volumes par des méthodes anciennes ne présentant qu'un faible intérêt pour nos rhétoriciens capables de les traiter par le calcul intégral.

Enfin, dans les classes de Première scientifique et de Première latin-mathématiques, il est utile de réaliser des modèles — parfois très simples — expliquant et enrichissant des notions paraissant présenter pour l'élève certaines difficultés.

Vous avez pu voir à l'exposition toute une série de modèles réalisés à partir de quelques situations mathématiques très simples. Par exemple, la considération de deux droites gauches et de leur plus courte distance suggère différents modèles dont la réalisation a posé de nombreux et intéressants problèmes.

Citons encore la figure formée de trois droites gauches deux à deux et de l'ensemble des droites s'appuyant sur ces trois directrices. Dans l'un des modèles se rapportant à cette question, vous aurez pu voir représentée la génération projective d'un conique.

Après avoir pratiqué pendant plusieurs années, d'une façon de plus en plus délibérée ces méthodes d'enseignement rompant résolument avec la routine, après en avoir contrôlé expérimentalement l'efficacité, nous avons la conviction que ces méthodes sont encore susceptibles d'être perfectionnées et qu'elles ouvrent un champ dont on ne peut exploiter toutes les ressources. Au professeur, elles offrent sans cesse la possibilité de modifier constamment les sujets d'étude proposés à lui-même comme à ses élèves, de varier indéfiniment et le choix des exercices et la façon de présenter des notions nouvelles.

Mais nous pensons surtout à tout le profit qu'en tirent nos élèves, au plaisir qu'ils prennent à réaliser des modèles, aux joies esthétiques qu'ils leur donneront, au bonheur qu'ils ressentent à rencontrer des problèmes difficiles et à en vaincre les difficultés. Nous pensons à ces élèves classés hâtivement dans la catégorie des « faibles en Mathématiques » et à qui le contact avec la géométrie intuitive a rendu le goût de la géométrie démontrée, a donné la satisfaction de la découvrir sous un aspect moins abrupt et d'y inventer de façon personnelle.

Il n'est sans doute pas vrai que seule une minorité d'individus est

capable d'accéder au « temple de la Mathématique ». Les méthodes que nous préconisons le prouvent ; elles nous ont permis de récupérer des bons parmi les médiocres, comme aussi de rendre les bons excellents. Parce qu'elles suscitent constamment l'activité créatrice des élèves, — cette activité créatrice qui est, selon M. CHOQUET, ce qu'il y a de plus spécifiquement humain —, elles donnent toute sa signification à un enseignement dont la valeur est primordiale. Parce qu'elles sont plus dynamiques et plus fructueuses que certaines méthodes traditionnelles, elles donneront finalement au pays plus de mathématiciens et de physiciens. La science et l'industrie en ont un besoin pressant et toujours accru. N'est-ce pas pour nous un devoir d'être attentif à ce problème d'ordre social ?

L. JÉRONNEZ,  
*Athénée Royal de Binche.*

---

### **Les transformations géométriques comme introduction intuitive aux Mathématiques supérieures**

1. — La géométrie intuitive prépare nos élèves de Sixième (12 ans) à la géométrie déductive.

Un des points du programme de la géométrie intuitive est l'étude de la symétrie, plane ou de l'espace, qui en tout état de cause fait naître chez nos élèves l'idée de transformation.

Si l'on veut préparer les élèves, dès la Sixième, on pourra leur donner une première idée des transformations géométriques.

2. — Les quelques réflexions qui vont suivre couvrent une grande période de notre enseignement secondaire. Nous croyons même pouvoir montrer que, en suivant systématiquement notre plan, il est possible de prendre un bel élan et de préparer l'accès à l'enseignement supérieur d'une façon prudente et de créer chez nos élèves l'enthousiasme nécessaire pour les Mathématiques.

Nous ne désirons nullement que les questions présentes soient inscrites aux programmes d'études et nous ne nous imaginons point que ce que nous allons vous présenter soit nouveau. Nous croyons toutefois que le sujet que nous vous soumettons est en mesure d'intéresser nos élèves et que ce matériel pourrait fort bien convenir comme étude de délassement intellectuel.

3. — Comment sommes-nous arrivés à étudier ce sujet ?

Ces idées ont pris naissance lors de Congrès. Une première occasion fut le matériel didactique très intéressant qu'il nous fut donné de voir à Sèvres, construit par M. BIGUENET. Ce matériel a été exposé également à Berchem-Anvers, lors de notre dernier Congrès de novembre 1955.

Une seconde occasion fut un autre Congrès, également à Sèvres, en février 1955, où d'éminents mathématiciens français ont plaidé la cause des Mathématiques modernes pour l'Enseignement secondaire.

C'est ainsi que m'est venue l'idée, en février de cette année, d'expérimenter dans notre école. Je ne suis pas le seul qui se soit mis à l'ouvrage ; je pense à mon ami le professeur SOENS qui a exposé son travail dans le n° 7 de la revue belge *Mathematica et Paedagogia*.

4. — Beaucoup de nos élèves connaissent à la fin de leurs humanités les trois transformations classiques : symétrie, translation et rotation. Mais combien d'entre eux ont une idée de ce qui se passe lorsque l'on exécute plusieurs de ces transformations consécutivement ? Combien de nos élèves ont entendu parler de produits de transformations ?

Nos élèves connaissent les opérations sur des nombres et connaissent la propriété commutative. Ils ont peur d'opérations non-commutatives !

Nos anciens élèves, entrés aux grandes écoles, ont beaucoup de difficultés avec des notions comme transformations, point double d'une transformation, pour ne pas parler d'opérateur !

5. — Quel sera notre plan d'action ?

En premier lieu, il nous semble qu'une coordination poussée avec le cours de dessin est nécessaire.

En sixième : Les élèves dessinent une figure simple — de préférence un pentagone non convexe — et la symétrique par rapport à un axe, puis par rapport à un centre. On découpe la figure tracée en papier bristol et vérifie si les figures obtenues sont directement ou inversement égales à la figure primitive. Comme seconde application, ils dessinent la figure symétrique de  $F_0$  par rapport à un axe  $x'x$ , puis la figure symétrique de la figure obtenue par rapport à un second axe perpendiculaire au premier. On leur demande alors d'examiner comment on pourrait passer directement de la figure  $F_0$  à la figure  $F_2$  (en leur suggérant que le point d'intersection des deux axes pourrait jouer un rôle).

Si l'on sent que les élèves s'intéressent à ces dessins, on leur fera exécuter encore quelques transformations, en partant de préférence de figures asymétriques.

En Cinquième : Le programme esquissé pour la Sixième peut éventuellement être réservé à cette classe. On peut faire dessiner une translation et un produit de deux translations. On attirera leur attention sur l'analogie avec la composition des vecteurs représentant deux forces (cours de physique).

Les leçons de Cinquième pourront d'ailleurs être employées avec succès pour faire quelques petites synthèses de géométrie, par exemple une synthèse sur la théorie des quadrilatères. Très jolis sont d'ailleurs les exercices de dessin où l'on fait tracer des réseaux en partant progressivement du carré, du losange, du rectangle ou du parallélogramme. Combien jolis les dessins qu'on obtient lorsque l'on y introduit un peu de couleurs et que l'on part, par exemple, d'un quadrilatère cerf-volant pour construire le réseau.

En Quatrième, de nouvelles possibilités s'offrent d'elles-mêmes. L'homothétie, l'affinité, la rotation sont à la portée et l'on peut faire dessiner des produits de transformations.

Lorsqu'on constate que les élèves s'intéressent à ce genre d'exercices, on n'hésitera pas à leur montrer que certains produits de transformations ne sont pas commutatifs, comme par exemple rotation-translation et translation-rotation.

Les classes supérieures offrent de multiples occasions pour développer le dessin. Cela permettra de donner, en Première, une synthèse où l'on introduira les notions qu'ils connaissent déjà, comme les nombres complexes, ou bien de nouvelles notions comme celles d'éléments doubles, d'opérateur.

Opérateur désigne ici la matrice d'une transformation. Voici comment nous avons essayé d'introduire les nouvelles notions au début de cette année scolaire avec des élèves de 17 ans.

6. — Nous définissons une nouvelle notion : la matrice.

*Définition.* — Une matrice est un tableau de nombres ou de variables (appelés termes) comprenant  $c$  colonnes et  $l$  lignes. Ainsi :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. La matrice est dite rectangulaire si  $c \neq l$ , carrée lorsque  $c = l$ .

Dans cette étude élémentaire, nous nous bornerons aux matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

A quelles notions connues pouvons-nous rattacher les matrices ?

*Exemple 1.* — Les coordonnées  $(x_1, y_1)$  d'un point, par rapport à un système d'axes rectangulaires ou obliques, peuvent s'écrire sous forme

de matrice  $\begin{vmatrix} y_1 \\ x_1 \end{vmatrix}$

Les deux projections coordonnées d'un vecteur peuvent s'écrire de cette manière.

*Exemple 2.* — Les coordonnées des trois sommets d'un triangle peuvent s'écrire dans une matrice sous l'une des formes :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

*Exemple 3.* — Le système linéaire :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 \\ y_1 = cx_0 + dy_0 \end{cases}$$

donne lieu à une matrice carrée dont les éléments sont les 4 coefficients  $a, b, c, d$  :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Connaissant la matrice, on peut écrire le système (1).

L'emploi des indices doubles permet d'écrire le système sous la forme :

$$(1') \begin{cases} x_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 \\ y_1 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 \end{cases} \quad \text{avec la matrice correspondante } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

On convient que, dans le terme  $a_{lc}$ , le nombre  $l$  désigne le numéro d'ordre de l'équation, le nombre  $c$  le numéro d'ordre de l'inconnue.

$a_{ii}$  sont les termes diagonaux,  $a_{11} + a_{22}$  est la trace de la matrice.

Si tous les termes  $a_{lc}$  ( $l \neq c$ ) sont nuls, la matrice s'appelle matrice diagonale.

Exemple :  $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$  La matrice diagonale ayant  $a_{kk} = 1$  s'appelle la matrice unité.

Exemple :  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  Elle est désignée par le symbole  $\|1\|$ .

Dans ce cas, le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Le système (2) définit la transformation identique, et sa matrice est donc la matrice unité.

D'une manière analogue,  $\|0\|$  est la matrice dont tous les éléments sont nuls ; c'est la matrice nulle.

Une matrice diagonale dont tous les termes sont égaux s'appelle matrice scalaire.

Exemple :  $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$  ; elle est égale au produit du terme  $a$  par la matrice unité.

Nous insistons dès à présent sur le fait qu'une matrice n'est pas un nombre, comme un déterminant.

Il est toutefois possible d'accoupler à chaque matrice un déterminant. Ainsi : à la matrice  $\|a_{lc}\|$  correspond un déterminant  $|a_{lc}|$ . Si le déterminant  $|a_{lc}|$  est nul, la matrice correspondante s'appelle une matrice singulière.

7. — Deux matrices sont égales lorsque leurs termes sont égaux chacun à chacun. Si, par exemple, les deux triangles de sommets  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  et  $(x'_1, y'_1)$ ,  $(x'_2, y'_2)$ ,  $(x'_3, y'_3)$  sont confondus les matrices :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix} \quad \text{sont évidemment égales.}$$

8. — *Opérations avec des matrices* : Addition. — On peut s'en former une idée intuitive en écrivant la somme de deux vecteurs sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{vmatrix}$$

On définit ensuite : la somme de deux matrices  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} p & q \\ v & w \end{vmatrix}$  est la nouvelle matrice  $\begin{vmatrix} a + p & b + q \\ c + v & d + w \end{vmatrix}$

Exemple :  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$

On voit immédiatement que l'addition jouit de la propriété commutative. On peut contrôler aisément qu'elle est également associative.

Comme application, on peut montrer la translation qui s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Comme exercice de dessin, on fera une somme de deux translations, avec la démonstration de la commutativité, que l'on pourra écrire symboliquement :

$$t_1 + t_2 = t_2 + t_1$$

Comme seconde application, on peut faire la somme de deux matrices égales. De :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$$

et  $M + M = 2M$ , on conclut à la relation générale :

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

et réciproquement.

On peut rendre ceci encore plus explicite en pensant au produit d'un vecteur par un scalaire. Le vecteur  $\vec{V} \parallel x$  donne, après multiplication par le scalaire  $a$ , le vecteur  $a\vec{V}$  de projections coordonnées  $\begin{vmatrix} ax \\ ay \end{vmatrix}$ , et donc  $\begin{vmatrix} ax \\ ay \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

Des exemples bien simples sont par exemple l'homothétie :

$$\begin{vmatrix} y \\ x \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

et la représentation paramétrique de la droite :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}.$$

9. — Quelles sont les liaisons avec ce que l'élève a vu précédemment ? Quelques exemples serviront d'illustration.

*Exemple 1.* — En prenant dans un système d'axes rectangulaires le point  $A_0(x_0, y_0)$  et son symétrique  $A_1(x_1, y_1)$  par rapport à l'axe des  $x$ , on a les formules de transformation :  $\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases}$

$$(3). \quad \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases}$$

L'opération géométrique (prendre le symétrique par rapport à  $Ox$ ) donne donc lieu à la matrice  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} (M).$

Les formules (3) définissent complètement le passage de la figure  $F_0$  à la figure symétrique  $F_1$  par rapport à l'axe  $Ox$  ; on peut donc dire que la matrice (M) est une espèce d'opérateur permettant de déduire de la

figure  $F_0$  la nouvelle figure  $F_1$ . Géométriquement, on déduit de la figure  $F_0$  la figure  $F_1$  ; algébriquement, on écrira :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

et on lit : les coordonnées  $(x_1, y_1)$  se déduisent par la matrice diagonale  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$  des coordonnées  $(x_0, y_0)$ .

*Exemple 2.* — En prenant le symétrique du point  $A_0(x_0, y_0)$  par rapport à l'axe  $Oy$ , on emploiera les formules de passage  $\begin{cases} x_1 = -x_0 \\ y_1 = y_0 \end{cases}$

et la matrice  $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Algébriquement, la transformation est caractérisée par la relation :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

*Exemple 3.* — En prenant le symétrique de  $A_0(x_0, y_0)$  par rapport à l'origine  $O$ , on prendra les formules  $\begin{cases} x_1 = -x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases}$  et la matrice

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Algébriquement, la transformation est caractérisée par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Ces exemples montrent déjà que la matrice doit être considérée comme un opérateur, non comme un nombre, ce qui la différencie donc essentiellement du déterminant.

10. — Comme seconde opération, nous définissons le produit de deux matrices.

Prenons les deux transformations linéaires :

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 \\ y_1 = cx_0 + dy_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 = mx_1 + ny_1 \\ y_2 = px_1 + qy_1 \end{cases}$$

L'élimination de  $x_1$  et  $y_1$  conduit au nouveau système :

$$\begin{cases} x_2 = (am + cn)x_0 + (bm + dn)y_0 \\ y_2 = (ap + cq)x_0 + (bp + dq)y_0 \end{cases}$$

Ces trois systèmes conduisent aux trois matrices :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} am + cn & bm + dn \\ ap + cq & bp + dq \end{vmatrix}$$

Ceci nous permet d'expliquer sans difficulté la définition :

Le produit de deux matrices, dans un ordre déterminé,  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  et

$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$  est la nouvelle matrice  $\begin{vmatrix} am + cn & bm + dn \\ ap + cq & bp + dq \end{vmatrix}$ . On écrit :

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap + cq & bp + dq \\ am + cn & bm + dn \end{vmatrix}$$

Pour la formation des éléments du produit, on pourra penser au tableau :

$$\begin{array}{cc} l_1 c_1 & l_1 c_2 \\ l_2 c_1 & l_2 c_2 \end{array}$$

Exemples :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+14 & 7+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 23 \\ 43 & 50 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{vmatrix}.$$

Ces exemples simples prouvent immédiatement que le produit n'est pas commutatif.

11. — *Application 1.* — La définition du produit de deux matrices nous permet de dire que le second membre de la relation de transformation

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

d'une transformation radiale peut effectivement être considérée comme un produit de deux matrices.

*Application 2.* — Une transformation quelconque peut maintenant être définie algébriquement par la relation :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

En reprenant la transformation identique sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

nous voyons que la translation sera définie algébriquement par la relation :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

*Application 3.* — L'homothétie de centre O sera définie par :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

et celle de centre quelconque le sera par :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

*Application 4.* — La figure symétrique de  $F_0$  par rapport à l'axe des  $x$  conduit à la figure  $F_1$  ; la transformation est régie par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} \quad (4).$$

En assujettissant  $F_1$  à une nouvelle symétrie par rapport à l'axe  $Oy$  (p.e. perpendiculaire à  $Ox$ ), on obtient la figure  $F_2$  ; la seconde transformation est régie par :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} \quad (5).$$

De (4) et (5), on déduit que :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

ce qui signifie que  $F_2$  est le symétrique de  $F_0$  par rapport au point d'intersection  $O$  des deux axes rectangulaires.

Ce qui précède explique également pourquoi on emploie en géométrie le terme « produit » de deux symétries.

En prenant d'abord la symétrie par rapport à  $Oy$ , puis par rapport à  $Ox$ , on obtient la même figure finale ; l'ordre des symétries n'a donc pas d'influence sur le résultat.

12. — *Autres applications* : 1) *Symétrie par rapport à une droite*. — Prenons, dans le système d'axes  $xOy$ , une droite  $d$  menée par  $O$ , définie par son angle directeur  $u$ . Le symétrique du point  $A_0(x_0, y_0)$  par rapport à cette droite aura des coordonnées  $x_1, y_1$  données par le système :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos 2u + y_0 \sin 2u \\ y_1 = x_0 \sin 2u - y_0 \cos 2u \end{cases} \quad \text{de matrice} \quad \begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix}$$

La relation de transformation est donc :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

*Cas particulier*. — Lorsqu'il s'agit d'une symétrie par rapport à la première bissectrice du système d'axes coordonnées, on aura  $u = 45^\circ$ ,  $2u = 90^\circ$ , ce qui conduira à la relation :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

En appliquant deux fois consécutivement cette transformation, on retrouve la figure primitive. Dans ce cas :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

ce qui est bien la transformation d'identité.

2) *Rotation d'une figure autour d'un point, d'un angle  $u$* . — Si  $O$  est l'origine du système d'axes coordonnées,  $A_0(x_0, y_0)$  un point de la première figure,  $A_1(x_1, y_1)$  le point correspondant de la figure transformée par rotation, on aura les formules de transformation :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos u - y_0 \sin u \\ y_1 = x_0 \sin u + y_0 \cos u \end{cases}$$

et la relation de transformation sera :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Si l'on soumet la figure  $F_1$  à une seconde rotation autour du même point, mais d'angle  $v$ , on obtiendra une figure  $F_2$  déduite directement de  $F_0$  d'après les règles de la transformation :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(u+v) & -\sin(u+v) \\ \sin(u+v) & \cos(u+v) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Elle nous montre que l'on peut déduire  $F_2$  de  $F_0$  par une seule rotation, autour de  $O$ , d'angle  $(v + u)$ .

Pour  $u + v = 90^\circ$ , on trouve :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

cè qui montre que  $F_2$  est le symétrique de  $F_0$  par rapport au point O, résultat connu.

La relation de rotation est susceptible de deux interprétations :

1° lorsqu'on suppose que les formules d'addition trigonométriques sont connues, elle nous apprend que le produit de deux rotations  $(O, u)$  et  $(O, v)$  est une nouvelle rotation  $(O, u + v)$  ;

2° lorsqu'on suppose connue la propriété que le produit de deux rotations est une rotation, elle fournit une démonstration pour les formules d'addition trigonométriques.

3) *Homothétie*. — Nous supposons que le centre soit à l'origine du système d'axes coordonnées,  $xOy$ . Après transformation, le point  $A_0(x_0, y_0)$  devient  $A_1(x_1, y_1)$  sur  $OA_0$ . Si  $k$  est une constante ( $\neq 1$ ), le point  $A_1(kx_0, ky_0)$  sera l'homothétique de  $A_0$ . La transformation est donc caractérisée par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

4) *Affinité*. — Prenons dans un système d'axes rectangulaires le point  $A_0(x_0, y_0)$  et faisons-lui correspondre le point  $A_1(x_0, ky_0)$ . Cette affinité orthogonale sera définie par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

5) On pourra maintenant inscrire les relations de produits de transformations. Nous choisissons comme exemple une homothétie suivie d'une affinité orthogonale :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & km \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Cette transformation est-elle commutative ?

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & km \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

et la réponse est affirmative, ce qui n'était pas certain *a priori* !

13. — *Epures*. — Nos élèves ont dessiné plusieurs transformations et des produits ; les dessins exposés comprennent : produit de deux translations ; translation suivie de symétrie axiale ; produit de deux symétries par rapport à deux axes perpendiculaires et par rapport à deux axes obliques ; produit de deux symétries centrales ; produit de deux rotations ; produit d'une translation et d'une rotation ; produit d'une symétrie axiale par une homothétie ; produit d'une rotation par une homothétie ; produit de deux homothéties de centres distincts ; une affinité générale ; un cisaillement ; un produit de deux affinités orthogonales ; un produit d'une affinité orthogonale par une rotation et un produit de deux cisaillements.

En conclusion, on a composé un tableau renfermant dans la première colonne le nom de la transformation, dans la seconde la matrice y afférente et dans la dernière le déterminant de cette matrice.

14. — *Tableau :*

| <i>Transformation</i>                           | <i>Matrice</i>                                                          | <i>Déterminant</i> |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| identité .....                                  | $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$                          | 1                  |
| symétrie p.r. à Ox .....                        | $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$                         | —1                 |
| symétrie p.r. à Oy .....                        | $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$                         | —1                 |
| symétrie p.r. à O .....                         | $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$                        | +1                 |
| symétrie p.r. à une droite par O .              | $\begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix}$ | —1                 |
| rotation autour de O .....                      | $\begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix}$     | 1                  |
| symétrie p.r. 1 <sup>re</sup> bissectrice ..... | $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$                          | —1                 |
| homothétie de centre O .....                    | $\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$                          | $k^2$              |
| affinité orthogonale d'axe Ox ....              | $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$                          | $k$                |

15. — Nous avons trouvé une matrice jouant le rôle de l'unité positive ; examinons maintenant s'il n'existe pas une matrice jouant le rôle du nombre —1.

Pour y arriver, nous pensons à la forme trigonométrique du nombre complexe et à l'interprétation géométrique d'un nombre complexe, et nous rappelons la propriété particulière que l'on peut déduire du point-image d'un nombre réel, le point-image d'un nombre purement imaginaire par une rotation de 90°.

La matrice de rotation  $\begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix}$  peut s'écrire comme une somme de deux matrices :

$$\begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & \cos u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & -\sin u \end{vmatrix}$$

ou encore :

$$\cos u \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \sin u \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

La première matrice est la matrice unité. Comment interpréter la seconde ?

En la multipliant par elle-même, on trouve comme produit :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ ou } - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elle semble donc jouer le rôle du nombre  $i$  des nombres complexes. Le carré de la seconde matrice est en effet égal à la matrice unité changée de signe. La matrice de rotation peut donc s'écrire :

$$\|1\| \cos u + \|i\| \sin u$$

et cette forme nous rappelle la forme trigonométrique du nombre complexe.

16. — Lors des définitions, nous avons adjoint à chaque matrice un déterminant. Ce déterminant a-t-il une signification particulière ?

Nous examinons encore une fois les dessins et nous calculons les déterminants des différentes transformations (notés dans le tableau du n° 14).

Conclusions : les transformations 1 à 7 donnent toujours des figures égales ; 1, 4 et 7 donnent des figures directement égales, tandis que 2, 3, 4, 5 donnent des figures inversement égales.

Des figures homothétiques sont semblables (facteur  $k$ ) et le rapport des aires est  $k^2$ .

Des figures affines ont des aires qui sont entre elles comme les nombres 1 et  $k$ . Cette première remarque nous incite à croire que la valeur du déterminant afférent à la transformation est le nombre par lequel il faut multiplier l'aire de la figure primitive pour obtenir celle de la figure transformée.

Qu'il en soit réellement ainsi se montre de la façon suivante :

Nous prenons la matrice  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  et la transformation définie par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Les points  $A_0(1,0)$ ,  $B_0(2,0)$ ,  $C_0(3,0)$ ... de l'axe des  $x$  deviennent  $A_1(a, c)$ ,  $B_1(2a, 2c)$ ,  $C_1(3a, 3c)$ ... et sont colinéaires avec  $O$ .

Les points  $L_0(0,1)$ ,  $M_0(0,2)$ ,  $N_0(0,3)$ ... de l'axe des  $y$  deviennent  $L_1(b, d)$ ,  $M_1(2b, 2d)$ ,  $N_1(3b, 3d)$ ... et sont également alignés sur  $O$ .

Le point  $E_0(1,1)$  devient  $E_1(a + b, c + d)$ .

Au carré  $OA_0E_0L_0$  correspond le quadrilatère  $OA_1E_1L_1$  de sommets  $(O, O)$ ,  $(a, c)$ ,  $(a + b, c + d)$ ,  $(b, d)$ . Les coefficients angulaires des droites  $OA_1$  et  $E_1L_1$ , ainsi que ceux de  $OL_1$  et  $A_1E_1$  sont égaux et la figure transformée est donc un parallélogramme.

Connaissant la matrice  $M$ , on pourra construire immédiatement le parallélogramme  $OA_1E_1L_1$  et donc toute la figure transformée.

Si, réciproquement, on connaît la figure transformée correspondant au carré  $OA_0E_0L_0$ , on pourra écrire la matrice de la transformation et en déduire les coordonnées des points  $A_1$  et  $L_1$ . En projetant  $E_1$  en  $E'_1$  sur  $Ox$  et en  $E''_1$  sur  $Oy$ , on obtient :

$$\text{aire } OE'_1E_1E''_1 = (a + b)(c + d)$$

$$\text{aire } OA_1E_1L_1 = ad - bc$$

et donc :

$$\frac{\text{aire } OA_1E_1L_1}{\text{aire } OA_0E_0L_0} = \frac{ad - bc}{1} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{1} = \text{déterminant de la matrice de transformation.}$$

Conclusion : L'aire de la figure transformée est égale à l'aire de la figure primitive multipliée par le déterminant de la matrice de transformation ; en d'autres mots, un déterminant est un nombre qui indique dans quelle mesure une matrice change une aire par transformation.

Lors des définitions, nous avons parlé également de matrice singulière, matrice dont le déterminant était nul.

Qu'advient-il dans une telle transformation de l'aire de la figure transformée ? Considérons p.e. la transformation définie par la relation :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Les points  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(0,1)$  deviennent  $O'(0,0)$ ,  $A'(1,1)$ ,  $B'(2,2)$ ,  $C'(1,1)$  et sont alignés sur la droite d'équation  $y = x$ . Toutes les aires deviennent donc nulles.

17. — Comme première conclusion, nous croyons qu'il nous est permis de dire : Le dessin d'épure de transformations simples et de produits de transformations avec les relations algébriques (matricielles) afférentes peut constituer une bonne préparation au calcul matriciel en particulier et à l'algèbre abstraite en général.

Un second point de contact avec l'enseignement supérieur est facile à réaliser pour le professeur qui veut introduire la théorie des groupes.

Il est en effet très simple de faire voir que les transformations donnent lieu à : 1° des groupes congruents ; 2° des groupes de similitude ; 3° des groupes affins (et, éventuellement à : 4° des groupes projectifs).

Nous commencerions par exemple par signaler les conditions requises pour que des transformations fassent des groupes :

1° le produit de deux transformations doit donner une nouvelle transformation de ce groupe :  $T_1 T_2 = T$  ;

2° le produit doit être associatif :  $T_1(T_2 T_3) = (T_1 T_2) T_3$  ;

3° le groupe doit contenir la transformation identique ;

4° la transformation inverse doit exister.

On pourra même ajouter que, lorsque le produit est commutatif, le groupe s'appelle abélien.

18. — Pour finir, nous croyons qu'il peut être recommandable d'insister sur les invariants qui caractérisent les différentes transformations. On pourra montrer p.e. : l'invariance du rapport de section, du parallélisme et du rapport des aires pour la transformation affine ; l'invariance des angles et du rapport des segments homologues dans les transformations de similitude ; l'invariance de la longueur des segments et de l'aire dans les transformations congruentes.

Nous espérons que cet exposé aura pu vous convaincre qu'il est possible d'approcher les Mathématiques supérieures modernes avec un minimum de moyens.

G. BOSTEELS,

*Préfet des Etudes (Athénée Royal, Berchem-Anvers).*

## Retour de Belgique

C'est en novembre 1951, aux Journées de Mathématiques franco-belges de Sèvres, que j'ai rencontré nos collègues de Belgique. M. le Directeur général BRUNOLD m'avait demandé de faire un exposé sur le recours au réel dans l'enseignement des Mathématiques.

Je me proposais deux buts :

— a) montrer le matériel didactique que j'avais fait réaliser pour illustrer mon enseignement, en indiquant le bénéfice de cette illustration ;

— b) montrer le double aspect, éducatif et pratique, de l'enseignement des Mathématiques dans nos écoles techniques.

Nos amis belges ont été intéressés par ces réalisations et m'ont invité à participer à leur Congrès de Berchem les 12 et 13 novembre 1955.

Avec de grosses difficultés, j'ai donc transporté à Anvers une partie du matériel présenté à Sèvres, matériel dont je me sers couramment.

Avant de donner la liste des objets exposés, je ne crois pas inutile de situer brièvement les conditions dans lesquelles nous enseignons dans nos écoles techniques :

a) Nos professeurs doivent s'adapter à des écoles très diverses, comme l'indique le tableau ci-contre.

| Formation poursuivie. | Etablissements scolaires donnant cette formation                                                                                                                                                                                                                      | Sanction des études                                                                                      |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ouvrier qualifié.     | Centres d'Apprentissage.<br>Cours Professionnels obligatoires.                                                                                                                                                                                                        | C.A.P. (1).                                                                                              |
| Maîtrise.             | Collèges Techniques (C.T.) (2).                                                                                                                                                                                                                                       | Brevet d'Enseignement Industriel, Commercial, Social, Hôtelier.                                          |
| Technicien.           | Ecole Nationale Professionnelle (E.N.P.) (2).<br>Cours de Perfectionnement.<br>Cours de Promotion du Travail.                                                                                                                                                         | Diplôme d'élève breveté des E.N.P.<br>Brevet supérieur d'études commerciales.<br>Brevets de techniciens. |
| Ingénieur.            | Ecoles Nationales d'Ingénieur Arts et Métiers.<br>Ecole Nationale Supérieure de Céramique industrielle.<br>Ecole d'Ingénieurs de Strasbourg.<br>Ecole des Arts et Industries textiles de Roubaix.<br>Ecole de radio-électricité et d'électricité appliquée de Clichy. | Diplômes d'ingénieurs.                                                                                   |

b) La plupart de nos élèves viennent dans nos écoles pour apprendre un métier ; ils ont un sentiment très vif de l'utile, particulièrement sensible dans les Cours de Promotion du Travail. Il est courant, en effet, dans ces classes, d'être soumis à cette question : « Mais à quoi cela pourra-t-il nous servir ? » Besoin fort compréhensible de la part de tel

(1) C.A.P. : Certificat d'Aptitude Professionnelle.

(2) *Remarque* : Des sections de préparation aux concours d'entrée dans les écoles d'ingénieurs du type E.N.I.A.M. existent dans la plupart des E.N.P. et dans un certain nombre de Collèges Techniques, à partir de la classe de Seconde, pour les élèves les mieux doués. Les programmes de ces classes permettent à ces élèves de se présenter au baccalauréat.

ouvrier qui a le courage, après sa journée de travail, de venir à ces cours. Pour peu qu'on sache le rassurer, lui fournir quelques justifications, on le verra souvent se prendre au jeu et s'intéresser réellement aux Mathématiques. Étudiées d'abord dans un esprit utilitaire, elles deviennent le but essentiel.

c) Le double souci d'apprendre un métier et de former l'esprit a pour conséquence inévitable un horaire hebdomadaire de présence à l'école très lourd : 40 heures au moins. L'élève de l'Enseignement technique dispose donc de peu de temps pour l'étude personnelle, la réflexion, la lecture. L'enseignement doit être conduit de telle sorte que l'essentiel de la leçon soit acquis à la fin du cours ; c'est ce qui explique le recours à une pédagogie particulière.

Un des moyens, particulièrement efficace, de cette pédagogie consiste à accrocher solidement l'enseignement au réel. A l'aide de dessins, de solides géométriques, de figures animées... A l'aide aussi d'exemples pris dans les sciences et dans les techniques, utilisant le langage et l'outil mathématiques.

Nous disons bien *un moyen*, car nous nous proposons de donner à l'élève une réelle éducation mathématique. Nous voulons qu'il sente la nécessité des définitions précises, qu'il comprenne bien aussi la différence entre la preuve logique et la preuve expérimentale. Nous ne le mènerons pas toujours très loin dans le chemin de l'abstraction, mais nous nous efforcerons de tirer de lui le maximum.

On me demande parfois si mes élèves, grâce à ces méthodes, sont plus forts en Mathématiques. Je réponds que je n'en sais rien, qu'il est impossible de le savoir. Ce que je sais, c'est qu'ils sont intéressés et que j'ai amené, de cette manière, un grand nombre d'entre eux à aimer les Mathématiques. Je sais aussi que cela n'a pas freiné l'élan des meilleurs, au contraire.

On m'a reproché de diminuer l'effort, seul profitable, dit-on, pour acquérir une culture. Je réponds que nous disposons de peu de temps et que toute méthode qui permet de gagner du temps pour obtenir un résultat déterminé doit être expérimentée.

Il est possible que quelques professeurs belges se soient inspirés de mes réalisations, — et j'en suis heureux —, mais, ce qui est certain, c'est la moisson d'enseignements que je ramène du Congrès de Berchem, et, en particulier, de la splendide exposition qui l'illustrait. Le matériel exposé était destiné à l'enseignement secondaire et aux deux premières années de licence. Exposition riche par l'abondance et la variété du matériel présenté ; exposition d'une élégance raffinée et d'un très grand attrait.

Qu'il me soit permis d'avoir ici une pensée reconnaissante à l'égard de nos obligeants amis belges.

Voici maintenant la liste des objets que j'ai présentée à Berchem, sous le titre :

**Matériel didactique pour l'illustration  
de l'enseignement des mathématiques**

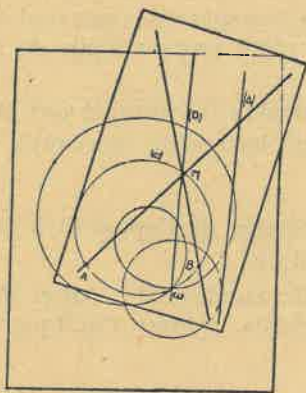
**GÉOMÉTRIE PLANE**

**I. — Glissement d'un plan sur un plan**

**A) 1<sup>er</sup> cas. — Deux droites du plan mobile glissent sur deux points A et B du plan fixe.**

*Réalisation :* Dans une plaque de plexiglass de deux millimètres d'épaisseur, deux rainures rectilignes ont été taillées. Elles forment entre elles un angle  $\alpha$ .

Après avoir tracé sur une feuille de papier les lieux géométriques ou les enveloppes que l'on veut mettre en évidence, fixer cette feuille à une planche et planter, en deux points A et B convenablement choisis, deux pointes fixes sur lesquelles glisseront les rainures de la plaque mobile.



(fig. 1)

On peut mettre en évidence, à l'aide de ce dispositif :

- a) le lieu des points M d'un plan tels que  $\widehat{AMB} = \alpha$  ;
- b) le lieu des points M tels que  $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha + k2\pi$  ;
- c) le lieu des points M tels que  $(MA, MB) = \alpha + k\pi$  ;
- d) l'enveloppe d'une droite du plan mobile ;
- e) le lieu d'un point de ce plan ;
- f) le roulement d'un cercle du plan mobile sur un cercle du plan fixe.

**B) 2<sup>e</sup> cas. — Deux points du plan mobile glissent sur deux droites du plan fixe (mouvement de la bande de papier dans un tracé de l'ellipse).**

Les deux plans sont matérialisés par deux plaques de plexiglass. L'une d'elles porte deux rainures, comme précédemment ; à l'autre sont fixés deux goujons qui glisseront dans les rainures de la plaque fixe.

On peut, à l'aide de ce dispositif, illustrer les propositions suivantes :

a) le mouvement du plan mobile peut être obtenu par le roulement d'un cercle sur un autre cercle ;

b) tout point du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe (théorème de La Hire) ;

c) tout autre point du plan mobile décrit une ellipse.

#### MAQUETTES ANIMÉES (système Quevron-Pasquet)

Ces maquettes sont en plexiglass, mais plus complexes que les précédentes et difficilement réalisables dans nos ateliers. Nous avons exposé :

a) l'inverseur de Peaucellier ;

b) un dispositif montrant une génération tangentielle du périmètre d'un carré (principe du mortaisage d'un trou de section carrée) ;

c) distribution de la vapeur dans une machine à tiroir (très suggestif, plus efficace qu'une série de croquis, moins coûteux qu'un film).

Toutes ces maquettes transparentes peuvent être projetées au tableau ou au plafond, même en plein jour, à l'aide de la lanterne L.M.E.

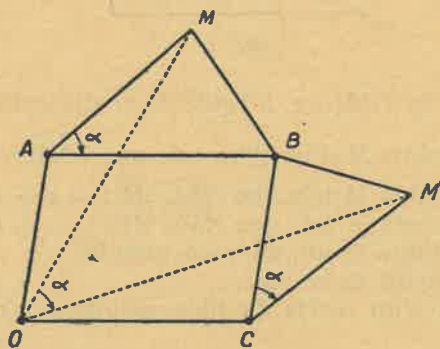
#### II. — Systèmes articulés (la plupart ont été réalisés à l'aide de barres de meccano)

##### A) Transformations :

a) Translateur et principe de l'appareil à dessiner.

b) Rotation et similitude.

*Principe de l'appareil :* Sur les côtés AB et BC d'un parallélogramme articulé OABC sont assujettis, comme l'indique la figure 2, deux trian-



(fig. 2)

gles en carton ABM et CM'B, semblables. Quelle que soit la déformation de l'instrument, le triangle OMM' reste semblable au triangle ABM. Si l'on fixe O, l'appareil réalise une similitude, transformant M en M'.

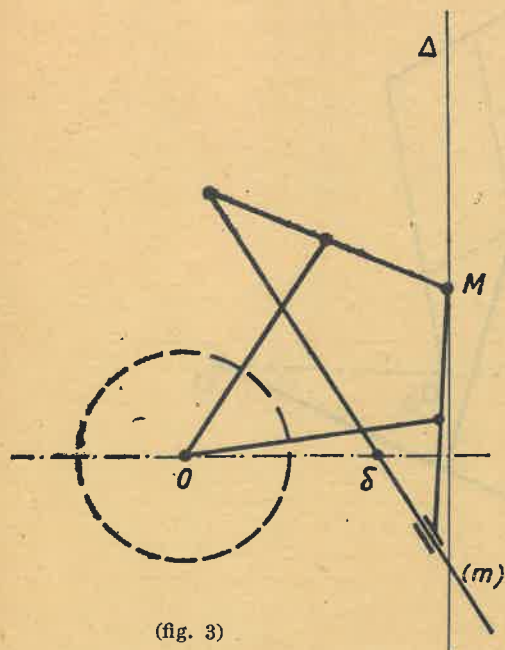
Dans un cas particulier, cette similitude est une rotation.

c) Homothétie (pantographe).

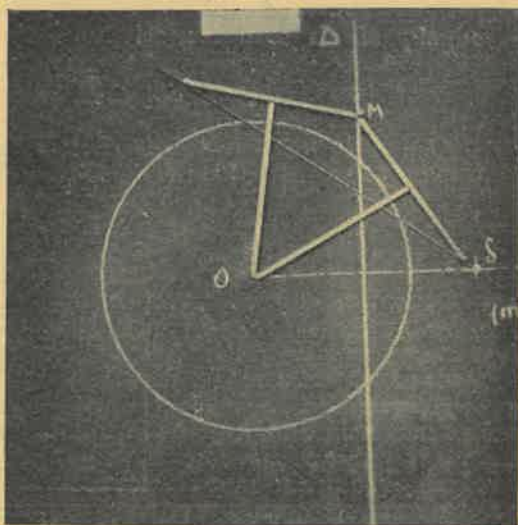
d) Inverseurs de Peaucellier et de Hart.

e) Transformation par polaires réciproques.

*Principe de l'appareil :* Si l'on supprime deux côtés du losange d'un inverseur de Peaucellier, les autres étant prolongés de leur longueur, la droite passant par les extrémités des segments obtenus est la polaire du sommet libre du losange par rapport au cercle d'inversion (fig. 3).



(fig. 3)



(fig. 3 bis)

A l'aide de cet instrument, on vérifie les propriétés suivantes :

- a) si la polaire de A passe par B, la polaire de B passe par A ;
- b) si un point décrit une courbe ( $\Gamma$ ), sa polaire enveloppe une courbe ( $\gamma$ ) ;
- c) réciprocity de cette transformation : si un point décrit ( $\gamma$ ), sa polaire enveloppe ( $\Gamma$ ).

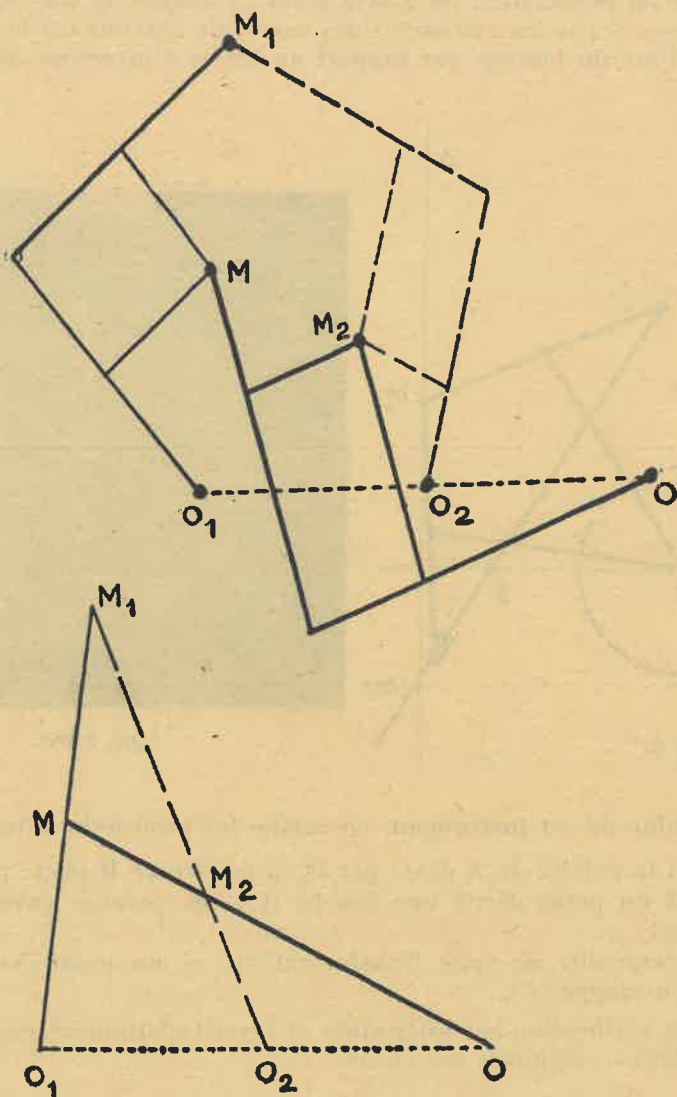
Cette vérification est saisissante et inscrit clairement ces trois propriétés dans la mémoire des élèves.

## B) Produits de transformations :

*Exemple : Produit de deux homothéties* (fig. 4).

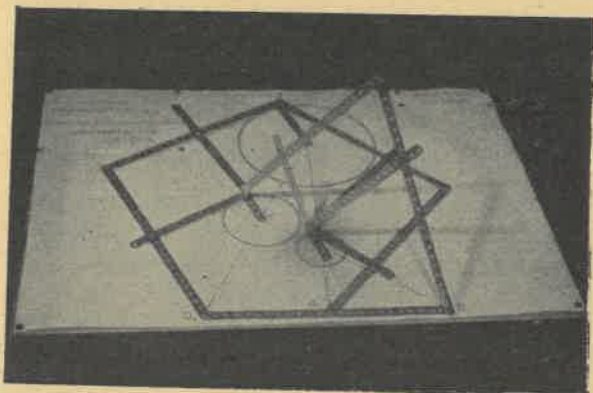
*Principe :* Dans un plan horizontal, accoupler convenablement deux pantographes  $P_1$  et  $P_2$ , capables respectivement des homothéties ( $O_1, K_1$ )

et  $(O_2, K_2)$ . Le premier transforme un point  $M$  en  $M_1$ , le second transforme  $M_1$  en  $M_2$ . Un pantographe  $P$ , capable de l'homothétie de centre  $O$  tel que  $\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_2}} = \frac{1 - K_2}{K_2(K_1 - 1)}$  et de rapport  $K = K_1 K_2$ , est placé dans un plan vertical. Il transforme directement  $M$  en  $M_2$ .



(fig. 4)

*Enoncé concret de la propriété :* Un pantographe unique peut réaliser la même opération que deux pantographes accouplés.



(fig. 4 bis)

Cet énoncé est compris d'emblée par les élèves et constitue une passerelle vers l'énoncé abstrait : « Le produit de deux homothéties est une homothétie. »

Sur le même principe, on peut réaliser le produit de deux translations, d'une translation et d'une homothétie, de deux inversions.

### III. — Autres illustrations des transformations

1) Trois miroirs formant un trièdre trirectangle permettent d'illustrer le produit de deux et de trois symétries par rapport à des plans. Applications diverses.

2) *Exercices graphiques sur les transformations.* — Ces exercices ont pour but de fixer dans la mémoire des élèves les définitions et les propriétés caractéristiques des transformations.

Construction des transformées de quelques figures (figure quelconque, droite, cercle) :

- 1) dans un déplacement,
- 2) dans une translation,
- 3) dans une rotation,
- 4) dans une homothétie définie :
  - a) par son point double et son rapport,
  - b) par son point double, un point et son transformé,
  - c) par son rapport, un point et son transformé,
  - d) par deux couples de points homologues,
- 5) dans une similitude définie :
  - a) par son point double, son angle et son rapport,
  - b) par deux couples de points homologues.

### IV. — Constructions exactes et constructions approchées

Ces exercices ont pour objet de préciser ce qu'est une construction géométrique (construction logique). La réalisation d'une construction géométrique est déjà une construction approchée. Un tracé non exact dans son principe peut être plus précis qu'un tracé dérivant d'une construction géométrique.

## V. — Liaison entre le dessin et la géométrie

Tracé de courbes. Perspectives en couleur illustrant les théorèmes de Dandelin.

### GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Les figures de la géométrie plane sont un support et un aide-mémoire pour les raisonnements. Les élèves n'ont pas ce support en géométrie dans l'espace : ils voient mal dans l'espace. L'usage immodéré qu'on fait des démonstrations par l'absurde rend aride l'étude de cette partie de la géométrie.

Le premier enseignement de la géométrie dans l'espace pourrait être expérimental ; il aurait pour but de faire un inventaire et une définition des figures nouvelles à étudier ; on ferait apprendre aux élèves les définitions de ces figures.

Voici quelques-uns des modèles exposés :

- 1) plaques en tôle enduites d'ardoisine ;
- 2) dièdres et trièdres en tôle ;
- 3) diverses réalisations de solides, en tôle, en carton et en bois ;
- 4) cylindres divisés à l'aide de génératrices équidistantes et de parallèles équidistants (illustration des coordonnées cylindriques, étude de l'hélice) ;
- 5) hélice en laiton et gaine hélicoïdale pour montrer que l'hélice peut glisser sur elle-même ;
- 6) tore en bois et sections diverses : section de Villarceau en particulier ;
- 7) sections circulaires d'un cône oblique à base circulaire ; deux sections antiparallèles sont cosphériques (cette maquette, réalisée par un élève, a donné lieu à des problèmes techniques qui ont vivement intéressé le jeune constructeur) ; application : tubulure coudée ;
- 8) tournage conique ; deux maquettes montrant que :
  - a) si la trajectoire rectiligne de la pointe de l'outil rencontre l'axe (réglage correct), on obtient un tronc de cône ; une section parallèle à l'axe est une hyperbole ;
  - b) si cette trajectoire et l'axe ne sont pas dans un même plan (mauvais réglage), on obtient un hyperboloïde de révolution ; une section parallèle à l'axe montre deux génératrices rectilignes.

### GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

- 1) *Travaux dirigés* pour illustrer les premières leçons de géométrie descriptive (pliage de carton).
- 2) *Epure relative à la réflexion d'un rayon lumineux sur trois miroirs formant un trièdre trirectangle.*
- 3) Epure, tracé sur tôle et réalisation d'un raccordement de cylindres.
- 4) Angle de deux plans.

**Applications :**

- a) angle de pliage d'une cornière servant à assembler deux faces d'une trémie ;
- b) angle du développement de cette cornière.

**ALGÈBRE**

- 1) Graphiques et abaqués divers.
- 2) Tableau mettant en évidence la croissance des divers termes d'un polynôme lorsque la variable tend vers l'infini.

**Principe :** Soit le polynôme :

$$y = x^3 + 5x^2 + 20x + 50$$

L'unité de longueur étant le millimètre,  $x^3$  est le volume d'un cube d'arête  $x$ ,  $x^2$  le volume d'une plaque prismatique à base carrée de côté  $x$  et de hauteur 1 ;  $x$  est le volume d'une barre prismatique de longueur  $x$  dont la base carrée a pour côté 1 ; 1 est la mesure du volume d'un cube d'arête 1.

On dessine la perspective des différents solides représentant les termes du polynôme pour les valeurs suivantes de  $x$  : 1 ; 10 ; 100 ; 400. Le dessin montre d'une manière saisissante la prédominance des termes de plus haut degré lorsque  $x$  est très grand.

3) *Vitesse moyenne et vitesse à un instant donné* : comparaison graphique d'un mouvement varié et d'un mouvement uniforme ; nous donnerons la reproduction de ce tableau dans un prochain numéro.

A. BIGUENET.

---

**« Des exercices naturelles, vraies et non écrites »**

*« Hegesias priait (Diogenes) de lui lire quelque livre : Vous estes plaisant, lui respondit-il, vous choisissez les figues vrayes et naturelles, non peintes : que ne choisissez-vous aussi les exercices naturelles, vrayes et non écrites ? »*

MONTAIGNE (Livre I, chap. XXVI).

La lecture des conférences de Berchem (1) aura donné à tous nos collègues une idée de l'importance des échanges d'idées provoquées ou favorisées par ce Congrès. Et même une trop faible idée, car ne peut être reconstituée ici l'atmosphère chaleureuse et stimulante de ces réunions : le succès très légitime remporté par nos amis de la Société belge est, pour une part appréciable, le reflet de leur ardeur sympathique.

---

(1) L'abondance des textes nous oblige à reporter au Bulletin de mars la conférence de P. Rausmans, « Physique : source concrète de la Mathématique ».

Des esprits chagrins objecteront, il est vrai, que l'ardeur réformatrice ne suffit pas ou qu'elle peut entraîner à méconnaître les efforts antérieurs de tous ceux, et ils sont nombreux, qui ont cherché ou qui cherchent encore à faire progresser la pédagogie des Mathématiques. Mais nul ne conteste la valeur des expériences déjà faites ; au contraire, nous voulons tous les étudier et en tirer profit. Et la publication des exposés de Berchem n'est qu'une manière de manifester aujourd'hui notre constante interrogation sur les fondements des Mathématiques, sur les bases et les démarches de notre pédagogie, sur les résultats de notre enseignement.

\*  
\*\*

Cependant, nous nous attendons à deux objections préalables :

1° Nos ambitions les plus modestes resteront démesurées tant que nos classes seront pléthoriques et que les horaires seront ridiculement insuffisants.

2° Voir *tout* le programme, et par conséquent faire tout ce qui doit être fait, est incompatible avec l'étude à fond des questions essentielles, qui prend trop de temps.

La valeur de la première objection a été reconnue explicitement par M. le Directeur général de l'Enseignement du Second Degré quand il nous a dit qu'une amélioration de l'horaire des Mathématiques dans les classes du premier cycle lui paraissait souhaitable. Il peut être permis d'en induire une reconnaissance implicite des mêmes nécessités dans les classes scientifiques du second cycle par exemple. On peut être assuré, en tout cas, de la constance avec laquelle les dirigeants de l'A.P.M. font et feront connaître les besoins de notre enseignement. Cependant, en attendant ces heureuses, mais *futures* réformes, qui ne dépendent pas que de nous, ne faut-il pas chercher à faire tout ce qui ne dépend que de nous ?

La seconde objection n'est pas sans fondement, mais je crois qu'elle repose sur une interprétation trop littérale des programmes. Toute étude approfondie des questions essentielles comporte des exercices fructueux qui facilitent ou rendent presque superflue l'étude de certains chapitres secondaires. Il n'y a pas de temps perdu à retourner un problème sur toutes ses faces, tant que les élèves trouvent encore à s'interroger sur lui : leur goût de la recherche en est stimulé (la vraie recherche, celle où l'on ne sait pas d'avance le résultat ; « exercitation naturelle, non écrite », sous la forme trop classique « démontrer que... »). Peut-être admettra-t-on facilement qu'il y a la manière de « ne pas avoir fini son programme », tout en ayant étudié « pour de bon » les sujets du programme.

\*  
\*\*

Le véritable débat se trouve ainsi circonscrit entre deux thèses que je veux essayer de schématiser (avec les risques que cela comporte, et les chances aussi de provoquer d'utiles réactions chez tous ceux qui pensent que de tels débats sont utiles).

*Thèse A* : Le domaine des Mathématiques est l'abstraction. Nous devons enseigner les règles de la déduction logique ; il n'y a de déduction logique que dans l'abstrait, le concret est inextricable. D'ailleurs, le passage de la perception du concret à la conception de l'abstrait est chez l'enfant aussi long que difficile (et confus) ; il faut donc brusquer les choses, sinon nous allons perdre un temps précieux à un âge où les enfants ont une mémoire particulièrement réceptive (argument imité de celui des partisans du latin en Sixième contre ceux qui voudraient que cette étude commence en Quatrième). Nous aurons rompu nos apprentis aux mécanismes de base ; il sera temps, quand les élèves auront beaucoup appris, de revenir sur la vraie nature des Mathématiques, à propos de laquelle les savants et les philosophes ne s'entendent d'ailleurs pas...

Prenons l'exemple de la géométrie. Les triangles isocèles dont nous parlons ne sont pas les triangles réels en craie sur le tableau que nous dessinons, et les élèves de Quatrième admettent facilement la distinction. Nous construisons donc une géométrie plane, aussi cohérente que nous le pouvons (et tant mieux si la critique axiomatique nous enseigne comment augmenter notre rigueur). Quand nos élèves auront grandi, nous reprendrons la même méthode pour la géométrie dans l'espace.

Quant à l'utilisation des notions mathématiques en physique, elle est une preuve de la validité de notre travail. Tant mieux si nos définitions précises, nos notations, etc... coïncident avec celles que les physiciens introduisent pour des raisons dont ils sont les seuls juges.

*Thèse B* : Les Mathématiques se sont élaborées à partir de l'étude du concret. Thalès ne négligeait pas de résoudre des problèmes comme celui de l'évaluation de la hauteur des grandes Pyramides d'Egypte. Desargues s'est beaucoup préoccupé de la taille des pierres et Descartes lui-même dans ses premières recherches... D'ailleurs, relisons (encore) Montaigne :

*« Il n'est désir plus naturel que le désir de connoissance. Nous essayons tous les moyens qui nous y peuvent mener. Quand la raison nous faut, nous y employeons l'expérience, qui est un moyen plus foible et moins digne ; mais la vérité est chose si grande que nous ne devons desdaigner aucune entremise qui nous y conduise. »* (Livre III, chap. XIII).

Au surplus, on n'apprend rien par contrainte. La construction et l'observation des modèles proposent des problèmes à l'élève sans que nous ayons à intervenir. Nous ne proposons plus d'exercices artificiels, nous ne parlons plus du Soleil couchant en faisant admirer des cartes postales à 2 F, nous faisons observer le Soleil réel à son couchant réel. Nous n'interrogeons plus, c'est l'élève qui interroge et qui, d'abord, s'interroge. Notre rôle, pas du tout négligeable, se limite à celui du guide qui, dans l'escalade, ne peut supprimer l'effort de l'alpiniste (car, alors, à quoi bon escalader ?), mais qui peut le garder des mauvaises chutes, le tirer des passes difficiles.

J'aurais voulu donner ici une liste détaillée des modèles présentés à la si riche exposition de Berchem. Mais celle-ci était peut-être trop riche : avide de voir toutes les salles (plus d'une douzaine) et les modèles

variés présentés, dans chacune d'elles, par les établissements de toutes les régions de Belgique, je n'ai pas eu le temps de prendre des notes ; je cite donc des exemples un peu au hasard, espérant pouvoir publier ultérieurement un catalogue plus technique.

Les modèles de polyèdres offrent des possibilités nouvelles quand on les fabrique en matière plastique transparente : le tracé de lignes en couleur sur les faces y est très suggestif.

L'ensemble de deux droites orthogonales non coplanaires peut être réalisé de multiples manières, ainsi que les droites s'appuyant sur les premières ; on en tire presque inévitablement l'idée des surfaces réalisées en fils ; une démonstration de l'utilisation d'un plan de lumière pour obtenir rapidement les sections planes de ces surfaces a été très éloquente.

J'ai noté la variété des ellipsographes ; le *meccano* est souvent utilisé ; résultat appréciable : les jeunes constructeurs ont dessiné de vraies ellipses.

L'étude des cônes de révolution et de leurs sections planes devait naturellement exciter l'imagination des professeurs et des lycéens belges. Un entonnoir en matière plastique transparente est collé, par sa grande ouverture, sur une plaque plane ; un liquide coloré est introduit en petite quantité dans ce vase ; selon l'inclinaison du récipient, la surface libre du liquide a la forme d'une ellipse ou d'une portion de parabole ou d'hyperbole (il suffisait d'y penser...).

J'ai beaucoup admiré le « conformographe » : sur une planche à dessin, un support perpendiculaire est composé des trois côtés d'un carré ; au milieu de la barre parallèle à la planche, une lampe électrique O figure le pôle d'une inversion qui transforme la sphère de diamètre AB (A et B étant les milieux des barres du support perpendiculaires à la planche) en le plan de la planche à dessin ; AB est le diamètre fixe d'une demi-sphère en matière plastique transparente qui peut tourner autour de ce diamètre. Une circonférence (C) du plan est l'inverse d'une circonférence (C) de la sphère (pratiquement, (C) est dessinée sur la sphère et (C) est sa projection obtenue directement par la lampe O). Si on fait tourner la sphère, (C) est devenue (C'), circonférence égale dont l'inverse est la circonférence (C') ; toutes les transformations faites sont conformes ; (C') est la transformée de (C) dans un produit de transformations conformes qui est une transformation conforme. Le tracé de deux cercles orthogonaux seulement sur la sphère permet d'obtenir tous les cas de cercles orthogonaux et les faisceaux conjugués sur le plan ; pour une inclinaison convenable de la demi-sphère, le plan du cercle (C) passe par O et (C) devient une droite.

Ce modèle, comme beaucoup d'autres, est révélateur des possibilités plus nombreuses, au point de vue pédagogique, offertes par les modèles ayant des éléments mobiles : on n'a pas seulement à contempler, on peut faire un geste, le répéter, dégager enfin les raisons des effets observés.

Il est vrai que la qualité du modèle dépend aussi de la manière dont le professeur l'utilise. M. C. GATTEGNO, Professeur à l'Université de Londres, a fait deux leçons, à de jeunes garçons anversoises, en utilisant le matériel des *nombres en couleurs* de G. CUISENAIRE ; cette présentation

a été suivie d'un débat passionné ; nous y reviendrons en présentant plus en détail ce matériel polyvalent (ainsi que celui des géoplans).

En tout cas, il faut y insister ; faire un large appel à l'intuition sensible pour atteindre l'abstrait, cela ne veut absolument pas dire qu'on se moque de la rigueur. Je dirai même que c'est le contraire : on considère la rigueur... avec rigueur, en voulant que tous les élèves comprennent bien les raisons des raisons. En Quatrième, nous avons noté les objections sincères de certains élèves qui ne comprennent pas nos exigences et qui sont étonnés que nous trouvions mauvaises les raisons qu'ils donnent. Ce n'est pas évidemment un conflit de générations, mais le conflit inévitable de celui qui possède déjà telle notion abstraite avec celui qui doit fournir un effort (peut-être trop souvent méconnu par nous) pour l'acquérir.

Parlons encore de la géométrie. Qu'elle ait été arpentage, astronomie, stéréométrie, c'est dans notre espace réel qu'elle est née. Les dieux grecs eux-mêmes, si raffinés pourtant dans leurs préoccupations géométriques, proposaient la duplication d'un cube réel. Quant à nos élèves, s'ils ont passé l'âge où l'on joue avec des cubes, ils aiment construire des machines en *meccano*, ou des modèles réduits d'avions : la surface compliquée d'une aile leur paraît réalisable grâce à des sections planes réelles qui assurent d'ailleurs la rigidité de l'ensemble. Le seul reproche que ces techniciens en herbe risquent de faire à nos modèles, c'est qu'ils sont « trop simples » ; nous aurons vite fait de les détromper quand nous les aiderons à démêler les raisons de leurs découvertes trop hâtives.

Ajoutons, pour finir, que si les Mathématiques sont si bien utilisables en Physique, ce n'est pas par hasard. Les Mathématiques ont fourni autant d'outils à la Physique que celle-ci a suggéré de problèmes aux mathématiciens. Insister serait de mauvais goût...

\*  
\*\*

Les partisans convaincus de l'une ou l'autre des thèses prétendent-ils que je les défigure par une excessive simplification ? Toute rectification, toute explication des uns et des autres, alimentera un débat qui n'est pas nouveau, mais qui est toujours utile. Le stage que l'A.P.M. doit organiser à Sèvres, à la fin de ce trimestre (1), en entendra nécessairement les échos.

Je voudrais encore noter le caractère conciliable des thèses. Seul n'y serait pas sensible celui qui ne verrait comme pédagogie possible que le recours systématique à l'une ou à l'autre des méthodes. Mais ne peut-on pas dire que toute pédagogie systématique est inefficace et, dans une certaine mesure, par sa propre volonté ? Plus sage est sans doute le maître qui, en présence de tels élèves, aussi bien qu'en face de telle méthode, expérimente et ne se lasse pas de s'interroger, reprenant les mots mêmes du pédagogue exemplaire : « *Que sais-je ?* »

G. WALUSINSKI.

---

(1) Voir pages 273 et 277 les informations sur ce stage.

## Souvenirs d'un prisonnier de guerre

« Poncelet, suivant à bout de forces, la retraite de Russie et crayonnant bientôt, avec un morceau de charbon, sur le mur blanc de son cachot, les premières études des théorèmes célèbres. »

(Lettre du Ministre de l'Education Nationale aux maîtres de l'Enseignement public, octobre 1955).

Préface de l'ouvrage : *Applications d'Analyse et de Géométrie*, par J.-V. PONCELET, Paris, 1862 :

A l'exemple d'un célèbre romancier contemporain, dont la statue curule est placée à l'entrée de la salle des séances intimes de nos Académies, pour glorifier sans doute un système de politique religieuse, naguère et aujourd'hui encore à la mode, j'aurais pu intituler cet ouvrage, purement mathématique, *Mémoires d'outre-tombe* ; c'est, en effet, le fruit des méditations d'un jeune lieutenant du génie, laissé pour mort sur le funeste champ de bataille de Krasnoï, non loin de Smolensk, et longtemps rayé des cadres de l'armée française. Là, dans cette horrible retraite de Moscou, sept mille Français, épuisés par la faim, le froid et la fatigue, sous les ordres de l'infortuné maréchal Ney, vinrent, privés de toute artillerie, le 18 novembre 1812, anniversaire de la Saint-Michaël (1), livrer un furieux, sanglant et dernier combat, aux vingt-cinq mille soldats, frais et dispos, aux quarante bouches à feu du feld-maréchal prince Miliradowitch, qui, lui-même, devait être bientôt victime d'une conspiration militaire ourdie au sein de la capitale moderne des czars moscovites. Mais l'adoption d'un titre aussi fastueux, quoique justifiable en apparence, passerait à bon droit pour un plagiat ridicule, une imitation outre-cuidante d'une licence permise peut-être, au chef avoué de l'école romantique de notre France, à une époque de perturbation morale tout autant que politique et littéraire. Un pareil titre, d'ailleurs, ne pouvait convenir à ce livre modeste, ni aux habitudes sérieuses et réservées de l'auteur, bien moins encore au caractère, aux aptitudes, aux goûts que suppose un amour sincère des vérités de la Géométrie, dont la culture approfondie réclame un esprit dégagé de toute passion étrangère, pour ainsi dire, de tout intérêt terrestre.

Or, telle était précisément la position morale et matérielle, en quelque sorte inévitable, de l'auteur de cet ouvrage dans les lointaines prisons de la Russie. Plus tard, lorsqu'il parut négliger l'étude de cette Géométrie, pour se livrer à l'enseignement des Sciences mécaniques et industrielles, il n'avait, en réalité, d'autre but que de se rendre utile à la classe ouvrière et à la jeunesse de nos Ecoles ; il voulait leur inspirer l'amour des vérités éternelles de la science, la haine de l'intrigue et des sophistiques subtilités d'un charlatanisme cupide, qui signale une époque où, parmi tant de conquêtes de l'esprit moderne, on déplore avec chagrin des aberrations, des passions de lucre qui déshonorent notre caractère, nos mœurs, et jusqu'à notre littérature nationale.

(1) Je cite cette fatale coïncidence de dates parce que, amené vers minuit au quartier général russe pour y être interrogé comme officier du génie, j'eus l'ineffable chagrin d'y entendre fêter le patron du général en chef par un commissaire des guerres de notre armée, en ignobles vers français où était célébrée la gloire de saint Michel chassant les anges rebelles du paradis.

Enfin, si, sur les traces honorées des Vauban et des Bélidor, des Bézout, des Borda et des Coulomb, des Daniel Bernoulli, des Euler et de tant d'autres illustres bienfaiteurs des hommes (2), il a tenté de se rendre utile à la classe des artistes ou ingénieurs, en écrivant pour le grand nombre et de manière à éviter les reproches trop souvent et justement adressés aux savants de profession ; s'il s'est à regret écarté de la route où l'entraînaient ses goûts et ses instincts primitifs, il ne l'a pas fait en vue de briller ou de capter les suffrages académiques, mais pour remplir les devoirs souvent pénibles de son état, selon sa capacité et les fonctions diverses qu'il a été appelé à exercer comme officier du génie.

Cette profession de foi sincère, cette austère déclaration de principes, si étrangère, semble-t-il, à un livre de Géométrie abstraite, peut en partie motiver l'intervalle d'un demi-siècle qui s'est écoulé entre sa composition en Russie et sa publication en France ; cette profession de foi doit aussi être considérée par les géomètres, sinon comme une excuse, du moins comme une explication indispensable de la règle de conduite constamment observée par l'auteur, soit depuis, soit pendant sa captivité à Saratoff en 1813 et 1814. Avec un peu moins d'indépendance dans le caractère, avec moins de patriotisme et d'abnégation personnelle, il aurait pu, comme quelques compagnons d'infortune mieux avisés peut-être, mettre à profit ses aptitudes et ses connaissances en Mathématiques pour fuir la misère et acquérir un bien-être relatif ; mais il lui aurait fallu faire le sacrifice des sentiments les plus intimes de sa conscience, de sa liberté et de ses opinions politiques (3).

Quant aux ressources matérielles dont l'auteur a pu disposer pendant les deux années presque entières de cette triste captivité, il suffira de dire qu'il avait été complètement dépouillé de ses effets les plus indispensables sur le champ de bataille de Krasnoï, d'où il n'est sorti vivant que par une faveur spéciale de Dieu, au milieu de ses chefs, de ses camarades tués ou atteints de blessures, toutes mortelles, dans ce pernicieux climat (4). Sans vouloir apitoyer le lecteur sur les misères et les périls de cette situation, on lui permettra d'ajouter que ce ne fut pas sans des lutttes et des souffrances faciles à deviner que, vêtu des lambeaux d'un uniforme français, mangeant le pain noir des paysans russes, il parcourut à pied les longues étapes qui séparent Krasnoï de Saratoff ; plaines silencieuses et glacées où, dans ce fatal et exceptionnel hiver de 1812, se faisaient souvent sentir des froids par lesquels le mercure du thermomètre se solidifiait !

On lui pardonnera encore d'ajouter que, parvenu en mars 1813 sur

---

(2) Archimède, Galilée, Mariotte, Desargues, Pascal, De Lahire, Smeaton, Deparcieux, Bossut, Dubuat, Carnot, Montgolfier, Prony, Eytelwein, Dupin, Duleau, Navier, etc.

(3) Je crois devoir, à cette occasion, rappeler que le jeune prince de Wurtemberg, allié à la famille impériale de Russie, le brave de La Rochejaquelein, ce capitaine balaféré de la garde napoléonienne, Audouy, mort depuis colonel d'artillerie, Cagniot, lieutenant de mineurs, et beaucoup d'autres officiers obscurs, que je ne saurais citer, comme moi prisonniers de guerre à Saratoff, n'ont point cédé à de telles suggestions de l'égoïsme politique ou personnel.

(4) De ce nombre étaient le colonel du génie Bouvier, auquel je servais d'aide de camp depuis Smolensk, le capitaine du génie Lapipe, etc., atteints par la mitraille en marchant à la baïonnette sur les batteries russes, en tête de la colonne de droite, formée des compagnies de sapeurs et de mineurs fraîchement arrivées d'Espagne, dont les malheureux soldats et sous-officiers disparurent presque entièrement dans ce cataclysme, ou jonchèrent de leurs cadavres les routes intérieures de la Russie.

les rives de cet immense Volga, non loin des steppes désertes du gouvernement d'Orenbourg, grâce à l'énergie physique et morale dont la nature l'avait heureusement doué à vingt-quatre ans, énergie qui avait manqué à beaucoup d'autres, il paya cependant son tribut à tant de rudes épreuves, à tant de souffrances, et tomba malade en atteignant le but, c'est-à-dire en arrivant dans la ville alors peu hospitalière de Saratoff. Là, comme on le concevra facilement encore, il ne trouva ni secours matériels, ni ressources morales ou scientifiques, et, lorsque, sous la bienfaisante influence du splendide soleil d'avril, il recouvra quelques forces et voulut se distraire par le travail de l'esprit, il dut refaire péniblement, et pour ainsi dire un à un, les éléments indispensables aux études mathématiques, privé qu'il était de tout livre, de tout instrument de précision, difficiles à se procurer dans cette ville de Saratoff, d'ailleurs dépourvue alors de bibliothèques scientifiques. On ne doit donc pas s'attendre à rencontrer ici comme le reflet ou l'écho lointain des profonds travaux analytiques des Euler, des Bernoulli, des Huygens, des Newton, des d'Alembert, etc., ni même des travaux plus récents et non moins admirables des Lagrange, des Legendre, des Laplace, des Monge et de leurs disciples, travaux qui n'avaient laissé aucune trace dans sa mémoire au milieu des périls et des angoisses d'un aussi malheureux début dans la carrière des armes.

L'auteur, sorti en novembre 1810 de l'Ecole Polytechnique, parti de l'Ecole d'Application de Metz en mars 1812, pour coopérer aux travaux défensifs de Ramekens, dans l'île de Walcheren, d'où il rejoignit à la hâte la grande armée à Vitepsk, ne songeait guère, dans une vie aussi agitée, à s'occuper des sciences abstraites. Réduit à ses souvenirs du lycée de Metz et de l'Ecole Polytechnique, où il avait cultivé avec prédilection les ouvrages de Monge, de Carnot et de Brianchon, on doit reconnaître qu'il n'a rien pu emprunter aux derniers écrits publiés avant sa rentrée en France, en septembre 1814. Ces circonstances et son extrême isolement dans la ville de Saratoff expliquent comment il fut conduit à reprendre, une à une, les matières de ses anciennes études mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie, etc.), propres à servir d'appui solide aux recherches, aujourd'hui d'ailleurs si simples en apparence, qu'il se proposait d'entreprendre dans son triste exil.

Ces études préliminaires faisaient l'objet de notes rapides de plusieurs Cahiers qui n'entrent pas dans le présent volume, et dont il a disposé, pendant son séjour même en Russie, en faveur de compagnons d'infortune, d'anciens officiers désireux de s'instruire, et auxquels ils ont été utiles pour compléter une éducation compromise par des campagnes actives et incessantes, en Egypte, en Allemagne, en Italie, en Espagne (5).

Au surplus, il n'est peut-être pas sans intérêt pour le lecteur de faire observer, à cette occasion, que les parties élémentaires du calcul différentiel ou intégral et de l'algèbre sont celles de ses études qui avaient laissé dans l'esprit de l'auteur les traces les plus vives, et qui lui ont permis de retrouver les plus importants résultats, concernant la quadrature des aires, la cubature des volumes, etc. Ces résultats étaient presque entière-

---

(5) L'un d'entre eux, M. Cagniot, lieutenant de mineurs plein de mérite et distingué par d'excellents services de guerre, a été tué malheureusement d'une balle au front, après son retour en France, lors d'une sortie de la garnison de Strasbourg, faite pendant le blocus, dans cette courte et à jamais déplorable campagne de 1815. On m'excusera de lui donner ici un mot de souvenir et de regret.

ment effacés de sa mémoire, ainsi qu'il arrive au très grand nombre des élèves, même fraîchement sortis de l'Ecole Polytechnique, qui se hâtent d'oublier, comme superflues, les théories étrangères au but matériel de leurs services actifs, peu encouragés qu'ils sont par les chefs placés au sommet de la hiérarchie dans chaque corps civil ou militaire.

Les premiers éléments, les résultats usuels des diverses branches de Mathématiques, leurs plus faciles applications, en y comprenant même celles des calculs transcendants, voilà en effet ce qu'on n'oublie, pour ainsi dire, à aucune époque de la vie. Au contraire, les méthodes compliquées ou laborieuses par leurs développements, quels qu'en soient d'ailleurs l'intérêt et le mérite scientifique, les généralisations, les démonstrations abstraites et épineuses, les objections scolastiques et trop souvent pédantesques, qui, depuis les Reynaud et autres examinateurs, se sont introduites dans l'enseignement des Mathématiques, mais que n'avaient point, à coup sûr, recommandées Lagrange, Laplace, ni Monge, dans leurs admirables leçons aux primitives Ecoles normale et polytechnique, voilà ce qui s'efface tout d'abord de l'esprit, et c'est là, sans aucun doute, la cause première des réclamations incessantes formulées par les diverses branches des services publics en France, avant l'époque de 1850, où s'opéra la refonte des anciens programmes des diverses Ecoles préparatoires (6).

En ce qui touche en particulier les sciences mécaniques, l'auteur de ce livre doit avouer que, sauf les théories purement géométriques sur la composition des forces appliquées à un point et les théorèmes relatifs au moment de la résultante de ces forces, le prisonnier de Saratoff n'avait rien conservé de ses souvenirs d'écoles. Mais la composition des vitesses ou des quantités de mouvement déjà connue d'Aristote, à fortiori celle des accélérations ou des forces accélératrices dont l'expression est fondée sur la notion physique toute expérimentale de la masse et des lois de communication du mouvement découvertes par Galilée, n'avaient laissé absolument aucune trace dans son esprit. Aussi fit-il de vains efforts pour en écrire les équations différentielles suivant les axes coordonnés, et pour retrouver les lois si simples du mouvement parabolique des points matériels pesants ; lois devinées, démontrées expérimentalement par le même Galilée, et son célèbre disciple Torricelli, tous deux avec Képler scrutant de près la nature que Descartes improvisait à la manière d'Aristote, dont pourtant il combattait la doctrine philosophique.

Cela expliquera d'ailleurs comment plus tard, en 1825, 1827 et 1838, chargé de créer les Cours de mécanique à l'Ecole d'Application, à l'hôtel de ville de Metz, et à la Faculté des Sciences de Paris, il se fit novateur par conviction et réformateur par nécessité.

(Paris, le 20 avril 1862).

J.-V. PONCELET.

Nous laissons au grand géomètre l'entière responsabilité de cet écrit, reproduit scrupuleusement. Les allusions politiques ou autres qui y foisonnent ne concernent nullement, cela va sans dire, la France de 1956.

Jean ITARD.

---

(6) Voy. le *Rapport sur l'Enseignement de l'Ecole polytechnique*, en un volume in-4°, de 440 pages, publié par les ordres du Ministère de la Guerre (Paris, Imprimerie Nationale, 1850).

## II. BIBLIOGRAPHIE

### Pour servir au progrès de l'enseignement des mathématiques

*L'Enseignement des Mathématiques*, par J. PIAGET, E.-W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHNEROWICZ, G. CHOQUET, C. GATTEGNO, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, Suisse ; Paris, 32, rue de Grenelle, 173 pages, 980 francs.

L'action de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques se manifeste par l'organisation de Congrès et par l'action concertée de ses membres. Elle a entrepris en outre de publier des ouvrages destinés chacun plus particulièrement à chaque pays, écrits dans sa langue et adaptés à ses traditions et à ses besoins. L'ouvrage que nous présentons est le premier de cette collection ; il est destiné surtout aux lecteurs français.

*Préface.* — Le Bureau de la Commission expose le travail et les projets de celle-ci, travail d'unification, non seulement par son caractère international, mais surtout parce qu'il se poursuit à tous les niveaux : des classes maternelles aux cours de l'Enseignement Supérieur ; l'enfant, l'étudiant, est en action devant le monde physique d'où se dégagent les structures mathématiques et l'étude de celles-ci ne commence pas avec le cours de tel ou tel maître !

L'introduction explique et justifie la composition du livre en exposés séparés, choisis par chaque auteur, membres les plus éminents de la Commission, suivant leurs expériences et préoccupations propres de psychologues, logiciens, mathématiciens, pédagogues.

CHAPITRE I. — *Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence*, J. PIAGET, professeur aux Universités de Genève et de Paris.

Dans de nombreux ouvrages bien connus en France, le grand psychologue a exposé ses études de la pensée enfantine dans sa conquête de la connaissance du monde extérieur et de sa structure. Ce chapitre précise et résume pour un lecteur mathématicien l'essentiel des conclusions de l'auteur.

Les structures mathématiques ont été dégagées et étudiées pour elles-mêmes à une époque récente, alors que la création des Mathématiques est bien vieille, mais il ne faut pas s'en étonner : « l'ordre de la prise de conscience renverse l'ordre de la genèse ». Après avoir mis en évidence « les remaniements qu'entraîne l'idée de structure dans le jeu des définitions et des démonstrations », puis dans « l'architecture des Mathématiques », l'auteur indique le grand intérêt, « pour la psychologie de la pensée mathématique, du mode de découverte des structures ». Les trois structures fondamentales sur lesquelles reposent les Mathématiques, structure algébrique, structure d'ordre, structure topologique, se retrouvent si le psychologue « cherche à retracer jusqu'en ses racines, le développement psychologique des opérations arithmétiques et géométriques spontanées de l'enfant et surtout des opérations logiques qui en constituent les conditions nécessaires ». J. PIAGET étudie donc successivement ces trois structures pour « préciser en quel sens elles correspondent à des structures élémentaires de l'intelligence dont elles constituent le prolongement formalisé ».

Deux sortes de conclusions sont dégagées : du point de vue de l'attitude philosophique, une position laisse la possibilité des contacts nécessaires, « si l'on convient de laisser à la psychologie le soin d'étudier les faits et à la logique celui d'analyser les fondements ». « Du point de vue pratique, il ne saurait être question, pour l'éducateur, d'un choix entre les méthodes formalistes fondées sur la logique et les méthodes actives fondées sur la psychologie : le but de l'enseignement des Mathématiques reste toujours d'atteindre la rigueur logique ainsi que la compréhension d'un formalisme suffisant, mais seule la psychologie est en état de fournir aux pédagogues les données sur la manière dont cette rigueur et ce formalisme seront obtenus le plus sûrement. »

CHAPITRE II. — *Réflexions sur l'organisation et la méthode de l'enseignement mathématique*, par E.-W. BETH, professeur de logique et de philosophie des sciences à l'Université d'Amsterdam.

L'éminent logicien, auteur du livre bien connu, « Les fondements logiques des Mathématiques », expose d'abord avec force l'opposition entre l'Enseignement Secondaire et l'Enseignement Supérieur quant aux buts, aux moyens, aux programmes, aux tendances.

Sur l'exemple du passage de la structure d'ordre du système des nombres rationnels à cette structure dans le système des nombres réels, l'auteur utilise les méthodes de la logique symbolique et conclut à l'impossibilité de décrire la différence des structures tant qu'on reste dans le domaine de la logique élémentaire (qui n'introduit que des variables d'individus), sans faire appel aux notions de la théorie des ensembles (variables d'ensembles), ceci indépendamment du niveau de rigueur ou de précision dans les moyens d'expression dont on dispose : c'est dire que le problème est d'ordre logique et non psychologique.

Faut-il « chercher au-delà des frontières des sciences formelles et recourir aux sciences du réel pour trouver un fondement sûr, et pour la logique, et pour les mathématiques » ? La psychologie donne-t-elle une réponse à cette question ? M. BETH répond négativement et pense que « la contribution de la psychologie restera toujours fort modeste » dans la recherche des fondements, de sorte que l'auteur met en garde contre « la tendance d'exagérer la compétence de la psychologie à l'égard des problèmes de la pédagogie des Mathématiques ».

CHAPITRE III. — *L'abstraction en Mathématiques et l'évolution de l'algèbre*, par J. DIEUDONNÉ, professeur à la Northwestern University, Evanston (Illinois, U.S.A.).

Tous ceux qui ont lu les admirables introductions historiques qui suivent les divers chapitres des « Eléments », de BOURBAKI, ne seront pas étonnés que, pour dégager l'essence de la Mathématique, J. DIEUDONNÉ expose « l'histoire de l'algèbre, depuis ses premiers balbutiements jusqu'à notre algèbre moderne ». Les premières notions, telles que le nombre, l'espace, le temps, bien qu'issues de la pratique, sont déjà fort abstraites ; le progrès, au cours de longs siècles, a conduit à la notation algébrique : numération de position, signes d'opérations, création d'une « sténographie » évitant l'emploi de la langue ordinaire. L'histoire des *notations* conduit au seuil du XIX<sup>e</sup> siècle, où GALOIS traite de problèmes si « vastes qu'ils ne pouvaient même pas être formulés correctement... avant que les notions qui y figurent ne fussent devenues assez abstraites pour se prêter à des raisonnements dégagés de toutes les contingences, obscurcissant les cas particuliers connus auparavant ». La rencontre des *équations impossibles* conduisit, après « deux siècles de réflexions et de tâtonnements », ce qui nous amène aussi au début du XIX<sup>e</sup> siècle, à « calculer sur certaines choses qui ne sont pas des nombres comme si c'étaient des nombres ». Et l'auteur expose en détail ce pas, « peut-être le plus difficile dans la montée vers l'abstraction ».

Dans une troisième partie est étudiée l'*algèbre moderne*. Le mathématicien prend conscience de son *pouvoir créateur de nouveaux calculs sur de nouveaux objets*, puis, « deuxième acte de libération », de son pouvoir de modifier les règles fondamentales du calcul algébrique et ainsi se trouve conçue une « algèbre plus vaste où seraient englobés, avec la vieille algèbre classique, tous les « calculs » qui apparaissent peu à peu dans de multiples domaines des Mathématiques au fur et à mesure de leurs progrès ». « A cette ultime étape de l'abstraction... l'algébriste, dans ses calculs, ne veut connaître des objets du calcul qu'une seule chose, à savoir qu'ils obéissent aux lois qu'il étudie. C'est ce que l'on appelle la *méthode axiomatique en algèbre*. »

Cette étude détaillée ne peut manquer d'intéresser le professeur pour lui-même, mais aussi de lui faire repenser bien des parties de son enseignement : « au fur et à mesure que se dessinent chez l'adolescent les structures de la pensée, il importe que la

Mathématique se dévoile à lui sous son vrai jour » pour lui « enseigner à ordonner et enchaîner sa pensée selon la méthode dont se servent les mathématiciens ».

CHAPITRE IV. — *Introduction de l'esprit de l'algèbre moderne dans l'algèbre et la géométrie élémentaires*, par A. LICHNEROWICZ, professeur au Collège de France.

Comme une note l'indique, « le texte de ce chapitre a été préparé pour une conférence faite au Musée pédagogique à Paris, le 26 mars 1953 ». Les auditeurs seront heureux de retrouver, sous une forme plus développée, les idées alors esquissées. M. LICHNEROWICZ s'adresse directement aux professeurs du Second Degré et les invite à étudier un problème essentiel et urgent : « Dans quelle mesure est-il possible d'imbiber de l'esprit des Mathématiques contemporaines notre Enseignement du Second Degré ? » « L'enseignement classique de nos lycées conditionne dans une large mesure nos élèves à une certaine conception des Mathématiques, une conception qui est bien souvent, tel le jeu d'oie, renouvelée des Grecs et qui, d'autre part, procède de l'expérience des mathématiciens du milieu de XIX<sup>e</sup> siècle. Or, dans ces cent dernières années, beaucoup d'expériences mathématiques ont été faites, beaucoup de choses se sont passées... Je pense que cette expérience ne concerne pas seulement celui qui se destine aux Mathématiques ; elle concerne aussi l'ingénieur, le technicien ou physicien... »

Sur des exemples précis, arithmétique, algèbre, géométrie élémentaire, l'auteur met en évidence les lois diverses, les relations les plus essentielles (comme la relation d'équivalence) dont il est aisé de dégager en pleine lumière la structure. Il traite en exemples les notions de groupe, d'isomorphisme, d'anneaux, de corps, etc.... indique « des types d'exemples que l'on pourrait systématiquement rechercher » et il conclut : « Je pense que si le professeur a bien présentes à l'esprit les différentes notions, les différentes exigences fondamentales, quelque chose d'essentiel risque tout de même de passer à travers le cerveau des élèves — sans en sortir — quelque chose qui lui épargnera bien des difficultés dans l'avenir, car c'est tout de même un but de notre enseignement que de le faire participer à ce que sont la science et la technique de notre temps. »

CHAPITRE V. — *Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire*, par G. CHOQUET, professeur à la Sorbonne.

Dans une première partie, un examen critique des manuels de géométrie élémentaire fait apparaître l'insuffisance des exposés qui prétendent ne pas se contenter d'une base intuitive, mais justifier les premiers pas dans le domaine de la géométrie au moyen d'axiomes ou postulats explicitement énoncés. Même par la suite, le début de nombreux chapitres « fournit aux définitions équivoques et aux pseudo-théorèmes de brillantes occasions de se manifester ».

La partie constructive de l'exposé commence avec une étude de divers systèmes d'axiomes : axiomatique de Hilbert, conception analytique de la géométrie. Mais un autre point de vue peut nous guider : « Si nous voulons donner à la géométrie une base, non seulement logiquement correcte, ce qui serait insuffisant, mais assez proche de l'expérience sensible de chacun de nous », nous serons amenés à nous souvenir que « nous sommes en possession de certains instruments » qui vont nous permettre « d'explorer le plan » ou l'espace. Et des exemples de telles axiomatiques sont indiqués et critiqués.

Dans les troisième et quatrième parties, M. CHOQUET propose une construction axiomatique de la droite et du plan. C'est, contrairement aux autres chapitres de ce livre, une construction nouvelle, une œuvre originale de mathématicien, qui a sa valeur théorique indépendante de toute préoccupation pédagogique. L'auteur écrit formellement : « Ce qui suit est écrit à l'usage des professeurs, et n'a donc aucune prétention à être un début de manuel. Que cet exposé puisse être effectivement enseigné, je le crois. Encore faudrait-il commencer par en faire une adaptation pour chaque âge mental. »

Nous n'en donnerons pas ici l'analyse, car l'esquisse en a été faite dans les deux conférences que M. CHOQUET a bien voulu faire à notre Association en 1953. La douzaine de pages de notre *Bulletin* d'octobre 1953 est développée en une rédaction définitive de quarante pages très denses, dont l'étude s'impose. Ce texte sera particulièrement apprécié de ceux de nos collègues qui ont déjà médité sur l'exposé des conférences et qui ont cherché à les adapter à leur enseignement. Pour tous, ce sera une occasion d'approfondir leur connaissance de la géométrie, et peut-être sera atteint le but réel de l'exposé de M. CHOQUET : « En fait, je ne considérerai mon but comme atteint que si mon lecteur, non satisfait par mon choix des axiomes de base, essaie d'en imaginer un autre. Il découvrira... (que) la création et l'examen critique de nouvelles règles... lui permettent, lorsqu'il revient aux règles classiques, de comprendre désormais l'édification de la géométrie avec un esprit plus lucide. D'utilisateur, il sera devenu constructeur. »

CHAPITRE VI. — *La pédagogie des Mathématiques*, par C. GATTEGNO, professeur à l'Institut d'Education de l'Université de Londres.

« Dans ce chapitre, nous traiterons de la pédagogie comme d'une science... Les facteurs sont de trois catégories : les *esprits*, qui interviennent dans la pensée mathématique et l'acte d'apprendre ; les *structures mathématiques* et leur propre dynamisme ; les relations de ces structures avec celles de la *réalité*, en particulier dans le domaine des applications. » « Au lieu de concevoir l'étude des Mathématiques comme l'étude d'une série déterminée de chapitres... nous allons proposer de prospecter à l'aide des structures mentales existant dans l'esprit des élèves des structures mathématiques qui leur soient proches... et de faire en sorte que les élèves créent les structures mentales correspondant à la prise de conscience suscitée par l'action du maître. »

Ce beau programme est indiqué en détail sur de nombreux exemples : les structures mentales « combinées sous le signe  $-|$  », depuis l'addition des entiers, et des fractions jusqu'à l'algèbre, sont indiquées et conduisent à une compréhension de ce que c'est que l'algèbre. Cette introduction permet alors de comprendre ce que peut être un programme. Un exemple est donné d'un programme d'algèbre qui peut être poursuivi de 11 ans à 17 ans : il ne s'agit pas de choisir des chapitres d'après des idées préconçues, mais de permettre à l'enfant de structurer peu à peu sa pensée, de percevoir des relations de plus en plus complexes, d'acquiescer « la liberté que donne à la pensée l'abstraction et de s'équiper en mathématicien ».

Il est impossible de résumer cette étude sans lui faire perdre son principal intérêt : « Il s'agit d'expériences vécues au contact des enfants, exposées en détail, et qui pourraient être étendues aux classes suivantes. L'exposé pourrait inclure des développements qui conduiraient, à 17 ans, à une reconnaissance des structures algébriques fondamentales et de la façon dont les algèbres se constituent... Si cette expérience rejoint l'expérience géométrique, elle peut servir de base à une libération plus grande de l'esprit qui atteint par abstraction des relations plus fondamentales, donc plus profondément enracinées dans l'inconscient. L'éducation mathématique servira alors à l'éducation totale de l'individu. »

L'acquisition de l'expérience géométrique est considérée ensuite. Alors que l'expérience sensible du jeune enfant le libère par rapport au milieu en lui donnant des possibilités d'action, l'expérience géométrique est la prise de conscience de relations et ne peut apparaître que « durant l'adolescence, lorsque l'activité est suspendue et que l'esprit reprend l'expérience pour la juger et la comprendre ».

Sur des exemples précis, M. GATTEGNO montre comment organiser le travail de la classe pour que « la géométrie se développe, non plus en propositions plus ou moins compliquées, mais par la prise de conscience d'exigences de plus en plus précises... Nous ne partons pas de l'espace mathématique et des êtres mathématiques, mais

nous les construisons l'un et les autres par le processus même de dégagement, dans les situations proposées, de ce qui est relationnel ».

Plusieurs de telles situations sont analysées, à titre d'exemples, et exploitées pour aboutir à des raisonnements sur les relations et non sur les figures. Quant à obtenir une construction d'ensemble de la géométrie par voie déductive, « c'est un luxe que la science ne se permet que lorsqu'elle a accumulé assez de faits ». « La méthode axiomatique ne peut être que le résultat d'une longue expérience, mais un principe d'économie naturel dans l'activité intellectuelle peut servir à encourager une certaine axiomatisation de l'expérience des élèves par eux-mêmes. » « Notre enseignement progresse donc sur le front de l'expérience, sur le front de la communication et sur le front de l'organisation mentale de la personnalité de l'élève. »

Tel est ce livre, si divers par la personnalité de ses auteurs, si riche par le nombre des questions étudiées, qui s'adresse aux professeurs en tant que spécialistes des Mathématiques comme en tant qu'éducateurs. A travers cette diversité, une unité de tendances se fait jour : celle qui résulte de la connaissance de la nature des Mathématiques actuelles, « matière qui sert de substance au dialogue » entre le maître et l'élève.

L. FÉLIX.

### **L'enseignement des mathématiques en Allemagne Occidentale**

*Der mathematische Unterricht für die sechzehn-bis einundzwanzigjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland (L'enseignement des Mathématiques pour les élèves de 16 à 21 ans)*, Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1954.

L'ouvrage dont il s'agit ici a son origine dans une initiative de la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, initiative prise lors du Congrès mathématique qui s'est tenu à Amsterdam en septembre 1954. Le sujet de l'ouvrage est l'enseignement des mathématiques pour les élèves de 16 à 21 ans dans la République fédérale allemande (ou Allemagne de l'Ouest).

Plutôt que d'en donner un bref compte rendu sans grand intérêt, nous croyons qu'il est préférable d'en faire un résumé assez détaillé pour qu'on puisse se faire une idée de l'enseignement actuel des Mathématiques en Allemagne.

*Renseignements statistiques.* — La République fédérale se compose de sept pays d'importance inégale. Le moins peuplé est le Schleswig-Holstein, qui a 2,6 millions d'habitants ; le plus important en a 13,2 millions, c'est la Rhénanie du Nord-Westphalie. A quoi il faut ajouter les villes autonomes de Brême et Hambourg, et enfin Berlin-Ouest. Le tout correspond à une population de 50 millions, et chaque pays jouit, en matière d'enseignement, d'une large autonomie, ce qui a pour conséquence quelques différences dans les horaires ou les programmes.

A la base, l'Enseignement du Premier Degré, qui va de 6 à 13 ans, reçoit 5.850.000 enfants, dont 2.880.000 filles. A 10 ans, la possibilité est offerte, aux élèves qu'on croit assez doués, d'entrer dans l'Enseignement du Second Degré long, qui dure neuf ans, ou dans l'Enseignement court, qui se termine à 15 ans. 15 % des élèves profitent de la première possibilité, 4 % de la deuxième. Enfin, après des études primaires menées jusqu'à leur terme normal, s'ouvre l'accès à l'Enseignement professionnel ou technique sous diverses formes. Il retient jusqu'à 16 ans les 1.820.000 élèves qui l'ont choisi (parmi lesquels 776.000 filles).

Nous laisserons de côté pour le moment l'Enseignement Supérieur, universitaire ou technique. Et, naturellement, nous ne dirons rien de l'enseignement court, technique ou autre, puisqu'il n'entre pas dans les limites que s'est assignées l'ouvrage que nous étudions.

*L'Enseignement du Second Degré.* — Comme nous l'avons dit, sa durée est

généralement de neuf ans, répartis en trois cycles de trois ans chacun. L'enseignement privé y intervient pour 21 % dans le nombre des écoles, pour 13 % dans le nombre des élèves. A titre d'exemple, voici comment se répartissent les élèves entre les neuf années, dans les établissements du pays le plus important, la Westphalie : 26,5 % ; 15,6 % ; 15,6 % ; 14,3 % ; 12,1 % ; 11,0 % ; 6,3 % ; 4,8 % ; 3,8 %, en allant du début à la fin des études.

En gros, on peut dire que trois options se présentent aux élèves : une option classique ; une option moderne, orientée vers l'étude des langues vivantes, et une option scientifique. Dans l'ensemble de la République fédérale, il y a, en moyenne, pour 100.000 habitants, 3,1 établissements du Second Degré, ce pourcentage variant de 2,0 dans le Schleswig-Holstein à 4 dans le pays de Bade-Wurtemberg. Et en moyenne, les établissements de plein exercice, c'est-à-dire offrant les neuf années d'études, possèdent 4,8 classes de chaque niveau.

Si l'on tient compte maintenant des options, on constate que, dans l'ensemble de la République fédérale, les établissements se répartissent comme suit : classique : 24,4 % ; moderne : 41,4 % ; scientifique : 29,6 %.

Le minimum du classique, soit 9,5 %, est atteint en Schleswig-Holstein, et le maximum, soit 43,3 %, est atteint en Bavière, mais il faut remarquer que les statistiques relatives au Schleswig-Holstein ont bloqué ensemble les établissements masculins et féminins, tandis que celles des autres pays ne concernent que les établissements masculins. En ce qui concerne les sections scientifiques, le maximum 50,3 correspond à la Bavière, et le minimum 25,5 correspond à la Rhénanie-Westphalie. Ce dernier pourcentage a de quoi surprendre, si l'on se rappelle que cette région est, de loin, la plus fortement industrialisée de l'Allemagne fédérale. Sans doute, cette anomalie s'explique-t-elle par l'existence d'établissements techniques offrant des études plus directement utilisables dans l'industrie.

Il faut noter aussi que la répartition des élèves diffère quelque peu de celle des établissements ; en Westphalie, les établissements classiques forment un quart du total, mais ne contiennent qu'un cinquième des élèves.

A titre de comparaison, citons la répartition des établissements en Prusse en 1909 : classique : 60,1 % ; moderne : 24,7 % ; primaire supérieur : 15,2 %.

*Horaires hebdomadaires.* — En 1901, le nombre des heures hebdomadaires consacrées aux Mathématiques était le suivant :

Pour le classique, dans la suite des neuf années d'étude : 4-4-4 ; 3-3-4 ; 4-4-4, soit en tout 34 heures.

Pour le moderne : 4-4-4 ; 5-5-5 ; 5-5-5, soit en tout 42 heures.

Et pour le primaire supérieur : 5-5-6 ; 6-5-5 ; 5-5-5, soit en tout 47 heures.

Actuellement, en Westphalie, avec de petites modifications dans les autres pays :

Classique : 4-4-4 ; 3-3-3 ; 3-3-3, soit en tout 30 heures.

Moderne : 4-4-4 ; 3-3-3 ; 3-3-3, mêmes horaires que pour le classique.

Scientifique : 4-4-4 ; 5-5-5 ; 5-4-4, soit en tout 40 heures.

Comme exemple de modification selon les régions, signalons que ce dernier total de 40 heures pour l'option sciences est ramené à 37 dans le Palatinat.

On constate donc une baisse sensible des horaires de Mathématiques depuis le début du siècle ; la même conclusion s'impose si l'on compare les horaires accordés à l'ensemble des sciences. En 1901, le total des heures consacrées aux sciences était : pour le classique : 52 ; pour le moderne : 71 ; pour le primaire supérieur : 83, tandis qu'on trouve actuellement, en Westphalie : 52 heures pour le classique ; 52 heures pour le moderne et 81 pour l'option sciences.

La section classique a donc maintenu son total, les Mathématiques ayant simplement cédé des heures aux autres sciences. Par contre, la section moderne a perdu son caractère scientifique, pour s'orienter vers les langues vivantes.

En ce qui concerne l'enseignement féminin, les horaires sont généralement les

mêmes que pour les garçons, dans les sections classique et moderne ; dans la section sciences, on trouve en Westphalie 35 heures pour les Mathématiques, réparties comme suit au cours des neuf années : 4-4-4 ; 3-3-5 ; 4-4-4.

*Les programmes.* — Les programmes dont il va être question concernent naturellement le troisième cycle seulement, les trois dernières des neuf années d'études, puisque ce sont les seules qui rentrent dans le cadre de l'ouvrage. Les principales rubriques indiquées sont :

Puissances à exposants fractionnaires ; logarithmes ; progressions arithmétique et géométrique ; calcul infinitésimal ; nombres complexes ; trigonométrie plane et sphérique ; géométrie analytique et synthétique ; géométrie descriptive.

Dans l'ensemble de l'Allemagne fédérale, on peut distinguer deux catégories de pays : ceux qui prévoient strictement les matières correspondant à chaque année d'études, et d'autre part ceux qui laissent une assez grande liberté dans la distribution du programme.

A propos des logarithmes, on insiste en Bavière sur le soin qu'il faut apporter à leur étude ; on semble craindre que l'élève sache faire des calculs logarithmiques, mais qu'il n'en comprenne pas la signification. En Westphalie, dans l'option sciences, on admet l'emploi de la règle à calcul dès la 4<sup>e</sup> année, et les logarithmes en 6<sup>e</sup> année seulement. Quant au Palatinat, il souhaite l'abandon des logarithmes au profit de la règle, et invoque, à l'appui de son opinion, le rôle de plus en plus important des machines à calculer.

Les progressions semblent de plus en plus délaissées ; elles sont un peu isolées dans les programmes, sans guère de liaison avec les autres chapitres. Elles ne trouvent guère d'application que dans certaines questions comme les calculs financiers, et on est tenté de les abandonner.

La grande question qui a été agitée au début du siècle, aussi bien par les gens compétents que par les autres, notamment vers 1907, est celle de l'introduction du calcul infinitésimal dans l'enseignement moyen. Le problème semble résolu aujourd'hui, l'analyse a sa place indiscutée dans l'enseignement. La Bavière, cependant, ne l'admet dans la section classique que dans la dernière année d'études, et à titre facultatif. Pratiquement, il semble que la plupart des bacheliers connaissent cette partie du programme.

La plupart du temps, les fonctions étudiées sont les fonctions entières rationnelles, parfois aussi, les fonctions trigonométriques, en vue de la physique. A ce même chapitre se rattachent des questions comme les calculs d'erreurs et la résolution des équations par approximation. Le développement en série des fonctions, fort utilisé il y a 25 ans, apparaît beaucoup plus rarement aujourd'hui. On rencontre parfois le développement de Taylor avec reste, et aussi quelques équations différentielles, toujours en vue de la physique.

En tout cas, on met en garde contre l'abus du formalisme, et les dangers de notions ou notations qui seraient inaccessibles à l'intelligence des élèves, par exemple ce que les Allemands appellent « Epsilon-tik ». On insiste sur la nécessité de recourir à l'intuition, notamment en utilisant largement les représentations graphiques. Certains critiquent sévèrement l'emploi des différentielles, et l'accord n'est pas fait sur ce qui doit avoir la priorité : calcul différentiel ou calcul intégral ? et on préconise parfois l'utilisation d'exposés sur le développement historique du calcul infinitésimal.

Comme les progressions, les nombres complexes souffrent d'un certain discrédit. Les études mathématiques moyennes se déploient dans le domaine réel, et la physique et la technique, dans celles de leurs parties où les nombres complexes sont si riches d'applications, sont étrangères à l'enseignement moyen. Par contre, on fait parfois une incursion dans la théorie des nombres, la répartition des nombres premiers et les théorèmes de Fermat.

La trigonométrie plane est abordée en général dans la 6<sup>e</sup> année, et la trigonomé-

trie sphérique a généralement disparu des plans d'études, bien que la Saxe offre le choix entre la trigonométrie sphérique et l'étude des intérêts composés et des calculs de rentes. Ici encore, on craint de tomber dans le formalisme et la jonglerie avec les formules, bien que certains désapprouvent l'abus des applications pratiques et déclarent que le lycée n'est pas une école pratique pour arpenteurs. La trigonométrie sphérique a encore des défenseurs ; on peut y lutter contre le danger de formalisme en utilisant les procédés graphiques ; on peut aussi se tourner vers l'observation, et l'on songe aussitôt à l'astronomie. Enfin, un autre argument, pour ne pas abandonner la trigonométrie sphérique, est qu'elle mène à un exemple très accessible de géométrie non-euclidienne et qu'elle permet donc d'aborder d'importantes idées modernes.

En géométrie dans l'espace, les calculs de volumes sont surtout matière à applications trigonométriques ou de calcul infinitésimal ; de même la géométrie descriptive n'est pas un corps de doctrine ; les projections servent, dans les applications, en tant qu'outils. Notons que la Bavière, où le calcul infinitésimal est facultatif, inscrit dans ses programmes l'étude des polyèdres réguliers.

La géométrie analytique avait une large place dans les programmes au cours des cinquante dernières années ; elle a donné lieu, elle aussi, à de longues discussions. Sa place est maintenant plus restreinte ; on se contente souvent de l'étude du cercle, parfois aussi des coniques, au moins dans leurs propriétés les plus simples.

Les idées les plus en honneur et les plus discutées sont celles qui ont trait à la théorie des transformations, à la théorie des groupes, et au calcul vectoriel. Les idées émises par Klein, dans son programme d'Erlangen, pénètrent de plus en plus les plans d'études, et non pas seulement pour l'option scientifique. Tout l'enseignement de la géométrie s'en inspire, et on s'efforce de vivifier la vieille conception euclidienne par l'emploi des transformations telles que la symétrie, la translation, la rotation, l'affinité. En particulier, l'étude des coniques du point de vue de l'affinité et de la projectivité est spécifiée pour l'option sciences, et conseillée pour les autres. Mais la géométrie traditionnelle n'est pas méprisée pour autant ; on y voit le meilleur outil pour la formation logique et, dit-on, ce n'est pas parce que l'élève est parfois rétif qu'on doit y renoncer.

Le calcul vectoriel a également pénétré dans les programmes, sous ses formes les plus élémentaires : addition des vecteurs, multiplication par un scalaire, produit scalaire, produit vectoriel, dérivation par rapport à un scalaire ; ici encore, la liaison avec la physique est présente à l'esprit.

En liaison avec le calcul vectoriel, on trouve aussi, parfois dès la 5<sup>e</sup> année, une prudente introduction des déterminants, pour les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> ordres seulement, en vue de la résolution des équations et de l'étude de l'indépendance linéaire, et aussi de la géométrie analytique.

A. HUISMAN.

(A suivre).

## L'histoire de la mécanique

*Histoire de la Mécanique*, par René DUGAS, Maître de Conférences à l'Ecole Polytechnique, Dunod, Paris, 1950, 1 vol. 16 × 23 cm., 649 p.

*The Principal works of Simon Stevin*, Edited and annotated by a Committee of Dutch scientists, Vol. I, *Mechanics*, Edited by E.-J. Dijksterhuis. C.-V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, 1955, 1 vol. 18 × 24 cm., 617 pages.

La parution du second de ces ouvrages m'incite à signaler à ceux de nos collègues qui s'intéressent à l'histoire de la mécanique le travail de M. DUGAS, paru cependant depuis cinq ans.

Je me permets même de leur rappeler les *Lectures de Mécanique*, de E. JOUGUET, dont un tirage en deux volumes fut encore fait en 1922 par Gauthier-Villars, et

même les développements historiques que l'on trouve dans l'admirable *Mécanique Analytique*, de LAGRANGE, dont la première édition est de 1788.

L'ouvrage de René DUGAS, qui débute à Aristote, leur sera un guide précieux, du XVIII<sup>e</sup> siècle à nos jours. Il leur permettra en particulier de s'orienter en mécanique relativiste, ondulatoire ou quantique.

Les mathématiciens hollandais, qui ont entrepris la réédition des principaux travaux de Simon STEVIN, nous apportent avec leur premier tome des précisions de première main sur la statique et l'hydrostatique à la fin du XVI<sup>e</sup> siècle.

Peut-être est-il nécessaire cependant de rappeler à nos lecteurs qui fut Simon STEVIN. Né à Bruges en 1548, il joua un rôle important auprès de Maurice de Nassau, prince d'Orange, et mourut en 1620. C'est à lui que l'on doit l'emploi des nombres décimaux et c'est certainement son plus beau titre de gloire. Mais il fut un savant universel. Sa démonstration de la loi du plan incliné est restée célèbre en statique. Elle est fondée sur l'impossibilité du mouvement perpétuel et LAGRANGE l'expose très bien. On peut la voir dans la présente édition, soit en flamand, soit en traduction littérale anglaise. Du temps de STEVIN, où le français était fort répandu aux Pays-Bas, Albert GIRARD traduisit sa mécanique dans notre langue, tandis que SNELLIUS la traduisait en latin. De nos jours, il nous faut passer par l'intermédiaire de l'anglais, à moins de lire directement le flamand. Pourquoi pas ? C'est encore la langue maternelle d'une province de chez nous, et plus d'un de nos collègues prendra plaisir à retrouver chez le créateur du flamand scientifique les mots qu'il a lui-même balbutiés dans son enfance.

C'est encore en niant le mouvement perpétuel que STEVIN établit les principes de l'hydrostatique, y compris le célèbre paradoxe. Qui veut comprendre PASCAL et l'*Equilibre des Liqueurs*, doit lire le génial Brugeois.

Mais voilà de quoi occuper les soirées d'hiver de plusieurs de nos collègues. J'arrête donc ici ce bavardage.

Jean ITARD.

## L'enseignement de la mécanique

*Mécanique à l'usage de la classe de Mathématiques Élémentaires*, par Mlle N. DEQUOY. Préface de M. Albert CHÂTELET. Avertissement de M. J.-L. DESTOUCHES. Un volume du « Traité de physique théorique et de physique mathématique », Gauthier-Villars, 1954 (prix : 950 F).

Comme le précise M. J.-L. DESTOUCHES, dans son avertissement, ce livre peut être considéré comme le premier à lire d'un vaste traité qui comporte déjà une « Méthodologie. Notions géométriques », par M. J.-L. DESTOUCHES ; des « Éléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire », par M. L. DE BROGLIE, et qui comprendra une « Mécanique newtonienne », par M. DESTOUCHES, en attendant d'autres ouvrages.

Cependant, c'est en Mathématiques Élémentaires que débute l'étude théorique de la mécanique et le livre de Mlle DEQUOY traite le programme de cette classe. Ce qui en fait, je crois, la valeur particulière et sans doute l'originalité, c'est un remarquable souci de précision dans les définitions, partie essentielle de cet enseignement. Citons l'exemple des distinctions scrupuleuses entre échelle générale de temps, échelle de temps cinématique, échelle de temps moyen, échelle de temps privilégiée (définie par le principe de l'inertie). Même recherche dans la définition des *repères* et dans la formulation précise du postulat de la cinématique.

Le livre comporte un chapitre sur les principes de la mécanique, question qui ne figure pas au programme de la classe. Mais un exposé, même élémentaire de la mécanique, est-il possible sans la moindre allusion à ce problème fondamental ?

Il est vrai que, dans sa préface, M. le Doyen CHÂTELET pose, non sans une cer-

taine ironie, qui en souligne la pertinence, des questions essentielles. Enseigne-t-on la mécanique en Mathématiques Élémentaires ? Est-ce possible ? Est-ce la tâche du professeur de mathématiques ou celle du professeur de physique ? Faut-il — comme il semble bien que Mlle DEQUOY s'y soit résolue —, abandonner au physicien tout examen des expériences et presque toutes les applications pratiques des théories étudiées ? Ou bien faut-il, — comme M. CHÂTELET semble le souhaiter —, insister sur les problèmes simples proposés par des phénomènes ou des machines déjà familiers aux élèves ?

Il me semble que sur trois questions importantes tous les professeurs de Mathématiques approuveront M. CHÂTELET :

1° L'enseignement de la mécanique réclame une étroite coordination entre l'enseignement des Mathématiques et celui de la Physique. Pomme de discorde ou terrain d'entente entre collègues ? Je suis persuadé, quant à moi, que nous gagnerons tous, les uns et les autres, à examiner attentivement les argumentations respectives.

2° Il n'y a pas d'enseignement de la mécanique sans *vecteurs*. Mais pourquoi ceux-ci ne seraient-ils introduits comme ne devant servir qu'à ce seul usage ? Sans doute sera-t-il « permis » un jour de parler de produit scalaire aux élèves de Mathématiques Élémentaires et d'utiliser cette notion pour simplifier de nombreux et variés exposés. Mais quels inconvénients peut-il y avoir à noter vectoriellement les propriétés du parallélogramme en classe de Quatrième ? Autrement dit, pourquoi « avoir honte » des vecteurs ? Pourquoi dissimuler la valeur très générale de ces outils ?

3° Si la statique reste réduite à celle du « point matériel », ne vaudrait-il pas mieux, ou la supprimer complètement (quitte à développer la cinématique du solide), ou utiliser un « théorème du centre de gravité » admis sans démonstration pour traiter des applications simples et utiles ?

Ces quelques remarques, prises dans la stimulante préface de M. CHÂTELET, ne doivent pas faire oublier les mérites du livre de Mlle DEQUOY, adapté à l'enseignement du programme tel qu'il est. On trouve à la fin un index alphabétique et une table des symboles ; ce petit supplément de six pages, à un livre fort bien présenté, en facilitera grandement l'usage, non seulement aux élèves de Mathématiques Élémentaires, mais aussi à tous les étudiants qui auront intérêt à se reporter à cet ouvrage de base.

G. W.

*Éléments de mécanique quantique*, par Ph. PLUVINAGE, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Strasbourg. Un volume de 548 pages, avec 79 figures (17 × 25,2). Broché, 4 000 F, ou cartonné toile, 4 600 F, Masson et C<sup>ie</sup>, éditeurs, 120, boulevard Saint-Germain, Paris, 6°.

La mécanique quantique est devenue l'un des chapitres essentiels de la physique. La connaissance de ses principes et de ses applications principales est, de nos jours, indispensable au chercheur et à l'enseignant, à l'expérimentateur et au théoricien. Que l'on fasse de la physique nucléaire, de la spectroscopie, du magnétisme, de la physique des solides ou de la chimie physique, que l'on enseigne au Lycée, en Faculté ou dans les grandes Ecoles techniques, on se trouve placé nécessairement en face des questions embarrassantes soulevées par la mécanique des particules, des atomes, des molécules.

Ces « *Éléments de Mécanique Quantique* » ont pour but principal de faciliter le travail de tous ceux qui désirent acquérir une certaine culture en sciences physiques. L'auteur, qui a connu par expérience personnelle la difficulté de passer de l'enseignement traditionnel français à ce qu'il appelle la « Physique active » ou la « Science en marche », s'est placé au niveau d'un étudiant ayant suivi les cours de physique générale et de mécanique rationnelle. Il a cherché, d'autre part, à éviter au lecteur français, cartésien de nature, ce changement total d'état d'esprit qui caractérise beaucoup d'ouvrages étrangers. L'exposé est déductif dans la mesure où cela ne risque pas de le rendre trop ardu.

Les « *Éléments de Mécanique Quantique* » se présentent, non seulement comme un moyen de formation générale, mais aussi comme un outil de travail pratique. Si les principes fondamentaux reçoivent tous les développements nécessaires pour qu'ils se fixent dans l'esprit du lecteur, les applications importantes sont traitées en détail : vibrateur harmonique, puits de potentiel, atome d'hydrogène, problèmes de chocs, spin, effet Zeeman, etc... C'est ainsi que les tableaux des fonctions sphériques ou des fonctions d'onde de l'atome hydrogène rendront service à plus d'un calculateur.

Des exercices en fin de chapitre permettent au lecteur isolé de mesurer ses progrès dans la compréhension du texte.

## Les problèmes de l'Univers

*L'Univers*, par Paul COUDERC, astronome titulaire à l'Observatoire de Paris ; un volume de la collection « Que sais-je ? », n° 687, Les Presses Universitaires de France, Paris, 1955.

Dans la conférence qu'il nous avait donnée l'an dernier (voir *Bulletin* n° 168, p. 136), M. Paul COUDERC nous avait fourni un aperçu déjà très complet et fort suggestif des thèmes essentiels de son nouveau livre. Il s'agit des questions qui sont à la pointe de l'actualité astronomique : structure de la galaxie, énergie et évolution des étoiles, peuplement de l'Univers et matière intergalactique, ce qui conduit tout naturellement à la formulation nouvelle du problème cosmogonique.

Nul ne pouvait, mieux que M. COUDERC, nous faire comprendre la signification des résultats acquis, les véritables difficultés des recherches en cours et la portée des solutions envisagées. Mais ce livre n'a pas seulement cet intérêt documentaire (ce qui serait déjà suffisant pour le recommander à tous les collègues qui ont à enseigner la cosmographie). Il y a aussi un aspect « aventure » dans ces recherches où toutes les ressources des mathématiques et de la physique modernes sont utilisées pour porter plus loin et plus profondément notre regard. Grâce à ces 132 pages, bourrées de faits et d'idées, c'est un peu « comme si nous y étions », un peu comme si, nous autres amateurs, nous participions vraiment à l'œuvre de recherche. Il ne s'agit plus alors d'un simple ouvrage de vulgarisation ou de documentation, mais d'une œuvre de culture.

Le premier chapitre rappelle des généralités indispensables. Les paragraphes sur les matériaux cosmiques, « les fumées », sur l'énergie des étoiles ou encore sur l'âge de la Terre, constituent, telles quelles, des fiches permettant de mettre à jour notre enseignement.

Le chapitre II étudie notre Galaxie. La mesure des distances galactiques, par SHAPLEY, en utilisant les pulsantes d'amas (globulaires), à courtes périodes, est un résultat déjà classique : il est vieux d'une quarantaine d'années. La mise en évidence d'étoiles du même type dans le noyau galactique, par BAADE (en 1950), l'est moins... Autres questions importantes et sur lesquelles on est heureux de trouver une documentation simple et facilement utilisable : la rotation galactique, les matériaux absorbants diffus. L'apport de la radio-astronomie, déjà signalé par M. COUDERC dans sa conférence, prend une ampleur de plus en plus considérable (confirmée par le récent Congrès de l'Union Astronomique Internationale) ; des cartes suggestives de la Galaxie sont ainsi dressées : sa structure spiralée est bien mise en évidence.

Le chapitre III traite des deux types fondamentaux d'étoiles : le classique diagramme de HERTZSPRUNG-RUSSELL est relatif à la population mêlée de notre voisinage (mêlée mais avec prédominance de la population (I), comme dans les spires de galaxies en général) ; mais BAADE a montré que la population II des amas globulaires ou des noyaux galactiques donnait un diagramme tout différent. L'explication peut en être trouvée dans des processus d'évolution divers.

Le chapitre IV traite des galaxies. Je note au passage (p. 73) un résumé saisissant des critères successifs de distance qui ont permis de porter si loin les mesures de distance. Les Nuages de Magellan et Messier 31 sont étudiés spécialement. Les amas de galaxies et les amas d'amas de galaxies sont mis en évidence sur des cartes très claires et que, pour ma part, je trouve ici pour la première fois.

Le décalage du spectre des galaxies fait l'objet du chapitre V. Les nombreuses difficultés de la mesure des magnitudes des galaxies sont exposées avec quelques détails (autant qu'il est possible en si peu de pages) : l'effet Doppler-Fizeau n'est pas le seul responsable ; il y a un enchevêtrement complexe de phénomènes. La question des matériaux intergalactiques, illustrée par quelques schémas des « filaments » ou « ponts intergalactiques » découverts par Zwicky, termine ce chapitre qui touche aux recherches contemporaines les plus délicates.

Comment se pose donc, aujourd'hui, le problème cosmogonique ? M. COUDERC souligne combien est devenue frappante l'évidence d'une évolution et même d'une évolution rapide dans l'Univers (rapide tout au moins à l'échelle astronomique des durées) ; cosmologie et cosmogonie ne sont plus des catégories distinctes. Avant de se reporter à « L'expansion de l'Univers », où M. COUDERC a pu développer la théorie et ses idées de façon plus complète, on lira ces pages de conclusion. On sait combien ont été variées les réactions devant la théorie de l'expansion. Dans l'état hyperdense de l'Univers, certains ont cru toucher du doigt la création du Monde ; d'autres, à cause de cela, ont combattu la théorie ; ou bien ils l'ont combattue à cause de sa filiation de la Relativité générale, ou encore parce que, comme la théorie d'Einstein, elle était « d'inspiration bourgeoise ». M. COUDERC exprime sa conviction qu'une explication rationnelle pourra être trouvée et que « jusqu'à preuve du contraire, l'expansion de l'Univers a toutes les apparences d'une théorie valable et solide ».

Ces quelques détails sur le contenu du livre ne peuvent que suggérer la richesse des perspectives qu'il nous ouvre. Et puis, je le répète, c'est presque le « journal » de la grande révolution astronomique du xx<sup>e</sup> siècle. Pouvons-nous ignorer ces profonds bouleversements de nos connaissances ? Nous aurions bien plutôt envie d'y apporter notre contribution, fût-elle modeste, fût-elle limitée à intéresser à l'astronomie nouvelle... les astronomes de demain.

G. W.

*L'activité de la Société Astronomique de France.* — Rappelons à tous nos collègues que la S.A.F. est ouverte à toutes les personnes s'intéressant à l'astronomie. Pour les professeurs, l'adhésion à la S.A.F. leur permettra de recevoir la revue mensuelle *L'Astronomie*, qui les tiendra régulièrement au courant de l'actualité astronomique.

Pour nos élèves, l'abonnement individuel au bulletin « Etudiant », à 250 F par an seulement, leur permet de recevoir une documentation précieuse : articles choisis et mis au point par M. Paul COUDERC : Revue des constellations (inventaire des objets les plus facilement observables), éphémérides, conseils pour l'observation. Pour les étudiants, la brochure de M. TEXEREAU, *Notes pratiques pour les observateurs débutants* (voir compte rendu dans le *Bulletin* 170), est vendue 50 F seulement (franco 90 F).

Pour nos classes, l'abonnement collectif à la grande revue est un moyen simple d'enrichir la bibliothèque de classe. Tarif des cotisations pour les membres adhérents : Paris et région parisienne, 1.500 F ; départements, 1.200 F ; droit d'entrée, 200 F. Société Astronomique de France, 28, rue Serpente, Paris, 6<sup>e</sup>. C.C.P. Paris 1733.

\*\*\*

Pour les élèves des classes terminales de la région parisienne, une série de séances spéciales « cinéma et planétarium » sont organisées au Palais de la Décou-

verte, par MM. TARTOIS et WALUSINSKI. Chaque séance, qui débutera à 17 h. 30 exactement, comporte le programme suivant :

— Présentation et commentaire de projections fixes (récentes découvertes sur les étoiles et les galaxies) ; film « Les Flammes du Soleil », réalisé par B. LYOT et P. COUDERC.

— Séance spéciale du Planétarium, conçue pour illustrer le cours de cosmographie (mouvements apparents du Soleil et des planètes, précession des équinoxes).

Les séances auront lieu aux dates suivantes :

- Pour les groupes de jeunes filles, les jeudis 19 janvier, 15 mars et 17 mai ;
- pour les groupes de garçons, les jeudis 23 février et 19 avril.

S'inscrire sans tarder, pour l'une ou l'autre de ces séances (il ne sera pas possible d'en organiser d'autres cette année), en téléphonant au Secrétariat du Palais de la Découverte (BAL. 17-24) ; préciser le nombre de places demandées ; participation aux frais 25 F par élève (les tickets seront payés par le responsable du groupe à l'entrée du Palais de la Découverte).

### A travers les revues d'astronomie....

*L'ASTRONOMIE*, revue de la S.A.F. — *Juin 1955* : M. LAFFINEUR : La radio astronomie en 1955 ; A. GOUGENHEIM : Les marées océaniques et terrestres. — *Juillet-août* : G. DARMOIS : La gravitation et la pensée d'Einstein ; Th. WEIMER : Cadrons solaires ; Ch. BERTAUX : Les supernovae en 1954 ; L. ARBEY : La détermination astronomique de l'heure. — *Septembre* : D. CHALONGE : Exploration de l'atmosphère terrestre au moyen des éclipses de Lune ; L. LEPRINCE-RINGUET : Les problèmes actuels du rayonnement cosmique. — *Octobre* : J. DELHAYE : La structure de la Galaxie ; P. COUDERC : Quelques enseignements du Congrès de Dublin (importance des sondages radio-astronomiques allant jusqu'à 6 milliards d'années de lumière, distribution des radio-sources ; le facteur majorant de Baade plus voisin de trois que de deux, module de distance brut et module de distance corrigé de l'absorption par les matériaux intergalactiques ; pour M.31, module brut de 24,25 et module corrigé de 23,75 correspondant à une distance de 1,83 millions d'années de lumière ; enfin perception précise de maints signes d'évolution dans l'Univers : globules de BOK).

*SCIENTIA*, X, 1955. — L. D'AZAMBUJA : Les protubérances du Soleil et leur évolution ; E. PERSICO : Souvenir d'Enrico Fermi.

*ENDEAVOUR*, n° 56 (1955). — Sir SPENCER JONES : Histoire du chronomètre de marine.

*ANNALES D'ASTROPHYSIQUE*, tome 18. — N° 1 : PAILLET, BOSSON et PEYTURAUX : Etude du fond continu du spectre solaire. — N° 3 : R. CANAVAGGIA et J.-C. PECKER : Sur le rayonnement des Céphéides.

*BULLETIN ASTRONOMIQUE*, tome XIX (1955). — J. MEFFROY : Contribution à l'étude de la stabilité du système solaire ; A. SOUDAN : Sur des systèmes de variables canoniques ; M.-G. DJAVANCHIR KHOÏ : Sur quelques particularités de la distribution des vitesses des étoiles A et F. Rappel : dans le tome XVIII, fasc. IV, A. DANJON : L'astrolabe impersonnel de l'Observatoire de Paris.

*SKY AND TELESCOPE*, octobre 1955. — WHITFORD et SLOWEY : A model of the solar neighborhood ; VAN DE KAMP : Stars nearer than five parsecs. — Novembre : WACHMANN : From the life of Bernhard Schmidt ; Otto STRUVE : Axial rotation and stellar evolution. — *Décembre* : Otto STRUVE : The evolution of close binary stars.

---

## A travers les revues

Le signe (p) figure après les titres des revues dont les sommaires ne sont que partiellement reproduits.

*BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE*, tome 83, année 1955. — Fascicule II : F. LONGMANS, Etude des périodes des formes harmoniques ; G. THIERRIN, Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes ; L. LESIEUR, Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne.

Fascicule III : P. LIBERMANN, Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières ; J.-L. LIONS, Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques ; M. LAZARD, Sur les groupes de Lie formels à un paramètre ; P. BOUGHON, J. NATHAN et P. SAMUEL, Courbes planes en caractéristique 2.

Fascicule IV : M. BERGER, Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes ; P. DEDECKER, Une théorie algébrique des équations approchées.

*MATHEMATICA & PAEDAGOGIA*, n° 7 (3<sup>e</sup> année) (p) : W. SERVAIS, Présentation de la caractérologie ; P. LIBOIS, L'enseignement de la géométrie et la réalité ; P. GERMAIN, Les grandes machines mathématiques ; A.-R. VAN TWEMBEKE, A propos d'une expérience réalisée aux Pays-Bas (remplacement de la géométrie dans l'espace par des notions sur l'histoire des Mathématiques classiques, dans des sections latin-grec).

*THE MATHEMATICS TEACHER* (National Council of teachers of mathematics, U.S.A.) (p). — Octobre 1955 : E.-P. NORTHROP, Modern mathematics and the secondary school curriculum ; P.-R. NEUREITER, Where the mathematics teacher is king ; R.-C. MAUL, Where do eligible mathematics teacher go ? ; F.-G. LANKFORD, Practical mathematics is challenging to students.

Novembre 1955 : J.-O. HASSLER, A mathematics teacher's creed ; C.-E. SPRINGER, The meaning of mathematics ; W.-J. KLIMCZAK, The solution of linear equations and inequalities ; A.-A. BENNET, A note on « variable » ; D.-B. LLOYD, A new mathematical association contest.

*MATHEMATICS TEACHING*, The Bulletin of the Association for teaching aids in mathematics (Président C. GATTEGNO), n° 1, novembre 1955 (p) : R.-D. KNIGHT, A model differential analyser ; T.-J. FLETCHER, Some models of fundamental importance ; The teaching of mathematics in modern schools.

*LE FACTEUR X*, n° 20 (nov. 1955) : Acoustique et musique (AH) ; Le pionnier de l'astrophysique (GW) ; Amerigo Vespuce ou le baptême du nouveau monde (ED) ; L'origine du mot chimie (RM) ; Sur le mot « mètre » (G. d'H) ; Le coin des Petits, le coin des Grands, Cybernétique (AF) ; problèmes.

N° 21 (déc. 1955) : L'enfance de la locomotive (ED) ; Soleils couchants (GW) ; Acoustique et musique (*suite*) (AH) ; Un point d'histoire (RM) ; Sur les termes de la radio (G. d'H) ; Problèmes ; le coin des Petits, le coin des Grands.

## Livres reçus

— *Les Mathématiques aux brevets et concours*, par A. PICARD et G. BODARD, aide-mémoire et sujets d'examens (élèves du premier cycle) ; Nathan, éditeur.

— *Géométrie du dessin technique*, 2, Géométrie descriptive par la méthode directe, par R. RUBIO DE TERAN, Masson, éditeur.

— *Les nombres en couleurs*, nouveau procédé de calcul par la méthode active, par G. CUISENAIRE et C. GATTEGNO, Delachaux et Niestlé, éditeurs.

### III. ESSAIS ET VARIÉTÉS

#### Sur la réforme de la licence mathématique

La réforme de la licence, avec institution d'une licence « homogène », ayant été mise à l'ordre du jour dans une récente réunion des doyens, il m'a semblé qu'il pouvait être utile de résumer ici quelques idées qui résultent d'échanges de vues avec mes collègues, mathématiciens et physiciens de la Faculté des Sciences de Lille.

PRINCIPES DIRECTEURS. — 1) La licence homogène doit être suffisamment accessible aux étudiants de niveau moyen pour qu'elle reste *obligatoire* pour tous les futurs enseignants (en particulier pour les candidats au C.A.P.E.S.). Il ne paraît pas souhaitable que la licence devienne un diplôme exceptionnel, réservé aux meilleurs, et ne préparant qu'à la recherche.

2) Un délai moyen de quatre années (propédeutique comprise) semble un maximum, si l'on ne veut pas rebuter une jeunesse pressée de gagner sa vie, et éviter que la majorité de nos étudiants travaillent au dehors (comme c'est le cas actuellement, surtout dans certaines provinces). Ce délai devrait même pouvoir être réduit à trois ans pour les très bons étudiants.

3) Il paraît nécessaire de maintenir, au programme de la licence mathématique, quelques notions élémentaires de physique, et même de physique expérimentale, il reste également indiscutable que le programme de physique générale actuel est trop lourd pour les futurs mathématiciens, et qu'il constitue un barrage dans la licence mathématique.

4) Il serait souhaitable que, parallèlement à l'enseignement de M.M.P. destiné aux physiciens, les futurs mathématiciens soient initiés à quelques problèmes de physique mathématique, et que leur attention soit attirée sur les applications des Mathématiques. Cela favoriserait le recrutement de « mathématiciens appliqués » dont on risque de manquer dans un court délai. Le certificat de mécanique rationnelle remplit déjà un peu ce rôle, mais il a un programme trop restreint pour le remplir vraiment. Il faudrait donc « aménager » le certificat de mécanique rationnelle, et élargir son champ.

5) Il semble que le certificat de calcul différentiel, tel qu'il se fait à Paris et tend à se faire un peu partout, devrait pouvoir se scinder en deux parties, dont la première serait la seule exigée pour la licence homogène, la deuxième devant être substantiellement développée en dehors de cette licence. Cette deuxième partie serait exigée pour l'accès au troisième cycle et la préparation à la recherche ; elle serait exigée aussi pour l'accès aux emplois de chefs de travaux en Mathématiques, et même si le diplôme correspondant n'était pas exigé des candidats à l'Agrégation, pour qui le diplôme d'études supérieures doit rester une obligation, le programme de cette deuxième partie devrait être intégré dans celui du concours d'Agrégation ; cela mettrait l'Agrégation de Mathématiques sur le même plan que les autres Agrégations, pour lesquelles on demande des connaissances d'un niveau supérieur à celui de la licence classique. Et, à l'expérience, la Direction de l'Enseignement Secondaire pourrait décider si l'enseignement dans les classes préparatoires aux Grandes Ecoles doit être réservé à des agrégés possédant effectivement la deuxième partie du certificat de calcul différentiel.

6) L'expérience prouve que les étudiants, dont l'effort n'est pas suffisamment contrôlé au cours de l'année scolaire, se contentent trop souvent de suivre passivement les cours, en réservant l'étude de ceux-ci pour le mois précédant l'examen. Un régime plus souple, comportant des examens trimestriels ou semestriels, stimulerait leur effort et leur permettrait, en cas d'échec, de se ressaisir plus rapidement.

Les principes qui viennent d'être exposés conduiraient donc au projet suivant :

PROJET DE LICENCE HOMOGÈNE. — *Première année* (propédeutique) : Mathématiques générales (programme actuel) et un peu de physique, avec quelques manipulations très simples ; on pourrait peut-être adopter le programme de physique du M.P.C. actuel, mais il serait souhaitable que ce programme soit commun avec les classes préparatoires aux Grandes Ecoles.

*Deuxième année* : Un certificat de calcul différentiel simplifié, où l'on se bornerait à exposer les principes et les résultats essentiels du programme actuel, mais en exigeant des étudiants qu'ils apprennent à les appliquer sans faute, et en multipliant dans ce but les séances de travaux pratiques.

*Troisième année* : Un certificat de Mathématiques appliquées et physique mathématique, qui remplacerait à la fois l'actuel certificat de mécanique rationnelle et la partie théorique de physique générale. A côté des principes de la mécanique, quelques problèmes de physique seraient étudiés du point de vue Mathématique. Le programme ne serait pas nécessairement uniforme, et pourrait comprendre aussi bien l'étude de quelques problèmes de mécanique des fluides ou l'élasticité que l'étude de théories physiques modernes.

Après la licence, une quatrième année serait consacrée à la deuxième partie du certificat de calcul différentiel et intégral, dont le programme pourrait être notablement élargi et modernisé, et qui constituerait à la fois :

- { une préparation à l'Agrégation ;
- { une préparation à la recherche et au troisième cycle.

Par contre, seule la licence homogène serait exigée des candidats au C.A.P.E.S., et cette licence donnerait les mêmes droits que la licence actuelle (en particulier pour l'accès aux concours administratifs).

Peut-être ce projet, en sauvegardant jusqu'au bout la liberté d'orientation de l'étudiant, permettrait-il de concilier le recrutement des chercheurs et celui des professeurs du secondaire.

Mais il va sans dire que la licence de Mathématique ne peut être réformée indépendamment des autres, et que les problèmes posés doivent être résolus dans le cadre général des Facultés des Sciences, par accord entre toutes les disciplines.

Mme J. LELONG-FERRAND,

professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

---

## Sur les confusions pseudo-égalitaires

Les confusions déplorables que signale Mlle FÉLIX, dans le *Bulletin* n° 170 et qui se manifestent par un usage abusif du signe d'égalité, sont révélatrices de difficultés très profondes de notre enseignement. Nous devons longuement nous borner, à cet égard, à donner à nos élèves de bonnes habitudes d'écriture, sans être en mesure de justifier pleinement notre attitude. Ce n'est que tardivement que l'élève pourra disséquer la structure logique de ses connaissances et concentrer son attention sur la langue mathématique elle-même. Alors seulement se sépareront dans son esprit trois notions qui l'auront souvent mystifié :

- la relation logique d'équivalence entre propositions ou entre relations ;
- les relations mathématiques d'équivalence entre termes ;
- la relation linguistique de définition, appliquée, soit à des propositions, soit à des relations, soit à des termes.

Voici, sur ces trois points, quelques observations.

I. — L'ÉQUIVALENCE ENTRE PROPOSITIONS OU ENTRE RELATIONS. — Il s'agit là d'une relation logique binaire entre propositions ou entre relations qui exprime leur implication réciproque et qu'on peut noter  $\leftrightarrow$ .

Certes, nous pouvons et nous devons tenter de précipiter chez nos élèves une prise de conscience à cet égard. Il y a intérêt, dès la classe de Seconde, à familiariser nos auditoires avec les relations logiques les plus proches de l'intuition courante : *négarion* (non), *disjonction* (ou), *conjonction* (et), *exclusion réciproque* (ex), *implication* ( $\rightarrow$ ), *implication réciproque* ( $\leftrightarrow$ ). Une bonne méthode paraît être d'utiliser ces symboles au tableau aussi souvent que possible, sans exiger des élèves qu'ils les utilisent eux-mêmes ; ceux qui auront déjà une capacité d'abstraction suffisante commenceront librement à en faire usage (un usage qu'il nous appartient, bien entendu, de contrôler). Toutefois, la notion de *proposition* ne semble pouvoir être dégagée utilement qu'au moment où sont abordées, par ailleurs, les études philosophiques. Il est permis d'espérer que, dans la classe terminale du second cycle, les relations deviendront pour nos meilleurs élèves ce qu'elles sont réellement, c'est-à-dire ces « moules à propositions » que la logistiquie nomme fonctions propositionnelles. Si l'on songe qu'il faut attendre si longtemps pour voir la distinction fondamentale entre *termes* et *relations* prendre corps, on comprend que les notions d'équivalences entre termes et d'équivalences entre relations aient pu être l'objet de méprises innombrables. Notons encore ceci : bien que la structure de l'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité) ait sans doute été mise en lumière à l'occasion de maintes relations mathématiques rencontrées en Seconde et en Première, l'application de cette structure logique à la relation elle-même logique de l'implication réciproque exige un nouvel effort d'abstraction. Ainsi la « fermeture » du signe d'implication réciproque dans l'entendement ne se produira, en général, qu'à un âge assez avancé.

Je voudrais ajouter qu'il est bien regrettable qu'au cours de leur année de Mathématiques Élémentaires les élèves qui, d'une part, étudient la logique en classe de Philosophie et, d'autre part, se rendent enfin compte que les Mathématiques sont construites sur la logique, ne soient guère mis en mesure par les programmes — ou par la tradition qui les interprète — de faire d'utiles rapprochements entre ce qui, ici et là, porte pourtant le même nom. Cette situation devrait évoluer. Au point où nous le supposons parvenu, l'élève qui ne serait pas capable de « faire » un peu de logique moderne n'est pas capable non plus de comprendre les Mathématiques qu'il « fait ».

Une dernière remarque : tant qu'on ne sort pas du domaine de la logique propositionnelle, il doit être vivement déconseillé, mais il est néanmoins loisible de noter l'implication réciproque à l'aide du signe  $=$ . Il arrive que nos élèves rencontrent ce

signe ainsi employé dans un manuel de philosophie, et c'est pour eux une source supplémentaire de confusion lorsqu'ils abordent les Mathématiques.

II. — LES ÉQUIVALENCES ENTRE TERMES. — Il s'agit là de relations mathématiques binaires entre termes, qui sont réflexives, symétriques, transitives, et qu'on peut noter  $\equiv$  à condition d'affecter généralement ce signe d'une indication spécifique.

Une vision claire du spectre des équivalences entre termes n'exige pas seulement que la structure générale de l'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité) ait été bien assimilée ; il faut encore que l'élève ait acquis la pensée précise que, parmi toutes ces relations d'équivalence, il en est une *plus forte* (ou *plus fine*, dit BOURBAKI) que toutes les autres. Nous avons tous de bonne heure l'intuition de cette équivalence première, que cherchent à exprimer, suivant le cas, des mots tels qu'identité, indiscernabilité, confusion, coïncidence (« les deux termes sont les mêmes », « les deux termes ne font qu'un »). Mais l'intelligence devra s'aiguiser patiemment avant de concevoir l'introduction axiomatique dans la théorie mathématique d'une relation binaire entre termes  $x$  et  $y$  qui entraîne, pour toute relation  $R$  qui figure dans la théorie, l'implication réciproque des formes qu'elle revêt lorsque  $x$  ou  $y$  sont indifféremment substitués à telle lettre ou telle autre dont  $R$  puisse dépendre :

$$(x = y) \rightarrow [R(\dots \overset{x}{y} \dots) \rightarrow R(\dots \overset{y}{x} \dots)] (*).$$

Ce schéma donnera, en particulier, pour toutes les propriétés  $R(x)$  qu'on rencontre dans la théorie

$$(x = y) \rightarrow [R(x) \leftrightarrow R(y)] \quad (1)$$

et pour toutes les relations binaires  $R(x, y)$  qu'on y rencontre

$$(x = y) \rightarrow [R(x, y) \leftrightarrow R(y, x) \leftrightarrow R(x, x) \leftrightarrow R(y, y)]. \quad (2)$$

Postulons de plus que, pour tout terme  $x$  donné, il existe au moins un terme  $y$  qui lui est égal

$$(\forall x) (\exists y) (x = y) \quad (3)$$

Dès lors :

1° La relation d'égalité est une relation d'équivalence, car :

- a) elle est transitive : en appliquant (1) à la relation  $x = z$ , on a  
 $x = y \rightarrow (x = z \leftrightarrow y = z)$  d'où  $x = y$  et  $y = z \rightarrow x = z$
- b) elle est symétrique : en appliquant (2) à la relation  $x = y$ , on a  
 $x = y \rightarrow (x = y \leftrightarrow y = x)$  d'où  $x = y \rightarrow y = x$

(\*) Mlle FÉLIX me fait remarquer à très juste titre que le schéma général de l'égalité est écrit plus haut de manière si condensée que sa signification n'apparaît pas immédiatement ; de plus, l'aspect tautologique illusoire du second membre peut surprendre. Soit donc  $z_k$  un symbole qui représente la lettre  $x$  ou la lettre  $y$  suivant que l'indice  $k$  prend l'une ou l'autre de deux valeurs données, 0 et 1, si l'on veut. Pour une relation  $R$  dépendant de  $n$  lettres, le schéma de l'égalité s'explique de la façon suivante :

$$(x = y) \rightarrow [R(z_1, z_2, \dots, z_n) \leftrightarrow R(z_2, z_1, \dots, z_n)]$$

la deuxième implication ayant lieu pour tout système de valeurs possibles attribuées aux  $2n$  indices ; la relation  $x = y$  entraîne ainsi  $2^{2n}$  implications ;  $2^n$  d'entre elles sont des tautologies ; les  $2^n (2^n - 1)$  autres implications se trouvent toutes notées à l'aide d'une suite d'implications réciproques liant en chaîne  $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{2^n} = 2^n$  relations. Par exemple, s'il s'agit d'une relation  $R$  dépendant de trois lettres, on aura au second membre, après élimination de huit tautologies, une suite d'implications réciproques liant en chaîne les huit relations  $R(x, x, x)$ ,  $R(y, x, x)$ ,  $R(x, y, x)$ ,  $R(x, x, y)$ ,  $R(x, y, y)$ ,  $R(y, x, y)$ ,  $R(y, y, x)$ ,  $R(y, y, y)$ .

c) elle est *réflexive* : en appliquant (2) à la relation  $x = y$ , on a  $x = y \rightarrow (x = y \leftrightarrow x = x)$  d'où  $x = y \rightarrow x = x$  ; si l'on prend alors pour  $y$  un égal à  $x$  fourni par (3),  $x = y$  est vraie, donc aussi  $x = x$ .

2° La relation d'égalité est une relation *univoque*, car  $x = y$  et  $x = z$  entraîne (symétrie)  $y = x$  et  $x = z$ , qui entraîne à son tour (transitivité)  $y = z$  ; (3) se complète par l'affirmation que, pour tout terme  $x$  donné, il existe un terme  $y$ , et, à une égalité près, un seul qui lui est égal.

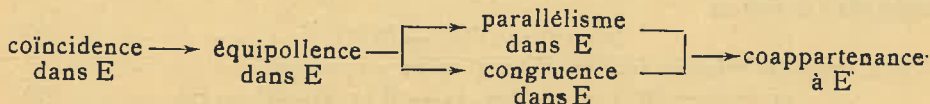
3° La relation d'égalité est *plus forte* que toute autre relation *réflexive*  $R(x, y)$ , c'est-à-dire qu'elle l'implique ; en effet, il résulte de (2) que

$$x = y \text{ et } R(x, x) \rightarrow R(x, y) ;$$

si  $R(x, y)$  est réflexive,  $R(x, x)$  est vraie, donc aussi l'implication  $x = y \rightarrow R(x, y)$ .

4° La relation d'égalité est *plus forte* que toute autre relation d'équivalence  $R(x, y)$ , c'est-à-dire qu'elle l'implique : conséquence immédiate du résultat précédent, puisque, si  $R(x, y)$  est une relation d'équivalence, elle est notamment réflexive.

Quand ces idées fondamentales seront acquises, on pourra faire fonctionner utilement le schéma de l'équivalence sur tel ensemble  $E$  de termes qu'on aura choisis. Toute *équivalence* dans  $E$  se situera logiquement alors entre la *coïncidence* dans  $E$  ( $x \in E$  et  $y \in E$  et  $x = y$ ), qui sera l'*équivalence la plus forte*, et la *coappartenance* à  $E$  ( $x \in E$  et  $y \in E$ ), qui sera l'*équivalence la plus faible*. Si  $E$  est l'ensemble des segments orientés du plan, par exemple, on pourra décrire des chaînes d'équivalences :



qui, tout en justifiant le recours à des notations radicalement diversifiées (telles que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ,  $\overrightarrow{AB} \not\sim \overrightarrow{A'B'}$ ,  $\overrightarrow{AB} \oslash \overrightarrow{A'B'}$ ), dégageront clairement la signification d'une écriture « plus savante ». Cette écriture-là, il n'est nul besoin que les élèves l'utilisent ; mais c'est un fait que comprendre signifie ici concevoir la possibilité de l'employer.

En réalité, l'introduction du signe d'égalité dans nos théories déductives pose un immense problème. Ce que nous avons irrésistiblement dans l'esprit, c'est un schéma d'implication réciproque où nous logeons un quantificateur universel portant sur les relations  $R$  elles-mêmes :

$$(x = y) \leftrightarrow (\forall R) [R] \dots \overset{x}{y} \dots \rightarrow R(\dots \overset{x}{y} \dots).$$

Mais ce schéma, qui fournirait d'ailleurs aisément les propriétés de l'égalité indiquées plus haut, nous fait sortir du calcul fonctionnel restreint, où les relations sont toujours déterminées. Et l'on sait que le calcul fonctionnel général ouvre la porte aux paradoxes. L'affaire est d'importance, car le schéma qui précède fournirait une définition directe de l'égalité entre termes, qui deviendrait de la sorte une relation purement logique. Ce que ces difficultés mettent en cause, c'est donc le point d'insertion de la mathématique sur la logique.

III. — LA DÉFINITION. — Il s'agit là d'une relation binaire qui n'appartient, ni à la logique, ni aux Mathématiques, mais qui les concerne ; elle est posée entre une proposition, ou une relation, ou un terme, et une désignation qu'elle leur attribue ; on peut la noter *def* (ou, ce qui est souvent le cas, ne pas la formaliser).

Nos élèves ne remarquent évidemment pas que les lettres ou les signes qu'ils écrivent représentent, tantôt des termes ou des relations, tantôt des noms qui leur servent à les désigner. Il nous deviendrait pratiquement impossible de parler si nous prétendions éviter tous les abus de langage qui encouragent sans cesse cette confu-

sion. Nous pouvons toutefois appeler, de temps à autre, leur attention sur ce point, en écrivant, par exemple : «  $a$  » désigne le terme  $a$ , «  $x < y$  » désigne la relation  $x < y$ . Au demeurant, ce n'est là qu'une difficulté mineure. Mais il est plus délicat de faire entendre comment les Mathématiques mettent en œuvre, tantôt des « termes déterminés » (constantes  $a, b, c, \dots$ ), tantôt des « termes indéterminés » (*variables*  $x, y, z, \dots$ ), dont la désignation littérale nous sert seulement à suivre le jeu dans l'écriture. Ce rôle des lettres muettes est un obstacle préalable à la compréhension des expressions : « pour tout  $x$ , on a  $R(x)$  » — « il existe au moins un  $x$  tel qu'on ait  $R(x)$  » — « le terme  $x$ , s'il existe, tel qu'on ait  $R(x)$  », notée plus bas  $\tau_x [R(x)]$  — qui interviennent toutes dans nos processus de définition.

Le mécanisme complet de la définition d'un terme à partir d'une propriété  $R(x)$ , par exemple, s'analyse comme suit : si l'on a le théorème

$$(\forall x) (\forall y) (R(x) \text{ et } R(y) \rightarrow x = y)$$

et si «  $a$  » est une désignation actuellement libre dans la théorie, il est légitime de poser la définition :

$$\text{« } a \text{ » def } \tau_x [R(x)] \quad (4)$$

qui autorise le théorème

$$R(a) \leftrightarrow a = \tau_x [R(x)],$$

mais cette définition n'aura d'intérêt définitif que si l'on a de plus le théorème

$$(\exists x) [R(x)]$$

auquel cas elle autorise en outre le théorème  $R(a)$  et le théorème équivalent

$$a = \tau_x [R(x)]. \quad (5)$$

Il serait surprenant que nos élèves réussissent à dominer — formalisé ou non — un tel matériel logico-mathématique. Que retiennent-ils de tout cela ? Il en reste surtout à leurs yeux qu'en fait, dans la pratique courante, la définition (4) autorise le théorème (5). A partir du moment où une écriture négligée supprime les guillemets dans (4), la confusion entre le *signe de définition* et le *signe d'égalité* devient presque inévitable. Et pourtant, alors que (5) propose une relation entre deux termes qui est une équivalence, (4) propose une relation entre une désignation et un terme qui n'est évidemment pas réflexive, pour laquelle la question de la transitivité ne se pose même pas, et dont la symétrie ne saurait être que purement conventionnelle. S'il s'était agi de la définition d'une relation, c'est la distinction entre le *signe de définition* et le *signe d'implication réciproque* qui serait devenue, de même, apparemment insaisissable.

En conclusion, je suis bien d'accord avec Mlle FÉLIX ; mais, si la dévaluation du signe d'égalité peut apparaître comme un phénomène actuel, je crains fort que sa non-évaluation ne soit, dans une certaine mesure, une fatalité permanente de l'enseignement dit élémentaire — et certes audacieusement nommé !

J. CHAUVINEAU, professeur au Lycée Henri-IV.

## Retour à l'expérience pédagogique

L'intéressante étude de logique que M. CHAUVINEAU propose à nos réflexions montre bien l'impossibilité de faire, à l'occasion de notre enseignement des Mathématiques, une analyse approfondie des bases de la logique utilisée. J'avais tenté de mettre en garde contre les monstres nés de la dévaluation des symboles ; M. CHAUVINEAU n'évoque-t-il pas les spectres nés de leur sur-évaluation ? Entre ces spectres et les moutons à cinq pattes ou crocodiles à deux têtes que créent nos élèves (on en trouvera plus loin un exemple !), on peut préférer les derniers : si le professeur de

Mathématiques, en agissant, devait choisir, il lui faudrait s'abstenir et compter sur la vie pratique et sociale pour donner aux enfants un élément de formation logique : ce serait la non-évaluation totale !

Mais que nous dit l'expérience pédagogique des difficultés théoriques soulevées dans l'article qui précède ?

I. *Equivalence logique entre deux propositions.* — Le signe  $\Leftrightarrow$  est parfaitement compris sans explications verbales, accepté, utilisé, tout en restant facultatif dans un résumé d'étude tel que : « Il s'agit d'un triangle ABC (1).

$$AB = AC \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$$

ce qui se lit « l'égalité  $AB = AC$  est équivalente à l'égalité  $\widehat{B} = \widehat{C}$  ». Le symbole souligne la compréhension de la relation entre un théorème et sa réciproque, en la séparant du vocabulaire de la traduction : « faut », « suffit », « nécessaire à », « pour que », etc...

II. *Les relations d'équivalence entre termes*, telles que  $2 + 3 = 5$ ,  $\overline{AB} = -2$ ,  $2/3 = 4/6$ ,  $x'x/y'y$ , etc... n'ont rien de mystérieux si elles sont introduites convenablement, avec reconnaissance de la réflexivité, de la symétrie et de la transitivité. Seul, ce dernier mot, je crois, est vraiment utile pour souligner une propriété qui n'est pas évidente pour l'enfant. Notons, du reste, que ces équivalences, établies dans un ensemble à préciser (référentiel), sont toujours relatives au point de vue précisé : il est faux que, dans tous les exercices,  $2/3$  puisse remplacer  $4/6$  ; il est faux que deux morceaux de ruban de 2 m et 3 m puissent toujours remplacer un morceau de 5 m.

Quant à l'égalité-indiscernabilité, c'est beaucoup trop primordial pour être étudié par d'autres que des spécialistes, car à quoi de plus primordial le ramener ? Pourtant, nous savons tous comme il faut insister pour un bon usage des articles « le » ou « un ».

La classification des équivalences suivant leur force, malgré la difficulté du double point de vue (compréhension ou extension), ou à cause de cette difficulté qui les intéresse, est parfaitement comprise en Quatrième à l'occasion des parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés. (On revoit alors les triangles quelconques, rectangles, isocèles et rectangles isocèles).

III. Nous n'aurons jamais, il me semble, à écrire «  $x < y$  », désigne la relation  $x < y$ , bien que M. CHAUVINEAU nous invite à le faire de temps en temps. Mais son étude nous montre la nécessité d'explicitier une convention qui n'est jamais formulée : « Toute relation écrite est affirmée ; toute proposition qui n'a pas la forme interrogative est affirmée comme vraie. » Pour nous  $x < y$  doit se comprendre : « Il est vrai de dire :  $x$  est inférieur à  $y$ . » Sinon, ne serions-nous pas conduit à dire parfois : « Il est vrai qu'il est vrai que  $x$  est inférieur à  $y$  », etc..., ce que le logicien, naturellement, étudie ? Mais est-ce clair pour nos élèves ? Non, puisque, même, en Mathématiques Élémentaires, mes élèves commencent souvent par affirmer la conclusion, en en faisant une sorte de titre, d'annonce, suivant en cela des énoncés mal rédigés, alors qu'il faudrait une forme interrogative. Nous savons que de nombreux collègues exigent le point d'interrogation, tant que le résultat n'est pas acquis  $x < y$  ?

Quant à la définition, ou plutôt à la *dénomination*, nous sommes, là encore, sur un terrain fondamental. Je ne crois pas qu'un seul livre de Mathématiques formalise

(1) M. CHAUVINEAU me fait remarquer qu'il faut préciser « un vrai triangle ».

Si, au lieu de la vieille terminologie par *figures*, j'avais, comme le recommande M. CHOQUET, parlé d'ensembles, j'aurais dit avec toute la précision nécessaire : « Il s'agit d'un ensemble de trois points quelconques non alignés. »

ici. Suivons les livres rédigés en bon français, quel que soit leur niveau (BOURBAKI, par exemple), et exigeons une rédaction précise chaque fois que l'on introduit une nouvelle lettre, un angle auxiliaire, etc... Par exemple, nul n'a le droit (même au tableau ou en résumé) d'omettre les mots des expressions clefs :

« nommons  $x'$  et  $x$  les racines, si elles existent, de ».

« J'appelle  $f(x)$  le trinôme ».

« Je pose  $u = \cos x$  » avec le sens de « je nomme  $u$  le nombre défini par  $u = \cos x$  ».

« J'appelle  $\alpha$  l'angle compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  tel que  $\operatorname{tg} \alpha = m$  », etc...

*Conclusion.* — Il est certain qu'une étude élémentaire de la logique fait partie, non seulement de la culture générale souhaitable pour tout professeur, mais encore de l'apprentissage de notre spécialité. Seulement ce n'est heureusement pas l'objet de notre enseignement. Dans nos classes, nous prétendons aider l'enfant à affermir cette logique du sens commun qu'il a en lui, à en prendre conscience, à la manière dont on développe les muscles en gymnastique : on n'y pense pas quand tout va bien et l'on admire les progrès accomplis. Mais le professeur de gymnastique doit avoir des connaissances d'anatomie et prendre des précautions pour ne pas être réduit à la nécessité d'une gymnastique corrective tardive, dont l'efficacité est bien douteuse lorsqu'il s'agit, non du corps, mais de l'esprit.

L. FÉLIX.

*Un 'monstre !*

(Fiche)

*Classe Troisième M. Elève :* fille, 16 ans 7 mois, redoublante, novembre 1955.

*Composition écrite.* Question posée : racine carrée de 73142.

*Réponse écrite.*  $= \sqrt{270}$  — reste 242.

*Lecture par l'élève.*  $=$  (cela fait :)  $\sqrt{\quad}$  (la racine carrée est) 270 (deux cent soixante-dix) — (;) reste (le reste est) 242 (deux cent quarante-deux).

*Réaction.* Les compagnes rient ; l'élève se défend : « Le signe —, ce n'est pas « moins », c'est pour séparer. »

*Remarque.* L'absence des verbes dans son rébus. N'est-ce pas accepté à l'école primaire ?

L. F.

## Construction d'un trièdre connaissant les trois faces

### Discussion

Soit un trièdre SABC, un point M de l'arête SA se projette en  $m$  sur le plan de la face BSC. Nous rabattons le plan ASB (charnière SB) sur le plan BSC et aussi la face ASC (charnière SC). Nous appelons  $\beta$  et  $\gamma$  les rabattements de M ainsi obtenus.

$S\beta = S\gamma = SM$  et les droites  $m\beta$  et  $m\gamma$  sont respectivement perpendiculaires aux charnières SB et SC.  $Sm < SM$ , le point  $m$  est intérieur (strictement) au cercle (C), de centre S, qui passe par  $\beta$  et  $\gamma$ .

Soit  $\beta\beta_1$  la corde du cercle (C) perpendiculaire à SB. Dire que  $m$  est intérieur à (C), c'est dire qu'il est intérieur au segment  $\beta\beta_1$  ou encore que la droite  $m\gamma$  est intérieure à la bande limitée par les perpendiculaires abaissées de  $\beta$  et  $\beta_1$  sur la droite SC.

L'un des angles  $\widehat{CS\beta}$  ou  $\widehat{CS\beta_1}$  est égal à  $|\widehat{BSA} - \widehat{BSC}|$ , l'autre à  $\widehat{BSA} + \widehat{BSC}$ .  
 Nous choisissons les lettres  $\beta$  et  $\beta_1$  de manière que  $\widehat{CS\beta} = |\widehat{BSA} - \widehat{BSC}|$ , que  $\widehat{CS\beta_1} = \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$ .

Soit  $\gamma\gamma_1$  la corde de (C) portée par la droite  $m\gamma$ . La condition obtenue précédemment se traduit par les deux conditions :

$$\begin{aligned}\widehat{CS\gamma} \text{ (ou } \widehat{CS\gamma_1}) &< \text{angle saillant } \widehat{CS\beta_1}, \\ \widehat{CS\gamma} \text{ (ou } \widehat{CS\gamma_1}) &> \widehat{CS\beta}.\end{aligned}$$

Nous avons  $\widehat{CS\gamma} = \widehat{CS\gamma_1} = \widehat{CSA}$ . Distinguons maintenant deux cas :

1<sup>er</sup> cas :  $\widehat{BSA} + \widehat{BSC} \leq \pi$ , angle saillant  $\widehat{CS\beta_1} = \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$ .

Nos conditions s'écrivent :  $|\widehat{BSA} - \widehat{BSC}| < \widehat{CSA} < \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$ .

2<sup>e</sup> cas :  $\widehat{BSA} + \widehat{BSC} \geq \pi$ , angle saillant  $\widehat{CS\beta_1} = 2\pi - (\widehat{BSA} + \widehat{BSC})$ .

D'où les deux conditions :  $|\widehat{BSA} - \widehat{BSC}| < \widehat{CSA}$  et  $\widehat{BSC} + \widehat{CSA} + \widehat{ASB} < 2\pi$

(On vérifie facilement que l'inégalité : angle saillant  $\widehat{CS\beta_1} > \widehat{CS\beta}$ , utilisée implicitement ci-dessus, est exacte dans les deux cas).

Dans le premier cas : la condition  $\widehat{BSA} + \widehat{BSC} \leq \pi$  entraîne

$$\widehat{BSC} + \widehat{CSA} + \widehat{ASB} < 2\pi.$$

Dans le deuxième cas :  $\pi \leq \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$  entraîne  $\widehat{ASC} < \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$ .

Inversement, soit à construire un trièdre connaissant les trois faces,  $a, b, c$  ( $0 < a < \pi$ ;  $0 < b < \pi$ ;  $0 < c < \pi$ ). On peut construire la figure du plan BSC. Si les conditions  $|c - a| < b < c + a$  et  $a + b + c < 2\pi$  sont vérifiées, le point  $m$  est intérieur au cercle (c) et on peut le relever : il existe un trièdre (à un déplacement ou une symétrie près) ayant comme faces  $a, b$  et  $c$ .

G. DELPLA, professeur au Lycée de Nancy.

## Projection cylindrique d'une surface plane

Il est de tradition, en Première, de traiter les projections cylindriques dans le seul cas de la projection orthogonale. Cette tradition ne se justifie, ni logiquement, puisque les principaux théorèmes relèvent de la géométrie affine et sont valables en projection oblique (conservation du parallélisme de deux droites, et du rapport de deux vecteurs parallèles), ni pédagogiquement, puisque les démonstrations sont exactement les mêmes dans les deux cas et que les résultats acquis seraient fort utiles dans de nombreux problèmes effectivement posés par les manuels, sur les cylindres quelconques ou le paraboloïde hyperbolique.

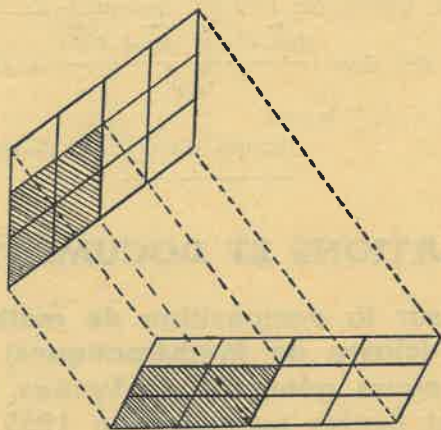
Autre tradition, qui couvre, cette fois-ci, toutes les classes : la notion d'aire d'une surface plane est présentée comme relevant de la géométrie euclidienne, alors qu'elle est du domaine de la géométrie affine. Le tort est plus grave ici, car c'est de ce dernier point de vue que nos élèves ont à la considérer quand ils calculent une aire sur un graphique dont les coordonnées représentent deux grandeurs physiques.

différentes (diagramme de Watt, graphiques des courants alternatifs, etc..., et même dans les applications des primitives chaque fois que l'unité choisie sur les deux axes n'est pas la même). L'unité d'aire n'est plus, alors,  $1 \text{ cm}^2$ , mais  $1 \text{ kg/cm}^2 \times 1 \text{ cm}^3$  ou  $1 \text{ A} \times 1 \text{ s}$ . Ce derniers travers des auteurs de manuels secondaires relève de l'incroyable habitude de traiter des chapitres entiers de géométrie analytique sans faire allusion à l'unité choisie sur les axes, de confondre pente et coefficient angulaire (1), etc...

On remarquera que ce sont là deux types de questions où le retard de l'Enseignement Secondaire sur les habitudes de pensées relativement « modernes » est aussi fâcheux que dépourvu d'excuse. Sans aucune modification des programmes, ni effort supplémentaire pour nos élèves, on pourrait répandre quelque clarté et exactitude sur notre enseignement et réduire ainsi le fossé qu'ont à franchir les étudiants en sciences à un moment ou l'autre de leurs études.

Au carrefour de ces deux questions se trouve la question de la projection cylindrique d'une surface plane. Là, au lieu de montrer que le rapport des aires de deux surfaces est un invariant linéaire, on découpe des triangles en deux et on projette orthogonalement leur hauteur, au mépris, non seulement de la classification correcte de cette propriété, mais aussi de l'intuition la plus élémentaire.

Cette méthode masque en effet la simplicité extrême du théorème à démontrer : mesurer une aire, c'est simplement compter des pavés en forme de parallélogrammes. La projection cylindrique conserve l'égalité des pavés et leur nombre, donc le rapport des aires.

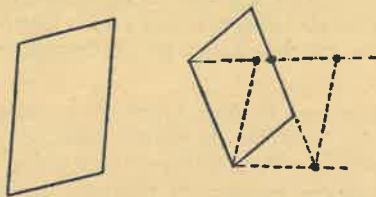


La seule difficulté, pour faire passer cette intuition dans le domaine démonstratif, provient, comme d'habitude en pareille matière, du passage à la limite requis lorsque le pavage exact s'avère impossible.

---

(1) On remarquera que le poids de la tradition est autant le fait des auteurs de manuels que des fabricants de programmes. Citons l'exemple suivant : quatre auteurs, publiant à des années d'intervalle, proposent tous quatre, en arithmétique (2<sup>e</sup> partie), le même exercice de calcul numérique sur la masse spécifique d'un corps, dont les données ( $m = 625 \text{ g}$ ,  $v = 81 \text{ cm}^3$ ) sont purement fantaisistes et ne correspondent à la densité d'aucun corps connu !

Pour s'en tenir, conformément au programme, aux polygones, en évitant ces passages à la limite, je propose le schéma suivant :



1. la transmuée d'une translation, par une projection cylindrique, est une translation ;

2. le rapport des aires de deux parallélogrammes coplanaires est invariant dans une projection cylindrique :

a) cas des parallélogrammes à côtés parallèles,

b) cas général : on se ramène au précédent par addition et soustraction d'aires égales, suivant des opérations conservées en projection d'après le n° 1 ;

3. passage aux polygones par l'intermédiaire des triangles.

Les vecteurs libres fourniraient évidemment un instrument mieux adapté pour une telle démonstration. On exprimerait les vecteurs-côtés d'un des parallélogrammes au moyen de la base fournie par l'autre :  $\vec{w} = \vec{av} + \vec{a'v'}$   $\vec{w'} = \vec{bv} + \vec{b'v'}$  et on

aurait pour rapport des aires :  $\frac{(\vec{av} + \vec{a'v'}, \vec{bv} + \vec{b'v'})}{\vec{v} \vec{v'}} = ab' - ba'$ , invariant par projection, puisque  $a, a', b, b'$  le sont.

Jacques WEIL (*Ecole Normale, Carcassonne*).

## IV. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS

### Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques)

#### au Concours général des Lycées, Collèges et Écoles normales en 1955 <sup>(1)</sup>

Dans un plan (P), deux mobiles décrivent les cercles (C), (C') *égaux*, (mais distincts), de manière que leurs mouvements soient uniformes, de même période et de sens contraires. L'objet du problème était l'étude de la famille des droites (D), (D) désignant la médiatrice du segment  $mm'$  dont les extrémités  $m, m'$  sont les positions des mobiles à un même instant quelconque  $t$ .

(1) Le Jury était composé de MM. ROBERT, inspecteur général, président ; BOUSQUET, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Chaptal ; COSSART, professeur (École Supérieure d'Electricité) au Lycée Chaptal ; DURRANDE, professeur (Centrale) au Lycée Saint-Louis ; ECALLE, professeur (Navale) à l'annexe Stanislas du Lycée Saint-Louis, et de Mme GAZANION, professeur (Fortenay) au Lycée Jules-Ferry.

Voir l'énoncé du problème, *Bulletin* 171, p. 123.

C et C' étant les centres des cercles (C), (C') ;  $m_0, m'_0$  étant les positions à un instant  $t_0$  des mobiles, la correspondance entre  $m, m'$  se traduit par la relation angulaire

$$(\vec{Cm}_0, \vec{Cm}) = -(\vec{C'm'_0}, \vec{C'm'}) \mod 2\pi.$$

1° Est-il possible qu'à certains instants  $t$ , les vecteurs tournants  $\vec{Cm}, \vec{C'm'}$  soient de somme nulle ?

Il faut et il suffit à cet effet (les longueurs  $Cm, C'm'$  étant égales), que la relation angulaire  $(\vec{Cm}, \vec{C'm'}) = \pi \mod 2\pi$  ait lieu ; ou que  $\vec{Cm}$  vérifie la relation

$$(\vec{Cm}_0, \vec{Cm}) + (\vec{C'm'_0}, \vec{Cm}) + \pi = 0 \mod 2\pi.$$

Les vecteurs égaux  $\vec{Cm}_0, \vec{C'm'_0}$  ont, après superposition de leurs origines par translation, une bissectrice déterminée ; si  $\vec{X}$  est un vecteur non nul porté par cette bissectrice, on sait que

$$(\vec{Cm}_0, \vec{Cm}) + (\vec{C'm'_0}, \vec{Cm}) = 2(\vec{X}, \vec{Cm}) \mod 2\pi.$$

La relation étudiée devient  $(\vec{X}, \vec{Cm}) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$  (1). Donc le vecteur  $\vec{Cu}$ , de longueur  $Cm_0$ , dont le support se déduit de  $\vec{X}$  par une rotation de  $+\frac{\pi}{2}$ , est l'une des positions cherchées, telles que

$$\vec{Cu'} = -\vec{Cu}.$$

D'après (1), égalité à  $\pi$  près, une autre est  $\vec{Cv}$ , opposée à  $\vec{Cu}$  et

$$\vec{Cv'} = -\vec{Cv} = \vec{Cu},$$

$uv$  et  $u'v'$  sont des diamètres respectivement pour (C) et (C'), ils sont parallèles et les sens des vecteurs  $\vec{uv}, \vec{u'v'}$  sont opposés.

Pour unifier les notations, on désignait par O le milieu de  $CC'$ , par  $x'x$  la droite passant par O et perpendiculaire, dans (P), à  $uv$ , et par G le symétrique de O par rapport à  $uv$ .

2° La correspondance entre  $m$  et  $m'$  peut désormais être précisée par la relation

$$(2) \quad (\vec{Cu}, \vec{Cm}) = -(\vec{Cu'}, \vec{C'm'}) \mod 2\pi.$$

Le cas où les points O et G sont confondus exige que  $uv$  passe par O et que les cercles (C) et (C') soient symétriques, ainsi que  $u$  et  $u'$ , par rapport à  $x'x$ . Inversement, si les deux mobiles traversent en même temps la droite  $CC'$ , cette circonstance se présente. Il est visible que la relation (2) est vérifiée quand  $m$  et  $m'$  sont choisis symétriques par rapport à  $x'x$ , la correspondance entre les mobiles est donc réalisée par cette symétrie. La médiatrice de  $mm'$  est une droite fixe confondue avec  $x'x$ . Il semble qu'on ne puisse pas parler de la « famille » des droites (D). Cependant :

si (C) coupe  $x'x$  en deux points distincts ou confondus A et B, lorsque  $m$  est en A (ou B), il est confondu avec  $m'$  et l'on peut tenir toute droite passant par A (ou B) comme étant médiatrice du segment AA (ou BB) : d'où deux familles de droites D (distinctes ou non), ayant en commun la droite  $x'x$ .

Ce cas banal sera exclu dans la suite où l'on supposera  $OG \neq 0$ .

Dans le cas général, il est naturel de comparer le cercle (C') [et le point  $m'$ ] au cercle (C'') [et au point  $m''$ ] symétriques respectivement du cercle (C) [et du point  $m$ ] par rapport à  $x'x$  :  $\omega$  étant le point commun à  $x'x$  et à  $uv$ , le vecteur  $\vec{C''C'} = 2\vec{\omega O}$ . D'autre part,  $\omega$  est milieu de GO d'où  $\vec{GO} = 2\vec{\omega O}$  et  $\vec{C''C'} = \vec{GO}$ . On passe donc du cercle (C'') au cercle (C') par la translation de vecteur  $\vec{GO}$  ; elle amène  $u''$ , point

symétrique de  $u$  par rapport à  $x'x$ , sur  $u'$ . En comparant les relations (2) relatives au cas général et au cas particulier des cercles (C) et (C'), on voit que

$$(\vec{C'u'}, \vec{C'm'}) = (\vec{C'u''}, \vec{C'm''}) \mod 2\pi$$

et comme  $\vec{C'u'} = \vec{C'u''}$   $\vec{C'm'} = \vec{C'm''}$ , il en résulte l'équipollence  $\vec{C'm'} = \vec{C'm''}$ .

Autrement dit, la translation de vecteur  $\vec{GO}$  amène  $m''$  sur  $m'$ . On peut donc passer de (C) à (C'), et de manière précise, de  $m$  à  $m'$ , par la succession (ou produit) de la symétrie d'axe  $x'x$  par la translation de vecteur  $\vec{GO}$ .

3° On appelle (A) cette transformation ponctuelle du plan (P) en lui-même, c'est-à-dire qui fait correspondre à un point  $p$  arbitraire de (P) le point  $p'$  obtenu après avoir fait subir à  $p$  la symétrie d'axe  $x'x$  (ce qui donne le point  $p''$ ), puis la translation de vecteur  $\vec{GO}$ . Ainsi  $\vec{p''p'} = \vec{GO}$ ,  $p''p'$  étant parallèle à  $x'x$ , le symétrique  $\vec{pp''}$  du vecteur  $\vec{p''p'}$  par rapport à  $x'x$  est équipollent à ce vecteur :

$$\vec{pp''} = \vec{GO} \text{ ou } \vec{p''p'} = \vec{OG}.$$

On passe de  $p'$  à  $p$ , d'abord par la symétrie d'axe  $x'x$  qui transforme  $p'$  en  $p''$ , puis par la translation de vecteur  $\vec{OG}$  qui fait passer de  $p''$  à  $p$ . La transformation inverse de (A) est donc analogue à (A) et en diffère par le changement du vecteur de translation  $\vec{GO}$  en son opposé  $\vec{OG}$ .

Il est visible que le milieu  $p_1$  du segment  $pp'$  est le centre du rectangle  $pp''p'p'''$  ; quel que soit  $p$ , le milieu  $p_1$  appartient à la droite  $x'x$ .

Pour que  $p'$  fût confondu avec  $p$ , donc avec  $p_1$ , le point  $p$  devrait nécessairement appartenir à  $x'x$ . Mais alors  $p'$  se déduit de  $p$  par la translation de vecteur non nul  $\vec{GO}$  ; il n'existe pas de point confondu avec son transformé par (A). En particulier, il n'y aura pas dans la suite à craindre que se présente encore une indétermination pour la médiatrice de  $mm'$  (provenant de la coïncidence de  $m$  et  $m'$ ).

Bien entendu, l'ordre des opérations, symétrie et translation dont le « produit » fournit l'opération (A), peut être ici regardé comme indifférent, ce qui tient à ce que la translation laisse globalement invariante l'axe  $x'x$  de la symétrie : ce fait résulte de la constatation de l'équipollence de  $\vec{p''p'}$  et de  $\vec{pp''}$ , en d'autres termes. La translation de vecteur  $\vec{GO}$  changerait  $p$  en  $p'''$ , la symétrie d'axe  $x'x$  changeant  $p'''$  en  $p'$ . On dit que cette symétrie et cette translation sont permutable.

La droite  $uv$  ne joue dans la définition de (A) aucun rôle privilégié parmi les droites perpendiculaires à  $x'x$ . Néanmoins le fait que  $uv$  est axe de symétrie du cercle (C) lui conférera un certain rôle dans la suite du problème, que nous allons analyser :

Désignons par  $(S_{uv})$  la symétrie d'axe  $uv$  ; par  $(S_o)$ ,  $(S_\omega)$ ,  $(S_G)$  les symétries de centres respectifs O,  $\omega$ , G. La translation de vecteur  $\vec{GO}$  est le produit des symétries  $(S_G)$ ,  $(S_\omega)$  dans cet ordre, puisque  $\vec{GO} = 2\vec{G\omega}$  ; la symétrie d'axe  $x'x$  est le produit des symétries  $(S_{uv})$  et  $(S_\omega)$  dans un ordre quelconque.

Ceci se note symboliquement

$(A) = (S_G) (S_\omega) (S_\omega) (S_{uv}) = (S_G) (S_{uv})$  puisque  $(S_\omega)$ , deux fois répétée, équivaut à l'opération identique.

On eût pu noter également, en considérant la translation de vecteur  $\vec{GO}$  comme produit des symétries  $(S_\omega) (S_o)$  dans cet ordre, et (A) comme produit de la symétrie d'axe  $x'x$  par la translation précédente :

$$(A) = (S_{uv}) (S_\omega) (S_\omega) (S_o) = (S_{uv}) (S_o)$$

Regardons sur une figure la signification de ces égalités symboliques, en désignant par  $q$  le symétrique de  $p'$  par rapport à la droite  $uv$  et par  $q'$  le transformé de  $q$  par (A) :

(A) change  $p$  en  $p'$  ; ( $S_{uv}$ ) change  $q$  en  $p'$  ; c'est donc que ( $S_G$ ) change  $p$  en  $q$ . Ainsi  $p$  et  $q$  sont symétriques par rapport à  $G$ .

(A) change  $q$  en  $q'$  : ( $S_{uv}$ ) change  $q$  en  $p'$ , donc ( $S_O$ ) change  $p'$  en  $q'$ . Ainsi  $p'$  et  $q'$  sont symétriques par rapport à  $O$ . La transformation (A) est un déplacement « indirect » [c'est-à-dire qui retourne le sens des angles], puisque les symétries par rapport aux droites de (P) sont des déplacements avec retournement.

4° Revenant aux droites (D), on demande de rechercher celles de ces droites qui passent par un point donné  $p'$  du plan (P) : on désigne par  $p$ , comme ci-dessus, le point dont le transformé par (A) est  $p'$ .

$m$  étant un point quelconque de (C),  $m'$  son homologue par (A),  $m'$  point de  $C'$ , les distances  $pm$  et  $p'm'$  sont égales, (A) étant un déplacement. Pour que la médiatrice (D) de  $mm'$  passe par  $p'$ , il faut et il suffit que  $p'm' = p'm$ , ou, ce qui revient au même, que  $pm = p'm$  ; ou encore que  $m$  soit sur la médiatrice de  $pp'$  (toujours bien déterminée, comme on l'a vu plus haut).

Les points  $m$  de (C), s'il en existe, tels que la droite (D) qui correspond à l'un d'eux, passe par  $O$ , sont donc les points de rencontre de (C) avec la médiatrice de  $pp'$ .

Exemple : droites (D) passant par  $O$  ; l'opération inverse de (A) change  $O$  en  $G$  ; c'est-à-dire que pour  $p$  en  $G$ ,  $p'$  est en  $O$  ; la médiatrice de  $OG$  est la droite  $uv$ , qui coupe (C) en  $u$  et  $v$  : les seules droites (D) passant par  $O$  sont les médiatrices (U) de  $uu'$  et (V) de  $vv'$ . Il était évident qu'on a *a priori* ainsi deux droites (D) particulières.

5° On peut se demander si une droite (D) quelconque, médiatrice du segment  $mm'$  et distincte de (U) et de (V), rencontre à distance finie (U) et (V). Deux droites (D) ne sont parallèles que si leurs vecteurs  $\overrightarrow{mm'}$  sont parallèles et même équipollents, car la projection de  $\overrightarrow{mm'}$  sur un axe de la droite  $x'x$  a même mesure que  $\overrightarrow{GO}$  sur cet axe : ceci nécessite que les points  $m$ , relatifs à ces deux droites, soient sur une droite parallèle à  $x'x$ . Or, il n'y a pas de point de (C), autre que  $u$  (ou  $v$ ), situé sur une telle parallèle issue de  $u$  (ou de  $v$ ), ces parallèles étant tangentes au cercle (C).

Donc la droite (D) en question coupe (U) en  $\lambda'$ , (V) en  $\mu'$ , points à distance finie.

$\lambda$  et  $\mu$  étant les points dont les homologues par (A) sont  $\lambda'$  et  $\mu'$ , la construction des droites (D) passant par  $\lambda$  [qui sont (U) et  $\lambda\mu$ ] a montré que la droite  $um$  est médiatrice de  $\lambda\lambda'$ , et, de même, la droite  $vm$  est médiatrice de  $\mu\mu'$ .

$\lambda_1$  désignant le milieu de  $\lambda\lambda'$  et  $\mu_1$  celui de  $\mu\mu'$ ,  $um$  est confondue avec  $u\lambda_1$ ,  $vm$  est confondue avec  $v\mu_1$ .

Le cercle décrit sur  $u\lambda'$  comme diamètre [qui passe par  $O$ , puisque  $O\lambda'$  soit (U) est perpendiculaire à  $Ou$ ] passe aussi par  $\lambda_1$ . De même le cercle décrit sur  $v\mu'$  comme diamètre passe par  $v$  et par  $\mu_1$ .

D'où les égalités d'angles :

$$\begin{aligned} (uO, u\lambda') &= (\lambda_1O, \lambda_1\lambda') \pmod{\pi}, \\ (\mu'O, \mu v) &= (\mu_1O, \mu_1v) \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

$\lambda_1O$  et  $\mu_1O$  sont confondues avec  $x'x$ ,  $\lambda_1\lambda'$  est perpendiculaire à  $um$  et  $u_1v$  confondue avec  $vm$  est perpendiculaire à  $um$  [c'est là qu'intervient l'hypothèse que  $m$  est sur (C)]. Les seconds membres des égalités précédentes sont égaux (mod  $\pi$ ). Il en est de même des premiers

$$(uO, u\lambda') = (\mu'O, \mu v) \pmod{\pi}.$$

Autrement dit, les angles  $\widehat{Ou\lambda'}$ ,  $\widehat{O\mu'v}$  saillants sont égaux ou supplémentaires : ce sont des angles aigus des triangles rectangles en O :  $uO\lambda'$  et  $vO\mu'$ , ils sont égaux et ces triangles rectangles sont semblables. De manière précise, les triangles orientés  $uO\lambda'$  et  $\mu'Ov$  sont *directement* semblables [s'ils ne l'étaient pas ( $uO$ ,  $u\lambda'$ ) et ( $\mu'O$ ,  $\mu'v$ ) seraient opposés (mod  $\pi$ ), ce qui n'a pas lieu].

Première conséquence :  $\frac{O\lambda'}{Ov} = \frac{Ou}{O\mu'}$  ou  $O\lambda' \cdot O\mu' = Ou \cdot Ov$ .

Seconde conséquence : soit  $X'OX$  l'axe de symétrie (ou bissectrice) des demi-droites d'origine O portant les vecteurs  $\vec{Ou}$ ,  $\vec{Ov}$  :  $X'OX$  est fixe

$$(\vec{OX}, \vec{Ou}) + (\vec{OX}, \vec{Ov}) = 0 \pmod{2\pi},$$

comme  $(\vec{Ou}, \vec{O\lambda'}) + (\vec{Ov}, \vec{O\mu'}) = 0 \pmod{2\pi}$  [ $\widehat{uO\lambda'} = \widehat{\mu'Ov}$  en gr. et sens] il s'ensuit, par addition membre à membre

$$(\vec{OX}, \vec{O\lambda'}) + (\vec{OX}, \vec{O\mu'}) = 0 \pmod{2\pi},$$

$X'OX$  est donc aussi axe de symétrie (ou bissectrice) des demi-droites d'origine O portant les vecteurs  $\vec{O\lambda'}$  et  $\vec{O\mu'}$ .

6° Portons sur  $X'OX$ , bissectrice commune des angles  $\widehat{uOv}$ ,  $\widehat{\lambda'O\mu'}$ , les vecteurs opposés  $\vec{OF}$  et  $\vec{OF'}$  dont la longueur est

$$OF = OF' = \sqrt{Ou \cdot Ov} \quad F \text{ et } F' \text{ sont fixes.}$$

La médiatrice de  $FF'$  est la perpendiculaire  $Y'OY$  à  $X'OX$  en O. Soit  $j$  le symétrique de  $\mu'$  par rapport à  $Y'OY$ .  $O\lambda'$  et  $-Oj$  sont des demi-droites opposées et

$$O\lambda' \cdot Oj = O\lambda' \cdot O\mu' = OF^2, \quad \text{ou} \quad \vec{O\lambda'} \cdot \vec{Oj} = -\vec{OF}^2 = \vec{OF} \cdot \vec{OF'}.$$

Donc les points  $\lambda'$ ,  $j$ ,  $F$ ,  $F'$  appartiennent à un même cercle :  $Y'OY$  est un axe de symétrie pour ce cercle qui passe donc aussi par  $\mu'$ .

Les points  $\lambda'$  et  $\mu'$  sont ainsi concycliques avec  $F$ ,  $F'$  et sont situés de part et d'autre de la corde  $FF'$ .

Réciproquement si deux points  $\lambda'_0$  de (U),  $\mu'_0$  de (V) sont sur un même cercle passant par  $F$  et  $F'$  et de part et d'autre de la droite  $FF'$ , étudions les droites de la famille (D) passant par  $\lambda'_0$ , dont l'une est (U) ; l'autre coupe (V) en un point  $\mu''_0$  ; le couple  $\lambda'_0\mu''_0$  est un des couples  $\lambda'\mu'$  de l'analyse précédente, le cercle  $FF'\lambda'_0$  passe par  $\mu''_0$  ; la demi-droite  $O\mu''_0$  a déjà en commun avec ce cercle le point  $\mu'_0$  donc  $\mu''_0$  et  $\mu'_0$  coïncident. La droite  $\lambda'_0\mu'_0$  est une droite (D).

7° Il existe une hyperbole (H) déterminée par ses foyers  $F$ ,  $F'$  et par sa demi-longueur d'axe  $a$ , si  $a < OF$ . Prenons pour  $a$  la projection de  $OF$  sur (U) [ou sur (V)], l'inégalité précédente a bien lieu et les tangentes menées de  $F$  au cercle principal de (H) sont perpendiculaires à (U) et (V). (U) et (V) sont les asymptotes de (H).

Les tangentes menées de  $\lambda'$  à (H), dont l'une est l'asymptote (U), vérifient le théorème de Poncelet : elles ont mêmes bissectrices que  $\lambda'F$  et  $\lambda'F'$ , qui joignent à  $\lambda'$  les points de rencontre du cercle  $FF'\lambda'$  avec  $Y'OY$  : l'asymptote passant par  $j$ , la seconde tangente à (H) issue de  $\lambda'$  passe par  $\mu'$ , d'après la symétrie de  $\mu'$  et  $j$  par rapport à  $Y'OY$ . Donc la droite  $\lambda'\mu'$  est tangente à (H).

Toute droite (D) est ainsi tangente à (H). Réciproquement soit une tangente à (H), qui coupe l'asymptote (U) en  $\lambda'_0$ , le raisonnement précédent montre qu'elle coupe (V) en un point  $\mu'_0$  tels que  $\lambda'_0$  et  $\mu'_0$  aient la disposition étudiée au paragraphe précédent (6°) ; il s'ensuit que  $\lambda'_0\mu'_0$  est une droite (D) : toute tangente à (H) est une droite (D) [et cette proposition vaut pour les asymptotes considérées comme tangentes à (H)].

L'enveloppe des droites (D) est donc l'hyperbole (H).

## II

Supposons, sans la discuter, l'existence d'un arc du cercle (C) situé dans la région extérieure de l'hyperbole (H).

1° On prend un point  $a'$  sur cet arc. Il existe donc deux tangentes à (H) passant par  $a'$ , qui recouperont (C) en des points  $b'$  et  $c'$ . Ils sont distincts de  $a'$ , à moins d'un choix particulier de  $a'$  : ceci nous permet de considérer que  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  sont les sommets d'un vrai triangle inscrit à (C).

Les droites  $a'b'$ ,  $a'c'$  sont les droites (D) menées de  $a'$ , dont on a donné une construction en (I, 4°) :  $a$  étant le point dont l'homologue par (A) est  $a'$ , la médiatrice du segment  $aa'$  coupe (C) en  $\beta$  et  $\gamma$  : (A) fait correspondre à  $\beta$  et  $\gamma$  des points  $\beta'$  et  $\gamma'$  [de (C')] :  $a'c'$  n'est autre que la médiatrice de  $\beta\beta'$  et  $a'b'$  que la médiatrice de  $\gamma\gamma'$ . Le choix des notations adoptées ici était fixé par l'énoncé. On appelle  $\beta_1$  et  $\gamma_1$  les milieux de  $\beta\beta'$  et  $\gamma\gamma'$ , qui sont des points de  $x'Ox$  ; et  $a_1$  le milieu de  $aa'$ , qui est également sur  $x'x$ .

$a_1$  et  $\gamma_1$  sont des sommets d'angles droits  $a'a_1\gamma$  et  $a'\gamma_1\gamma$  dont les côtés passent par  $a'$  et  $\gamma$  : ces points sont sur le cercle décrit sur  $a'\gamma$  comme diamètre. Les droites  $a'\gamma$  et  $a_1\gamma_1$  (celle-ci confondue avec  $x'x$ ) sont isogonales par rapport aux droites  $a'\gamma_1$ ,  $a_1\gamma$ . Autrement dit  $a'\gamma$  et  $x'x$  sont isogonales par rapport à  $a'b'$  (médiatrice  $a\gamma_1$  de  $\gamma\gamma'$ ) et  $\beta\gamma$ .

(Mais  $a'$ ,  $b'$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  appartiennent au cercle (C) d'où résulte que  $a'\gamma$  et  $b'\beta$  sont isogonales par rapport à  $a'b'$  et  $\beta\gamma$ .)

La comparaison de ces résultats prouve que  $b'\beta$  est parallèle à  $x'x$ . Autrement dit, sur (C), le point  $b'$  est symétrique du point  $\beta$  par rapport à  $uv$ .

En considérant de même que  $a_1$  et  $\beta_1$  sont sur le cercle décrit sur  $a'\beta$  comme diamètre, le même raisonnement aboutit à la conclusion que, sur (C), le point  $c'$  est symétrique du point  $\gamma$  par rapport à  $uv$ .

2° On est conduit à considérer le symétrique  $\alpha$  de  $a'$  par rapport à  $uv$  et le point  $\alpha'$  transformé de  $\alpha$  par (A),  $\alpha$  est sur (C) et  $\alpha'$  est sur (C').

D'après les résultats de I, 3°, où il y a lieu de considérer  $p'$  comme étant ici le point  $a'$ ,  $q$  comme étant le point  $\alpha$ ,  $p$  comme étant le point  $a$ , (A) fait correspondre à  $\alpha$  le point symétrique de  $a$  par rapport à  $uv$ . Donc  $\alpha'$  et  $a$  sont symétriques par rapport à  $uv$ , tout comme  $\alpha$  et  $a'$ . La médiatrice de  $\alpha\alpha'$  est donc symétrique par rapport à  $uv$  de la médiatrice de  $aa'$ , soit  $\beta\gamma$  : c'est donc la droite  $b'c'$ , d'après les conclusions de II, 2°.

$\alpha$  appartenant à (C), la droite  $b'c'$  est une droite (D), c'est-à-dire est tangente à H.

Le triangle  $a'b'c'$ , inscrit au cercle (C), a donc ses trois côtés, prolongés, tangents à l'hyperbole (H).

Comme  $a'$  était arbitraire sur un arc de (C), il y a donc une infinité de triangles inscrits à (C) et circonscrits à (H).

3° On peut établir par égalités d'angles de droites, que les droites  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$  coupent le cercle (C) en un même point  $\varphi$ .

Mais on atteint ce résultat plus rapidement en utilisant à nouveau un des résultats de (II, 2°) «  $p'$  et  $q'$  sont symétriques par rapport à O » : comme on vient de le voir, on peut supposer que  $p'$  est  $a'$  et  $q'$  comme étant  $\alpha'$ .

Le rôle symétrique joué par les sommets  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  du triangle  $a'b'c'$  rappelle ici que, de même  $b'$  et  $\beta'$ ,  $c'$  et  $\gamma'$  sont symétriques par rapport à O. Bref, le triangle  $a'b'c'$  n'est autre que le symétrique par rapport à O du triangle  $\alpha'\beta'\gamma'$ , inscrit à (C').

$\gamma\gamma'$  est perpendiculaire à  $a'b'$ , donc aussi à  $\beta'\alpha'$  (qui est parallèle à  $b'a'$ ) : c'est la hauteur issue de  $\gamma'$  du triangle  $\alpha'\beta'\gamma'$ . Le fait que  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$  concourent en un même point, n'est donc autre que celui du concours des hauteurs du triangle  $\alpha'\beta'\gamma'$  : si on appelle  $\omega$  ce point,  $\omega$  est l'orthocentre du triangle  $\alpha'\beta'\gamma'$ .

Les milieux  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  des segments  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$  sont les projections respectives de  $\varphi$  sur les côtés  $b'c', c'a', a'b'$  du triangle  $a'b'c'$  : ces points sont sur  $x'x$ , donc alignés. Il est classique que  $\varphi$  est situé sur le cercle (C) circonscrit au triangle  $a'b'c'$ .

$\varphi$  étant l'orthocentre de  $\alpha'\beta'\gamma'$ , la symétrie de centre O transforme ce résultat en le suivant : le symétrique du point  $\varphi$  par rapport à O est l'orthocentre du triangle  $a'b'c'$ .

## RESULTATS DE L'ÉPREUVE

Le sujet a moins arrêté les concurrents que ceux des années précédentes. On peut expliquer ce fait, qui a surpris les correcteurs, par diverses raisons :

1° Les considérations de la partie I sont, dès le début, intuitives et des résultats apparaissent sur les figures, comme s'imposant presque à l'évidence sans effort de justification.

2° Les candidats sont guidés étroitement par le texte, et il avait été pris soin de leur indiquer, à point nommé, tel paragraphe antérieur aidant aux démonstrations.

3° Les notations de la partie II dispensent presque de faire la figure, à vrai dire assez embarrassante si on ne veut la construire qu'à partir des seules hypothèses intervenant dans l'ordre du texte. Au contraire, si, après une connaissance suffisante du sujet, on observe qu'elle s'apparente à une figure classique, celle du théorème de la droite de Simson, on la réalise rapidement, sans la considération de l'hyperbole (H).

Somme toute, le travail de débrouillage du sujet avait été assez poussé pour que les candidats n'aient plus à s'égarer en vaines recherches.

Mais, en contre-partie, les correcteurs se sont trouvés dans l'obligation de sérier les copies en faisant intervenir la qualité de leurs exposés, ce qui est tout à fait normal et souhaitable pour ce genre d'épreuve.

Voici leurs observations les plus fréquentes :

1° Le texte est mal lu, pas assez approfondi. Ainsi des questions élémentaires demeurent parfois sans réponse : exemple I, 3° ...  $p, p'$  peuvent-ils être confondus ?

2° De nombreuses démonstrations sont inachevées : des réciproques sont négligées. C'est en considérant ce défaut que nous avons conçu la correction qui précède du sujet, en reprenant bien des points qui peuvent paraître à première vue évidents, et que les élèves n'ont pas cru devoir développer.

3° On excuserait ces appels à l'évidence visuelle si les figures, dans les copies, étaient suffisamment claires et suffisamment répétées. Celles que l'on trouve ne sont pas dégagées assez des éléments étrangers qui n'interviennent pas dans la démonstration du moment.

4° La rédaction est souvent illisible, les abréviations sont trop personnelles, on se sert de néologismes dangereux, « un cercle coupant pseudo-orthogonalement un autre cercle ».

Bien des erreurs de raisonnement portent sur des transitions douteuses ou escamotages, « changement opportun du sens des angles orientés », « passage d'angles de droites à des angles de vecteurs ».

5° Certains concurrents paraphrasent le texte de I, 4°, espérant que ce discours leur sera compté comme solution.

Ces critiques visent la masse des copies, mais les correcteurs ont trouvé la partie II, surtout traitée par les meilleurs, beaucoup plus satisfaisante. On y relève alors un souci de clarté, de vigueur et d'élégance, et ceux qui ont fait la figure l'ont presque tous très soignée.

Il faut souligner surtout que beaucoup de nos bons élèves de la classe de Mathématiques se méprennent en progressant d'une manière superficielle, ne faisant que

peut de part au raisonnement, et se réconfortent eux-mêmes en signalant qu'ils rencontrent des figures « de connaissance ».

Tantôt celles-ci sont des triangles ou trapèzes isocèles, et la mentalité de l'élève s'apparente à celle de la classe de Quatrième : géométrie de petits bouts, sans généralité, et dans ces conditions les considérations de produits de transformation ne sont pas goûtées le moins du monde par ces élèves qui débitent en tranches menues les figures (comme le ferait l'épicier, remarque un correcteur).

Ceci nous montre qu'il serait très illusoire de faire fond sur une amélioration apparente du caractère mathématique de l'enseignement : le plus grand nombre de nos élèves reste attaché au concret et au visuel.

Mais, parmi les figures de connaissance que l'on relève dans les copies, il en est de plus photogéniques et savantes, qui donnent parfois à penser que les candidats (trop savants) sont au courant de tout : quadrangle harmonique, produit constant des segments déterminés par une tangente sur les asymptotes de l'hyperbole. Dans l'ignorance du programme officiel de la classe, de telles parties leur paraissent déjà banales, même s'ils ne sont pas capables de faire des démonstrations formelles correctes.

En résumé, nos jeunes apprentis géomètres préfèrent les résultats d'une démonstration à l'esprit de cette démonstration elle-même. Une tradition persistante, qui n'est pas du tout cependant celle de nos professeurs, les y incite. Mais ceci n'atteste qu'un manque de maturité qui n'est pas très grave.

Une copie est nettement au-dessus des autres, par sa précision, sa netteté de langage et sa présentation : elle a été classée première. Tout y a été traité. La copie proposée pour le second prix, également élégante, était moins développée comme exposé de la première partie.

Il a été décerné deux prix seulement, et dix accessits, une coupure sensible, existant entre le second prix et le premier accessit.

Le second prix a été attribué à une jeune fille, ce qui est tout à fait rare dans les annales du concours de cette classe. Le premier des classes parisiennes s'est classé 10<sup>e</sup> accessit.

On retrouve dans le palmarès le premier prix du Concours général de Première de 1954, ainsi que le troisième accessit de ce concours, exactement avec les mêmes mentions que l'année dernière. Le 10<sup>e</sup> accessit de cette année avait obtenu en Première le 2<sup>e</sup> accessit.

*L'Inspecteur général président du Jury,*  
P. ROBERT.

## V. LA VIE DE L'ASSOCIATION

### Réunion du comité

22 décembre 1955

*Présents :* Mlles AFFRE, DIONOT, FÉLIX et MASSON ; MM. BAY, CHAZAL, CROZES, EDEE, FOUCHÉ, GIRARD, GUITTON, ITARD, MINOIS, ROSTOLLAND, THOVERT, WALUSINSKI.

*Excusés :* BERTRAND, FAVRELLE, LEGRAND, MAILLARD.

La séance est ouverte à 14 h. 30.

1. *Modifications aux statuts et au règlement intérieur.* — Mlle AFFRE, chargée de suivre cette question, a reçu des projets de MM. CHAZAL et WALUSINSKI. Elle en fait la synthèse et le Comité arrête les propositions à soumettre au vote de l'Assemblée générale 1956 : voir plus loin le texte de ces propositions.

2. RÉFORME DES HORAIRES ET DES PROGRAMMES. — M. WALUSINSKI rend compte de la constitution, par M. le Directeur général du Second Degré, d'une Commission à laquelle il a été invité à se joindre en tant que président de l'A.P.M. Cette Commission a tenu deux réunions sous la présidence de M. le Doyen PÉRÈS ; elle réunit MM. les Inspecteurs généraux de Mathématiques, M. l'Inspecteur d'Académie CAGNAC, des professeurs de l'Enseignement Supérieur, MM. FAVARD, GAUTHIER, THIRY et ZAMANSKY, ainsi que des professeurs de l'Enseignement du Second Degré, MM. BASTIEN, MONJALLON, DOLLON et THÉRON. Des échanges de vues ont eu lieu sur les programmes des classes du second cycle qui visent en particulier à introduire la trigonométrie moins les résolutions de triangles et tout le calcul des dérivées en Première ; en Mathématiques Élémentaires, on introduirait plus systématiquement le calcul vectoriel. D'autres réunions de cette Commission sont prévues pour compléter ces utiles confrontations des desiderata de l'Enseignement Supérieur et des exigences pédagogiques de l'Enseignement du Second Degré.

D'autre part, le Comité, dans sa réunion du 20 octobre, avait organisé des séances d'étude des programmes. Ces séances ont eu lieu les 17 novembre, 1<sup>re</sup> et 8 décembre, au Lycée Saint-Louis. Elles ont permis un large échange de vues et la mise au point de certains vœux qui sont maintenant soumis au Comité.

En premier lieu le Comité adopte un vœu à transmettre immédiatement à la Direction du Second Degré et qui est ainsi formulé :

*Le Comité de l'A.P.M.E.P. prend acte avec satisfaction de la circulaire qui précise et régularise l'organisation des séances de travaux pratiques de Mathématiques dans la classe de Mathématiques Supérieures.*

*Considérant :*

1° *que dans toutes les classes du Second Degré il serait également nécessaire, ou bien de guider les élèves dans la recherche des problèmes, ou bien de multiplier les exercices d'application des théories étudiées dans le cours ;*

2° *que l'organisation de telles séances a pu déjà être réalisée dans les classes pilotes ;*

3° *que l'efficacité pédagogique exige que ces séances soient dirigées par le professeur de Mathématiques normalement chargé de la classe, mais avec un nombre réduit d'élèves ;*

4° *que le travail ainsi effectué par les élèves sous la direction des maîtres remplacerait avantageusement la plus grande partie ou la totalité (au moins dans le premier cycle) des devoirs à la maison,*

*le Comité de l'A.P.M.E.P. émet le vœu que des séances hebdomadaires de travaux pratiques de Mathématiques (durée : une heure) avec effectif maximum de quinze élèves, soient organisées de la Sixième aux classes terminales, dès la rentrée 1956.*

Paris, le 22 décembre 1955.

En second lieu, le Comité, après discussion générale à laquelle participent en particulier Mlles MASSON et DIONOT et MM. CROZES, FOUCHÉ et WALUSINSKI, décide de soumettre au vote des adhérents, pour l'Assemblée générale 1956, des « Principes généraux à inscrire dans une réforme de l'Enseignement », que l'on trouvera un peu plus loin.

A propos de la coordination des Mathématiques et des Sciences physiques, Mlle DIONOT insiste pour que soient toujours enseignées par le professeur de Mathématiques les notions mathématiques utiles à la physique, et avant que le Collègue de Physique ait à les utiliser.

D'autres questions sont proposées à l'examen et au vote des adhérents à propos de certaines parties des programmes (voir le questionnaire ci-après).

Enfin, pour la rédaction détaillée des programmes, entreprise qui ne peut être achevée avant l'Assemblée générale, le Bureau est chargé de provoquer la réunion d'une Commission des Programmes, dont les membres volontaires seront chargés de mettre au point des rapports que le *Bulletin* publiera. La création de cette Commission sera ratifiée par l'Assemblée générale qui pourra aussi préciser le sens de son travail.

3. *Stage de Sèvres.* — Lors de l'audience qu'il a accordée au Bureau de l'A.P.M., M. BRUNOLD a proposé à l'A.P.M. d'organiser un stage sur les problèmes de la pédagogie des Mathématiques à Sèvres au cours de la présente année scolaire. M. WALUSINSKI propose de profiter de cette occasion qui permettra à des Collègues des départements de participer à ces discussions.

Le choix définitif de la date reste réservé ; il dépend du calendrier des réunions au Centre International d'Etudes Pédagogiques. Dans toute la mesure du possible, le stage sera proposé pour les derniers jours du second trimestre : les classes en seront moins perturbées et les Collègues qui auront participé au stage pourront aussi participer à notre Assemblée générale ordinaire, selon la proposition de M. EDDE.

Une Commission d'organisation, composée de Mlles DIONOT, FÉLIX, MASSON, de MM. BIGUENET, CHAZAL, ITARD, FOUCHÉ et WALUSINSKI, sera convoquée par ce dernier pour mettre au point le programme des débats et des conférences.

4. *Situation de l'Association.* — Selon le rapport adressé par M. LEGRAND, trésorier, il y a 1 687 cotisations rentrées à la date du 15 décembre (contre 1 102 et 1 159 aux mêmes dates de 1954 et 1953 respectivement). Il est toutefois noté que le service de propagande du *Bulletin*, en octobre dernier, n'a pas donné les résultats qu'on aurait pu en attendre.

Un rappel sera envoyé aux retardataires dont les adresses seront retirées du fichier en cas de non paiement de leurs cotisations à la date du 1<sup>er</sup> janvier (règlement intérieur, art. 1).

5. *Sur l'Enseignement Technique.* — A la suite de l'audience accordée au Bureau de l'A.P.M. par le Directeur de l'Enseignement Technique, il paraît nécessaire que notre Association précise sa position vis-à-vis des deux questions suivantes : 1<sup>re</sup> agrégation de Mathématiques de l'Enseignement Technique ; 2<sup>o</sup> mouvement des professeurs du Second Degré et du Technique dans les deux ordres d'enseignement. Sur proposition de MM. BAY, CHAZAL et WALUSINSKI, il est décidé de demander à M. BIGUENET de présenter un rapport sur ces questions au prochain Comité.

#### 6. *Questions diverses.*

\*M. WALUSINSKI rend compte de l'excellent accueil qu'il a reçu avec M. l'Inspecteur général DESFORGE et quelques Collègues français, au Congrès de la Société Belge de Professeurs de Mathématiques (voir, dans ce *Bulletin*, les « Etudes »). Cette rencontre souligne l'intérêt des relations internationales, sur le plan des recherches pédagogiques.

\* Liaison avec les Physiciens et les Naturalistes : M. LE RÉVÉREND, Président de l'Union des Physiciens, nous invite à participer à une réunion commune avec des membres du Bureau de son Union et des membres du Bureau de l'Union des Naturalistes. Objet de la réunion : structure générale de l'enseignement scientifique ; étude en commun des programmes des classes terminales. Mlle FÉLIX, MM. BAY et WALUSINSKI représenteront le Comité de l'A.P.M. à cette réunion, le 7 janvier prochain.

\* Liaison avec la Société Mathématique de France : des signes heureux d'une liaison plus étroite avec cette Société font espérer de prochaines réalisations ; Mlle

FÉLIX et M. WALUSINSKI ont rencontré M. LELONG, Secrétaire de la S.M.F. ; l'organisation d'une série de conférences, destinées aux professeurs de Mathématiques, a été projetée ; le *Bulletin* de l'A.P.M. publiera ces conférences afin que tous nos Collègues puissent en profiter.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée à 17 h. 15. Elle est suivie d'une réunion du Comité de rédaction du *Bulletin* (mise au point du numéro 175).

## Pour l'Assemblée Générale 1956

Dans sa réunion du 22 décembre 1955, le Comité a décidé de soumettre à l'examen des membres de l'A.P.M. des modifications aux Statuts et au Règlement Intérieur, ainsi que des textes relatifs aux programmes et aux horaires de Mathématiques. Le *Bulletin* 176, du 1<sup>er</sup> mars, précisera les modalités de vote. Mais il a paru bon de présenter ces textes aussitôt pour en permettre un examen critique plus approfondi.

### A. Modifications aux Statuts.

Art. V, deuxième ligne : suppression des mots « aux vacances de Pâques » (1).

Art. VI, fin du second paragraphe, addition proposée : « Lorsqu'un membre du Comité cesse de faire partie de celui-ci, il est remplacé, pour la fin de son mandat, par celui des candidats non élus qui a obtenu le plus de voix aux dernières élections. Si toutefois la précédente condition désignait des candidats *ex-æquo*, ils seraient départagés par le tirage au sort. » (1).

Art. VI, second paragraphe, nouvelle rédaction proposée : « Le Comité se compose de trente-deux membres élus pour quatre ans à la majorité des suffrages et à bulletins secrets, par l'Assemblée générale ordinaire. En cas d'*ex-æquo* aux élections les candidats seront départagés par tirage au sort. » (2).

### B. Modifications au règlement intérieur.

Art. I : substituer le « Premier décembre » au 31 décembre (3).

Art. II : ajouter, à la fin : « Le Comité nomme les membres d'honneur de l'Association. » (4).

Art. V : addition proposée : « Dans chaque établissement, les membres peuvent constituer une section locale qui désigne un ou plusieurs correspondants chargés d'assurer les relations avec le Comité ou le Bureau ou la Section régionale de leur Académie. » (5).

---

(1) Ces propositions reprennent des textes votés par l'Assemblée générale du 18 mars 1951, mais qui n'ont pu être appliqués, faute d'avoir été enregistrés dans les délais réglementaires.

(2) L'augmentation du nombre des adhérents nécessite une meilleure représentation des membres de l'Association.

(3) Cette mesure a pour but de simplifier l'administration de l'A.P.M. et de permettre, chaque année, de n'envoyer les fascicules d'énoncés qu'aux seuls membres en règle avec la trésorerie, sans retard.

(4) M. MAILLARD a signalé qu'autrefois des membres d'honneur étaient désignés. Il vaut mieux que le règlement intérieur le prévoit.

(5) La constitution de sections locales devrait développer la vie de l'Association ; la désignation de correspondants devrait faciliter la diffusion d'informations ou de périodiques.

## Principes généraux à inscrire dans la Réforme

1. Il ne peut y avoir progrès de la pédagogie des Mathématiques que dans une classe d'un effectif maximum de trente élèves.

Dans toute classe d'effectif supérieur, le meilleur professeur ne peut que limiter la gêne que les élèves les moins aptes opposent, par leur nombre, au travail des mieux doués.

2. Il n'y a d'enseignement des Mathématiques pour tous les élèves d'une classe d'effectif raisonnable que si l'horaire hebdomadaire de cours laisse le loisir :

a) de faire participer l'ensemble des élèves à la « découverte » ;

b) de multiplier les exercices d'application qui éclairent les divers aspects d'une théorie et permettent de se familiariser avec elle.

Cet horaire hebdomadaire ne peut être inférieur à deux heures dans les classes non-scientifiques du second cycle, à cinq heures dans les classes du premier cycle et dans les classes d'un éventuel enseignement court, et à six heures dans les classes scientifiques du second cycle. Ces horaires comprennent une heure hebdomadaire de travaux pratiques de Mathématiques selon le principe 3. Pour la classe de Mathématiques Élémentaires, l'heure de travaux pratiques serait à ajouter à l'horaire actuel qui ne peut être diminué.

3. Il n'y a d'enseignement efficace des Mathématiques que si des séances hebdomadaires de travaux pratiques, avec effectif réduit de 15 élèves au maximum, permet au professeur de guider le travail de chaque élève pour lui apprendre à travailler seul.

4. La coordination de l'enseignement des Mathématiques avec celui des Sciences Physiques exige que les notions mathématiques utiles pour ce dernier aient été étudiées un an auparavant en classe de mathématiques.

5. La coordination des programmes de l'Enseignement du Second Degré avec ceux de l'Enseignement Technique doit être assurée pour faciliter les changements d'orientation quand ils sont utiles, en particulier à l'âge de l'entrée en Quatrième, à celui de l'entrée en Seconde et pour le choix de la classe terminale.

## Questions sur les programmes de diverses classes

1. Convenez-vous que les programmes du premier cycle ne doivent pas comporter d'augmentation ?

2. Le professeur de Mathématiques doit-il être chargé, en Sixième, d'enseigner les éléments d'astronomie générale qui figurent au programme de géographie de cette classe ?

3. Des notions intuitives de géométrie dans l'espace doivent-elles ou peuvent-elles être données dans les classes du premier cycle ? (non pas en vue d'augmenter les programmes, mais dans l'intention de donner des exemples d'utilisation des notions acquises, ou bien dans le but de provoquer, par la construction de modèles, la recherche des propriétés des figures planes).

4. L'étude et l'utilisation systématiques des vecteurs, en Seconde, doivent-elles être inscrites dans les programmes ?

5. La notion d'angle généralisé orienté d'axes peut-elle être inscrite dans le programme de Seconde ? Même question pour les angles généralisés de droites ?

6. Une refonte des programmes de géométrie de Seconde et de Première ne doit-elle pas éviter la complète séparation actuelle entre géométrie plane et géométrie dans l'espace (au détriment des connaissances des élèves en géométrie plane, en Première et par conséquent à la veille de l'entrée en Mathématiques Élémentaires) ?

Ne pourrait-on réserver pour la classe de Première tout ce qui est métrique ?

### Quelques lettres....

De notre Collègue J.-M. CHEVALLIER, professeur au Lycée Marcelin-Berthelot, et qui est, comme on sait, un fervent défenseur du bilinguisme :

*« Comme vous avez pu le constater à la lecture de mes articles, la distinction « classique-moderne », ne m'impressionne guère, et bien que je sois sans doute plus favorable au latin que vous-même, cette manie de tout vouloir ramener à un enseignement « avec », ou un enseignement « sans » me paraît périmée comme à vous et à tout homme un peu réaliste.*

*Voici, en gros, comment je vois la question. Suivant une suggestion déjà faite dans le Bulletin, nous pourrions sans doute laisser au français une place à part, mais réclamer la parité avec la discipline la plus favorisée, dans toutes les classes non-spécialisées. Je ferais toutefois une exception en Sixième, non parce que je suis bilinguiste, mais parce que je crois vraiment que l'initiation à une langue est un problème pédagogique à part, où la multiplication des « heures de contact » (notion américaine), surtout pour un cerveau tout jeune, est un gain considérable pour l'avenir et peut nous rapporter plus à nous-mêmes, en temps disponible, dans les grandes classes, que ne nous rapporterait un emploi du temps chargé de Mathématiques en Sixième.*

*Je pense qu'au lieu des distinctions actuelles, il y aurait avantage à distinguer, en Quatrième et en Troisième, un enseignement pré-spécialisé vers les lettres ou vers les sciences. En ce qui nous concerne, pas des programmes très différents d'une section à l'autre, car les vocations sont encore mal fixées et les aiguillages doivent rester possibles, mais des horaires différents, permettant des exercices pratiques (antichambre de la physique, dessin...). Naturellement, en Seconde et en Première, il faut de vrais scientifiques, avec horaires, programmes et sanctions convenables : mais il ne faut pas oublier tout de même que les horaires ne sont pas extensibles à volonté et qu'on ne peut pas mettre un frein à l'équatorial... »*

De notre Collègue Jacques WEIL, professeur à l'Ecole Normale de Carcassonne, quelques remarques critiques sur le Bulletin 170. M. WEIL trouve que les deux thèses s'affrontant dans la polémique sur « la tyrannie des Mathématiques » sont toutes deux controuvées par les recherches modernes en logique et en psychologie :

*« D'une part, il est parfaitement exact que l'enseignement préparatoire aux Ecoles d'ingénieurs souffre d'un esprit pan-mathématique injustifiable dont l'effet est de priver la recherche scientifique et la technique d'individus très doués ; c'est un mathématicien éminent, M. FRÉCHET, qui le rappelait récemment dans une lettre adressée à une revue scientifique. Il y a un immense champ de recherche, en chimie organique, par exemple, qui ne requiert que des connaissances et une formation mathématique sommaires. Je puis vous nommer un chercheur américain au moins, professeur d'Université fort estimé dans sa branche, dont la culture est celle de Mathématiques Élémentaires (et encore). D'autre part, il est reconnu inexact que les Mathématiques développent particulièrement le jugement ; elles ne constituent qu'une application parmi d'autres de la logique et somme toute assez restreinte. La richesse de l'expérience ne se laisse pas enfermer dans le mécanisme restreint de la condition nécessaire et suffisante. »*

*« ...La psychologie n'a produit aucun travail de recherche sur l'éducation du jugement et le rôle des Mathématiques dans cette éducation ; il en résulte que les discussions à bâtons rompus sur ces sujets sont purement à prioristes et qu'on gaspille le précieux papier de la Revue en dialogues de sourds sur la question. Un seul fait est certain, c'est l'existence de brillants chimistes par exemple, qui sont très peu cultivés en Mathématiques.*

*Un seul sujet fort peu traité et dont l'étude rendrait de précieux services aux débutants est celui-ci : comment faire une classe de Mathématiques ? Je suis frappé par le petit nombre de travaux consacrés à cette question dans les ouvrages de l'Enseignement primaire ou Secondaire. »*

M. WEIL ajoute :

*« Pour en revenir au Bulletin, je crois qu'un des dangers qui le menacent, est la dispersion. Ne devrait-il pas procéder par numéros spéciaux, plutôt que par des publications régulières où l'on trouve tout et rien ? Un numéro spécial sur la géométrie en Première, par exemple, un autre sur l'analyse en Sciences Expérimentales, etc... ou tout au moins, des numéros partiellement spéciaux. »*

Donner dans la partie « Etudes » un ensemble de textes sur un sujet déterminé ne répond-il pas à cette dernière conception ?

### **Le bloc-notes de L'A.P.M.**

1. *Le numérotage des Bulletins.* — Des Collègues se sont étonnés de recevoir le *Bulletin* 174 avant les *Bulletins* 172 et 173. L'explication est simple : ces numéros avaient été réservés aux *Annales du B.E.P.C. et du Baccalauréat*, qui nous sont fournies par la Maison Vuibert et dont l'expédition s'est trouvée un peu retardée.

2. *La Commission des programmes.* — Les Collègues désirant participer aux travaux de cette Commission sont priés d'écrire au Président de l'A.P.M. qui les convoquera à la première réunion, en février.

Les sections régionales sont priées d'examiner de quelle façon elles peuvent s'associer à cette tâche de longue haleine.

Il faudra fractionner le travail par classe et ensuite coordonner. Mais certains Collègues peuvent avoir des idées intéressantes sur la progression de l'enseignement de certaines notions à travers plusieurs classes. Il n'y a, *a priori*, que des avantages à voir foisonner les initiatives. On ne coordonnera, pour conclure, que s'il y a quelque chose à coordonner.

3. *L'activité de la Société Mathématique de France.* — Les réunions ont lieu à l'Institut Poincaré, salle 116.

— Lundi 16 janvier : Assemblée générale ; Conférence par M. BRELOT : Etudes axiomatiques du problème de Dirichlet et applications.

— Séminaire d'histoire des Mathématiques :

2 février à 15 h. 30, J. ITARD : Les axiomes d'Euclide et la critique historique.

Jeu. 16 février, à 15 h. 30, F. RUSSO : La méthode de Sacchari et le postulat des parallèles.

4. *La nouvelle édition de « La mesure des grandeurs » de Lebesgue.* — Les inscriptions recueillies par l'A.P.M. sont transmises à la maison Gauthier-Villars, chargée de la distribution de l'ouvrage. Pour toute nouvelle inscription, s'adresser directement à Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris, 6<sup>e</sup>.

\* **Le stage de Sèvres.** — Au moment où ce *Bulletin* est composé, il n'est pas encore possible de préciser les détails de l'organisation du stage sur l'enseignement des Mathématiques qui aura lieu à Sèvres du 22 au 24 mars 1956. Une circulaire sera adressée à tous les membres de l'A.P.M. pour leur donner, en temps utile, les infor-

mations nécessaires. Sans plus attendre, que les Collègues intéressés par le stage le signalent en nous écrivant.

D'ores et déjà nous sommes heureux de pouvoir annoncer deux conférences. M. J. ITARD parlera de l'histoire de l'algèbre et de l'introduction de ses notations. M. L. SCHWARTZ, professeur à la Sorbonne, parlera du symbolisme et du langage en Mathématiques.

### CANDIDATURES POUR LE RENOUVELLEMENT DU COMITÉ

Les Collègues désirant poser leur candidature au prochain renouvellement partiel du Comité sont priés de se faire connaître avant le 15 février dernier délai (de telle façon que leur candidature puisse être effectivement signalée dans le Bulletin 176, qui paraîtra les premiers jours de mars).

### Réponses à quelques questions....

QUESTION. — *Quels sont les ouvrages d'arithmétiques qui peuvent, aujourd'hui, suppléer à l'absence d'un livre tel que celui de TANNERY, épuisé chez l'éditeur ?*

RÉPONSE par notre Collègue CROZES (Henri-IV) :

L'ouvrage d'arithmétique le plus proche de TANNERY est celui de H. HUMBERT (Librairie Vuibert, 1922) ; il contient de nombreux compléments (par rapport au programme actuel de Mathématiques Élémentaires). Sa rédaction est un peu lente et son style ancien, mais il contient beaucoup de choses.

En fait, il existe très peu d'ouvrages de fond ; on peut prendre un ouvrage ancien tel que le TANNERY ou le HUMBERT, mais il faut faire une véritable traduction en langage moderne pour le rendre compréhensible à l'élève de 1955.

Autres références :

- pour l'axiomatique, DUBREIL, *Algèbre* (Gauthier-Villars) ;
- pour les opérations, CHÂTELET, *Arithmétique et algèbre* (Presses Universitaires de France) ;
- pour les congruences, GAUSS, *Recherches arithmétiques* ;
- pour les exercices, KRAITCHIK, *Introduction à la théorie des nombres* (Gauthier-Villars).

### Questions sans réponses

Rappelons que, sous cette rubrique, nous insérons toute question posée par un Collègue et susceptible de provoquer d'intéressantes ou d'utiles remarques de la part de nos lecteurs.

\* *Peut-on démontrer la règle de la racine carrée en classe de Troisième ?*

### Errata

p. 182 (3<sup>e</sup> ligne en remontant), lire :  $0,98\ 908,5 < \dots$

p. 183 (paragraphe 5, 3<sup>e</sup> ligne), lire : coupe BD en M et AC en P ; (même paragraphe, dernier alinéa), lire : la mantisse immédiatement inférieure à  $98\ 908,1$  est encore  $98\ 905$ , dont la borne inférieure est  $98\ 904,5$  ; la différence est donc 3,6.

**GAUTHIER-VILLARS**

Éditeur - Imprimeur - Libraire

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS 6<sup>e</sup> - DANton 05-10

---

**BORN Max**

**L'Expérience et la théorie  
en Physique**

In-8 (14-22) 51 pages - 1955 . . . . . **250 Francs**

**DAMIEN René**

**Théorème sur les surfaces d'onde  
en optique géométrique avec une note  
sur le miroir intégral**

In-8 (14-22,5) 34 pages-1955 . . . . . **900 Francs**

**DEQUOY Nicole**

**Mécanique à l'usage des classes  
de Mathématiques Élémentaires**

In-8 (16-25) de XII-195 pages-63 figures-1954 **950 Francs**

**LAMOUCHE André**

**La théorie harmonique. Le principe de  
simplicité dans les Mathématiques  
et dans les Sciences Physiques**

In-8 (16-24) - 484 pages - 1954 . . . . . **1.800 Francs**

**DELAGRAVE**

**Vient de paraître**

**GÉOMÉTRIE  
DESCRIPTIVE**

par  
BRACHET, DUMARQUÉ, ROSTOLLAND  
GENESTINE

Classe de 1<sup>re</sup> Technique  
Mathématiques et technique  
préparation aux Arts et Métiers

Un volume (14,5×20), broché. 890 »  
cartonné. 990 »

**MATHÉMATIQUES**

par

SHAEFFER et LEBAILLE

Classe de Quatrième

Un volume (14,5×20)

**Vient de paraître**

**MASSON & C<sup>ie</sup>, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6<sup>e</sup>**

**COURS  
DE DESSIN TECHNIQUE**

par

**R. RUBIO DE TERAN**

Ancien élève de l'E. N. S. E. T.  
Professeur au Collège National Technique de Dijon

**VIENT DE PARAÎTRE :**

**TOME 2. — Géométrie descriptive  
par la méthode directe**

**1<sup>re</sup> fasc. :** REPRÉSENTATION DES OBJETS ET DÉTERMINATION DE LEURS ÉLÉMENTS  
GÉOMÉTRIQUES (POLYÈDRES - CYLINDRE - CONE DE RÉVOLUTION). — Un vol. (15,5 × 22,5)  
avec 318 figures et exercices ; broché **980 F** — cartonné **1.100 F**

**2<sup>e</sup> fasc. :** SURFACES COURBES . . . . . En préparation

**Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public**  
**29, rue d'Ulm, Paris (5<sup>e</sup>)**  
**Paris, Cc. 5.708-21**

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

|                                                                        |         |
|------------------------------------------------------------------------|---------|
| Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ... | 300 F   |
| Prix de l'abonnement au <i>Bulletin</i> .....                          | 1 000 F |
| Prix du numéro .....                                                   | 200 F   |

*Présidents d'Honneur*

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

**Bureau :**

|                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Président :</i>                           | M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11 <sup>e</sup> ).<br>OBE. 56-95.                                                                                                                                                                              |
| <i>Vice-Présidents :</i>                     | Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14 <sup>e</sup> ).<br>M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelin, Neuilly-sur-Seine.<br>M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris (9 <sup>e</sup> ).<br>M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14 <sup>e</sup> ). |
| <i>Secrétaires :</i>                         | M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16 <sup>e</sup> ).<br>M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14 <sup>e</sup> ).<br>M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).                                                               |
| <i>Trésorier :</i>                           | M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).                                                                                                                                                                                                    |
| <i>Comité de rédaction du « Bulletin » :</i> | Mlle FÉLIX, MM. CHAZAL, GIRARD, THOVERT, WALUSINSKI.                                                                                                                                                                                                                |

**Comité :**

*Membres élus*

*Sortants en 1956 :* Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (*Fac. Sc. Toulouse*) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

*Sortants en 1957 :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (*Nice*) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (*Lyon, Ampère*).

*Sortants en 1958 :* Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. Saint-Ouen*) ; M. CHAZAL (*Saint-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (*Compiègne*) ; M. WALUSINSKI (*Voltaire*).

*Sortants en 1959 :* Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

*Membres de droit*

Mme NICOUX (*Lyon, Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (*Montpellier*) Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*).

**Rapporteurs**

*Classes Nouvelles :* Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. BIGUENET ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (*Sciences Expérimentales*) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques : Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales ; M. EDDE. — *Baccalauréat :* M. FAVRELLE. — *Grandes Ecoles :* M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

**Correspondants**

*Aix-Marseille :* M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (*Montpellier*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULD (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. EHRLHART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (*Casablanca, Lyautéy*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

EDITIONS DIDIER & RICHARD  
GRENOBLE (Isère)

# COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

*Professeurs au Lycée de Grenoble*

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

|                                                                                                     |         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| ARITHMÉTIQUE 6° ( <i>Jusqu'à épuisement</i> ) .....                                                 | 220 fr. |
| <b>ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour</b> .....                                         | 330 »   |
| <i>Corrigé des exercices de 6°</i> .....                                                            | 300 »   |
| DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5° .....                                                                   | 185 »   |
| GÉOMÉTRIE 5° et 4° .....                                                                            | 400 »   |
| ARITHMÉTIQUE 5° .....                                                                               | 350 »   |
| <i>Corrigé des exercices de 5°</i> .....                                                            | 300 »   |
| ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4° .....                                                                    | 300 »   |
| ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3° .....                                                                    | 350 »   |
| GÉOMÉTRIE 3° .....                                                                                  | 325 »   |
| GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3° .....                                                                          | 800 »   |
| (pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de<br>420 pages <b>cartonné</b> ). |         |
| COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.                                             | 100 »   |
| ALGÈBRE 2° A.B.C.M. ....                                                                            | 500 »   |
| GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M. ....                                                                          | 465 »   |
| ALGÈBRE 1 <sup>re</sup> A.B. ....                                                                   | 180 »   |
| ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1 <sup>re</sup> C.M. ....                                                  | 550 »   |
| GÉOMÉTRIE 1 <sup>re</sup> A.B.C.M. ....                                                             | 500 »   |

## POUR LES EXAMENS :

|                                                                                               |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT,<br>1 <sup>re</sup> partie, A.B.C.M. .... | 390 » |
| LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS                                    | 410 » |