REMARQUE SUR LE THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

Dans les manuels qui sont mis entre les mains des élèves, le théorème de Ptolémée est le plus souvent formulé de la manière suivante :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe ABCD soit inscriptible est que l'on ait la relation

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

Cet énoncé, certes correct, peut être approfondi à peu de frais.

Dire que ABCD est inscriptible et convexe, équivaut en effet à dire que les points A, B, C, D, sont sur un même cercle (Γ), la demi-droite AC étant située dans l'angle des demi-droites AB et AD.

Transformons la figure par une inversion de pôle A et de puissance quelconque. (Γ) a pour homologue une droite (γ), parallèle à sa tangente en A. Soient b, c, d les homologues respectifs de B, C, D. Pour que ABCD soit inscriptible et convexe, nous voyons donc qu'il faut et il suffit que les points b, c, d soient alignés, *c étant entre b et d*. Or, une condition nécessaire et suffisante pour que c appartienne au *segment* bd est : $bc + cd = bd$, soit :

$$\frac{BC}{AB.AC} + \frac{CD}{AC.AD} = \frac{BD}{AB.AD}$$

soit encore : $AD.BC + AB.CD = AC.BD$. D'où le théorème :

Pour qu'un quadrilatère ABCD soit *convexe et inscriptible*, il faut et il suffit que l'on ait la relation :

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

énoncé plus puissant que celui qui est formulé au début de cette note.

M. Bonn, *élève-professeur au C.P.R. de Nancy.*