LA FORMULE Log ab = Log a + Log b en Sciences Expérimentales

Nous allons montrer que la différence $\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b$ garde la même valeur lorsqu'on multiplie a et b par un même nombre.

Nous marquons sur le graphique de la fonction $\frac{1}{x}$ les points d'abscisse a et b et l'aire mixtiligne égale à $\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b$. On peut considérer cette aire comme la limite de la somme des aires des rectangles inférieurs (par exemple) obtenus en partageant l'intervalle $[a, b]$ en un certain nombre n de parties égales, lorsque n augmente indéfiniment.

Transformons par une homothétie de centre O et de rapport k, non pas la courbe, ni les rectangles, mais les côtés de ces rectangles qui sont portés par l'axe Ox et construisons ensuite les rectangles inférieurs, comme précédemment, sur la nouvelle division obtenue. A l'abscisse a correspond l'abscisse ka, à b, kb. Si λ est l'une des abscisses insérées entre a et b, $k\lambda$ est l'abscisse correspondante. A chaque rectangle, de dimensions h et $\frac{1}{\lambda}$, correspond un rectangle de dimensions kh et $\frac{1}{k\lambda}$. Deux rectangles correspondants sont donc équivalents.

Il en résulte que $\mathrm{Log}\,\lambda a - \mathrm{Log}\,\lambda b = \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b$ (1).

Faisons dans (1) $\lambda = \frac{1}{b}$, $\mathrm{Log}\,\frac{a}{b} = \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b$ (2), puis, dans (2) $a = 1$ $\mathrm{Log}\,\frac{1}{b} = -\mathrm{Log}\,b$ (3) et, enfin, dans (2) $b = \frac{1}{c}$, $\mathrm{Log}\,ac = \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,c$ (4).

G. Delpla (*Lycée H.-Poincaré, Nancy*).