

FOYERS ET DIRECTRICES DES CONIQUES

I. Directrice d'une conique à centre Γ .

Supposons traitée l'étude des coniques à centre, à partir de la définition monofocale suivante. (Φ) étant un cercle de centre F et de rayon $2a$, F' un point tel que $FF' = 2c$, c étant différent de 0 et de a , le lieu des centres des cercles passant par F' et tangents à (Φ) est une conique Γ admettant pour centre de symétrie le milieu O de FF' .

On a alors montré que, si P est un point extérieur à Γ , le cercle (Π) de centre P passant par F' coupe (Φ) en deux points φ et φ' . Les médiatrices des segments $F'\varphi$ et $F'\varphi'$ sont les tangentes à Γ issues de P , une asymptote étant regardée comme tangente singulière. Les points de contact M et M' , s'ils existent, sont sur les droites $F\varphi$ et $F\varphi'$.

Le cas de la parabole, s'il a déjà été étudié, invite alors, non seulement à la découverte du cercle orthoptique, mais aussi à la recherche des points P tels que M et M' soient alignés avec F . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la droite $\varphi\varphi'$ passe par F . Cette droite étant l'axe radical de (Φ) et de (Π) , la condition précédente équivaut à la relation

$$(1) \quad PF'^2 - PF^2 = 4a^2,$$

F et F' étant supposés distincts ($c \neq 0$), les points cherchés existent. Leur lieu est une droite D qu'on appellera directrice de la conique Γ , relativement au foyer F . Comme pour une parabole, la droite PF est perpendiculaire à FM et FM' .

La droite D est perpendiculaire à la droite FF' en un point K défini, d'après (1) par

$$(2) \quad \overline{OF} \cdot \overline{OK} = a^2.$$

Elle est donc la polaire de F par rapport au cercle principal de Γ , et ne passe pas par F ($c \neq a$). Les propriétés de la division harmonique montrent que les sommets focaux A et A' de Γ sont deux points distincts tels que

$$(3) \quad \frac{AF}{AK} = \frac{A'F}{A'K} = \frac{OA}{OK} = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a}$$

Le nombre $e = \frac{c}{a}$, positif par hypothèse, et différent de 1, est l'excentricité de Γ .

II. Nouvelle définition de Γ .

Les remarques qui précèdent peuvent suggérer la construction suivante. Soit M un point quelconque du plan de Γ , H sa projection orthogonale sur D .

Si M est sur la droite FF' , on a $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ à la condition nécessaire et suffisante que M soit en A ou A' .

Si M n'est pas sur FF' , la perpendiculaire en F à FM rencontre D en P et la perpendiculaire à FP , menée par F' , coupe en f la droite MF . Si M n'est pas sur D , on a $(HF, HM) = (PF, PM) = (fF, fF')$ et $(MF, MH) = (Ff, FF')$ modulo π .

Les triangles MFH et $FF'f$ sont donc semblables, inversement d'ailleurs, et

$$(4) \quad \frac{MF}{MH} = \frac{FF'}{Ff}$$

D'autre part, $Mf^2 - MF'^2 = Pf^2 - PF'^2 = PF^2 + Ff^2 - PF'^2$, d'où

$$(5) \quad Mf^2 - MF'^2 = Ff^2 - 4a^2,$$

ce qui montre que f est le pied de l'axe radical du cercle (Φ) et du cercle (μ) de centre M passant par F' .

Suivant que M est sur Γ , intérieur à Γ , ou extérieur à Γ , (μ) est tangent à (Φ) , n'a aucun point commun avec (Φ) , ou coupe (Φ) . Cela se traduit par $Ff = 2a$,

$Ff > 2a$, ou $Ff < 2a$, c'est-à-dire, en vertu de (4), par $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$, $\frac{MF}{MH} < \frac{c}{a}$ ou

$\frac{MF}{MH} > \frac{c}{a}$. Les réciproques sont immédiates. Les points de D étant extérieurs à Γ , on

peut énoncer, en toute généralité :

Toute conique à centre Γ , autre qu'un cercle, est le lieu des points dont le rapport des distances à un foyer F et à la directrice associée D est une constante égale à l'excentricité de Γ . Les points intérieurs à Γ sont les points plus proches de F que de D .

Réciproquement, si on se donne un point F , une droite D ne passant pas par F , et un nombre e positif, différent de 1, on peut construire la projection K de F sur D , puis les points A et A' partageant le vecteur \overrightarrow{FK} dans le rapport e . Il existe une conique Γ de foyer F et d'axe focal AA' . D'après (3), la directrice relative à F est D , et l'excentricité e . Γ est le lieu des points dont le rapport des distances à F et D est égal à e .

Ainsi est établie, en excluant soigneusement les cas exceptionnels, l'équivalence de deux définitions ponctuelles des coniques à centre. La nouvelle définition, étendue au cas où $e = 1$, englobe la parabole et constitue une définition commune aux trois coniques. Elle permet une étude complète et simultanée de ces courbes. Appliquons-la à une question compliquée du point de vue bifocal.

III. Convexité.

Soient M et M' deux points distincts sur une conique Γ , ellipse, parabole, ou hyperbole, définie par un foyer F , la directrice D , et l'excentricité e .

Si la corde MM' est parallèle à D , il est évident que les points du segment MM' sont intérieurs à Γ . Si la droite MM' fait avec FF' un angle aigu ou nul θ , et rencontre D en U , les points M et M' sont tels que $\frac{MF}{MU} = \frac{M'F}{M'U} = e \cos \theta$.

Supposons $e \cos \theta \neq 1$. M et M' sont alors sur le cercle de diamètre LL' , L et L' étant les points qui partagent le vecteur \overrightarrow{FU} dans le rapport $e \cos \theta$.

Si $e \cos \theta < 1$, U est extérieur au cercle. On sait, d'autre part, que tout point m du segment MM' , intérieur au cercle, vérifie l'inégalité $\frac{mF}{mU} < e \cos \theta$. Sa distance

mh à D vérifie donc $\frac{mF}{mH} < e$, et m est intérieur à Γ . Au contraire, si m est extérieur au segment MM' , il est extérieur à Γ .

Si $e \cos \theta > 1$, U est intérieur au cercle de diamètre LL' . Mais, dans ce cas, tout point m intérieur au cercle est caractérisé par $mF > (e \cos \theta) mU$. Les points m du segment MM' vérifient donc l'inégalité $mF > e \cdot mh$, et sont extérieurs à Γ . Au contraire, m extérieur au segment MM' est intérieur à Γ .

Ce deuxième cas n'étant réalisable que pour $e > 1$, et si M et M' sont de part et d'autre de D , sur deux branches différentes d'une hyperbole, il en résulte que :

Une ellipse, une parabole, une branche d'hyperbole, sont des courbes convexes.

Remarques : 1° Le cas $e \cos \theta = 1$ met en évidence les directions asymptotiques d'une parabole ou d'une hyperbole, et une propriété des sécantes parallèles à une asymptote.

2° La figure utilisée permet la discussion de l'intersection d'une conique et d'une droite Δ . Si φ est l'angle aigu de Δ et D , I la projection orthogonale de F sur Δ , on

a très rapidement $\frac{IF}{IK} = \frac{\sin \varphi}{\cos \theta}$ et l'existence des points communs équivaut, dans tous

les cas, à la condition $\frac{IF}{IK} \leq e$, qui définit la position de I par rapport à la directrice ou au cercle principal de Γ

W. FAIVRE,
professeur agrégé à Montauban.