UNE DÉFINITION AXIOMATIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

cf Petit précis APM n° 185, p354

Dans ce qui suit, nous utiliserons la notion de vecteur libre définie dans l'espace euclidien à trois dimensions, ainsi que les notions de longueur, d'angle et de déplacement d'une figure invariable.

DÉFINITION.

Etant donnés deux vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$, pris dans un ordre déterminé, on appelle produit vectoriel du vecteur $\vec{U}$ par le vecteur $\vec{V}$ $(\vec{U} \wedge \vec{V})$ un vecteur libre $\vec{W}$ satisfaisant aux cinq conditions suivantes :

1° Si on multiplie l'un des vecteurs par un scalaire réel k, W est multiplié par k.

Autrement dit : $$(k\vec{U}) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge (k\vec{V}) = k(\vec{U} \wedge \vec{V}).$$

Conséquences. — *a*) $$(k\vec{U}) \wedge (k'\vec{V}) = kk'(\vec{U} \wedge \vec{V}).$$

Par suite si l et l' sont les longueurs ou modules des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ relativement à des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, qui leur sont respectivement colinéaires et de même sens, on aura : $$\vec{U} \wedge \vec{V} = ll'(\vec{i} \wedge \vec{j}).$$

b) Si un des vecteurs est nul, le produit vectoriel est nul puisque l ou l' est nul.

2° Si $\vec{U} = \vec{U}' + \vec{U}''$, on doit avoir :
$$(\vec{U} \wedge \vec{V}) = (\vec{U}' \wedge \vec{V}) + (\vec{U}'' \wedge \vec{V}).$$

Propriété analogue si $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}''$.

3° Si on échange $\vec{U}$ et $\vec{V}$, $\vec{W}$ est remplacé par son opposé
$$(\vec{V} \wedge \vec{U}) = -(\vec{U} \wedge \vec{V}).$$

Conséquence. — $\vec{U} \wedge \vec{U}$ devant être égal à son opposé (par permutation des deux facteurs) est nul.

Plus généralement, si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul d'après la propriété 1), car on a alors :

$$\vec{V} = k\vec{U} \quad \text{donc} \quad (\vec{U} \wedge \vec{V}) = k(\vec{U} \wedge \vec{U}) = 0.$$

Nous exprimerons ces trois propriétés en disant que $\vec{W}$ est une fonction vectorielle linéaire [propriétés 1) et 2)] et alternée [propriété 3)] de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

4° Supposons $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ appliqués à une origine commune O. Si O, $\vec{U}'$, $\vec{V}'$ se déduisent de O, $\vec{U}$, $\vec{V}$ par un déplacement (nécessairement une rotation autour d'un axe OΔ), le vecteur $\vec{W}' = \vec{U}' \wedge \vec{V}'$ doit se déduire de $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ par le même déplacement.

5° Condition de continuité.

Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ varient en tendant vers des limites $\vec{U}_0$ et $\vec{V}_0$, $(\vec{U} \wedge \vec{V})$ doit tendre vers $(\vec{U}_0 \wedge \vec{V}_0)$.

Nous allons montrer que, si $\vec{W}$ existe, il est déterminé à un facteur arbitraire près dépendant du choix de l'unité de longueur. Nous retrouverons ainsi la définition connue du produit vectoriel qui satisfait bien aux conditions imposées, comme on le démontre dans tous les cours.

Remarque. — La propriété 3) entraîne que les propriétés 1) et 2) peuvent être énoncées seulement pour l'un des deux vecteurs, $\vec{U}$, par exemple.

A) Le vecteur $\vec{W}$, s'il existe, ne peut être coplanaire avec $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

En effet, supposons $\vec{W}$ coplanaire avec $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on aura alors : $\vec{W} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{V}$, α et β étant deux scalaires réels.

En remplaçant $\vec{U}$ par $k\vec{U}$, il vient :

$$\alpha k\vec{U} + \beta\vec{V} = k(\alpha\vec{U} + \beta\vec{V}).$$

On en déduit :

$$\beta(k - 1)\vec{V} = 0,$$

donc en supposant $\vec{V} \neq 0$, $k \neq +1$, on trouve $\beta = 0$.

Même raisonnement pour α, en échangeant le rôle de $\vec{U}$ et $\vec{V}$, dans ce qui précède. Par suite la seule solution serait $\vec{W} = 0$, quel que soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$, solution évidente et sans intérêt.

B) Dans ce qui suit, nous pouvons supposer que les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$, sont appliqués à une origine commune O (comme nous l'avons déjà fait dans l'énoncé de la condition 4°).

Faisons une rotation de π autour de l'axe OΔ perpendiculaire au plan (OUV). $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont remplacés par leurs opposés $-\vec{U}$ et $-\vec{V}$, donc $\vec{W}$ reste invariant d'après la propriété 1).

$\vec{W}$ devant rester invariant dans une symétrie d'axe OΔ, [propriété 4)] doit être porté par OΔ. Le vecteur $\vec{W}$ est donc orthogonal à $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Remarque. — Ceci démontre à nouveau que $\vec{W}$ ne peut être coplanaire avec $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

C) Appliquons ce qui précède à deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Considérons tous les couples $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ superposables ; les vecteurs W correspondants devant être superposables, auront la même longueur. Cette longueur ne peut donc dépendre que de l'angle $\theta = \widehat{IOJ}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Soit $\varphi(\theta)$ cette longueur. Le produit $(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V})$ a donc pour longueur

$$ll'\varphi(\theta).$$

D) Déterminons la fonction $\varphi(\theta)$. Considérons pour cela deux vecteurs unitaires orthogonaux $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, et remplaçons $\overrightarrow{j}$ par $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{j} + k\overrightarrow{i}$, le produit vectoriel n'est pas modifié [d'après les propriétés 2) et 3)], car :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} + \overrightarrow{i} \wedge k\overrightarrow{i}.$$

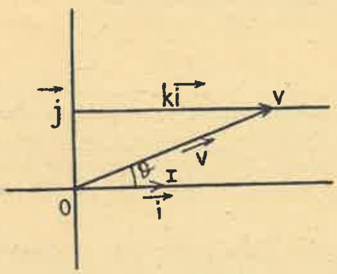
Soit λ la longueur du produit vectoriel considéré et θ l'angle $\widehat{IOV}$. On a :

$$\lambda = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = l\varphi(\theta),$$

l étant la longueur de $\overrightarrow{OV}$.

Or $l = \dfrac{1}{\sin\theta}$. On en déduit :

$$\varphi(\theta) = \sin\theta \times \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$



On peut prendre pour $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ une valeur arbitraire. Si on prend $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$\varphi(\theta) = \sin\theta.$$

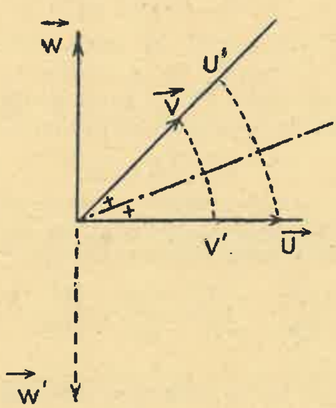
Donc le produit $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ a pour longueur :

$$ll' \sin\theta.$$

Remarque. — Le changement d'unité de longueur multiplie l et l' par un même coefficient, ce qui fournit le coefficient arbitraire $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, qui s'est introduit dans le raisonnement précédent.

Note. — On a supposé $k > 0$, donc $\theta < \frac{\pi}{2}$. Si $k < 0$, on remplacera θ par $\pi - \theta$ dans ce qui précède.

E) Reprenons la figure OUVW et faisons une symétrie par rapport à la bissec-



trice $O\Delta$ de l'angle $\widehat{UOV}$. $\vec{W}$ doit être remplacé par son opposé, c'est-à-dire par son symétrique $\vec{W'}$ par rapport au plan (UOV). Dans ces conditions, les deux trièdres OUVW et OU'V'W' ont la même orientation. Il en sera de même pour tout autre trièdre $OU_1V_1W_1$ nécessairement égal à O U V W [d'après propriété 4)].

Il suffit donc de choisir arbitrairement, une fois pour toutes, une orientation de l'espace et de définir $\vec{W}$ par la condition que le trièdre OUVW soit positif. Cette convention est d'ailleurs nécessaire si on veut satisfaire à la condition de continuité. La définition classique du produit vectoriel se trouve ainsi retrouvée.

M. Weber,
Professeur honoraire au Lycée Condorcet.