SUR L'ÉQUATION DE PYTHAGORE $x^2+y^2=z^2$ EN ENTIERS

L'étude de cette équation diophantienne fait partie du nouveau programme complémentaire de l'Agrégation.

Chacun en connaît la résolution en entiers positifs premiers entre eux, qui conduit à $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$, avec a et b premiers entre eux, de parité différente, et $a > b > 0$. (On montre pour cela, en raisonnant modulo 4, que x et y sont de parité différente, et l'on étudie la décomposition $x^2 = (z + y)\,(z - y)$ où l'on a supposé, sans rien restreindre, x pair).

On peut, de la même façon, établir $x = ab$, $y = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$, $z = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ avec a et b impairs premiers entre eux, $a > b > 0$. (Ici, x est impair).

---

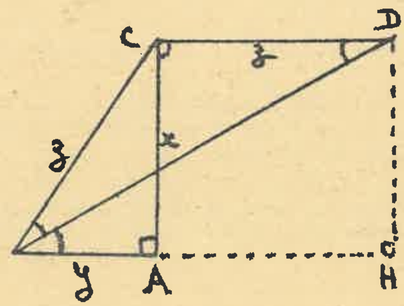
(2) Voir l'article déjà cité, p. 409 à 412.

Interprétations géométriques.

1° En coupant le cercle $X^2 + Y^2 = 1$ par la sécante $Y - 1 = mX$, où m est rationnel, il vient $X = \dfrac{-2m}{1+m^2}$, $Y = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$ et il suffit de poser $m = -\dfrac{b}{a}$ pour obtenir les formules précédentes. Cette méthode est générale pour toute équation quadratique homogène à trois inconnues.

2° En envisageant le triangle rectangle ABC, de côtés x, y, z, la bissectrice de l'angle B fournit $\operatorname{tg} \dfrac{B}{2} = \dfrac{x}{y+z}$. Cette expression est rationnelle si x, y, z sont entiers ou rationnels ; réciproquement, si $\operatorname{tg} \dfrac{B}{2}$ est rationnelle, il en est de même de $\operatorname{tg} B$, donc de $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{z}{x}$. Posons donc $\operatorname{tg} \dfrac{B}{2} = \dfrac{b}{a}$; il vient, par duplication,

$$\operatorname{tg} B = \frac{2\dfrac{b}{a}}{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$ qui fournit $2ab$, $a^2 - b^2$ et $a^2 + b^2$.



Voici deux autres méthodes de résolution, de caractère plus algébrique.

Méthode du déterminant homogène. — $x^2 + y^2 = z^2$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} x & z+y \\ z-y & x \end{vmatrix} = 0,$$ qui exprime la compatibilité en a et b du système

$$\begin{cases} ax - b(z+y) = 0 \\ a(z-y) - bx = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} ax - by - bz = 0 \\ -bx - ay + az = 0. \end{cases}$$

Ce dernier se résout par $\dfrac{x}{2ab} = \dfrac{y}{a^2 - b^2} = \dfrac{z}{a^2 + b^2}$.

Cette méthode, qui revient en fait à poser $\dfrac{x}{z-y} = \dfrac{z+y}{x} = \dfrac{b}{a}$ évite les raisonnements arithmétiques et fournit une correspondance bi-univoque entre tous les couples (x, y) et tous les couples (a, b) premiers entre eux (a et b impairs fournissent $x = ab$, $y = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$; on en déduira, en posant $a = \alpha + \beta$ et $b = \alpha - \beta$, les valeurs $x = \alpha^2 - \beta^2$, $y = 2\alpha\beta$). Elle offre l'intérêt d'être généralisable à des équations homogènes de degré supérieur à 2. Par exemple, $x^3 + y^3 = z^3$ peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x+y-z & 0 & 3(x+y) \\ z-x & x+y-z & 0 \\ 0 & z-y & x+y-z \end{vmatrix} = 0$$ d'où compatibilité en a, b, c, du système

$$\begin{cases} a(x+y-z) + 3c(x+y) = 0, \\ a(z-x) + b(x+y-z) = 0, \\ b(z-y) + c(x+y-z) = 0. \end{cases}$$

Ce système, ordonné en x, y, z, fournit une nouvelle équation, en a, b, c, exprimant la compatibilité en x, y, z. Si l'on avait pris une équation homogène de degré 3 à 4 inconnues, sous forme de déterminant homogène, on aurait eu les solutions x, y, z, t proportionnelles aux mineurs respectifs.

Méthode des substitutions. — $x^2 + y^2 = z^2$ peut s'écrire

$$[(x+y+z)-(y+z)]^2+[(x+y+z)-(x+z)]^2=[(x+y+z)-(y+z)-(x+z)]^2$$

égalité de la forme $(a-b)^2 + (a-c)^2 = (a-b-c)^2$, soit $a^2 = 2bc$, qui reste vérifiée lorsqu'on change les signes de b et c. On a donc également

$$(x+y+z+y+z)^2 + (x+y+z+x+z)^2 = (x+y+z+y+z+x+z)^2,$$

ce qui fournit la substitution *modulaire*

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} X = x + 2y + 2z, \\ Y = 2x + y + 2z, \\ Z = 2x + 2y + 3z, \end{cases}$$

conservant l'ensemble des points entiers du cône $x^2 + y^2 = z^2$, avec (X, Y, Z) premiers entre eux si (x, y, z) le sont, et réciproquement.

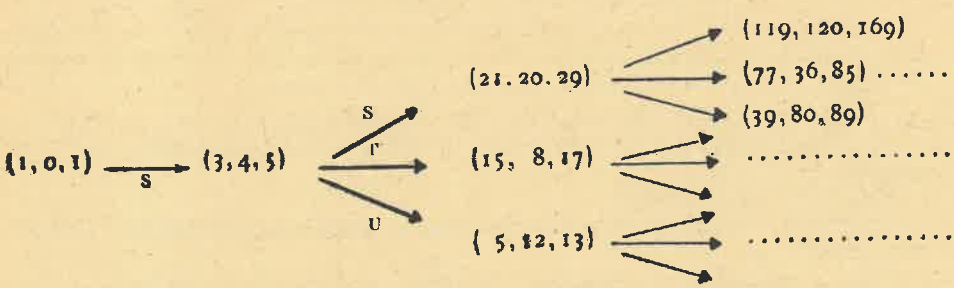
On en déduit :

$$(\mathrm{S}^{-1}) \quad \begin{cases} x = X + 2Y - 2Z, \\ y = 2X + Y - 2Z, \\ z = -2X - 2Y + 3Z, \end{cases}$$

et l'on remarque que si (X, Y, Z) sont trois entiers positifs, solutions de l'équation de Fermat, ils proviennent, par (S), d'une solution x, y, z, pour laquelle $0 < z < Z$ (étude du signe de deux trinômes homogènes en X et Y). En recommençant sur $|x|$, $|y|$ et z, et ainsi de suite, on ne peut qu'aboutir à la solution $z_0 = 1$, d'où l'obtention de toutes les solutions de $x^2 + y^2 = z^2$ grâce aux trois substitutions modulaires :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

suivant le schéma :



Au bout de n opérations, on obtient en tout $\dfrac{2}{3^n+1}$ solutions, dont la plus grande sera $(S^n) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que l'on peut calculer en fonction de n grâce à la diago-

nalisation de (S) dont les vecteurs propres sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Cette méthode offre l'intérêt de rester valable pour la résolution de

$$x^2 + y^2 = z^2 + k$$

où k est un entier, positif ou négatif, donné. Il suffit alors de chercher d'abord toutes les solutions pour lesquelles $xy > -\frac{k}{2}$ et $\left\{\begin{array}{c} x^2 > 5k \\ \text{ou} \\ y^2 > 5k \end{array}\right.$ (Ces conditions découlent de l'étude des deux trinômes envisagés plus haut).

M. David (*Reims*).