

III. ESSAIS ET VARIÉTÉS

SUR L'INDÉPENDANCE DES AXIOMES DE LA DEMI-DROITE

Nous allons revenir sur les axiomes de la demi-droite (1) pour démontrer leur indépendance. En même temps nous profitons de l'occasion pour souligner leur rôle d'axiomes d'ordre. Pour varier, nous reprenons les énoncés de ces axiomes en les formalisant. Nous ne nous préoccupons pas encore du rôle de la droite comme élément structural des espaces linéaires, mais nous exigeons de l'ensemble E , non vide, que nous appelons déjà une droite, de satisfaire aux quatre axiomes de la demi-droite. Les éléments A, B, \dots de l'ensemble E , s'appellent alors les points de la droite. Les quatre axiomes I ; 1, 2, 3 et 4, permettent de caractériser des parties de la droite appelées des demi-droites. Des relations d'appartenance entre des demi-droites nous ont permis de définir des relations d'ordre sur la droite.

Les quatre axiomes sont placés dans un ordre constructif, ils permettent ainsi d'enrichir successivement l'ensemble E . Il s'agit de démontrer une indépendance ordonnée de ces axiomes. La méthode consiste à fournir des exemples, satisfaisant à une partie des axiomes, mais pas à tous. Dans nos exemples d'ensembles E , ne satisfaisant pas à tous les quatre axiomes, nous prenons la liberté d'utiliser aussi les expressions : droite, demi-droite et segment de droite.

Axiome : I, 1. — Tout point $A \in E$ détermine sur E deux parties (demi-droites) notées provisoirement (I_A) et (II_A) , telles que

$$\begin{aligned} (I_A) \cap (II_A) &= A \\ (I_A) \cup (II_A) &= E \end{aligned}$$

EXEMPLE 1^{er} : Si l'ensemble E est formé par un seul point A , alors :

$$(I_A) = (II_A) = A.$$

L'axiome I, 1 est satisfait, mais pas les axiomes suivants.

Axiome : I, 2. — Si $A \in E$,

$$\exists B \in (I_A) \text{ avec } B \neq A \quad \text{et} \quad \exists C \in (II_A) \text{ avec } C \neq A.$$

Notation : $(I_A) = \overrightarrow{AB}$ (demi-droite d'origine A contenant B) ; $(II_A) = \overleftarrow{AC}$; nous écrivons aussi :

$$\overrightarrow{AB} = \overleftarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} \text{ (ne contenant pas } C).$$

Les demi-droites opposées \overrightarrow{AB} et \overleftarrow{AC} n'ayant que l'origine commune, nous pouvons énoncer :

Une demi-droite est entièrement définie par son origine et un autre de ses points choisi arbitrairement.

L'exemple le plus pauvre de E , satisfaisant à I, 1 et 2, contient au moins trois points.

EXEMPLE 2^o : $E = \{A, B, C\}$.

Il n'y a qu'une façon possible de concevoir toutes les demi-droites de E : les demi-droites d'origine A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \{A, B\}, \\ \overrightarrow{AC} &= \{A, C\} \quad \text{donc} \quad \overleftarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}; \end{aligned}$$

(1) Cf. *Bull. de l'A.P.M.*, n° 177 de mai 1956, notre étude : « Définition axiomatique des espaces linéaires et leur orientation ».

les demi-droites d'origine B :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \{ B, C \}, \\ \overrightarrow{BA} &= \{ B, A \} \quad (\text{aussi} = \overleftarrow{AB}) ; \end{aligned}$$

les demi-droites d'origine C :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= \{ C, A \}, \\ \overrightarrow{CB} &= \{ C, B \}, \end{aligned}$$

DÉFINITION D'UN SEGMENT DE DROITE. — Deux points A et B de E déterminent une partie de E appelée *le segment de droite* AB, noté : [AB]. Par définition :

$$[AB] = \overrightarrow{AB} \cup \overleftarrow{BA}.$$

L'intérieur du segment AB s'écrit]AB[et se définit par :

$$]AB[= [AB] - A - B.$$

Cas particulier d'un segment dit nul : Si $A = B$:

$$[AA] = \{ A \} \quad \text{et} \quad]AA[= \emptyset \quad (\text{ensemble vide}).$$

Dans l'exemple 2° on a : $[AB] = \{ A, B \}$ et $]AB[= \emptyset$. Il n'y a pas de points intérieurs pour aucun des segments.

Axiome I, 3. — Si $A \in E$ et $B \in E$, $A \neq B$, alors $\overrightarrow{AB} \supset \overleftarrow{BA}$.

Conséquences de cet axiome :

Changeons de notation en désignant par $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots$ des points distincts de E.

Si $A_0 \in E$, $\exists A_1 \in E$ d'après I, 2.

D'après I, 3 on a (1) $\overrightarrow{A_0A_1} \supset \overleftarrow{A_1A_0}$.

D'après I, 2 $\exists A_2 \in E$ tel que $\overleftarrow{A_1A_0} = \overrightarrow{A_1A_2}$, donc (1) peut s'écrire :

$$(1) \quad \overrightarrow{A_0A_1} \supset \overrightarrow{A_1A_2},$$

d'où $A_2 \in \overrightarrow{A_0A_1}$ donc $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_0A_2}$.

De la même façon nous démontrons $\exists A_3 \in E$ tel que :

$$(2) \quad \overrightarrow{A_1A_2} \supset \overrightarrow{A_2A_3} \quad \text{où} : \overrightarrow{A_2A_3} = \overleftarrow{A_2A_1},$$

et ainsi de suite :

$$(i) \quad \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \supset \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$$

D'après la *transitivité de la relation d'appartenance*, nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{A_0A_1} \supset \overrightarrow{A_1A_2} \supset \dots \supset \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \supset \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \supset \dots$$

Les points $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots$ sont donc des points de $\overrightarrow{A_0A_1}$, il nous faut donc ajouter des points d'une façon illimitée, d'où :

THÉORÈME : *Toute demi-droite contient une infinité de points.*

Les exemples 1° et 2° donnent des ensembles ne vérifiant pas ce théorème conséquence de l'axiome I, 3. Donc : l'axiome I, 3 est indépendant des axiomes I, 1 et 2.

(Nous remarquons d'une façon intuitive que pour démontrer le dernier théorème nous avons placé les points dans un ordre naturel).

EXEMPLE 3° : Nous prenons pour ensemble E l'ensemble **Z** des entiers rationnels (entiers positifs, négatifs et nuls), où $n \in \mathbb{Z}$ détermine les demi-droites (I_n) et (II_n) tels que

$$\begin{aligned} x \in (I_n) & \quad \text{si} \quad x \leq n, \\ y \in (II_n) & \quad \text{si} \quad y \geq n. \end{aligned}$$

Cet exemple conserve l'ordre naturel de l'ensemble **Z**.

Si, au lieu de construire les points d'une demi-droite successivement, comme

nous l'avons fait plus haut, nous procédons *par adjonction* en introduisant encore des points intérieurs à des segments, il nous faut aussi un axiome pour conserver l'idée d'ordre.

Axiome : I, 4. — $A \in E, B \in S; I \in E.]AB[, \text{ alors } \overline{IA} = -\overline{IB}.$

Pour démontrer que I, 4 est indépendant de I, 1, 2, 3, nous allons donner un exemple satisfaisant aux trois premiers axiomes, mais non au dernier.

EXEMPLE 4° : Nous prenons pour E l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels et nous définissons les demi-droites d'origine donnée en distinguant les deux cas suivants :

1) L'origine est un entier rationnel e ($x \in \mathbf{Q}$ et $y \in \mathbf{Q}$) :

$$\begin{array}{ll} x \in (I_e) & \text{si } x \leq e, \\ y \in (II_e) & \text{si } y \geq e. \end{array}$$

2) L'origine est un nombre rationnel *non entier* r , compris entre les entiers consécutifs n et $n + 1$ ($n < r < n + 1$), alors :

$$\begin{array}{ll} x \in (I_r) & \text{si } n < x \leq r, \\ y \in (II_r) & \text{si } y \geq r \text{ ou } y \leq n. \end{array}$$

Par hypothèse : $r \in]n, (n + 1)[$

et $\overline{rn} = r \overline{(n + 1)} = (II_r).$

Ces demi-droites sont identiques et non opposées. L'axiome I, 4 n'est donc pas vérifié dans ce cas.

Reste à montrer que les axiomes I, 1, 2, 3 sont toujours satisfaits. Aucune difficulté pour I, 1 et 2.

Pour montrer que, dans notre exemple, l'axiome I, 3 est toujours satisfait, nous laissons à nos lecteurs le soin d'examiner les différents cas qui se présentent suivant la nature relative des points A et B (entier ou non entier).

Nous concluons : les axiomes I, 1, 2, 3, sont satisfaits, mais pas toujours l'axiome I, 4, donc ce dernier axiome est indépendant des trois premiers.

En étudiant l'orientation de la droite (2), nous nous sommes basés sur les axiomes I, 3 et 4. C'est à cette occasion que leur rôle d'axiome d'ordre apparaît en toute rigueur.

R. NEUMEISTER,

professeur au Lycée Fustel-de-Coulanges à Strasbourg.