II. PAGES A RELIRE

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE

par M. CLAIRAUT

Les *Eléments d'Algèbre*, de CLAIRAUT, ont eu une première édition en 1746, cinq ans après les *Eléments de Géométrie*.
Ils ont été réédités en 1749, 1760, 1768, 1797 et 1801.
Ils ont été, paraît-il, traduits en hollandais et en allemand.
Le grand rôle qu'ils ont joué dans notre enseignement nous conduit à en reproduire la préface.

Jean ITARD.

PREFACE

Je me suis proposé de suivre, dans cet Ouvrage, la même méthode que dans mes Elémens de Géométrie ; j'ai tâché d'y donner les régles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de Théorêmes. Toutes, au contraire, semblent être découvertes en s'exerçant sur les Problêmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

Des Problêmes utîles au commerce, comme ceux où il est question de partager des sommes entre différentes personnes à raison de leurs mises ou de quelques conventions faites entr'elles ; des régles d'alliage, &c. sont les Problêmes que je suppose avoir occupé les premiers Algébristes.

Je commence par donner la solution d'un des plus simples de ces Problêmes, telle qu'on la peut trouver, sans avoir aucune teinture de l'Algebre. Il est aisé de reconnoître dans cette solution, que si la mémoire suffit à retenir tous les raisonnements par lesquels il faut passer pour y arriver, c'est que la suite de ces raisonnements n'est pas bien longue ; & l'on voit en même-temps que, lorsqu'on s'éleve à des Problêmes qui en demandent une plus grande, il faut chercher à les écrire d'une maniere fort abrégée, il faut imaginer quelques signes, à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la difficulté est réduite à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette maniere d'écrire les questions, est l'Algebre que je fais, pour ainsi dire, inventer au Lecteur.

Pour aller toujours du plus simple au plus composé, je ne propose d'abord que des questions numériques, parce que ce sont celles qui fixent le plus l'esprit des Commençans. Après en avoir résolu plusieurs qui ne different les unes des autres que par les nombres donnés dans l'énoncé, on s'apperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune dans chaque résolution, & qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois : je saisis cette occasion d'expliquer la maniere de résoudre généralement les Problêmes, en employant, au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs : & j'enseigne ensuite à tirer des solutions générales les solu-

tions particulieres, au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens Problêmes où j'employe des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'assez compliqués pour ne pouvoir pas être résolus sans employer les régles d'addition, soustraction, multiplication & division : je montre alors comment on doit faire ces opérations. Je n'ai pas cru devoir les donner plutôt, parce que les Commençans les suivent avec peine & avec dégoût, lorsqu'on les leur enseigne dans un temps où ils n'ont aucune idée des quantités sur lesquelles ils opérent.

La multiplication est de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les Commençans, & dont l'explication embarrasse le plus les maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans lesquelles on a dû en remarquer la nécessité. Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs termes positifs & négatifs par un seul terme que je suppose toujours positif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considérer une quantité négative, comme existant seule. Cette multiplication étant expliquée, je passe à celle où le multiplicateur est aussi-bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs & négatifs, & je fais voir facilement que cette opération n'est autre chose que la première répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que, suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent, doivent être ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen, je familiarise les Commençans avec la multiplication, sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que moins *par* plus *donne* moins, moins *par* moins *donne* plus, *&c., qui, en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y en a dans les choses.*

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurois fait réellement que l'éluder, si je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités aussi entiérement négatives, opération dans laquelle on ne sçauroit éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication, après en avoir montré la nécessité au Lecteur, en le conduisant à un Problème où l'on est obligé de considérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités positives dont elles soient retranchées.

Lorsque je suis parvenu, dans ce Problème, au point où il s'agit de multiplier ou de diviser des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont sans doute pris les premiers Analystes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu suivre une route entiérement sûre, je cherche une solution au Problême par laquelle je puisse éviter toute espèce de multiplication ou de division de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au résultat, sans employer d'autres raisonnemens, que ceux sur lesquels on ne peut former aucun doute ; & je vois ce *que doivent être ces produits ou quotiens des quantités négatives que m'avoit donnés la premiere solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que* moins *par* moins *donne* plus, *&c.*

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, & le Lecteur parvient en même-temps à connoître la nature des solutions négatives des Problêmes ; il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avait employée, en exprimant les conditions du Problême.

La premiere Partie de cet Ouvrage traite uniquement des équations du premier degré, soit à une, soit à plusieurs inconnues, & de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur résolution, que pour la rendre aussi simple qu'elle puisse être. Telle est, par exemple, la régle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur, laquelle naît de la nécessité de réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette régle est expliquée d'une maniere nouvelle, & j'y ai ajouté plusieurs réflexions qui la rendent applicable à des cas où la maniere ordinaire de la traiter, pourroit rebuter pour la longueur des calculs, & ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la seconde Partie, je parle des équations du second degré ; un Problême où il s'agit d'intérêts d'intérêts m'amene à une de ces équations ; je l'ai choisie de nature à donner pour ses deux solutions deux nombres positifs, afin de mieux faire voir comment deux nombres différens résolvent le même Problême. J'en ai usé ainsi, dans la crainte que les Commençans, qui ne regardent pas volontiers les racines négatives comme de véritables solutions, ne crussent que le Problême n'avoit réellement qu'une solution.

Cependant, afin de les accoutumer aux racines négatives, je donne ensuite un Problême dans lequel il y a une de ces racines, & telle cependant qu'aucun Commençant ne peut s'empêcher de voir qu'elle satisfait autant un Problême que la positive.

La résolution des équations que demandent ces Problêmes & ceux de même espéce qu'on peut se proposer, engagent les Lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algebre, telles que les extractions des racines quarrées ; la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions, &c., opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Elémens d'Algebre, mais que mon plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations, je passe à un Problême dans lequel on doit employer plusieurs équations du second degré qui contiennent chacune plusieurs inconnues, & je donne les moyens de réduire toutes ces équations à une seule qui ne renferme qu'une inconnue. Je fais voir en même-temps que cette méthode n'est pas seulement propre aux équations où les inconnues ne montent qu'au second degré, mais qu'elle s'étend à tous les degrés.

La troisiéme Partie a pour objet les équations de tous les degrés prises en général. Je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coëfficiens du second, du troisiéme, &c. terme, ont d'être, ou la somme des racines, ou celle des produits de ces racines, &c. Je tire de ces propriétés la fameuse régle de Descartes, pour trouver toutes les racines *commensurables qui sont dans une équation* (1) ; *& comme cette méthode engage dans des calculs excessifs à cause du grand nombre de divisions qu'il faut tenter, je donne la méthode de Newton, qui s'étend non-seulement aux racines commensurables ou diviseurs d'une dimension, mais aux diviseurs de tant de dimensions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonstration de cette méthode que Newton avoit supprimée, mais je fais voir par quelle route il a pu la découvrir. C'est un avantage que je ne crois pas qu'on puisse trouver dans la démonstration que M. s'Gravesande* (2) *en a donnée (dans son* Specimen commentarii in arithmeticam universalem, *inséré à la fin de ses Elémens d'Algebre) & qui est la seule que je sçache avoir été donnée, malgré le grand nombre de Traités d'Algebre qui ont paru depuis Newton. J'ai appris cependant que le R.P. Jacquier* (3), *connu pour avoir commenté les recherches les plus élevées de Newton, avoit pris la peine de traiter celle-ci, mais ce qu'il a fait sur cette matiere, n'est pas venu à ma connoissance.*

Au reste, dans cette Partie & dans celles qui suivent, je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes, à montrer les Problêmes qui pourroient avoir conduit aux équations que j'examine, parce que je ne crois plus avoir besoin de ce motif pour exciter la curiosité des Lecteurs. Ils ont dû suffisamment voir, par les premiers Problêmes, de quelle importance il étoit de sçavoir résoudre toutes sortes d'équations.

Je traite dans la quatriéme Partie des équations de tous les degrés, lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles se réduisent à la méthode des équations du second degré par une simple transformation. J'enseigne, par ce moyen, aux Commençans, un grand nombre d'opérations sur les quantités radicales de toute espéce, & je leur donne une connoissance entiere, tant de l'élévation des puissances, que de l'extraction des racines.

Une régle qui est absolument nécessaire pour la résolution complette de ces équations, & qui a toujours été omise dans tous les Ouvrages Elémentaires (celui de M. s'Gravesande excepté), c'est l'extraction des racines des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables : Newton, à qui on doit cette régle, l'ayant donnée à son ordinaire sans démonstration, je l'ai traitée ici comme un Problême ; par ce moyen la découverte & la démonstration marchent toujours de concert.

La méthode de Newton s'étend aux quantités numériques quel que soit l'exposant de la racine, mais elle ne s'applique pas aux quantités littérales, lorsque cet exposant passe le second degré ; je supplée ce qui

---

(1) Un premier algébriste avait déjà indiqué, sur des cas très simples, cette méthode : Jacques Peletier, dans son Algèbre, en Français, de 1554. Descartes, dans sa correspondance, la perfectionne beaucoup et dépasse de loin l'exposé qu'il en donne dans sa Géométrie de 1637. Dans l'Arithmétique Universelle, Newton l'améliore encore. — I. J.

(2) Sur s'Gravesande (1688-1742), voir Pierre Brunet : « Les Physiciens Hollandais et la Méthode Expérimentale en France au XVIIIe siècle », Paris, Blanchard, 1926. — I. J.

(3) Le Père François Jacquier, Minime, 1711-1788 ; publia avec le Père Le Seur une édition commentée des *Principia* de Newton. Ces deux auteurs publièrent en 1765 un traité de calcul intégral. Lagrange se plaint qu'ils aient utilisé certaines de ses découvertes sans le nommer. — I. J.

manque à cette méthode, en donnant le procédé qu'il faut suivre pour les quantités littérales. De plus, je fais voir que la méthode de Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occasions ; c'est lorsque la racine d'une quantité contient des fractions, & que cette quantité elle-même n'en renferme pas. Je montre ce qu'il faut faire pour remédier à cet inconvénient.

M. s'Gravesande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Newton, où se trouve cette méthode, n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper, & il n'a point donné la maniere de l'appliquer aux quantités littérales de tous les degrés.

Toutes ces opérations, lorsqu'on veut les appliquer à une puissance quelconque, supposant qu'on connoisse la formule du binome, je saisis l'occasion qu'elles me fournissent d'amener l'invention de cette fameuse formule. Je la démontre d'une maniere nouvelle (4)*, & je fais voir les différens usages qu'elle a fournis, tels que le moyen de trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, &c., ce qui peut préparer les Commençans à l'analyse de l'infini.*

La cinquiéme Partie traite des équations du troisiéme & du quatriéme degré qui ont tous leurs termes, c'est à dire, toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des équations du troisiéme degré, & je fais voir ensuite les équations particulieres, où cette solution n'apprend point la valeur de l'inconnue, ce qui forme le cas qu'on appelle irréductible. Dans ces équations, au défaut des racines exactes, j'enseigne à en trouver par approximation ; je donne, pour y parvenir, une méthode nouvelle beaucoup plus simple que celles qui ont paru jusqu'à présent. Par cette méthode, dès la premiere opération, j'ai la valeur de la racine cherchée à un millieme près, à la seconde à un millionieme, & ainsi de suite.

Je passe de là aux équations du quatrieme degré, &, après avoir donné leur résolution générale, je fais voir que cette résolution, ainsi que celle des équations du second degré, a cet avantage sur la résolution des équations du troisieme, qu'une seule & même formule peut, à l'aide des signes plus & moins, *exprimer toutes les racines de l'équation. Je démontre aussi, ce que les Auteurs Elémentaires n'ont fait que supposer, que les quatre racines d'une équation du quatrieme degré sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles & deux imaginaires ; c'est-à-dire, que je prouve que les racines imaginaires des équations du quatrieme degré, peuvent, ainsi que celles du second, être regardées comme composées d'une partie réelle, & d'une partie qui est la racine quarrée d'une quantité négative.*

La résolution des équations du quatrieme degré, étant fondée sur celle des équations du troisieme, elle a de même, que ces équations, cet inconvénient, que dans un cas on ne sçauroit avoir les racines que par

(4) Il s'agit de la démonstration restée classique dans nos taupes. Une démonstration analogue, exposée avec beaucoup moins de clarté cependant, se trouve dans la 2e édition, posthume, 1736, de la Science du Calcul du R.P. Reyneau, de l'Oratoire (1656-1728).

approximation. Je donne une maniere bien simple de trouver cette approximation, en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les équations du troisieme degré.

Quant aux équations qui passent le quatrieme degré, je ne donne rien pour leur résolution en général, parce que jusqu'à présent on n'a pû y parvenir, quelques efforts qu'ayent fait les Analystes. L'on est réduit, excepté quelques cas particuliers que j'ai traités, pour la plûpart, dans la troisieme & quatrieme Partie, à de simples approximations qui sont beaucoup plus faciles, lorsqu'on est aidé de la Géométrie : c'est pourquoi je remets à traiter de ces équations, au tems où j'enseignerai la théorie des lignes courbes.

On devoit s'attendre, après ce que j'avois dit en annonçant mes Elémens d'Algebre, à y trouver des applications de cette Science à la Géométrie, j'ai crû cependant devoir les réserver pour un autre Ouvrage. Il m'a paru qu'en donnant un Traité entier de pure Algebre, c'étoit offrir aux Commençans les moyens de s'y fortifier davantage, & qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géométrie, que lorsque les opérations Analytiques ne leur coûteroient plus. J'espere que les principes qu'ils trouveront dans cet Ouvrage, les mettront en état de surmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géométrie.

Au reste, je ne suppose, pour l'intelligence de ce Traité, que les opérations principales de l'Arithmétique, parmi lesquelles je compte la régle de trois ; ceux qui auront lû mes Elémens de Géométrie, posséderont la théorie des proportions, autant qu'il est nécessaire pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même livre, tant les Elémens d'Arithmétique, que ceux d'Algebre, & je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Elémens de Géométrie ; mais l'ordre que j'ai suivi m'a paru demander de traiter séparément ces deux Sciences. En effet, voulant me rapprocher autant qu'il est possible du chemin des Inventeurs, j'ai dû supposer l'Arithmétique familiere à ceux qui vouloient pénétrer dans l'Algebre.