

BULLETIN de l'**ASSOCIATION**
 des **PROFESSEURS**
 de **MATHÉMATIQUES**
 de l'**Enseignement Public**

SOMMAIRE

I. ETUDES.	
L. LESIEUR : Groupes classiques	89
A. REVUZ : Espaces projectifs	100
II. PAGES A RELIRE.	
CLAIRAUT : Elemens d'algèbre ; préface présentée par J. ITARD	107
III. ESSAIS ET VARIÉTÉS.	
R. NEUMEISTER : Sur l'indépendance des axiomes de la demi-droite	113
M. DAVID : Sur l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$ en entiers	115
IV. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.	
Projet de nouveaux programmes	118
M. WEBER : Une définition axiomatique du produit vectoriel ..	127
W. FAIVRE : Foyers et directrices des coniques	130
G. DELPLA : La formule $\text{Log } \mathbf{ab} = \text{Log } \mathbf{a} + \text{Log } \mathbf{b}$ en Sciences Expérimentales	132
M. BONN : Remarque sur le théorème de Ptolémée	133
V. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.	
A. HERME : Quelques livres allemands de géométrie analytique	133
S. MINOIS : La revue MATHESIS	138
VI. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.	
UNESCO-BIE : Recommandation aux Ministères de l'Instruction Publique concernant l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires	140
VII. LA VIE DE L'ASSOCIATION.	
G. W. : « Petite réforme », contre-réforme ou crépuscule de la réforme	146
Réunion du Comité : 18 octobre 1956	151
Quelques lettres : Un vœu de l'Académie des Sciences	152
Le bloc-notes de l'A.P.M.	153

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)
Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ...	300 F
Prix de l'abonnement au <i>Bulletin</i>	1 000 F
Prix du numéro	200 F

Présidents d'Honneur

Mlle DYONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

<i>Président :</i>	M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11 ^e). OBE. 56-95.
<i>Vice-Présidents :</i>	Mlle AFFRE, 5, rue Gustave-Le-Bon, Paris (14 ^e). M. BIGUENET, 41, rue M.-Michelis, Neuilly-sur-Seine. M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14 ^e). M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5 ^e). M. THÉRON, 38, rue Lacépède, Paris (5 ^e).
<i>Secrétaires :</i>	Mlle FÉLIX, 3, rue Pierre-Berland, Versailles (S.-et-O.) (Conférences). M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16 ^e). M. HUISMAN, 11, rue J.-Cœur, Paris (4 ^e) (Bibliothèque et « Bulletin »). M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14 ^e) (Bibliographie). M. ROSTOLLAND, 19, rue des Ursulines, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.). M. SIROS, 13, avenue J.-Racine, Sceaux (Seine) (Programmes).
<i>Trésorier :</i>	M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).
<i>Comité de rédaction du « Bulletin » :</i>	Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, GIRARD, ITARD, SIROS ; Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; Mlle VERVALCKE (Lille, *Fénelon*) ; M. POCHARD (Nice) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (*Compiègne*) ; M. WALUSINSKI (*St-Cloud*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; RUFF (*St-Louis*) ; SIROS (*Lakanal*) ; THÉRON (*Louis-le-Grand*).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOUUD (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public



I. ÉTUDES

GROUPES CLASSIQUES *

1. LE GROUPE LINÉAIRE A n VARIABLES SUR UN CORPS K .

Soit $K^n = E$ l'espace vectoriel des vecteurs $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ à n composantes dans un corps K commutatif. Considérons la transformation linéaire $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = A\vec{x}$ définie par :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

les coefficients a_{ij} appartenant au corps K .

Les transformations dont la matrice A a un déterminant non nul forment un groupe qu'on appelle le *groupe linéaire général à n variables défini sur K* , et qu'on note $GL_n(K)$.

En particulier, les transformations linéaires dont le déterminant vaut 1 forment un sous-groupe du précédent qu'on appelle le *groupe linéaire spécial à n variables*, ou *groupe unimodulaire* ; on le note $LS_n(K)$.

Les groupes que nous allons considérer ici, et qui sont devenus classiques depuis H. WEYL [1], sont tous des sous-groupes du groupe linéaire général, K étant le corps des nombres complexes ou celui R des nombres réels. Le cas d'un corps quelconque a fait l'objet de travaux plus récents dont les principaux résultats ont été rassemblés dans les livres de VAN DER WAERDEN [2 et 3] et J. DIEUDONNÉ [4 et 5].

2. TRANSFORMATIONS LINÉAIRES INVOLUTIVES.

Ce sont les transformations linéaires qui coïncident avec leur inverse ; c'est dire que leur matrice A vérifie :

$$A^2 = I, \text{ où } I \text{ désigne la matrice unité.}$$

D'après cette relation, $(\det A)^2 = 1$ et A est bien inversible.

(*) Conférence prononcée le 14 juin 1956 à l'Institut Henri-Poincaré, huitième conférence du cycle sur l'Algèbre organisé par la Société Mathématique de France en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

Les matrices ayant une structure d'anneau par rapport à l'addition et la multiplication, la relation $A^2 = I$ s'écrit :

$$A^2 - I = 0, \quad \text{ou } (A - I)(A + I) = 0.$$

Ceci conduit à considérer les vecteurs \vec{x} tels que :

$$(A - I)\vec{x} = 0, \quad \text{ou } A\vec{x} = \vec{x},$$

et les vecteurs \vec{y} tels que :

$$(A + I)\vec{y} = 0, \quad \text{ou } A\vec{y} = -\vec{y}.$$

Les premiers forment un sous-espace vectoriel V de E , et les derniers un sous-espace vectoriel W . Ces deux sous-espaces V et W n'ont aucun vecteur non nul commun, car :

$\vec{x} = \vec{y}$ entraîne $A\vec{x} = A\vec{y}$, c'est-à-dire $\vec{x} = -\vec{y}$, d'où $2\vec{x} = 0$, et $\vec{x} = 0$, cette division par 2 étant permise pour un corps quelconque de caractéristique différente de 2.

D'autre part, V et W engendrent l'espace E , c'est-à-dire que tout vecteur \vec{v} de E se met sous la forme :

$$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} \in V \quad \text{et} \quad \vec{y} \in W;$$

en effet, il suffit d'écrire :

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v} + A\vec{v}) + \frac{1}{2}(\vec{v} - A\vec{v});$$

on vérifie que $\vec{v} + A\vec{v}$ appartient à V , car $A(\vec{v} + A\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{v}$,

et que $\vec{v} - A\vec{v}$ appartient à W , car $A(\vec{v} - A\vec{v}) = A\vec{v} - \vec{v} = -(\vec{v} - A\vec{v})$.

Ces deux propriétés se notent sous la forme :

$$V \cap W = 0, \quad V \cup W = E \quad (1),$$

et s'expriment en disant que V et W sont *complémentaires*.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 1 : *A étant une transformation linéaire involutive, il existe deux sous-espaces complémentaires V et W tels que $A\vec{x} = \vec{x}$ pour tout vecteur de V et $A\vec{x} = -\vec{x}$ pour tout vecteur de W .*

Si V est de dimension p , W est de dimension $n - p$; en choisissant un repère $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ dans V et un repère $\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n$ dans W , les équations de la transformation prennent la forme :

$$(1) \quad \begin{cases} x'_1 = & x_1 \\ x'_2 = & x_2 \\ \vdots & \\ x'_p = & x_p \\ x'_{p+1} = & -x_{p+1} \\ \vdots & \\ x'_n = & -x_n \end{cases}$$

(1) Le signe \cup n'est pas le signe de réunion de la théorie des ensembles, mais le signe d'*union* de la théorie des treillis. (Cf. M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT : *Théorie des treillis*, 1953, pages 9 et 25, exemple 6).

Exemple dans E^3 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_3 \end{array} \right. \quad (\text{symétrie par rapport au plan } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ parallèlement à } \vec{e}_3).$$

3. LE GROUPE ORTHOGONAL.

On appelle transformation orthogonale une transformation linéaire qui conserve la forme quadratique :

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

La matrice A correspondante est dite orthogonale. Pour qu'une matrice A soit orthogonale, il faut et il suffit qu'elle vérifie :

$$A^T A = I$$

en désignant par A^T la matrice transposée de A (matrice déduite de A par symétrie par rapport à la diagonale principale).

Vérifions-le pour $n = 2$. Les conditions pour que la transformation

$$\begin{array}{l} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{array} \quad \text{satisfasse à } x'^2_1 + x'^2_2 \equiv x^2_1 + x^2_2$$

quels que soient x_1 et x_2 , sont : $\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$

Ce sont celles qui expriment que :

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{est la matrice unité } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $\det A = \pm 1$,

et, par suite, une matrice orthogonale est inversible. Son inverse est d'ailleurs sa transposée A qui vérifie aussi : $A A^T = I$, et qui est donc aussi orthogonale.

Comme le produit de deux transformations orthogonales est une transformation orthogonale, on voit que les transformations orthogonales forment un groupe qu'on appelle le *groupe orthogonal* $O_n(K)$. On distingue les transformations orthogonales à déterminant $+1$ qui s'appellent *rotations* et qui forment le sous-groupe $O_n^+(K)$, et les transformations orthogonales à déterminant -1 qui s'appellent *retournements* (et naturellement qui ne forment pas un sous-groupe).

Le *groupe orthogonal réel* $O_n(\mathbb{R})$ correspondant au corps \mathbb{R} des nombres réels est évidemment un sous-groupe de $O_n(K)$, si K est le corps des nombres complexes.

PROPRIÉTÉ : Une transformation orthogonale conserve le produit scalaire de deux vecteurs.

Le produit scalaire des vecteurs \vec{x} et \vec{y} est l'expression :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

forme bilinéaire symétrique des coordonnées des vecteurs.

En effet, cette forme s'écrit comme produit de matrices :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \cdot Y$$

Par la transformation A, ceci devient (d'après l'associativité) :

$$(A X)^T \cdot A Y = (X^T A^T)(A Y) = X^T \cdot (A^T A) \cdot Y = X^T \cdot Y$$

Sous-espace conjugué d'un sous-espace V : C'est le sous-espace V^* des vecteurs \vec{y} tels que l'on ait :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ pour tout } \vec{x} \in V.$$

C'est un sous-espace, car f est bilinéaire, et la relation est symétrique, de sorte que V est le conjugué de V^* .

Si V ne contient qu'un vecteur x , V^* est l'hyperplan orthogonal. Plus généralement, si V est de dimension p , V^* est de dimension $n - p$. (En effet, V étant défini par les p vecteurs indépendants $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_p$, V^* est l'intersection des p hyperplans indépendants $f(\vec{e}_i, \vec{y}) = 0$, avec $i = 1, 2, \dots, p$).

Lorsque K est le corps des réels, on a $V \cap V^* = 0$ et les deux sous-espaces conjugués sont complémentaires. Il n'en est plus de même lorsque K est le corps des complexes ; dans ce cas, il existe des sous-espaces V tels que $V \cap V^* \neq 0$; on les appelle *sous-espaces isotropes*.

4. TRANSFORMATIONS INVOLUTIVES ORTHOGONALES.

Soit A une matrice involutive orthogonale (elle vérifie donc $A^2 = I$, d'où $A = A^{-1} = A^T$). C'est une transformation involutive particulière à laquelle s'applique le théorème 1. Nous allons préciser les résultats de ce théorème en montrant que V et W sont conjugués.

Le produit scalaire de $\vec{x} \in V$ et $\vec{y} \in W$ est :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(A\vec{x}, A\vec{y}) = f(\vec{x}, -\vec{y}) = -f(\vec{x}, \vec{y}),$$

d'où $2f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ et $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ pour un corps K de caractéristique différente de 2.

Il en résulte $\vec{y} \in V^*$, donc $W \leq V^*$. Mais W et V ont la même dimension $n - p$, et par suite $W = V^*$. Ainsi, V et W sont bien conjugués.

On sait d'ailleurs que $V \cap W = 0$; donc $V \cap V^* = 0$, et par suite V est non isotrope. Il en est de même de W . D'où :

THÉORÈME 2 : A étant une transformation orthogonale involutive, il existe un sous-espace non isotrope V (pouvant être réduit à 0), tel que $A\vec{x} = \vec{x}$ pour tous les vecteurs de V et $A\vec{x} = -\vec{x}$ pour tous les vecteurs du sous-espace conjugué V^* .

En prenant un repère orthonormé (1) dans V et un repère orthonormé dans W , on obtient alors un repère orthonormé dans E tel que les équations de la transformation prennent la forme (1). La transformation est une rotation ou un retournement suivant que $n - p$ est pair ou impair.

(1) C'est-à-dire constitué de vecteurs \vec{e}_i tels que $f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ si $i \neq j$
 $= 1$ si $i = j$

5. SYMÉTRIES.

En particulier, lorsque V est de dimension $n - 1$, la transformation orthogonale involutive laisse invariant V . Elle s'appelle *symétrie par rapport à l'hyperplan* V (que nous savons ne pas être isotrope). Le théorème connu de géométrie élémentaire sur la génération du groupe orthogonal au moyen des symétries a été généralisé pour n quelconque dans le cas du corps K des complexes ou R des réels par Elie CARTAN [6] et par J. DIEUDONNÉ pour un corps quelconque de caractéristique différente de 2. C'est la propriété suivante :

THÉORÈME 3 : *Toute transformation orthogonale à n variables est un produit de n symétries au plus.*

Démontrons-le pour le corps des réels par récurrence sur n . La propriété est immédiate pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour $n - 1$. S'il existe un vecteur $\vec{x} \neq 0$ tel que $A\vec{x} = \vec{x}$, A laisse invariant globalement l'hyperplan H conjugué de \vec{x} , et la restriction de A à H est une transformation orthogonale produit de $n - 1$ symétries au plus. Celles-ci définissent des symétries dans E , en nombre $n - 1$ au plus. Si aucun vecteur différent de 0 n'est invariant, on considère un vecteur quelconque \vec{x}_0 , d'où $A\vec{x}_0 \neq \vec{x}_0$, qui vérifie :

$$\varphi(x_0) = f(x_0, x_0) = \varphi(Ax_0).$$

L'hyperplan d'équation $f(\vec{x}, \vec{x}_0 - A\vec{x}_0) = 0$ définit une symétrie S qui transforme \vec{x}_0 en $A\vec{x}_0 \neq 0$. La transformation produit S_0A laisse invariant \vec{x}_0 , donc est le produit de $n - 1$ symétries au plus. Il en résulte que A est le produit de n symétries au plus.

6. LE GROUPE UNITAIRE.

Reprenant l'espace $E = K^n$ où K est le corps des complexes, on considère cette fois la forme hermitienne :

$$\varphi(\vec{x}) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n,$$

où \bar{x}_i désigne le nombre complexe conjugué de x_i . Les transformations unitaires sont les transformations linéaires qui conservent $\varphi(\vec{x})$. Leur matrice A vérifie la relation :

$$\bar{A}^T \cdot A = I,$$

en désignant par \bar{A}^T la matrice transposée de la conjuguée de A . La matrice A est donc inversible ; son inverse est \bar{A}^T qui vérifie $A\bar{A}^T = I$, et qui est donc aussi une matrice hermitienne. Le produit de deux transformations unitaires étant également unitaire, les transformations unitaires forment un groupe : *le groupe unitaire* $U_n(K)$.

Une transformation unitaire laisse invariante l'expression :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

qu'on appelle *produit scalaire hermitien* des vecteurs \vec{x} et \vec{y} ; c'est une forme bilinéaire des deux vecteurs ; elle n'est pas symétrique, mais elle vérifie :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{f(\vec{y}, \vec{x})},$$

de sorte que les conditions $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ et $f(\vec{y}, \vec{x}) = 0$ sont équivalentes. Ces propriétés permettent de définir la notion de sous-espaces V et V^* conjugués et d'étendre au groupe unitaire le théorème 3 pour obtenir la structure d'une transformation unitaire quelconque.

Les transformations unitaires de déterminant égal à 1 forment un sous-groupe du groupe unitaire et du groupe spécial linéaire : *le groupe unitaire spécial* $US_n(K)$.

7. LE GROUPE SYMPLECTIQUE.

Supposons paire la dimension de l'espace E : $n = 2m$. Les coordonnées d'un vecteur \vec{x} seront : $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_m, x'_m$.

A deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} nous associons :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y'_1 - x'_1 y_1 + x_2 y'_2 - x'_2 y_2 + \dots + x_m y'_m - x'_m y_m ;$$

c'est une *forme bilinéaire alternée* des deux vecteurs :

$$f(\vec{y}, \vec{x}) = -f(\vec{x}, \vec{y}).$$

On appelle transformation symplectique une transformation linéaire qui conserve $f(x, y)$. Elle est donc définie par :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(A\vec{x}, A\vec{y}).$$

La matrice A est dite symplectique. Le produit de deux transformations symplectiques est une transformation symplectique. Pour démontrer que ces transformations forment un groupe, montrons qu'elles sont inversibles.

Dans le cas $n = 2$, les transformations ne sont autres que celles qui conservent les aires orientées, donc celles du groupe linéaire spécial $LS_2(K)$. Dans le cas général $n = 2m$, considérons les vecteurs colonnes de la matrice A , c'est-à-dire :

$$\vec{\alpha}_1 = A\vec{e}_1, \vec{\alpha}'_1 = A\vec{e}'_1, \dots, \vec{\alpha}_m = A\vec{e}_m, \vec{\alpha}'_m = A\vec{e}'_m.$$

Des relations : $f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$, $f(\vec{e}_i, \vec{e}'_j) = \delta_{ij}$, $f(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = 0$ (où δ_{ij} vaut 1 pour $i = j$ et 0 pour $i \neq j$), l'on déduit :

$$f(\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j) = 0, f(\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}'_j) = \delta_{ij}, f(\vec{\alpha}'_i, \vec{\alpha}'_j) = 0.$$

Ce sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit symplectique. Or, les vecteurs $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}_m, \vec{\alpha}'_m$ sont indépendants, car, s'il existait des λ tels que $\vec{x} = \lambda_1 \vec{\alpha}_1 + \lambda'_1 \vec{\alpha}'_1 + \dots + \lambda_m \vec{\alpha}_m + \lambda'_m \vec{\alpha}'_m$ soit nul, on en déduirait $f(\vec{x}, \vec{\alpha}'_1) = \lambda_1 = 0$, et de même $\lambda_i = \lambda'_i = 0$ pour tout i . Donc, la matrice A est inversible ; mais son inverse conserve aussi $f(\vec{x}, \vec{y})$, donc est symplectique. Ainsi, *les transformations symplectiques forment un groupe*, qu'on appelle *le groupe symplectique* $S_p(n, K)$.

On définit encore, comme pour le groupe orthogonal, la notion de

sous-espaces conjugués V et V^* , ainsi que celle de sous-espaces isotropes V tel que $V \cap V^* \neq 0$.

Transformations symplectiques involutives : Le théorème 2 s'étend au groupe symplectique en utilisant la même démonstration. Mais nous pouvons donner une précision supplémentaire : *Les espaces V et W qui interviennent dans la structure d'une transformation symplectique involutive sont de dimension paire.*

En effet, V et W sont non isotropes et un sous-espace de dimension impaire ne peut être qu'isotrope. Un tel espace U , défini par un repère $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{2p+1}$, contient en effet un vecteur non nul :

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{2p+1} \vec{e}_{2p+1}$$

appartenant à son conjugué, car le système de $2p + 1$ équations homogènes :

$$f(\vec{x}, \vec{e}_i) = \lambda_1 f(\vec{e}_1, \vec{e}_i) + \dots + \lambda_{2p+1} f(\vec{e}_{2p+1}, \vec{e}_i), \text{ pour } i = 1, 2, \dots, 2p+1,$$

a un déterminant antisymétrique d'ordre impair, donc nul ; il existe alors une solution non nulle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2p+1}$ du système, qui donne un vecteur \vec{x} non nul.

En particulier, tout vecteur est isotrope, de même que tout hyperplan.

8. TRANSVECTION SYMPLECTIQUE.

Ce qui précède montre qu'il n'y a pas de « symétrie » symplectique, mais on peut aussi considérer une symétrie orthogonale comme une transformation orthogonale qui laisse invariants les vecteurs d'un hyperplan, et se proposer de même de chercher les transformations symplectiques qui laissent invariants les vecteurs d'un hyperplan.

Soit A une telle transformation, H un hyperplan, \vec{x}_0 un vecteur non situé dans H ; à tout vecteur \vec{x} correspond un vecteur \vec{h} de H tel que $\vec{x} = \vec{h} + r(\vec{x})\vec{x}_0$, d'où $A\vec{x} = \vec{h} + r(\vec{x})A\vec{x}_0$, et, par soustraction :

$$A\vec{x} - \vec{x} = r(\vec{x})\vec{a}, \text{ avec } \vec{a} = A\vec{x}_0 - \vec{x}_0.$$

Ce vecteur \vec{a} est conjugué de H , car, quel que soit un vecteur \vec{e} de H , $f(\vec{a}, \vec{e}) = f(A\vec{x}_0 - \vec{x}_0, \vec{e}) = f(A\vec{x}_0, \vec{e}) - f(\vec{x}_0, \vec{e}) = 0$, par définition de A . Mais, tout vecteur étant isotrope, ceci entraîne que \vec{a} appartient à H . Ainsi, pour toute transformation A , il existe un vecteur \vec{a} conjugué de H et un vecteur \vec{x}_0 n'appartenant pas à H , tels que

$\vec{x} = \vec{h} + r(\vec{x})\vec{x}_0$, $A\vec{x} = \vec{x} + r(\vec{x})\vec{a}$. Ces formules définissent la transformation cherchée. Réciproquement, la transformation définie par ces formules, dans lesquelles \vec{x}_0 n'est pas dans H et où \vec{a} est le conjugué de H , est bien une transformation symplectique conservant tout vecteur de H , car : $f(A\vec{x}, A\vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + r(\vec{y})f(\vec{x}, \vec{a}) + r(\vec{x})f(\vec{a}, \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y})$.

Soient $2m - 1$ vecteurs \vec{e}_i formant un repère de H (nous prenons $\vec{e}_1 = \vec{a}$) et un vecteur \vec{e}_{2m} hors de H (nous prenons $\vec{e}_{2m} = \vec{x}_0$) ; les for-

mules précédentes donnent : $\vec{h} = \vec{x}_1 \vec{e}_1 + \dots + \vec{x}_{2m-1} \vec{e}_{2m-1}$, $r(\vec{x}) = \vec{x}_{2m}$;
donc, pour les coordonnées de Ax :

$$X_1 = x_1 + x_{2m}, X_2 = x_2, \dots, X_{2m-1} = x_{2m-1}, X_{2m} = x_{2m}.$$

La transformation obtenue se nomme *transvection symplectique* d'hyperplan H. Les équations écrites prouvent que le déterminant de A vaut 1.

L'on peut déterminer une transvection symplectique qui applique un vecteur donné \vec{x}_0 sur un vecteur donné \vec{y}_0 tel que $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$. En effet, d'après ce qui précède, l'hyperplan H doit être le conjugué de $\vec{y}_0 - \vec{x}_0$. Cet hyperplan ne contient pas \vec{x}_0 et A est défini par :

$$\vec{x} = \vec{h} + r(\vec{x})\vec{x}_0, \quad A\vec{x} = \vec{h} + r(\vec{x})\vec{y}_0.$$

9. GÉNÉRATION DU GROUPE SYMPLECTIQUE.

THÉORÈME 4 : *Toute transformation symplectique A est le produit de transvections symplectiques en nombre fini.*

Supposons d'abord que l'on ait, pour tout \vec{x} , $f(\vec{x}, A\vec{x}) = 0$. Alors A est une involution, car, de la relation : $f[\vec{x} + \vec{y}, A(\vec{x} + \vec{y})] = 0$, on tire : $f(\vec{x}, A\vec{y}) = f(A\vec{x}, \vec{y}) = f(A\vec{x}, A^2\vec{y})$, et, comme le vecteur $A\vec{x}$ est quelconque, $A^2\vec{y} = \vec{y}$, quel que soit \vec{y} , donc $A^2 = I$. La réciproque résulte de $f(\vec{x}, \vec{y}) = -f(\vec{y}, \vec{x})$. D'où l'énoncé :

LEMME 1 : *Si $f(\vec{x}, A\vec{x}) = 0$ pour tout \vec{x} , A est une involution, et réciproquement.*

On peut dans ce cas considérer les deux sous-espaces V et $W = V^*$ qui interviennent dans la structure d'une transformation symplectique involutive. En supposant $A \neq I$, on a $W \neq 0$. Comme W est de dimension paire et est non isotrope, on peut trouver deux vecteurs \vec{x}_0 et \vec{y}_0 dans W tels que $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$. De $A\vec{x}_0 = -\vec{x}_0$ (qui exprime $\vec{x}_0 \in W$), on déduit $f(A\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$, et il existe une transvection symplectique T transformant $A\vec{x}_0$ en \vec{y}_0 . De même, $f(\vec{y}_0, \vec{x}_0) \neq 0$ entraîne l'existence d'une transvection symplectique T' transformant \vec{y}_0 en \vec{x}_0 . Il en résulte que T' T A laisse \vec{x}_0 invariant.

Nous allons montrer que, dans le cas général, ce résultat est encore vrai :

LEMME 2 : *A étant une transformation symplectique, il existe deux transvections symplectiques T et T' telles que T' T A laisse invariant au moins un vecteur \vec{x}_0 .*

La propriété vient d'être démontrée si A est involutive. Sinon, d'après le lemme 1, il existe au moins un vecteur \vec{x}_0 tel que $f(\vec{x}_0, A\vec{x}_0) \neq 0$. Il y a donc une transvection symplectique T transformant $A\vec{x}_0$ en \vec{x}_0 , de sorte que le produit T A laisse \vec{x}_0 invariant.

Soit donc B une transformation symplectique laissant invariant un vecteur \vec{x}_0 .

a) Supposons d'abord qu'il existe un vecteur \vec{y}_0 tel que :

$$f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0, \text{ et } f(\vec{y}_0, \vec{B}\vec{y}_0) \neq 0.$$

Il existe une transvection symplectique T_1 transformant $\vec{B}\vec{y}_0$ en \vec{y}_0 , et le produit $T_1 B$ laisse invariant \vec{y}_0 . Le vecteur \vec{x}_0 est aussi invariant par ce produit. Pour le montrer, il suffit de vérifier qu'il est dans l'hyperplan invariant de la transvection T_1 , c'est-à-dire qu'il est conjugué du vecteur $\vec{B}\vec{y}_0 - \vec{y}_0$. Ceci résulte des égalités :

$$f(\vec{x}_0, \vec{B}\vec{y}_0 - \vec{y}_0) = f(\vec{x}_0, \vec{B}\vec{y}_0) - f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = f(\vec{B}\vec{x}_0, \vec{B}\vec{y}_0) - f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0.$$

Nous venons, non seulement de démontrer, dans le cas envisagé, le lemme 2, mais l'énoncé plus complet :

LEMME 3 : *S'il existe un vecteur \vec{y}_0 tel que $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$ et $f(\vec{y}_0, \vec{B}\vec{y}_0) \neq 0$, il existe un produit de transvections symplectiques dont le produit par A laisse invariants deux vecteurs \vec{x}_0 et \vec{y}_0 .*

b) Supposons maintenant que, pour tout vecteur \vec{y}_0 tel que $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$, l'on ait $f(\vec{y}_0, \vec{B}\vec{y}_0) = 0$. On utilisera une transvection symplectique qui transforme $\vec{B}\vec{y}_0$, non plus en \vec{y}_0 , mais en $\vec{x}_0 + \vec{y}_0$. Cette transformation T existe bien, puisque :

$$f(\vec{B}\vec{y}_0, \vec{x}_0 + \vec{y}_0) = f(\vec{B}\vec{y}_0, \vec{x}_0) = f(\vec{y}_0, \vec{x}_0) \neq 0.$$

Alors, le produit $T.B = C$ transforme \vec{y}_0 en $\vec{x}_0 + \vec{y}_0$, avec :

$$f(\vec{y}_0, \vec{C}\vec{y}_0) = f(\vec{y}_0, \vec{x}_0 + \vec{y}_0) = f(\vec{y}_0, \vec{x}_0) \neq 0.$$

C laisse du reste \vec{x}_0 invariant, car \vec{x}_0 appartient à l'hyperplan invariant de la transvection, puisque l'on a :

$$f(\vec{x}_0, \vec{B}\vec{y}_0 - \vec{x}_0 - \vec{y}_0) = f(\vec{x}_0, \vec{B}\vec{y}_0) - f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0.$$

Les deux vecteurs \vec{x}_0 et \vec{y}_0 sont donc tels que :

$$f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0 \text{ et } f(\vec{y}_0, \vec{C}\vec{y}_0) \neq 0.$$

Ce sont les conditions d'application du lemme 3, d'où l'énoncé :

LEMME : *A étant une transformation symplectique quelconque, il existe un produit de transvections symplectiques dont le produit par A laisse invariant deux vecteurs \vec{x}_0 et \vec{y}_0 tels que $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$.*

De cet énoncé, on déduit le théorème 4 de la façon suivante : Soit P le plan déterminé par \vec{x}_0 et \vec{y}_0 supposés invariants par C et tels que $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$. Ce plan n'est pas isotrope, et le sous-espace P^* conjugué de P est complémentaire de P ; or, il est de dimension $2m - 2$. La transformation C laisse P^* invariant et sa restriction à ce sous-ensemble est une transformation symplectique que l'on étudie comme plus haut. Si cette restriction est un produit de transvections symplectiques, comme toute transvection symplectique de ce sous-espace est la restriction d'une

transvection symplectique de E, le théorème sera démontré. Or, par induction sur m , on est ramené à l'espace de dimension 2, et le lemme permet de conclure dans ce cas. Le théorème est donc démontré.

Comme conséquence du théorème 4, on remarque que le déterminant de toute transformation symplectique est égal à 1. C'est dire que le groupe symplectique $S_p(n, K)$ est un sous-groupe du groupe linéaire spécial $LS_n(K)$.

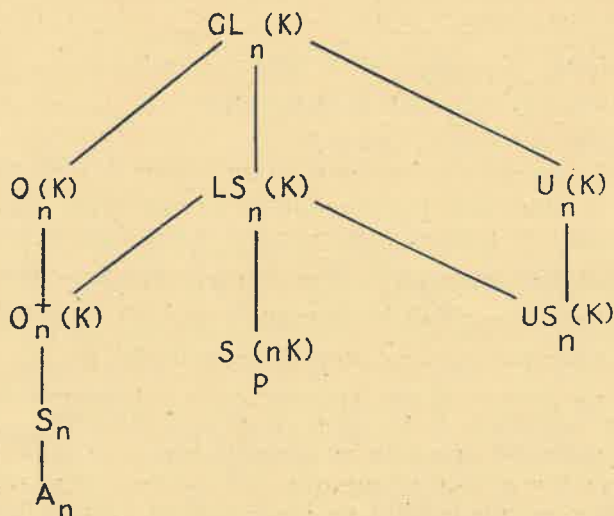
10. LE GROUPE SYMÉTRIQUE.

On appelle *groupe symétrique* S_n le groupe des *substitutions* d'un ensemble fini de n éléments. C'est donc un groupe fini possédant $n!$ éléments. Il peut être réalisé par des transformations linéaires de K^n ; en effet, on a par exemple, en considérant l'ensemble de trois éléments (x_1, x_2, x_3) , la substitution $\{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{x_3, x_2, x_1\}$ réalisée par :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

et représentée par une matrice n'ayant dans toute ligne et colonne qu'un élément non nul, cet élément étant égal à 1. Cette remarque vaut quel que soit n . Il en résulte que le groupe S_n peut être considéré comme un sous-groupe du groupe orthogonal; les rotations de ce groupe, en nombre $1/2 n!$, correspondent aux substitutions paires et forment un sous-groupe de S_n : le *groupe alterné* A_n .

On pourra trouver une étude sommaire de ce groupe, ainsi que des indications sur la *théorie de la représentation* et ses applications à la physique dans [7]. Des applications du groupe orthogonal et du groupe unitaire au calcul opérationnel se trouvent dans [8]. Quelques exercices sont proposés ici après la bibliographie. Indiquons pour terminer le diagramme des groupes rencontrés dans cette conférence :



L. LESIEUR,

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. WEYL. — *The classical groups* (Princeton, 2^e édition, 1946).
- [2] B. L. VAN DER WAERDEN. — *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (Ergebnisse der Math., 1932).
- [3] B. L. VAN DER WAERDEN. — *Gruppen von linearen transformationen* (Ergebnisse der Mathematik, 1935).
- [4] J. DIEUDONNÉ. — *Sur les groupes classiques* (Paris, Hermann, 1948).
- [5] J. DIEUDONNÉ. — *La géométrie des groupes classiques* (Ergebnisse der Mathematik, 1955).
- [6] E. CARTAN. — *Leçons sur la théorie des spineurs* (Act. Sc. et Ind., n° 643, p. 13-17).
- [7] *Conférences du Séminaire de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Poitiers* (1954-1955).
- [8] M. JANET. — *Précis de Calcul matriciel et opérationnel* (Hrresses Universitaires, Collection Euclide, 1954).

EXERCICES

1. R étant un retournement, il existe toujours un vecteur $\vec{x} \neq 0$ tel que $R\vec{x} = -\vec{x}$. Autre forme : -1 est une valeur propre de la matrice d'un retournement quelconque.

2. Si n est impair, une rotation possède toujours un axe de points invariants passant par l'origine. Autre forme : $+1$ est une valeur propre de la matrice d'une rotation quelconque lorsque n est impair.

3. Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale, c'est-à-dire les racines de l'équation $\det(A - sI) = 0$, ont toutes un module égal à 1.

4. Soient V et V^* les sous-espaces intervenant dans la structure d'une transformation orthogonale involutive (théorème 2). Lorsque V^* est de dimension 2, donc V de dimension $n - 2$, on obtient une rotation qu'on appelle *renversement* d'axe V . Montrer que toute rotation est un produit de renversements lorsque $n > 2$.

5. Avec les notations de l'exercice précédent, si V est une droite et V^* un hyperplan, on obtient une rotation ou un retournement suivant que n est impair ou pair, qu'on appelle *transposition* d'axe V . Montrer que si n est impair, toute rotation est un produit de transpositions ; si n est pair, tout retournement est un produit de transpositions ($n \geq 3$).

6. Montrer que toutes les matrices du groupe unitaire spécial sont données pour $n = 2$ par $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, où les nombres complexes a et b vérifient $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$.

7. Soit J la matrice carrée d'ordre $2m$ constituée par m blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ situés sur la diagonale principale ; par exemple :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A soit symplectique est :

$$A^T J A = J.$$

8. Montrer que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation soit à la fois symplectique et involutive peuvent se mettre sous la forme :

$$A^2 = I, A^T J = J A,$$

J étant la matrice de l'exercice 7.

9. On appelle base (ou repère) symplectique, dans $E = K^m$ de base $\vec{e}_1, \vec{e}'_1, \vec{e}_2, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}_m, \vec{e}'_m$ ($n = 2m$), toute base $A\vec{e}_i$ ($i = 1, \dots, 2m$) déduite des \vec{e}_j et \vec{e}'_j par une transformation symplectique. Montrer que si \vec{x}_1 et \vec{x}'_1 sont deux vecteurs quelconques tels que $f(\vec{x}_1, \vec{x}'_1)$ ne soit pas nul, il existe une base symplectique dont les deux premiers vecteurs sont \vec{x}_1 et \vec{x}'_1 .

10. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ est celle d'une transvection symplectique ($n = 2$). Vérifier que $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est le produit des trois transvections symplectiques $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La transformation symplectique $-I$ peut-elle être le produit de deux transvections symplectiques seulement ?

ESPACES PROJECTIFS*

Un bon taupin sait utiliser correctement les espaces projectifs réels, et même les espaces projectifs complexes. Cependant, son premier contact avec eux s'est presque toujours fait dans le malaise, malaise qui, si j'en crois mon expérience personnelle, peut persister longtemps. Mon propos sera ici moins de m'étendre sur la technique des espaces projectifs que d'essayer de les situer correctement par rapport aux espaces d'où ils dérivent et par là de rendre compte de l'origine du malaise et de contribuer à le dissiper.

L'introduction d'éléments à l'infini rencontre des difficultés que ne présente aucune des extensions successives de la notion de nombre, depuis le nombre entier naturel jusqu'au nombre complexe. La première est que chacune de ces extensions permettait d'obtenir de nouvelles propriétés des éléments créés, sans rien perdre de celles que possédaient les éléments déjà existants (sauf la structure de corps ordonné pour le passage des réels aux complexes). L'introduction d'un (ou deux)

(*) Conférence prononcée le 31 mai 1956 à l'Institut Henri-Poincaré, septième conférence du cycle sur l'Algèbre organisé par la Société Mathématique de France en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

élément à l'infini ruine au contraire presque totalement la structure algébrique de la droite réelle. C'est ce qu'on exprime parfois de façon trop elliptique dans les classes élémentaires en proclamant : « L'infini n'est pas un nombre ! » La seconde est relative à l'unicité de l'extension, qui était assurée pour les extensions de la notion de nombre [de façon précise, on a par exemple : Tout groupe abélien minimal contenant les entiers naturels (pour l'addition) est isomorphe au groupe des entiers relatifs], et qui ne l'est plus pour les éléments à l'infini. L'absence de fondement rigoureux laisse l'élève désarçonné devant de faux problèmes tels que le suivant : Comment se fait-il que le plan de la variable complexe et le plan de la géométrie analytique qui coïncident à distance finie aient l'un un point à l'infini, l'autre une droite à l'infini ?

1. DÉFINITION DES ESPACES PROJECTIFS.

a) Introduction par la perspective d'un plan sur un plan : Soient P et P' deux plans non parallèles et un point de vue O . On se heurte à des exceptions désagréables : il existe une droite de P dont les points M n'ont pas d'images et il existe une droite de P' dont les points ne sont pas images de points de P . Or, pour les autres points, il y a correspondance entre un point M de P , une droite OMM' et un point M' de P' , un seul de ces éléments déterminant univoquement les deux autres. Mais, dans les deux cas d'exception signalés, l'un des deux points M ou M' subsiste et la droite issue de O est toujours déterminée. On peut donc écarter les cas exceptionnels en travaillant non plus sur les points de P ou P' , mais sur les droites issues de O dans R^3 . Et l'on donnera la définition : *L'espace projectif à deux dimensions P_2 est l'ensemble des droites issues d'un point O dans l'espace euclidien à trois dimensions R^3 . Une droite projective de P_2 est un plan issu de O dans R^3 .*

Généralisation : Etant donné un corps quelconque, commutatif ou non, K , et l'espace vectoriel à gauche K^{n+1} , produit de $n+1$ facteurs égaux à K , auquel tout espace vectoriel à gauche (1) sur K de dimension $n+1$ est isomorphe, nous désignerons par espace projectif à gauche à n dimensions sur K , $P_n(K)$, l'ensemble des droites homogènes de K^{n+1} , c'est-à-dire l'ensemble de ses sous-espaces à une dimension.

b) Introduction par les coordonnées homogènes : Plaçons-nous cette fois à un point de vue plus analytique. Soit K^{*}_{n+1} l'espace obtenu en privant K^{n+1} de son origine (la position de l'indice, placé en bas, rappellera que K^{*}_{n+1} n'est pas le produit d'espaces analogues de dimensions inférieures). Dans K^{*}_{n+1} , introduisons la relation d'équivalence Δ_n suivante : x et y , vecteurs non nuls de K^{*}_{n+1} , sont équivalents si et seulement s'il existe $t \in K$ non nul tel que $y = tx$.

Les classes d'équivalence sont les droites homogènes de K^{n+1} privées de l'origine ; il y a donc correspondance biunivoque entre $P_n(K)$ et l'espace quotient K^{*}_{n+1}/Δ_n avec lequel on peut l'identifier.

Un élément de K^{*}_{n+1} étant donné par ses coordonnées x_0, x_1, \dots, x_n ,

(1) Ou à droite.

un élément de P_n est donné par les $n + 1$ éléments x_0, x_1, \dots, x_n définis à un facteur près et qui en sont un système de « coordonnées homogènes ».

2. STRUCTURE D'UN ESPACE PROJECTIF.

Que reste-t-il après ces opérations de la structure de l'espace vectoriel de départ ? Si l'on part d'un groupe et que l'on considère son quotient par une relation d'équivalence régulière par rapport à la loi du groupe, on aboutit encore à un groupe : le groupe quotient. Mais ici, outre que nous sommes partis d'un espace vectoriel privé de l'élément neutre de son opération de groupe, la relation d'équivalence n'est pas régulière par rapport à cette opération (x équivalent à x' , y équivalent à y' , n'entraîne pas $x + y$ équivalent à $x' + y'$). Quant à la multiplication par un scalaire, elle laisse l'élément dans sa classe d'équivalence et ne fournit pas d'opération dans l'espace projectif.

Que demeure-t-il donc ? Pensons à l'origine de nos considérations et à la perspective d'un plan sur un autre. Ce qui demeure alors, c'est l'alignement des points. Dans les espaces plus généraux, on constate que si p éléments de K^*_{n+1} sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, il en est évidemment de même de p éléments x'_1, \dots, x'_p respectivement équivalents aux précédents. Les classes d'équivalence correspondantes seront alors dites des points projectivement indépendants de P_n .

Variétés linéaires projectives. Soit φ l'application canonique de K^*_{n+1} sur P_n , qui à chaque élément x de K^*_{n+1} fait correspondre sa classe modulo Δ_n . On définira systématiquement les « êtres projectifs » comme images par φ des « êtres linéaires » de K^*_{n+1} . Ainsi, une variété linéaire projective à p dimensions est l'image canonique $\varphi(V_p)$ d'un sous-espace à p dimensions V_p de K^*_{n+1} . Il en résulte que si p points de P_n sont projectivement indépendants, la plus petite variété linéaire projective les contenant est de dimension $p - 1$.

Autre axiomatisation des espaces projectifs. La notion d'indépendance projective est si bien la seule qui subsiste dans les espaces projectifs que leur théorie peut se faire à partir d'elle seule. Un excellent exposé en a été donné par LESIEUR (2), qui définit d'ailleurs l'indépendance dans le langage des structures ordonnées.

La remarque initiale porte sur le fait que l'ensemble des variétés linéaires projectives de $P_3(\mathbb{R})$, par exemple, y compris l'ensemble vide et $P_3(\mathbb{R})$ tout entier, ordonné par inclusion, est un treillis : ce qui veut dire que deux variétés A et B étant données, il existe, parmi celles qui sont contenues dans A et dans B , une plus grande variété, qu'on notera $\inf A, B$ ou $A \cap B$, et qu'on appellera leur intersection (3), et, parmi celles

(2) M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT : *Théorie des Treillis*, Paris, 1953, pp. 249-371.

(3) L'intersection est, en principe, celle des treillis, mais elle coïncide ici avec celle de la théorie des ensembles, si on considère les variétés comme ensembles des points qu'elles contiennent ; l'union est au contraire une opération de la théorie des treillis, dont le résultat est ici distinct de la réunion de la théorie des ensembles.

qui contiennent A et B, il existe une plus petite variété, qui en sera dite l'union et qu'on notera $\sup A, B$ ou $A \cup B$ (3). Le treillis a un plus petit élément : l'ensemble vide, et un plus grand élément : l'espace entier.

LESIEUR part alors des axiomes suivants :

I. Les variétés linéaires d'un espace projectif sont les éléments d'un treillis avec plus petit élément 0 et plus grand élément 1. La relation d'ordre notée $A \leq B$ pourra se lire : A est dans B ou B passe par A. On appelle points les éléments couvrant 0 (4).

II. Si le point P n'est pas dans la variété B, $B \cup P$ couvre B.

III. L'ensemble des points situés dans toute variété $A \neq 0$ n'est pas vide et A est l'union d'un nombre fini d'entre eux.

La notion d'indépendance s'exprime alors ainsi : $n + 1$ points sont dépendants si l'un d'eux au moins est contenu dans l'union des n autres. Ils sont indépendants dans le cas contraire.

On démontre alors que le nombre de points indépendants dont une variété est l'union ne dépend que de la variété et non des points indépendants choisis, s'il y a plusieurs choix possibles. La dimension de la variété est ce nombre diminué d'une unité.

Si n est la dimension de l'espace (plus grand élément du treillis), on appellera hyperplan les variétés de dimension $n - 1$.

Un quatrième axiome est alors :

IV. Si A n'est pas contenue dans l'hyperplan H, A couvre $A \cap H$. C'est l'axiome dual de II (son expression est celle de II, si on inverse l'ordre du treillis).

Une conséquence remarquable de ces quatre axiomes est l'identité satisfaite par la dimension des variétés :

$$d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B).$$

C'est à partir de ces notions très simples qu'en enrichissant progressivement la théorie par de nouveaux axiomes, on reconstitue la géométrie projective classique et, au-delà, la géométrie affine.

Nous quitterons ici ce point de vue que nous n'avons signalé que pour souligner ce qui fait l'essence de la théorie des espaces projectifs et à cause de l'élégance de la théorie qu'il permet d'élaborer.

3. APPLICATIONS PROJECTIVES (5).

Soient deux espaces projectifs sur un même corps K, de dimensions respectives m et n . Nous les nommons P_m et P_n . Ils sont définis à partir des espaces vectoriels époinés K^*_{m+1} et K^*_{n+1} . Soient φ et ψ les applications canoniques respectives de K^*_{m+1} sur P_m et de K^*_{n+1} sur P_n . A toute application linéaire biunivoque de K^{n+1} dans K^{m+1} ($m \leq n$), f ,

(4) Un élément a en couvre un autre b , si a est strictement plus grand que b et s'il n'existe aucun élément entre a et b .

(5) On désigne souvent par application linéaire projective ce que nous appelons ici simplement application projective ; comme ce sont les seules que nous considérerons, aucune confusion n'est à craindre.

nous faisons correspondre « par passage au quotient » une application projective g de P_m dans P_n par l'égalité :

$$g \circ \varphi = \psi \circ f.$$

Les applications obéissent au schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} K^*_{m+1} & \xrightarrow{f} & K^*_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ P_m & \xrightarrow{g} & P_n \end{array}$$

x étant un point de P_m est l'image par φ d'une « droite » de K^*_{m+1} dont l'image par f est une droite de K^*_{n+1} , dont ψ donne enfin pour image un point de P_n qui est par définition l'image de x par g . Une variété projective de dimension p de P_m étant l'image par φ d'un sous-espace vectoriel (privé de O) de dimension p de K^*_{m+1} , il en résulte que l'image par une application projective d'une variété projective est une variété projective de même dimension.

Généralisation : *Applications semi-linéaires* : On peut généraliser ce qui précède au cas où les espaces projectifs seraient définis sur des corps différents, mais isomorphes, K et K' . Soit σ l'isomorphisme entre K et K' et λ^σ l'image dans K' de l'élément λ de K . f est une application semi-linéaire d'un espace vectoriel à droite E sur K dans un espace vectoriel à droite E' sur K' , associée à l'isomorphisme, si l'on a, quels que soient x et y de E et λ de K :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(x\lambda) = f(x)\lambda^\sigma.$$

L'application déduite de f par le même passage au quotient que ci-dessus s'appellera une application projective pour les espaces projectifs correspondants, si f est biunivoque.

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer sous sa forme la plus générale le *théorème fondamental de la géométrie projective* :

THÉORÈME : Soient E et E' deux espaces vectoriels à droite de même dimension n , sur deux corps K et K' respectivement ; P et P' les espaces projectifs correspondants. S'il existe une application *biunivoque* g de P sur P' telle que *trois points alignés quelconques de P aient pour images trois points alignés de P'* , on peut en déduire, si $n \geq 3$:

- 1) que K et K' sont isomorphes (on désignera par σ l'isomorphisme) ;
- 2) que g est une application projective, déduite par passage au quotient d'une application semi-linéaire biunivoque f de E sur E' associée à σ .

Remarquons que cet énoncé apporte une confirmation décisive au point de vue exposé plus haut : l'essentiel de la théorie des espaces projectifs est contenu dans la notion d'indépendance des points.

Démonstration (6). Nous désignerons par xK le point de P image canonique du point x de E (même convention pour E' , P' , K').

(6) Nous suivons, pour cette démonstration, l'exposé de J. DIEUDONNÉ : *La Géométrie des Groupes Classiques*, Berlin, 1955.

1° L'image $g(V)$ d'une variété V de dimension p est une variété de dimension p . Soient a_iK ($1 \leq i \leq p + 1$) des points projectivement indépendants engendrant V ; des points alignés ayant pour images des points alignés, $g(V)$ est contenue dans la variété V' engendrée par les $g(a_iK)$. Mais, d'autre part, il résulte de $g(P) = P'$ que des points indépendants ont pour images des points indépendants ; supposons, en effet, que les $g(a_iK)$ ne le soient pas. En complétant les a_i ($1 \leq i \leq p + 1$) en une base de E : $a_1, \dots, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n$, on obtient des images $g(a_iK)$ ($1 \leq i \leq n$) sous-tendant une variété de dimension $< n - 1$ qui devrait contenir P' , puisque $g(P) = P'$, ce qui est absurde, puisque $d(P') = n - 1$. Mais alors $g(V) = V'$, sans quoi V' contiendrait un élément de la forme $g(aK)$, aK étant projectivement indépendant des a_iK ($1 \leq i \leq p + 1$). La variété V_1 engendrée par V et aK serait de dimension $p + 1$, alors que son image est contenue dans V' de dimension p .

2° K et K' sont isomorphes. Soit une base (e_i) ($1 \leq i \leq n$) de E , les points e_1K, e_2K et e_nK de P , e'_1K', e'_2K' et e'_nK' leurs images par g . Il résulte de 1° que e'_1, e'_2 et e'_n sont linéairement indépendants dans E' . Soit D la droite projective engendrée par e_1K et e_2K , D' son image ; F le plan projectif engendré par D et e_nK , F' son image. Tout point de F non sur D s'écrit d'une seule manière $(e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_n)K$. On peut donc identifier le complémentaire de D dans F avec l'espace vectoriel à droite sur K engendré par e_1 et e_2 (D est prise pour droite à l'infini !). Toute droite projective de F distincte de D correspond à une droite de L et deux droites de F se coupant sur D en deux droites déduites l'une de l'autre par translation (nous les dirons parallèles, et remarquerons qu'on peut aussi passer de l'une à l'autre par une « homothétie »). On peut alors faire une identification analogue entre le complémentaire de D dans F' et l'espace vectoriel L' engendré par e'_1 et e'_2 . A l'application g correspond alors une application u biunivoque de L sur L' transformant toute droite en droite et deux droites parallèles en deux droites parallèles, avec $u(O) = O$, $u(e_1) = e'_1$ et $u(e_2) = e'_2$. Il est alors aisé, par des constructions de droites parallèles dans L , d'obtenir, à partir de deux éléments α et β de K , les éléments $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ comme abscisses de points sur la droite engendrée par e_1 (fig. 1 et 2). Le parallélisme étant conservé par u , on voit immédiatement qu'en posant $u(e_1\xi) = e'_1\xi^\sigma$, l'application $\xi \rightarrow \xi^\sigma$ est biunivoque de K sur K' et conserve la somme et le produit, c'est l'isomorphisme annoncé.

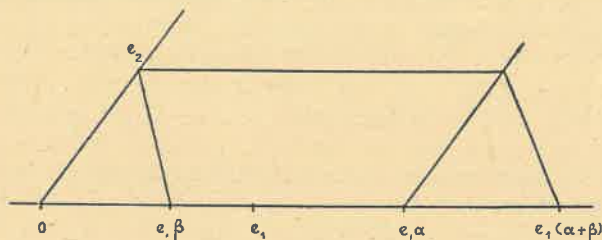
3° g est une application projective. La droite joignant $e_1\xi$ à $e_2\xi$ est dans L parallèle à la droite joignant e_1 à e_2 . On a donc $u(e_2\xi) = e'_2\xi^\sigma$. D'autre part, le point $e_1\alpha + e_2\beta$ de L s'y obtient en menant par $e_1\alpha$ et $e_2\beta$ les parallèles respectives à e_2 et e_1 ; on a donc aussi :

$$u(e_1\xi + e_2\eta) = e'_1\xi^\sigma + e'_2\eta^\sigma,$$

c'est-à-dire que u est une application semi-linéaire biunivoque, associée à σ de L sur L' .

Le raisonnement précédent est valable pour tout couple de points e_iK, e_jK de P . Si l'on désigne par v l'application semi-linéaire biunivoque associée à σ et qui vérifie $v(e_i) = e'_i$ et h l'application projective corres-

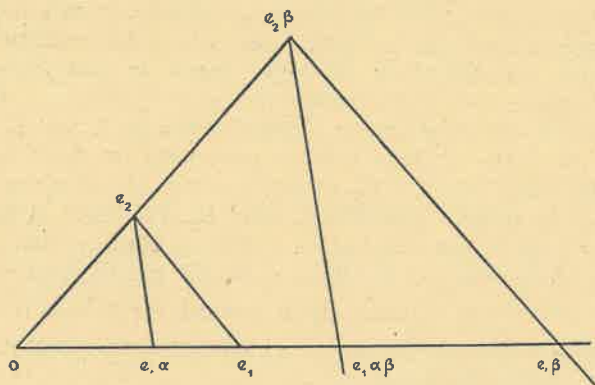
pondante de P sur P' , on voit que $h^{-1}og$ est une application de P sur lui-même, transformant toute droite en droite et laissant invariants tous les points des droites joignant deux des points e_iK, e_jK . C'est la transformation identique. On a bien $g = h$.



Remarque : Le théorème est faux pour $n = 2$. Dans le cas $K = K' = \mathbb{R}$, on sait que les transformations projectives sont caractérisées par la conservation du birapport.

4. TOPOLOGIE DES ESPACES PROJECTIFS.

Si l'espace vectoriel E est pourvu d'une topologie, on en déduit immédiatement une par passage au quotient pour l'espace projectif correspondant. C'est le cas pour les espaces projectifs réels ou complexes (c'est-à-dire définis sur le corps des réels ou le corps des complexes).



Nous nous contenterons ici de citer les importants résultats suivants : $P_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère S_n après identification de ses points diamétralement opposés ; $P_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la boule B_n après identification des points diamétralement opposés de sa frontière S_{n-1} ; $P_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe.

André REVUZ,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

II. PAGES A RELIRE

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

par M. CLAIRAUT

Les *Eléments d'Algèbre*, de CLAIRAUT, ont eu une première édition en 1746, cinq ans après les *Eléments de Géométrie*.
Ils ont été réédités en 1749, 1760, 1768, 1797 et 1801.
Ils ont été, paraît-il, traduits en hollandais et en allemand.
Le grand rôle qu'ils ont joué dans notre enseignement nous conduit à en reproduire la préface.

Jean ITARD.

PREFACE

Je me suis proposé de suivre, dans cet Ouvrage, la même méthode que dans mes Elémens de Géométrie ; j'ai tâché d'y donner les règles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de Théorèmes. Toutes, au contraire, semblent être découvertes en s'exerçant sur les Problèmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

Des Problèmes utiles au commerce, comme ceux où il est question de partager des sommes entre différentes personnes à raison de leurs mises ou de quelques conventions faites entr'elles ; des règles d'alliage, &c. sont les Problèmes que je suppose avoir occupé les premiers Algébristes.

Je commence par donner la solution d'un des plus simples de ces Problèmes, telle qu'on la peut trouver, sans avoir aucune teinture de l'Algebre. Il est aisé de reconnoître dans cette solution, que si la mémoire suffit à retenir tous les raisonnemens par lesquels il faut passer pour y arriver, c'est que la suite de ces raisonnemens n'est pas bien longue ; & l'on voit en même-temps que, lorsqu'on s'éleve à des Problèmes qui en demandent une plus grande, il faut chercher à les écrire d'une manière fort abrégée, il faut imaginer quelques signes, à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la difficulté est réduite à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette manière d'écrire les questions, est l'Algebre que je fais, pour ainsi dire, inventer au Lecteur.

Pour aller toujours du plus simple au plus composé, je ne propose d'abord que des questions numériques, parce que ce sont celles qui fixent le plus l'esprit des Commençans. Après en avoir résolu plusieurs qui ne différent les unes des autres que par les nombres donnés dans l'énoncé, on s'apperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune dans chaque résolution, & qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois : je saisis cette occasion d'expliquer la manière de résoudre généralement les Problèmes, en employant, au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs : & j'enseigne ensuite à tirer des solutions générales les solu-

tions particulières, au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens Problèmes où j'emploie des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'assez compliqués pour ne pouvoir pas être résolus sans employer les règles d'addition, soustraction, multiplication & division : je montre alors comment on doit faire ces opérations. Je n'ai pas cru devoir les donner plutôt, parce que les Commençans les suivent avec peine & avec dégoût, lorsqu'on les leur enseigne dans un temps où ils n'ont aucune idée des quantités sur lesquelles ils opèrent.

La multiplication est de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les Commençans, & dont l'explication embarrasse le plus les maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans lesquelles on a dû en remarquer la nécessité. Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs termes positifs & négatifs par un seul terme que je suppose toujours positif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considérer une quantité négative, comme existant seule. Cette multiplication étant expliquée, je passe à celle où le multiplicateur est aussi-bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs & négatifs, & je fais voir facilement que cette opération n'est autre chose que la première répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que, suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent, doivent être ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen, je familiarise les Commençans avec la multiplication, sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que moins par plus donne moins, moins par moins donne plus, &c., qui, en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y en a dans les choses.

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'é luder la difficulté, & je n'aurois fait réellement que l'é luder, si je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités aussi entièrement négatives, opération dans laquelle on ne sauroit éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication, après en avoir montré la nécessité au Lecteur, en le conduisant à un Problème où l'on est obligé de considérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités positives dont elles soient retranchées.

Lorsque je suis parvenu, dans ce Problème, au point où il s'agit de multiplier ou de diviser des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont sans doute pris les premiers Analystes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu suivre une route entièrement sûre, je cherche une solution au Problème par laquelle je puisse éviter toute espèce de multiplication ou de division de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au résultat, sans employer d'autres raisonnemens, que ceux sur lesquels on ne peut former aucun doute ; & je vois ce

que doivent être ces produits ou quotiens des quantités négatives que m'avoit donnés la première solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que moins par moins donne plus, &c.

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, & le Lecteur parvient en même-temps à connoître la nature des solutions négatives des Problèmes ; il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du Problème.

La première Partie de cet Ouvrage traite uniquement des équations du premier degré, soit à une, soit à plusieurs inconnues, & de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur résolution, que pour la rendre aussi simple qu'elle puisse être. Telle est, par exemple, la règle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur, laquelle naît de la nécessité de réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette règle est expliquée d'une manière nouvelle, & j'y ai ajouté plusieurs réflexions qui la rendent applicable à des cas où la manière ordinaire de la traiter, pourroit rebuter pour la longueur des calculs, & ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la seconde Partie, je parle des équations du second degré ; un Problème où il s'agit d'intérêts d'intérêts m'amène à une de ces équations ; je l'ai choisie de nature à donner pour ses deux solutions deux nombres positifs, afin de mieux faire voir comment deux nombres différens résolvent le même Problème. J'en ai usé ainsi, dans la crainte que les Commençaans, qui ne regardent pas volontiers les racines négatives comme de véritables solutions, ne crussent que le Problème n'avoit réellement qu'une solution.

Cependant, afin de les accoutumer aux racines négatives, je donne ensuite un Problème dans lequel il y a une de ces racines, & telle cependant qu'aucun Commençaans ne peut s'empêcher de voir qu'elle satisfait autant un Problème que la positive.

La résolution des équations que demandent ces Problèmes & ceux de même espèce qu'on peut se proposer, engagent les Lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algebre, telles que les extractions des racines quarrées ; la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions, &c., opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Elémens d'Algebre, mais que mon plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations, je passe à un Problème dans lequel on doit employer plusieurs équations du second degré qui contiennent chacune plusieurs inconnues, & je donne les moyens de réduire toutes ces équations à une seule qui ne renferme qu'une inconnue. Je fais voir en même-temps que cette méthode n'est pas seulement propre aux équations où les inconnues ne montent qu'au second degré, mais qu'elle s'étend à tous les degrés.

La troisième Partie a pour objet les équations de tous les degrés prises en général. Je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coefficients du second, du troisième, &c. terme, ont d'être, ou la somme des racines, ou celle des produits de ces racines, &c. Je tire de ces propriétés la fameuse règle de Descartes, pour trouver toutes les racines

commensurables qui sont dans une équation (1) ; & comme cette méthode engage dans des calculs excessifs à cause du grand nombre de divisions qu'il faut tenter, je donne la méthode de Newton, qui s'étend non-seulement aux racines commensurables ou diviseurs d'une dimension, mais aux diviseurs de tant de dimensions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonstration de cette méthode que Newton avoit supprimée, mais je fais voir par quelle route il a pu la découvrir. C'est un avantage que je ne crois pas qu'on puisse trouver dans la démonstration que M. s'Gravesande (2) en a donnée (dans son Specimen commentarii in arithmetica universalem, inséré à la fin de ses *Elémens d'Algebre*) & qui est la seule que je sçache avoir été donnée, malgré le grand nombre de Traités d'Algebre qui ont paru depuis Newton. J'ai appris cependant que le R.P. Jacquier (3), connu pour avoir commenté les recherches les plus élevées de Newton, avoit pris la peine de traiter celle-ci, mais ce qu'il a fait sur cette matiere, n'est pas venu à ma connoissance.

Au reste, dans cette Partie & dans celles qui suivent, je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes, à montrer les Problèmes qui pourroient avoir conduit aux équations que j'examine, parce que je ne crois plus avoir besoin de ce motif pour exciter la curiosité des Lecteurs. Ils ont dû suffisamment voir, par les premiers Problèmes, de quelle importance il étoit de sçavoir résoudre toutes sortes d'équations.

Je traite dans la quatrième Partie des équations de tous les degrés, lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles se réduisent à la méthode des équations du second degré par une simple transformation. J'enseigne, par ce moyen, aux Commençans, un grand nombre d'opérations sur les quantités radicales de toute espèce, & je leur donne une connoissance entière, tant de l'élévation des puissances, que de l'extraction des racines.

Une règle qui est absolument nécessaire pour la résolution complète de ces équations, & qui a toujours été omise dans tous les Ouvrages Elémentaires (celui de M. s'Gravesande excepté), c'est l'extraction des racines des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables : Newton, à qui on doit cette règle, l'ayant donnée à son ordinaire sans démonstration, je l'ai traitée ici comme un Problème ; par ce moyen la découverte & la démonstration marchent toujours de concert.

La méthode de Newton s'étend aux quantités numériques quel que soit l'exposant de la racine, mais elle ne s'applique pas aux quantités littérales, lorsque cet exposant passe le second degré ; je supplée ce qui

(1) Un premier algébriste avoit déjà indiqué, sur des cas très simples, cette méthode : Jacques Peletier, dans son *Algebre*, en Français, de 1554. Descartes, dans sa correspondance, la perfectionne beaucoup et dépasse de loin l'exposé qu'il en donne dans sa *Géométrie* de 1637. Dans l'*Arithmétique Universelle*, Newton l'améliore encore. — I. J.

(2) Sur s'Gravesande (1688-1742), voir Pierre Brunet : « Les Physiciens Hollandais et la Méthode Expérimentale en France au XVIII^e siècle », Paris, Blanchard, 1926. — I. J.

(3) Le Père François Jacquier, Minime, 1711-1788 ; publia avec le Père Le Seur une édition commentée des *Principia* de Newton. Ces deux auteurs publièrent en 1765 un traité de calcul intégral. Lagrange se plaint qu'ils aient utilisé certaines de ses découvertes sans le nommer. — I. J.

manque à cette méthode, en donnant le procédé qu'il faut suivre pour les quantités littérales. De plus, je fais voir que la méthode de Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occasions ; c'est lorsque la racine d'une quantité contient des fractions, & que cette quantité elle-même n'en renferme pas. Je montre ce qu'il faut faire pour remédier à cet inconvénient.

M. s'Gravesande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Newton, où se trouve cette méthode, n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper, & il n'a point donné la manière de l'appliquer aux quantités littérales de tous les degrés.

Toutes ces opérations, lorsqu'on veut les appliquer à une puissance quelconque, supposant qu'on connoisse la formule du binome, je saisis l'occasion qu'elles me fournissent d'amener l'invention de cette fameuse formule. Je la démontre d'une manière nouvelle (4), & je fais voir les différens usages qu'elle a fournis, tels que le moyen de trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, &c., ce qui peut préparer les Commençans à l'analyse de l'infini.

La cinquième Partie traite des équations du troisième & du quatrième degré qui ont tous leurs termes, c'est à dire, toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des équations du troisième degré, & je fais voir ensuite les équations particulières, où cette solution n'apprend point la valeur de l'inconnue, ce qui forme le cas qu'on appelle irréductible. Dans ces équations, au défaut des racines exactes, j'enseigne à en trouver par approximation ; je donne, pour y parvenir, une méthode nouvelle beaucoup plus simple que celles qui ont paru jusqu'à présent. Par cette méthode, dès la première opération, j'ai la valeur de la racine cherchée à un millième près, à la seconde à un millionième, & ainsi de suite.

Je passe de là aux équations du quatrième degré, & après avoir donné leur résolution générale, je fais voir que cette résolution, ainsi que celle des équations du second degré, a cet avantage sur la résolution des équations du troisième, qu'une seule & même formule peut, à l'aide des signes plus & moins, exprimer toutes les racines de l'équation. Je démontre aussi, ce que les Auteurs Élémentaires n'ont fait que supposer, que les quatre racines d'une équation du quatrième degré sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles & deux imaginaires ; c'est-à-dire, que je prouve que les racines imaginaires des équations du quatrième degré, peuvent, ainsi que celles du second, être regardées comme composées d'une partie réelle, & d'une partie qui est la racine carrée d'une quantité négative.

La résolution des équations du quatrième degré, étant fondée sur celle des équations du troisième, elle a de même, que ces équations, cet inconvénient, que dans un cas on ne sauroit avoir les racines que par

(4) Il s'agit de la démonstration restée classique dans nos taupes. Une démonstration analogue, exposée avec beaucoup moins de clarté cependant, se trouve dans la 2^e édition, posthume, 1736, de la Science du Calcul du R.P. Reyneau, de l'Oratoire (1656-1728).

approximation. Je donne une maniere bien simple de trouver cette approximation, en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les équations du troisieme degré.

Quant aux équations qui passent le quatrieme degré, je ne donne rien pour leur résolution en général, parce que jusqu'à présent on n'a pû y parvenir, quelques efforts qu'ayent fait les Analystes. L'on est réduit, excepté quelques cas particuliers que j'ai traités, pour la plûpart, dans la troisieme & quatrieme Partie, à de simples approximations qui sont beaucoup plus faciles, lorsqu'on est aidé de la Géométrie : c'est pourquoi je remets à traiter de ces équations, au tems où j'enseignerai la théorie des lignes courbes.

On devoit s'attendre, après ce que j'avois dit en annonçant mes Elémens d'Algebre, à y trouver des applications de cette Science à la Géométrie, j'ai crû cependant devoir les réserver pour un autre Ouvrage. Il m'a paru qu'en donnant un Traité entier de pure Algebre, c'étoit offrir aux Commençans les moyens de s'y fortifier davantage, & qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géométrie, que lorsque les opérations Analytiques ne leur coûteroient plus. J'espere que les principes qu'ils trouveront dans cet Ouvrage, les mettront en état de surmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géométrie.

Au reste, je ne suppose, pour l'intelligence de ce Traité, que les opérations principales de l'Arithmétique, parmi lesquelles je compte la règle de trois ; ceux qui auront lû mes Elémens de Géométrie, posséderont la théorie des proportions, autant qu'il est nécessaire pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même livre, tant les Elémens d'Arithmétique, que ceux d'Algebre, & je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Elémens de Géométrie ; mais l'ordre que j'ai suivi m'a paru demander de traiter séparément ces deux Sciences. En effet, voulant me rapprocher autant qu'il est possible du chemin des Inventeurs, j'ai dû supposer l'Arithmétique familiere à ceux qui vouloient pénétrer dans l'Algebre.

III. ESSAIS ET VARIÉTÉS

SUR L'INDÉPENDANCE DES AXIOMES DE LA DEMI-DROITE

Nous allons revenir sur les axiomes de la demi-droite (1) pour démontrer leur indépendance. En même temps nous profitons de l'occasion pour souligner leur rôle d'axiomes d'ordre. Pour varier, nous reprenons les énoncés de ces axiomes en les formalisant. Nous ne nous préoccupons pas encore du rôle de la droite comme élément structural des espaces linéaires, mais nous exigeons de l'ensemble E , non vide, que nous appelons déjà une droite, de satisfaire aux quatre axiomes de la demi-droite. Les éléments A, B, \dots de l'ensemble E , s'appellent alors les points de la droite. Les quatre axiomes I ; 1, 2, 3 et 4, permettent de caractériser des parties de la droite appelées des demi-droites. Des relations d'appartenance entre des demi-droites nous ont permis de définir des relations d'ordre sur la droite.

Les quatre axiomes sont placés dans un ordre constructif, ils permettent ainsi d'enrichir successivement l'ensemble E . Il s'agit de démontrer une indépendance ordonnée de ces axiomes. La méthode consiste à fournir des exemples, satisfaisant à une partie des axiomes, mais pas à tous. Dans nos exemples d'ensembles E , ne satisfaisant pas à tous les quatre axiomes, nous prenons la liberté d'utiliser aussi les expressions : droite, demi-droite et segment de droite.

Axiome : I, 1. — Tout point $A \in E$ détermine sur E deux parties (demi-droites) notées provisoirement (I_A) et (II_A) , telles que

$$\begin{aligned} (I_A) \cap (II_A) &= A \\ (I_A) \cup (II_A) &= E \end{aligned}$$

EXEMPLE 1^{er} : Si l'ensemble E est formé par un seul point A , alors :

$$(I_A) = (II_A) = A.$$

L'axiome I, 1 est satisfait, mais pas les axiomes suivants.

Axiome : I, 2. — Si $A \in E$,

$$\exists B \in (I_A) \text{ avec } B \neq A \quad \text{et} \quad \exists C \in (II_A) \text{ avec } C \neq A.$$

Notation : $(I_A) = \overrightarrow{AB}$ (demi-droite d'origine A contenant B); $(II_A) = \overleftarrow{AC}$; nous écrivons aussi :

$$\overrightarrow{AB} = \overleftarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} \text{ (ne contenant pas } C).$$

Les demi-droites opposées \overrightarrow{AB} et \overleftarrow{AC} n'ayant que l'origine commune, nous pouvons énoncer :

Une demi-droite est entièrement définie par son origine et un autre de ses points choisi arbitrairement.

L'exemple le plus pauvre de E , satisfaisant à I, 1 et 2, contient au moins trois points.

EXEMPLE 2^o : $E = \{A, B, C\}$.

Il n'y a qu'une façon possible de concevoir toutes les demi-droites de E : les demi-droites d'origine A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \{A, B\}, \\ \overrightarrow{AC} &= \{A, C\} \quad \text{donc} \quad \overleftarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}; \end{aligned}$$

(1) Cf. *Bull. de l'A.P.M.*, n° 177 de mai 1956, notre étude : « Définition axiomatique des espaces linéaires et leur orientation ».

les demi-droites d'origine B :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \{ B, C \}, \\ \overrightarrow{BA} &= \{ B, A \} \quad (\text{aussi} = \overleftarrow{AB}) ; \end{aligned}$$

les demi-droites d'origine C :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= \{ C, A \}, \\ \overrightarrow{CB} &= \{ C, B \}, \end{aligned}$$

DÉFINITION D'UN SEGMENT DE DROITE. — Deux points A et B de E déterminent une partie de E appelée *le segment de droite* AB, noté : [AB]. *Par définition* :

$$[AB] = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}.$$

L'intérieur du segment AB s'écrit]AB[et se définit par :

$$]AB[= [AB] - A - B.$$

Cas particulier d'un segment dit nul : Si $A = B$:

$$[AA] = \{ A \} \quad \text{et} \quad]AA[= \emptyset \quad (\text{ensemble vide}).$$

Dans l'exemple 2° on a : $[AB] = \{ A, B \}$ et $]AB[= \emptyset$. Il n'y a pas de points intérieurs pour aucun des segments.

Axiome I, 3. — Si $A \in E$ et $B \in E$, $A \neq B$, alors $\overrightarrow{AB} \supset \overleftarrow{BA}$.

Conséquences de cet axiome :

Changeons de notation en désignant par $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots$ des points distincts de E.

Si $A_0 \in E$, $\exists A_1 \in E$ d'après I, 2.

D'après I, 3 on a (1) $\overrightarrow{A_0A_1} \supset \overleftarrow{A_1A_0}$.

D'après I, 2 $\exists A_2 \in E$ tel que $\overrightarrow{A_1A_0} = \overrightarrow{A_1A_2}$, donc (1) peut s'écrire :

$$(1) \quad \overrightarrow{A_0A_1} \supset \overrightarrow{A_1A_2},$$

d'où $A_2 \in \overrightarrow{A_0A_1}$ donc $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_0A_2}$.

De la même façon nous démontrons $\exists A_3 \in E$ tel que :

$$(2) \quad \overrightarrow{A_1A_2} \supset \overrightarrow{A_2A_3} \quad \text{où} : \overrightarrow{A_2A_3} = \overleftarrow{A_2A_1},$$

et ainsi de suite :

$$(i) \quad \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \supset \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$$

D'après la *transitivité de la relation d'appartenance*, nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{A_0A_1} \supset \overrightarrow{A_1A_2} \supset \dots \supset \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \supset \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \supset \dots$$

Les points $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots$ sont donc des points de $\overrightarrow{A_0A_1}$, il nous faut donc ajouter des points d'une façon illimitée, d'où :

THÉORÈME : *Toute demi-droite contient une infinité de points.*

Les exemples 1° et 2° donnent des ensembles ne vérifiant pas ce théorème conséquence de l'axiome I, 3. Donc : l'axiome I, 3 est indépendant des axiomes I, 1 et 2.

(Nous remarquons d'une façon intuitive que pour démontrer le dernier théorème nous avons placé les points dans un ordre naturel).

EXEMPLE 3° : Nous prenons pour ensemble E l'ensemble **Z** des entiers rationnels (entiers positifs, négatifs et nuls), où $n \in \mathbb{Z}$ détermine les demi-droites (I_n) et (II_n) tels que

$$\begin{aligned} x \in (I_n) & \quad \text{si} \quad x \leq n, \\ y \in (II_n) & \quad \text{si} \quad y \geq n. \end{aligned}$$

Cet exemple conserve l'ordre naturel de l'ensemble **Z**.

Si, au lieu de construire les points d'une demi-droite successivement, comme

nous l'avons fait plus haut, nous procédons *par adjonction* en introduisant encore des points intérieurs à des segments, il nous faut aussi un axiome pour conserver l'idée d'ordre.

Axiome : I, 4. — $A \in E, B \in S; I \in E.]AB[, \text{ alors } \overline{IA} = -\overline{IB}.$

Pour démontrer que I, 4 est indépendant de I, 1, 2, 3, nous allons donner un exemple satisfaisant aux trois premiers axiomes, mais non au dernier.

EXEMPLE 4° : Nous prenons pour E l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels et nous définissons les demi-droites d'origine donnée en distinguant les deux cas suivants :

1) L'origine est un entier rationnel e ($x \in \mathbf{Q}$ et $y \in \mathbf{Q}$) :

$$\begin{aligned} x \in (I_e) & \quad \text{si} \quad x \leq e, \\ y \in (II_e) & \quad \text{si} \quad y \geq e. \end{aligned}$$

2) L'origine est un nombre rationnel *non entier* r , compris entre les entiers consécutifs n et $n + 1$ ($n < r < n + 1$), alors :

$$\begin{aligned} x \in (I_r) & \quad \text{si} \quad n < x \leq r, \\ y \in (II_r) & \quad \text{si} \quad y \geq r \text{ ou } y \leq n. \end{aligned}$$

Par hypothèse : $r \in]n, (n + 1)[$

et
$$\overline{rn} = r \overline{(n + 1)} = (II_r).$$

Ces demi-droites sont identiques et non opposées. L'axiome I, 4 n'est donc pas vérifié dans ce cas.

Reste à montrer que les axiomes I, 1, 2, 3 sont toujours satisfaits. Aucune difficulté pour I, 1 et 2.

Pour montrer que, dans notre exemple, l'axiome I, 3 est toujours satisfait, nous laissons à nos lecteurs le soin d'examiner les différents cas qui se présentent suivant la nature relative des points A et B (entier ou non entier).

Nous concluons : les axiomes I, 1, 2, 3, sont satisfaits, mais pas toujours l'axiome I, 4, donc ce dernier axiome est indépendant des trois premiers.

En étudiant l'orientation de la droite (2), nous nous sommes basés sur les axiomes I, 3 et 4. C'est à cette occasion que leur rôle d'axiome d'ordre apparaît en toute rigueur.

R. NEUMEISTER,

professeur au Lycée Fustel-de-Coulanges à Strasbourg.

SUR L'ÉQUATION DE PYTHAGORE $x^2 + y^2 = z^2$ EN ENTIERS

L'étude de cette équation diophantienne fait partie du nouveau programme complémentaire de l'Agrégation.

Chacun en connaît la résolution en entiers positifs premiers entre eux, qui conduit à $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$, avec a et b premiers entre eux, de parité différente, et $a > b > 0$. (On montre pour cela, en raisonnant modulo 4, que x et y sont de parité différente, et l'on étudie la décomposition $x^2 = (z + y)(z - y)$ où l'on a supposé, sans rien restreindre, x pair).

On peut, de la même façon, établir $x = ab$, $y = \frac{a^2 - b^2}{2}$, $z = \frac{a^2 + b^2}{2}$, avec a et b impairs premiers entre eux, $a > b > 0$. (Ici, x est impair).

(2) Voir l'article déjà cité, p. 409 à 412.

INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES.

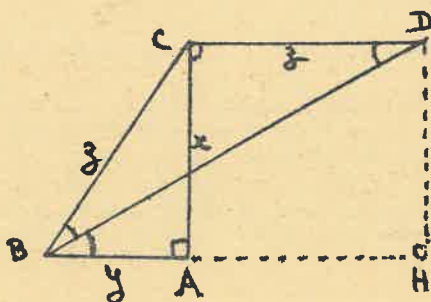
1° En coupant le cercle $X^2 + Y^2 = 1$ par la sécante $Y - 1 = mX$, où m est rationnel, il vient $X = \frac{-2m}{1+m^2}$, $Y = \frac{1-m^2}{1+m^2}$ et il suffit de poser $m = -\frac{b}{a}$ pour obtenir les formules précédentes. Cette méthode est générale pour toute équation quadratique homogène à trois inconnues.

2° En envisageant le triangle rectangle ABC, de côtés x, y, z , la bissectrice de l'angle B fournit $\text{tg } \frac{B}{2} = \frac{x}{y+z}$. Cette expression est rationnelle si x, y, z sont entiers

ou rationnels ; réciproquement, si $\text{tg } \frac{B}{2}$ est rationnelle, il en est de même de $\text{tg } B$,

donc de $\frac{x}{y}$ et $\frac{z}{x}$. Posons donc $\text{tg } \frac{B}{2} = \frac{b}{a}$; il vient, par duplication,

$$\text{tg } B = \frac{\frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \text{ qui fournit } 2ab, a^2 - b^2 \text{ et } a^2 + b^2.$$



Voici deux autres méthodes de résolution, de caractère plus algébrique.

Méthode du déterminant homogène. — $x^2 + y^2 = z^2$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} x & z+y \\ z-y & x \end{vmatrix} = 0, \text{ qui exprime la compatibilité en } a \text{ et } b \text{ du système}$$

$$\begin{cases} ax - b(z+y) = 0 \\ a(z-y) - bx = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} ax - by - bz = 0 \\ -bx - ay + az = 0. \end{cases}$$

Ce dernier se résout par $\frac{x}{2ab} = \frac{y}{a^2 - b^2} = \frac{z}{a^2 + b^2}$.

Cette méthode, qui revient en fait à poser $\frac{x}{z-y} = \frac{z+y}{x} = \frac{b}{a}$ évite les raisonnements arithmétiques et fournit une correspondance bi-univoque entre tous les couples (x, y) et tous les couples (a, b) premiers entre eux (a et b impairs fournissent $x = ab, y = \frac{a^2 - b^2}{2}$; on en déduira, en posant $a = \alpha + \beta$ et $b = \alpha - \beta$, les valeurs $x = \alpha^2 - \beta^2, y = 2\alpha\beta$). Elle offre l'intérêt d'être généralisable à des équations homogènes de degré supérieur à 2. Par exemple, $x^3 + y^3 = z^3$ peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x+y-z & 0 & 3(x+y) \\ z-x & x+y-z & 0 \\ 0 & z-y & x+y-z \end{vmatrix} = 0 \text{ d'où compatibilité en } a, b, c, \text{ du système}$$

$$\begin{cases} a(x+y-z) + 3c(x+y) = 0, \\ a(z-x) + b(x+y-z) = 0, \\ b(z-y) + c(x+y-z) = 0. \end{cases}$$

Ce système, ordonné en x, y, z , fournit une nouvelle équation, en a, b, c , exprimant la compatibilité en x, y, z . Si l'on avait pris une équation homogène de degré 3 à 4 inconnues, sous forme de déterminant homogène, on aurait eu les solutions x, y, z, t proportionnelles aux mineurs respectifs.

Méthode des substitutions. — $x^2 + y^2 = z^2$ peut s'écrire

$[(x+y+z)-(y+z)]^2 + [(x+y+z)-(x+z)]^2 = [(x+y+z)-(y+z)-(x+z)]^2$
 égalité de la forme $(a-b)^2 + (a-c)^2 = (a-b-c)^2$, soit $a^2 = 2bc$, qui reste vérifiée lorsqu'on change les signes de b et c . On a donc également

$$(x+y+z+y+z)^2 + (x+y+z+x+z)^2 = (x+y+z+y+z+x+z)^2,$$

ce qui fournit la substitution *modulaire*

$$(S) \begin{cases} X = x + 2y + 2z, \\ Y = 2x + y + 2z, \\ Z = 2x + 2y + 3z, \end{cases}$$

conservant l'ensemble des points entiers du cône $x^2 + y^2 = z^2$, avec (X, Y, Z) premiers entre eux si (x, y, z) le sont, et réciproquement.

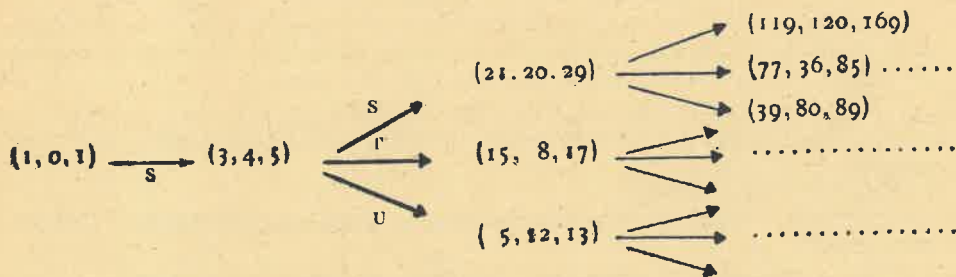
On en déduit :

$$(S^{-1}) \begin{cases} x = X + 2Y - 2Z, \\ y = 2X + Y - 2Z, \\ z = -2X - 2Y + 3Z, \end{cases}$$

et l'on remarque que si (X, Y, Z) sont trois entiers positifs, solutions de l'équation de Fermat, ils proviennent, par (S) , d'une solution x, y, z , pour laquelle $0 < z < Z$ (étude du signe de deux trinômes homogènes en X et Y). En recommençant sur $|x|, |y|$ et z , et ainsi de suite, on ne peut qu'aboutir à la solution $z_0 = 1$, d'où l'obtention de toutes les solutions de $x^2 + y^2 = z^2$ grâce aux trois substitutions modulaires :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

suivant le schéma :



Au bout de n opérations, on obtient en tout $\frac{2}{3^n + 1}$ solutions, dont la plus

grande sera $(S^n) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que l'on peut calculer en fonction de n grâce à la diago-

nalisation de (S) dont les vecteurs propres sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Cette méthode offre l'intérêt de rester valable pour la résolution de $x^2 + y^2 = z^2 + k$ où k est un entier, positif ou négatif, donné. Il suffit alors de chercher d'abord toutes les solutions pour lesquelles $xy > -\frac{k}{2}$ et $\begin{cases} x^2 > 5k \\ \text{ou} \\ y^2 > 5k \end{cases}$ (Ces conditions découlent de l'étude des deux trinômes envisagés plus haut).

M. DAVID (Reims).

IV. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

PROJET DE NOUVEAUX PROGRAMMES

Mandatée par le Comité de l'A.P.M. une Commission des Programmes a été constituée et placée sous la responsabilité de notre Collègue SIROS. Nous publions ici ses premiers travaux relatifs aux classes du second cycle.

La Commission continue son travail, car il lui reste à préciser : mécanique, géométrie descriptive et astronomie en classe de Mathématiques ; programmes des classes non scientifiques du second cycle ; programmes des classes du premier cycle.

Quoi qu'il en soit, il a paru intéressant de présenter cette première partie du travail. Les Collègues pourront y réfléchir et, éventuellement, en discuter à l'Assemblée générale de 1957.

*

**

Classe de Seconde

ALGÈBRE. — Idée générale : Etude du premier degré.

L'étude des vecteurs, inscrite au programme de géométrie, permet de transférer à ce chapitre, comme cas particulier de la somme vectorielle, l'étude de la relation de Chasles et la notion de coordonnées d'un point dans un plan.

I. *Rappel* : Nombres positifs, nuls, négatifs. Opérations.

II. *Compléments de calcul algébrique* : Puissances d'exposants entiers positifs et négatifs.

Rapports et proportions.

Monômes. Polynômes. Fractions rationnelles (addition, multiplication, identités remarquables).

III. — *Equations et inéquations* : Résolution et discussion de l'équation du premier degré à une inconnue. Résolution d'équations numériques se ramenant au premier degré.

Inéquations à une inconnue.

Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

IV. *Fonctions d'une variable* : Croissance. Représentation graphique.

Fonction linéaire. Représentation par une droite.

Application des graphiques à la résolution et à la discussion des équations et inéquations du premier degré à une inconnue, des systèmes d'équations et inéquations du premier degré à deux inconnues.

Fonctions $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{a}{x}$.

V. *Mouvement rectiligne uniforme* : Fonction horaire, vitesse, diagrammes.

VI. *Problèmes du premier degré*.

TRIGONOMÉTRIE. — I. Définition des fonctions circulaires $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ pour x quelconque.

Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc.

II. Fonctions circulaires des arcs opposés, supplémentaires, complémentaires. Résolution des équations $\sin x = \sin \alpha$, etc...

III. Courbes représentatives des fonctions circulaires.

IV. Usage des tables. Cas des petits angles.

GÉOMÉTRIE. — I. *Rappel, contrôle et mise au point des notions suivantes* :

Angles, droites perpendiculaires, triangle isocèle, cas d'égalité des triangles et des triangles rectangles. Inégalités dans le triangle. Perpendiculaire et obliques menées d'un point à une droite.

Propriété caractéristique des points de la médiatrice d'un segment et de la bissectrice d'un angle.

Propriétés caractéristiques des droites parallèles.

Somme des angles d'un triangle et d'un polygone convexe.

Parallélogramme.

II. *Introduction de la géométrie dans l'espace*.

Détermination d'un plan et d'une droite.

Parallélisme des droites et des plans.

Droites et plans perpendiculaires. Perpendiculaire et obliques menées d'un point à un plan.

Dièdres, plans perpendiculaires.

Projection orthogonale sur un plan.

III. *Le cercle et la sphère*.

1° Le cercle, intersection avec une droite. Tangente. Cordes et arcs. Positions relatives de deux cercles.

2° La sphère, intersection avec une droite et avec un plan.

Tangente et plan tangent.

Positions relatives de deux sphères.

IV. *Vecteurs* : Vecteur libre, somme vectorielle, définition de la translation.

Rapport de deux vecteurs de même direction.

Théorème de Thalès (plan et espace).

Triangles homothétiques, triangles semblables.

Division harmonique, propriété des bissectrices d'un angle, d'un triangle.

Faisceau harmonique.

V. Extension de la notion d'arc de cercle et d'angle orienté mesuré à $k\pi$ près ou à $2k\pi$ près.

Angle inscrit et angle au centre.

Lieu des points M du plan, tels que, A et B étant deux points du plan :

$$\overrightarrow{(\overline{MA}, \overline{MB})} = \alpha \quad \text{ou} \quad (\overline{MA}, \overline{MB}) = \alpha.$$

Quadrangle inscriptible.

VI. *Translation, rotation, symétrie.*

Définitions, constructions.

Exemples de figures admettant des centres, plans ou axes de symétrie.

VII. *Homothétie* dans le plan ou dans l'espace.

Commentaire. — 1) Le professeur est libre de commencer, soit par un rappel des notions supposées connues, qu'il précisera et complétera, en profitant par exemple des séances de travail dirigé, soit par un exposé systématique de ces notions dans un cours magistral.

2) Il est également libre de choisir l'ordre dans lequel il développera tout le cours.

3) Les questions comportant des études parallèles en géométrie plane et en géométrie dans l'espace seront développées dans le même esprit.

4) Les questions faisant l'objet du paragraphe VI ne seront pas étudiées systématiquement sous la forme de correspondances ponctuelles, mais leur étude aura cependant pour but de conduire les élèves à acquérir cette notion de correspondance ponctuelle.

5) Il est très recommandé d'habituer les élèves à utiliser les procédés de représentation et de recherche suivants : perspective cavalière, projections orthogonales sur un plan ou sur deux plans, ou sur un plan et avec des cotes. Ces questions ne feront pas l'objet d'un cours magistral.

Classe de Première

ALGÈBRE. — Idée générale : Etude du second degré. Introduction des notions de dérivées et de primitive.

I. Equation et trinôme du second degré.

II. Etude de la fonction trinôme et de la fonction homographique.

Formes canoniques. Changement de variables linéaire et homographique.

III. Définition de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable. Application à la détermination des tangentes aux courbes représentatives des fonctions étudiées.

Fonction dérivée. Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3 au plus.

Le signe de la dérivée permet de trouver le sens de variation d'une fonction (sans démonstration).

IV. Notion de primitive (on admettra la notion d'aire).

Calcul des fonctions primitives de la fonction linéaire et de la fonction du second degré.

Applications au calcul de certaines aires et de certains volumes : aire du cercle, volume de la sphère. Aire de la sphère. Volume du cylindre circulaire. Volumes de la pyramide et du cône circulaire. (On admettra la formule donnant la longueur de la circonférence).

V. Cinématique : mouvement rectiligne uniformément varié. Vitesse instantanée. Diagrammes.

VI. Problèmes du second degré.

TRIGONOMÉTRIE. — I. Rappel des définitions des fonctions circulaires.

II. Résolution et discussion des équations de la forme $\sin x = a$, etc...

III. Fonctions circulaires de la somme et de la différence de deux arcs.

Expressions rationnelles de $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

IV. Usage des tables naturelles.

V. Problèmes conduisant à une équation du premier degré ou du deuxième degré quand on prend pour inconnue un sin, un cos ou une tg.

VI. Relations trigonométriques dans le triangle.

GÉOMÉTRIE. — I. *Exercices sur l'ensemble du cours de Seconde.*

II. Relations métriques dans le cercle.

III. Relations métriques dans les triangles.

IV. Trièdres, orientation de l'espace ; triangles sphériques ; trièdres supplémentaires ; cas d'égalité.

V. Polyèdre : parallélépipèdes, prismes, pyramides (définitions et propriétés simples).

VI. Révision des formules relatives aux aires planes, et application à l'aire des facettes des polyèdres.

Volume des prismes.

VII. Surfaces cylindriques et coniques ; définitions, plan tangent. Cône et cylindre circonscrits à une sphère.

(N.-B. — La question de l'introduction des triangles sphériques et des trièdres supplémentaires a été controversée).

Classe de Mathématiques Élémentaires

Commentaires : ARITHMÉTIQUE. — Dans le libellé du premier paragraphe, il n'est fait explicitement aucun appel aux méthodes et au langage de l'algèbre moderne ; cependant, la façon dont les questions sont enchainées indique que le professeur est libre de choisir, s'il le veut, une méthode axiomatique pour définir les nombres (nombres irrationnels exclus).

Pour les exposants généralisés, il se bornera à exposer les règles de calculs et les justifications de celles-ci.

Au troisième paragraphe, il se bornera de même au cas où les mesures sont des nombres rationnels.

GÉOMÉTRIE. — On a introduit les points à l'infini (dont la définition peut se faire élémentairement de façon précise en géométrie plane) pour faciliter et éclairer certaines questions où cette notion se présente de façon naturelle.

La notion de groupe, qui s'introduit naturellement plusieurs fois dans tout le cours de mathématiques sera précisée avec soin (mais on ne détaillera pas quelles différentes catégories de groupes on pourrait rencontrer).

CONIQUES. — L'étude des coniques a été réduite aux définitions. L'équivalence de celles-ci peut être établie et discutée facilement en ayant recours à leur origine : sections planes. Le professeur pourra faire étudier, à titre d'exercices, quelques problèmes usuels simples en application immédiate des définitions, et en particulier des équations (telles qu'elles sont précisées).

ALGÈBRE. — La définition de la différentielle d'une fonction d'une variable a été introduite pour les besoins de la physique ; on pourra, si l'on veut, définir celle-ci comme coefficient dans le terme principal de l'accroissement de la fonction.

Le programme de TRIGONOMÉTRIE reste identique à l'ancien, à cela près qu'on y ajoute : Résolution et discussion des inéquations de la forme $\sin x > a$, etc...

ARITHMÉTIQUE. — I. Nombres naturels. Addition, soustraction.

Nombres relatifs. Addition, soustraction.

Multiplication, division.

Fractions, opérations. Nombres rationnels.

Divisibilité. Diviseurs communs, P.G.C.D., P.P.C.M. Nombres premiers.
Classes mod. d . Congruences. Opérations.
Exposants fractionnaires et négatifs.

II. Numération décimale ; exercices relatifs à d'autres systèmes de numération.
Explication des règles usuelles des opérations.

Fractions décimales. Fractions égales à une fraction décimale.
Nombres décimaux. Opérations. Quotients approchés.

III. Mesure des grandeurs. Rapport de deux grandeurs. Le rapport de deux grandeurs est égal au quotient des nombres qui les mesurent.

Grandeurs directement et inversement proportionnelles.

IV. Exercices de dénombrement ; notions d'analyse combinatoire. Probabilités (exercices simples).

ALGÈBRE. — I. *Calcul algébrique* : monômes, polynômes ; addition, soustraction, multiplication des polynômes à une ou plusieurs variables.

Division par $x - a$. Pratique de la division des polynômes à une variable ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable.

Fractions rationnelles (on ne parlera pas de la décomposition en éléments simples).

II. Définition d'une fonction d'une variable.

Théorèmes sur les limites (on pourra si on veut démontrer ces théorèmes).

Définition de la continuité.

Systèmes d'axes de coordonnées. Translation, affinité (ou changement d'unités).
Sens de variation d'une fonction.

III. Notions sommaires de géométrie analytique.

Représentation d'une droite par l'équation $ax + by + c = 0$.

Distance de deux points, droites perpendiculaires et représentation d'un cercle en coordonnées rectangulaires normales.

IV. Equations et inéquations. Equivalence.

Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Exemples numériques d'équations se ramenant à des équations du premier ou du second degré.

Equations et inéquations irrationnelles.

V. Dérivées et différentielles (fonctions d'une variable). Significations géométriques. Théorèmes généraux.

Variation et représentation graphique des fonctions étudiées en classe de Première et des fonctions suivantes :

$$ax^4 + bx^2 + c ; x^3 + px + q ; \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

fonctions irrationnelles de la forme

$$y = ax + b + \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}$$

(exemples numériques).

VI. Fonctions primitives. Application au calcul de certaines aires et de certains volumes.

VII. Définition d'une suite. Suites arithmétiques et géométriques. Questions de limites relatives à ces suites.

VIII. Calculs numériques, logarithmiques. Intérêts composés. Usage de la règle à calcul et du papier logarithmique.

GÉOMÉTRIE. — I. Vecteur libre. Somme vectorielle ; définition et propriétés ; multiplication par un scalaire. Projection. Décomposition suivant deux ou trois vecteurs. Produit scalaire ; applications.

Orientation du plan. Mesure des angles orientés de vecteurs ou de droites par les classes mod. 2π ou mod. π .

A et B étant deux points fixes du plan, lieu des points M tels que
 $(MA, MB) = \alpha \pmod{2\pi \text{ ou } \pi}$.

Orientation de l'espace.

II. Définition d'un déplacement dans le plan et dans l'espace.

Etude des correspondances suivantes : Translation (plan et espace), rotation (*idem*) ; transposition dans l'espace ; translation ou rotation unique équivalente à un déplacement-plan ; groupe des déplacements-plans.

Symétries dans l'espace par rapport à un point et par rapport à un plan. Produit de deux symétries.

Homothéties. Produit de deux homothéties.

Définition des figures semblables dans le plan et dans l'espace.

Similitude plane directe définie comme transformation ponctuelle. Homothétie-rotation unique équivalente.

Groupe des similitudes planes directes.

III. Définitions de la projection cylindrique et de l'affinité.

Affinité orthogonale. Propriétés ; applications simples.

IV. Définition de la perspective d'un point, d'une droite.

Définition des points à l'infini du plan, de la droite à l'infini du plan. Applications simples.

Définition du birapport de quatre points alignés. Invariance dans une perspective.

Division harmonique, etc... (voir programme actuel).

Transformation par polaires réciproques en géométrie plane.

V. Inversion. Définition du point à l'infini du plan. Applications de l'inversion ; notions de géométrie anallagmatique plane.

CONIQUES. — Définition des coniques comme sections planes d'une surface conique (ou cylindrique) de révolution.

En appliquant les propriétés de la perspective (ou de la projection cylindrique), démontrer les propriétés suivantes :

Une conique et une droite de son plan ont au plus deux points communs.

Une conique admet en tout point une tangente.

Par un point quelconque de son plan on peut mener au plus deux tangentes à une conique.

L'hyperbole et la parabole ont des branches infinies admettant des directions asymptotiques.

L'hyperbole a deux asymptotes.

Définition plane de l'ellipse, l'hyperbole et la parabole par foyer, directrice et excentricité.

Définitions planes bifocales de l'ellipse et de l'hyperbole.

Equations des coniques rapportées à deux axes de coordonnées rectangulaires dont l'un, au moins, est axe de symétrie.

Définition de l'ellipse comme projection orthogonale ou transformée par affinité orthogonale du cercle.

Equivalence de ces définitions.

Projets pour le 1^{er} cycle.

La Commission désire mettre au courant de ses travaux tous les collègues : elle examine actuellement les programmes du premier cycle. Deux points de vue différents se manifestent, comme en témoignent les deux projets suivants :

Projet C M : il concerne seulement les classes de Sixième et de Cinquième, et sera complété d'ici peu pour les autres classes du premier cycle.

Projet F : il consiste plutôt en des indications sur une façon, un « esprit » selon lesquels on peut enseigner les Mathématiques dans le premier cycle ; il ne concerne d'ailleurs que la géométrie.

Si ces deux projets semblent inconciliables à première vue, il est cependant souhaitable — et sans doute possible — d'élaborer une rédaction qui permette à chaque professeur d'interpréter le programme à sa façon et de choisir, pour l'enseigner, la méthode qu'il juge la meilleure. Il est bien entendu, par exemple, que l'ordre dans lequel les paragraphes d'une rédaction sont rangés n'est jamais impératif.

Il est entendu également — et ceci est vrai pour toutes les classes — que la rédaction, toujours sommaire, d'un programme peut être accompagnée d'« indications » — non impératives — apportant certains éclaircissements ou certaines suggestions.

Enfin, il faut ajouter que ces projets ont été établis en supposant que les établissements disposeront d'un « matériel d'enseignement ». On nous en a fait la promesse, la question est à l'étude.

Classe de Sixième.

ARITHMÉTIQUE ET NOTIONS DE GÉOMÉTRIE.

I. Etude des segments de droite, droite, demi-droite. Egalité des segments. Addition, multiples et sous-multiples d'un segment. Mesure ; mesures de longueur.

Problème sur les échelles.

II. Angles : quelques définitions, égalité, addition, multiples et sous-multiples (par calque et pliage).

III. En se servant des grandeurs précédemment étudiées, définition et propriétés simples des sommes, différences et produit par un entier. Application de ces propriétés au calcul mental et au calcul rapide.

IV. Etude du cercle et de la sphère.

A) Mesure des arcs au rapporteur ; mesure des angles au centre ; exercices sur les nombres complexes.

B) La sphère (en liaison avec la géographie) ; cercles tracés sur la sphère : méridiens, équateur, parallèles, longitude et latitude.

C) Mesure du temps ; unité de temps ; lecture de l'heure ; exercices de calcul.

V. Les polygones : quelques définitions : triangle, triangle rectangle, carré, rectangle... hauteur d'un triangle.

Formules de calcul des aires ; exercices de calcul.

VI. Les solides : parallélépipède, cube, prisme, pyramide... Réalisation pratique de quelques solides en liaison avec le travail manuel ; développement ; aires latérales ; volumes ; exercices de calcul.

VII. Usage de la balance : poids, poids spécifique ; mesures de volumes, surfaces, longueurs, à l'aide de la balance en utilisant les solides construits et les surfaces réalisées.

NOTIONS D'ASTRONOMIE.

I. Observation du mouvement diurne.

II. Exercices : 1) mesure de la hauteur du soleil ; 2) variation de la hauteur maxima du soleil au lieu d'observation.

III. Inégalité des jours et des nuits au lieu d'observation.

IV. Saisons au lieu d'observation.

V. Phénomènes remarquables au cours de l'année au lieu d'observation.

Classe de Cinquième.

(Ce programme est établi dans l'hypothèse d'un nombre convenable d'heures de cours).

ARITHMÉTIQUE

— Notion de nombre entier ; suite naturelle des entiers. Nombres égaux, nombres inégaux. Représentation des nombres par des lettres.

— Numération décimale. Idée de quelques autres systèmes de numération.

— Notion de somme. Propriétés de l'addition. Pratique de l'opération.

— Notion de différence. Propriétés de la soustraction. Pratique de la soustraction.

— Propriétés des suites d'additions et de soustractions. Emploi des parenthèses.

— Notion de produit de deux ou plusieurs nombres. Propriétés. Emploi des parenthèses. Pratique de la multiplication.

— Notion de quotient exact. Propriétés. Définition du quotient à une unité près et du reste.

— Caractères de divisibilité.

— Puissance d'un nombre. Produit de deux ou plusieurs puissances d'un même nombre. Quotient, lorsque l'exposant du dividende est supérieur à celui du diviseur.

— Nombres premiers : définition. Pratique de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

— Multiples et diviseurs d'un nombre. Utilisation de la décomposition en facteurs premiers pour leur recherche.

— Recherche pratique du P.G.C.D. et du P.P.C.M. de deux ou plusieurs nombres.

— Notion de fraction de grandeurs (angles, segments, arcs d'un même cercle). Fractions égales. Simplification des fractions. Comparaison. Réduction au même dénominateur.

— Opérations sur les fractions.

— Fractions décimales. Nombres décimaux.

— Opérations sur les nombres décimaux : addition, soustraction, multiplication.

— Division. Division à $1/10^0$, $1/100^0$, $1/1000^0$ près de deux nombres entiers ou décimaux. Calcul du quotient et du reste.

— Emploi des lettres pour traduire un énoncé d'arithmétique. Propriétés des égalités. Application à la résolution de quelques problèmes simples.

Tout le cours donnera lieu à de nombreux exercices de calcul mental et de calcul rapide.

GÉOMÉTRIE

- Notion de plan, droite, demi-droite, segment de droite.
- Angles : définition, égalité, bissectrice. Somme de deux angles. Angle plat. Angle droit. Angles supplémentaires. Angles complémentaires. Angles opposés par le sommet.
- Symétrie par rapport à une droite. Perpendiculaire menée d'un point à une droite. Usage de l'équerre. Médiatrice d'un segment.
- Cercle. Arc. Angle au centre. Corde. Rappel de la mesure des angles au rapporteur et des unités d'angle.
- Triangle. Triangles particuliers. Droites remarquables dans le triangle. Construction de triangles.
- Les deux premiers cas d'égalité des triangles.
- Première étude du triangle isocèle.
- Troisième cas d'égalité des triangles. Cas spéciaux aux triangles rectangles.
- Propriétés de la médiatrice d'un segment et de la bissectrice d'un angle.

Le programme de géométrie doit permettre de donner des notions précises sur quelques figures simples et de faire progressivement comprendre aux élèves ce qu'est une hypothèse, une démonstration, une conclusion, un théorème.

Notions d'astronomie : même programme d'observations qu'en Sixième.

Mlle CLAVIER (*Sèvres*) et Mlle MASSON (*Marie-Curie*).

Géométrie pour le premier cycle.

SIXIÈME. — *Observation, description, construction et développement de corps de forme simple* :

Cube, parallélépipèdes, prismes et figures planes qui y apparaissent.

Carré, rectangles, triangles rectangles isocèles, familles simples de sections planes.

Vocabulaire nécessaire à la description de ces figures ; rédaction de projets de constructions dans l'espace (pliage) ou planes (usage des instruments).

La sphère et le cercle ; liaison avec le programme de géographie et premières notions d'astronomie : le jour et la nuit, les éclipses, les phases de la lune.

Remarque : les êtres géométriques seront reconnus par l'ensemble de leurs propriétés observées à la façon des sciences naturelles. On habituera les élèves à extraire des éléments choisis de la figure globale (par coloriages par exemple).

CINQUIÈME. — Continuation des exercices de Sixième dans le but de rechercher une classification des êtres étudiés (toujours comme en sciences naturelles) :

Cas particuliers plus ou moins généraux, cas d'exception, apparaissant dans les figures construites. (Relation d'inclusion des ensembles).

Familles de triangles égaux ou semblables, de quadrilatères.

Dessins à une échelle donnée.

Vocabulaire concernant les angles ; mesure des angles.

Vocabulaire concernant les triangles et leurs droites remarquables.

Constructions où les données ne sont pas toutes numériques.

Mesures de longueurs rectilignes, d'aires (liaison avec l'étude des fractions).

Dessin au tableau de quelques solides (liaison avec le cours de dessin).

Astronomie : les constellations (liaison avec la mesure des angles).

QUATRIÈME. — *Dépendance logique des propriétés des figures globalement connues.*

Premières *définitions logiques*, c'est-à-dire système de propriétés *suffisantes* à la détermination d'un être ou d'une famille d'êtres mathématiques. Possibilité de *déduire* de nombreuses conclusions (et même une infinité) par enrichissement d'une figure donnée.

Incompatibilité de certaines conditions. *Vocabulaire logique* (en particulier, conjonctions).

L'étude sera faite à partir des figures simples de géométrie plane (angles, triangles, cercles, parallélogrammes) que l'on retrouve dans l'espace : droites perpendiculaires à un plan, droites parallèles à un plan (étudiées par exemple dans le cube).

TROISIÈME. — 1). Le nombre de paramètres dont dépend une figure. Figures articulées. Lieux géométriques simples.

2) Possibilité de calculer ce que l'on sait construire : théorème de Thalès, triangles semblables, relations métriques dans le triangle rectangle, cos, sin, et tg d'angles aigus. Exercice de calculs sur les solides simples construits et sur leur développement, leur aire, leur volume. *Astronomie* : mouvement des astres. Leurs distances.

N.-B. — a) La première construction d'ensemble de la géométrie est réservée pour la classe de Seconde. — b) En Quatrième et Troisième, on admettra une base intuitive aussi large que l'exige la mentalité des jeunes élèves.

Mlle FÉLIX (*La Fontaine*).

UNE DÉFINITION AXIOMATIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

*cf. Reith jénilip
APV n.º 185, p. 354*

Dans ce qui suit, nous utiliserons la notion de vecteur libre définie dans l'espace euclidien à trois dimensions, ainsi que les notions de longueur, d'angle et de déplacement d'une figure invariable.

DÉFINITION.

Etant donnés deux vecteurs libres \vec{U} et \vec{V} , pris dans un ordre déterminé, on appelle produit vectoriel du vecteur \vec{U} par le vecteur \vec{V} ($\vec{U} \wedge \vec{V}$) un vecteur libre \vec{W} satisfaisant aux cinq conditions suivantes :

1° Si on multiplie l'un des vecteurs par un scalaire réel k , W est multiplié par k .
Autrement dit : $(k\vec{U}) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge (k\vec{V}) = k(\vec{U} \wedge \vec{V})$.

Conséquences. — a) $(k\vec{U}) \wedge (k'\vec{V}) = kk'(\vec{U} \wedge \vec{V})$.

Par suite si l et l' sont les longueurs ou modules des vecteurs \vec{U} et \vec{V} relativement à des vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} , qui leur sont respectivement colinéaires et de même sens, on aura : $\vec{U} \wedge \vec{V} = ll'(\vec{i} \wedge \vec{j})$.

b) Si un des vecteurs est nul, le produit vectoriel est nul puisque l ou l' est nul.

2° Si $\vec{U} = \vec{U}' + \vec{U}''$, on doit avoir :

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}) = (\vec{U}' \wedge \vec{V}) + (\vec{U}'' \wedge \vec{V}).$$

Propriété analogue si $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}''$.

3° Si on échange \vec{U} et \vec{V} , \vec{W} est remplacé par son opposé

$$(\vec{V} \wedge \vec{U}) = -(\vec{U} \wedge \vec{V}).$$

Conséquence. — $\vec{U} \wedge \vec{U}$ devant être égal à son opposé (par permutation des deux facteurs) est nul.

Plus généralement, si \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul d'après la propriété 1), car on a alors :

$$\vec{V} = k\vec{U} \quad \text{donc} \quad (\vec{U} \wedge \vec{V}) = k(\vec{U} \wedge \vec{U}) = 0.$$

Nous exprimerons ces trois propriétés en disant que \vec{W} est une fonction vectorielle linéaire [propriétés 1) et 2)] et alternée [propriété 3)] de \vec{U} et \vec{V} .

4° Supposons $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ appliqués à une origine commune O. Si O, \vec{U}' , \vec{V}' se déduisent de O, \vec{U}, \vec{V} par un déplacement (nécessairement une rotation autour d'un axe OΔ), le vecteur $\vec{W}' = \vec{U}' \wedge \vec{V}'$ doit se déduire de $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ par le même déplacement.

5° Condition de continuité.

Si \vec{U} et \vec{V} varient en tendant vers des limites \vec{U}_0 et \vec{V}_0 , $(\vec{U} \wedge \vec{V})$ doit tendre vers $(\vec{U}_0 \wedge \vec{V}_0)$.

Nous allons montrer que, si \vec{W} existe, il est déterminé à un facteur arbitraire près dépendant du choix de l'unité de longueur. Nous retrouverons ainsi la définition connue du produit vectoriel qui satisfait bien aux conditions imposées, comme on le démontre dans tous les cours.

Remarque. — La propriété 3) entraîne que les propriétés 1) et 2) peuvent être énoncées seulement pour l'un des deux vecteurs, \vec{U} , par exemple.

A) Le vecteur \vec{W} , s'il existe, ne peut être coplanaire avec \vec{U} et \vec{V} .

En effet, supposons \vec{W} coplanaire avec \vec{U} et \vec{V} , on aura alors : $\vec{W} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{V}$, α et β étant deux scalaires réels.

En remplaçant \vec{U} par $k\vec{U}$, il vient :

$$\alpha k\vec{U} + \beta\vec{V} = k(\alpha\vec{U} + \beta\vec{V}).$$

On en déduit :

$$\beta(k - 1)\vec{V} = 0,$$

donc en supposant $\vec{V} \neq 0$, $k \neq +1$, on trouve $\beta = 0$.

Même raisonnement pour α , en échangeant le rôle de \vec{U} et \vec{V} , dans ce qui précède. Par suite la seule solution serait $\vec{W} = 0$, quel que soit \vec{U} et \vec{V} , solution évidente et sans intérêt.

B) Dans ce qui suit, nous pouvons supposer que les vecteurs $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$, sont appliqués à une origine commune O (comme nous l'avons déjà fait dans l'énoncé de la condition 4°).

Faisons une rotation de π autour de l'axe OΔ perpendiculaire au plan (OUV). \vec{U} et \vec{V} sont remplacés par leurs opposés $-\vec{U}$ et $-\vec{V}$, donc \vec{W} reste invariant d'après la propriété 1).

\vec{W} devant rester invariant dans une symétrie d'axe OΔ, [propriété 4)] doit être porté par OΔ. Le vecteur \vec{W} est donc orthogonal à \vec{U} et \vec{V} .

Remarque. — Ceci démontre à nouveau que \vec{W} ne peut être coplanaire avec \vec{U} et \vec{V} .

C) Appliquons ce qui précède à deux vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} . Considérons tous

les couples \vec{OI}, \vec{OJ} superposables ; les vecteurs W correspondants devant être superposables, auront la même longueur. Cette longueur ne peut donc dépendre que de l'angle $\theta = \widehat{IOJ}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$). Soit $\varphi(\theta)$ cette longueur. Le produit $(\vec{U} \wedge \vec{V})$ a donc pour longueur $l\varphi(\theta)$.

D) Déterminons la fonction $\varphi(\theta)$. Considérons pour cela deux vecteurs unitaires orthogonaux \vec{i} et \vec{j} , et remplaçons \vec{j} par $\vec{V} = \vec{j} + k\vec{i}$, le produit vectoriel n'est pas modifié [d'après les propriétés 2) et 3)], car :

$$\vec{i} \wedge \vec{V} = \vec{i} \wedge \vec{j} + \vec{i} \wedge k\vec{i}.$$

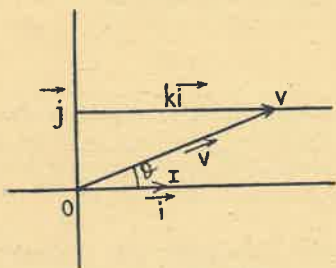
Soit λ la longueur du produit vectoriel considéré et θ l'angle \widehat{IOV} . On a :

$$\lambda = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = l\varphi(\theta),$$

l étant la longueur de \vec{OV} .

Or $l = \frac{1}{\sin \theta}$. On en déduit :

$$\varphi(\theta) = \sin \theta \times \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$



On peut prendre pour $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ une valeur arbitraire. Si on prend $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

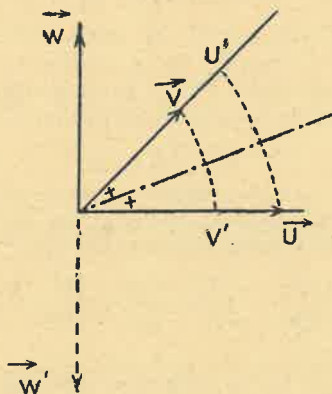
$$\varphi(\theta) = \sin \theta.$$

Donc le produit $\vec{U} \wedge \vec{V}$ a pour longueur : $l \sin \theta$.

Remarque. — Le changement d'unité de longueur multiplie l et l' par un même coefficient, ce qui fournit le coefficient arbitraire $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, qui s'est introduit dans le raisonnement précédent.

Note. — On a supposé $k > 0$, donc $\theta < \frac{\pi}{2}$. Si $k < 0$, on remplacera θ par $\pi - \theta$ dans ce qui précède.

E) Reprenons la figure OUVW et faisons une symétrie par rapport à la bissec-



trice OA de l'angle \widehat{UOV} . \vec{W} doit être remplacé par son opposé, c'est-à-dire par son symétrique \vec{W}' par rapport au plan (UOV) . Dans ces conditions, les deux trièdres $OUVW$ et $OU'V'W'$ ont la même orientation. Il en sera de même pour tout autre trièdre $OU_1V_1W_1$ nécessairement égal à $OUVW$ [d'après propriété 4)].

Il suffit donc de choisir arbitrairement, une fois pour toutes, une orientation de l'espace et de définir \vec{W} par la condition que le trièdre $OUVW$ soit positif. Cette convention est d'ailleurs nécessaire si on veut satisfaire à la condition de continuité. La définition classique du produit vectoriel se trouve ainsi retrouvée.

M. WEBER,

Professeur honoraire au Lycée Condorcet.

FOYERS ET DIRECTRICES DES CONIQUES

I. Directrice d'une conique à centre Γ .

Supposons traitée l'étude des coniques à centre, à partir de la définition monofocale suivante. (Φ) étant un cercle de centre F et de rayon $2a$, F' un point tel que $FF' = 2c$, c étant différent de 0 et de a , le lieu des centres des cercles passant par F' et tangents à (Φ) est une conique Γ admettant pour centre de symétrie le milieu O de FF' .

On a alors montré que, si P est un point extérieur à Γ , le cercle (Π) de centre P passant par F' coupe (Φ) en deux points φ et φ' . Les médiatrices des segments $F'\varphi$ et $F'\varphi'$ sont les tangentes à Γ issues de P , une asymptote étant regardée comme tangente singulière. Les points de contact M et M' , s'ils existent, sont sur les droites $F\varphi$ et $F\varphi'$.

Le cas de la parabole, s'il a déjà été étudié, invite alors, non seulement à la découverte du cercle orthoptique, mais aussi à la recherche des points P tels que M et M' soient alignés avec F . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la droite $\varphi\varphi'$ passe par F . Cette droite étant l'axe radical de (Φ) et de (Π) , la condition précédente équivaut à la relation

$$(1) \quad PF'^2 - PF^2 = 4a^2,$$

F et F' étant supposés distincts ($c \neq 0$), les points cherchés existent. Leur lieu est une droite D qu'on appellera directrice de la conique Γ , relativement au foyer F . Comme pour une parabole, la droite PF est perpendiculaire à FM et FM' .

La droite D est perpendiculaire à la droite FF' en un point K défini, d'après (1) par

$$(2) \quad \overline{OF} \cdot \overline{OK} = a^2.$$

Elle est donc la polaire de F par rapport au cercle principal de Γ , et ne passe pas par F ($c \neq a$). Les propriétés de la division harmonique montrent que les sommets focaux A et A' de Γ sont deux points distincts tels que

$$(3) \quad \frac{AF}{AK} = \frac{A'F}{A'K} = \frac{OA}{OK} = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a}$$

Le nombre $e = \frac{c}{a}$, positif par hypothèse, et différent de 1, est l'excentricité de Γ .

II. Nouvelle définition de Γ .

Les remarques qui précèdent peuvent suggérer la construction suivante. Soit M un point quelconque du plan de Γ , H sa projection orthogonale sur D.

Si M est sur la droite FF' , on a $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ à la condition nécessaire et suffisante que M soit en A ou A'.

Si M n'est pas sur FF' , la perpendiculaire en F à FM rencontre D en P et la perpendiculaire à FP, menée par F', coupe en f la droite MF. Si M n'est pas sur D, on a $(HF, HM) = (PF, PM) = (fF, fF')$ et $(MF, MH) = (Ff, FF')$ modulo π .

Les triangles MFH et F'Ff sont donc semblables, inversement d'ailleurs, et

$$(4) \quad \frac{MF}{MH} = \frac{FF'}{Ff}$$

D'autre part, $Mf^2 - MF'^2 = Pf^2 - PF'^2 = PF^2 + Ff^2 - PF'^2$, d'où

$$(5) \quad Mf^2 - MF'^2 = Ff^2 - 4a^2,$$

ce qui montre que f est le pied de l'axe radical du cercle (Φ) et du cercle (μ) de centre M passant par F'.

Suivant que M est sur Γ , intérieur à Γ , ou extérieur à Γ , (μ) est tangent à (Φ) , n'a aucun point commun avec (Φ) , ou coupe (Φ) . Cela se traduit par $Ff = 2a$,

$Ff > 2a$, ou $Ff < 2a$, c'est-à-dire, en vertu de (4), par $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$, $\frac{MF}{MH} < \frac{c}{a}$ ou

$\frac{MF}{MH} > \frac{c}{a}$. Les réciproques sont immédiates. Les points de D étant extérieurs à Γ , on

peut énoncer, en toute généralité :

Toute conique à centre Γ , autre qu'un cercle, est le lieu des points dont le rapport des distances à un foyer F et à la directrice associée D est une constante égale à l'excentricité de Γ . Les points intérieurs à Γ sont les points plus proches de F que de D.

Réciproquement, si on se donne un point F, une droite D ne passant pas par F, et un nombre e positif, différent de 1, on peut construire la projection K de F sur D, puis les points A et A' partageant le vecteur \overrightarrow{FK} dans le rapport e. Il existe une conique Γ de foyer F et d'axe focal AA'. D'après (3), la directrice relative à F est D, et l'excentricité e. Γ est le lieu des points dont le rapport des distances à F et D est égal à e.

Ainsi est établie, en excluant soigneusement les cas exceptionnels, l'équivalence de deux définitions ponctuelles des coniques à centre. La nouvelle définition, étendue au cas où $e = 1$, englobe la parabole et constitue une définition commune aux trois coniques. Elle permet une étude complète et simultanée de ces courbes. Appliquons-la à une question compliquée du point de vue bifocal.

III. Convexité.

Soient M et M' deux points distincts sur une conique Γ , ellipse, parabole, ou hyperbole, définie par un foyer F, la directrice D, et l'excentricité e.

Si la corde MM' est parallèle à D, il est évident que les points du segment MM' sont intérieurs à Γ . Si la droite MM' fait avec FF' un angle aigu ou nul θ , et rencontre D en U, les points M et M' sont tels que $\frac{MF}{MU} = \frac{M'F}{M'U} = e \cos \theta$.

Supposons $e \cos \theta \neq 1$. M et M' sont alors sur le cercle de diamètre LL', L et L' étant les points qui partagent le vecteur \overrightarrow{FU} dans le rapport $e \cos \theta$.

Si $e \cos \theta < 1$, U est extérieur au cercle. On sait, d'autre part, que tout point m du segment MM', intérieur au cercle, vérifie l'inégalité $\frac{mF}{mU} < e \cos \theta$. Sa distance

mh à D vérifie donc $\frac{mF}{mH} < e$, et m est intérieur à Γ . Au contraire, si m est extérieur au segment MM' , il est extérieur à Γ .

Si $e \cos \theta > 1$, U est intérieur au cercle de diamètre LL' . Mais, dans ce cas, tout point m intérieur au cercle est caractérisé par $mF > (e \cos \theta) mU$. Les points m du segment MM' vérifient donc l'inégalité $mF > e \cdot mh$, et sont extérieurs à Γ . Au contraire, m extérieur au segment MM' est intérieur à Γ .

Ce deuxième cas n'étant réalisable que pour $e > 1$, et si M et M' sont de part et d'autre de D , sur deux branches différentes d'une hyperbole, il en résulte que :

Une ellipse, une parabole, une branche d'hyperbole, sont des courbes convexes.

Remarques : 1° Le cas $e \cos \theta = 1$ met en évidence les directions asymptotiques d'une parabole ou d'une hyperbole, et une propriété des sécantes parallèles à une asymptote.

2° La figure utilisée permet la discussion de l'intersection d'une conique et d'une droite Δ . Si φ est l'angle aigu de Δ et D , I la projection orthogonale de F sur Δ , on a très rapidement $\frac{IF}{IK} = \frac{\sin \varphi}{\cos \theta}$ et l'existence des points communs équivaut, dans tous les cas, à la condition $\frac{IF}{IK} \leq e$, qui définit la position de I par rapport à la directrice ou au cercle principal de Γ

W. FAIVRE,
professeur agrégé à Montauban.

LA FORMULE $\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b$ en Sciences Expérimentales

Nous allons montrer que la différence $\text{Log } a - \text{Log } b$ garde la même valeur lorsqu'on multiplie a et b par un même nombre.

Nous marquons sur le graphique de la fonction $\frac{1}{x}$ les points d'abscisse a et b et l'aire mixtiligne égale à $\text{Log } a - \text{Log } b$. On peut considérer cette aire comme la limite de la somme des aires des rectangles inférieurs (par exemple) obtenus en partageant l'intervalle $[a, b]$ en un certain nombre n de parties égales, lorsque n augmente indéfiniment.

Transformons par une homothétie de centre O et de rapport k , non pas la courbe, ni les rectangles, mais les côtés de ces rectangles qui sont portés par l'axe Ox et construisons ensuite les rectangles inférieurs, comme précédemment, sur la nouvelle division obtenue. A l'abscisse a correspond l'abscisse ka , à b , kb . Si λ est l'une des abscisses insérées entre a et b , $k\lambda$ est l'abscisse correspondante. A chaque rectangle, de dimensions h et $\frac{1}{\lambda}$, correspond un rectangle de dimensions kh et $\frac{1}{k\lambda}$. Deux rectangles correspondants sont donc équivalents.

Il en résulte que $\text{Log } \lambda a - \text{Log } \lambda b = \text{Log } a - \text{Log } b$ (1).

Faisons dans (1) $\lambda = \frac{1}{b}$, $\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b$ (2), puis, dans (2) $a = 1$

$\text{Log } \frac{1}{b} = -\text{Log } b$ (3) et, enfin, dans (2) $b = \frac{1}{c}$, $\text{Log } ac = \text{Log } a + \text{Log } c$ (4).

G. DELPLA (Lycée H.-Poincaré, Nancy).

REMARQUE SUR LE THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

Dans les manuels qui sont mis entre les mains des élèves, le théorème de Ptolémée est le plus souvent formulé de la manière suivante :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe ABCD soit inscriptible est que l'on ait la relation

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Cet énoncé, certes correct, peut être approfondi à peu de frais.

Dire que ABCD est inscriptible et convexe, équivaut en effet à dire que les points A, B, C, D, sont sur un même cercle (Γ), la demi-droite AC étant située dans l'angle des demi-droites AB et AD.

Transformons la figure par une inversion de pôle A et de puissance quelconque. (Γ) a pour homologue une droite (γ), parallèle à sa tangente en A. Soient b, c, d les homologues respectifs de B, C, D. Pour que ABCD soit inscriptible et convexe, nous voyons donc qu'il faut et il suffit que les points b, c, d soient alignés, c étant entre b et d . Or, une condition nécessaire et suffisante pour que c appartienne au segment bd est : $bc + cd = bd$, soit :

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} = \frac{BD}{AB \cdot AD}$$

soit encore : $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$. D'où le théorème :

Pour qu'un quadrilatère ABCD soit *convexe et inscriptible*, il faut et il suffit que l'on ait la relation :

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

énoncé plus puissant que celui qui est formulé au début de cette note.

M. BONN, élève-professeur au C.P.R. de Nancy.

≡ V. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE ≡

QUELQUES LIVRES ALLEMANDS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

La seule vue d'un livre intitulé « Géométrie analytique » à la devanture d'un libraire évoque en France l'atmosphère des classes de Mathématiques Spéciales et la préparation intensive des concours. En Allemagne, cette discipline est enseignée dans les Facultés : les cours peuvent s'adresser à des auditoires très divers. Les uns, partant d'une méthode axiomatique, sont destinés à préparer les étudiants à la recherche. D'autres s'adressent à de futurs ingénieurs ou physiciens. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner de voir des livres portant des titres identiques différer entièrement les uns des autres, tant par le contenu que par la méthode d'exposition.

Les livres, dont nous nous proposons ici de faire l'analyse, s'adressent à des lecteurs qui ont vu une première fois les principes fondamentaux. Ils peuvent toutefois se partager en deux catégories distinctes.

Les premiers ouvrages sont dus à W. BLASCHKE, professeur à l'Université de Hambourg. Dans les préfaces, l'auteur indique très clairement le but poursuivi : mettre entre les mains des étudiants, dont beaucoup sont de futurs physiciens, ingénieurs, etc..., les outils qui leur seront nécessaires par la suite. L'exposé axiomatique est délibérément laissé de côté.

D'autres ouvrages, sur lesquels nous espérons revenir, partent des axiomes de H. WEYL.

I. W. BLASCHKE : *Analytische Geometrie*, grand in-8° de 190 pages, édité chez Birkhäuser, à Bâle (1).

Remarque préliminaire. — Nous ne pouvons reproduire ici les notations employées par W. B. Elles diffèrent considérablement de toutes celles que nous utilisons en France ; en particulier, les caractères gothiques y jouent un grand rôle. Pour les questions vectorielles, nous emploierons autant que possible les notations de L. CHATTELUN (*Calcul vectoriel*, I, 1950, éd. Gauthier-Villars).

Les méthodes de la géométrie analytique, nous dit W. B. dans sa préface, consistent essentiellement dans l'emploi du calcul pour résoudre les problèmes de géométrie. Le mot « calcul » est pris dans son sens le plus étendu et ce sont les méthodes vectorielles qui tiennent de beaucoup la première place, mais non la seule.

Le trièdre des coordonnées est toujours supposé trirectangle ; les coordonnées cartésiennes d'un point sont désignées par x_1, x_2, x_3 (x_0, x_1, x_2, x_3 s'il s'agit de coordonnées homogènes). Les coordonnées tangentielles d'un plan sont désignées par u_0, u_1, u_2, u_3 .

Dès le début, W. B. introduit la notion de *plan orienté*, qui sera utilisée dans toute la suite. L'équation d'un plan :

$$(P) \quad u_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

est toujours supposée écrite sous forme normale. Ce plan est défini par deux vecteurs issus de l'origine et portés sur la normale au plan : un premier vecteur unitaire $\{u_1, u_2, u_3\}$ et un vecteur de mesure algébrique $-u_0$. Le sens positif de rotation dans le plan (P) est défini par le vecteur unitaire. Changer simultanément les signes des quatre coordonnées tangentielles revient à conserver le plan et à changer son orientation. (Ceci exige une grande attention chaque fois qu'intervient la notion de symétrie).

W. B. rappelle ensuite les définitions fondamentales : produit scalaire ou vectoriel, matrices, groupes de transformation.

L'étude des transformations de coordonnées, des déplacements et anti-déplacements est faite par les méthodes vectorielles et aussi en faisant un ample usage des matrices (un vecteur étant assimilé à une matrice d'une seule colonne). L'emploi constant du symbole de Kronecker ($\delta_{jk} = 0$ pour $j \neq k$ et 1 pour $j = k$) se révèle ici particulièrement commode.

L'étude des rotations et de leur composition nous fait entrer dans l'une des parties les plus originales de l'ouvrage.

Partant de la formule : (2)

$$(1) \quad \vec{x}' = \vec{x} \cos 2\delta + (\vec{p} \wedge \vec{x}) \sin 2\delta + 2(\vec{p} \times \vec{x}) \vec{p} \sin^2 \delta,$$

où \vec{x} désigne la position primitive d'un vecteur, \vec{x}' sa position après une rotation d'angle 2δ et \vec{p} le vecteur unitaire porté sur l'axe de rotation, il suffit de poser

$$q_0 = \cos \delta, \quad \vec{q} = \vec{p} \sin \delta, \quad \vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\},$$

pour obtenir les variables homogènes d'Euler. A chaque système de valeurs q_0, q_1, q_2, q_3 correspond une rotation q . A deux rotations successives q, q' autour

(1) Dans la suite, nous désignerons l'auteur par ses initiales : W. B.

(2) Voir le livre de L. CHATTELUN, p. 256 (*Le signe \times indique la multiplication scalaire*).

de deux axes concourants correspond une rotation q'' dont les quatre éléments sont des formes bilinéaires des variables de q et q' (3).

L'emploi des variables d'Euler conduit à l'introduction des quaternions. (Voir la note I à la fin du présent article).

$$Q = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3.$$

En désignant par \bar{Q} le quaternion conjugué

$$\bar{Q} = q_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3,$$

nous donnons à la relation (1) la forme

$$(2) \quad \vec{x}' = \bar{Q} \vec{x} Q,$$

grâce à laquelle la loi de composition des rotations autour d'axes concourants devient évidente.

W. B. utilise ces résultats pour établir un intéressant théorème dû au géomètre grec C. STÉPHANOS (1857-1917) ; soient F, F', F'' , trois figures égales ayant un point homologue commun O . Il existe en général une quatrième figure F , et une seule, égale aux trois autres et qui se déduit de chacune d'elles par un renversement autour d'un axe issu du point O .

Le chapitre II traite de la sphère. Les propriétés de la puissance d'un point, des plans, axes et centres radicaux sont établies par les procédés classiques. Il en est de même des faisceaux et réseaux linéaires et de l'inversion.

Nous revenons ensuite aux figures orientées. Une sphère peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan orienté. L'orientation de la sphère est, par définition, la même que celle du plan qui l'enveloppe. La puissance analytique du centre par rapport aux plans tangents détermine le rayon de la sphère. (Il ne faut pas oublier que deux sphères orientées n'ont qu'un centre d'homothétie).

Cette considération conduit à plusieurs études intéressantes dont l'idée remonte à E. LAGUERRE (1834-1886).

L'équation d'une droite dans le plan étant écrite sous la forme

$$h - x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi = 0,$$

nous posons : $g_1 = \cos \varphi$; $g_2 = \sin \varphi$. Nous établissons une correspondance biunivoque entre les droites d'un plan et les points d'un cylindre de révolution :

$$s_1 = g_1 ; s_2 = g_2 ; s_3 = h.$$

A deux droites qui ne diffèrent que par l'orientation (et qui, prises globalement coïncident), correspondent sur le cylindre deux points symétriques par rapport à l'origine. A une droite qui enveloppe un cycle (cercle orienté) correspond une conique tracée sur le cylindre.

W. B. traite ici le problème suivant : on établit sur le cylindre une correspondance biunivoque $g \rightarrow g'$ entre les points de façon que la droite qui les joint passe par un point fixe C . Trouver les propriétés des droites correspondantes. A chaque section du cylindre par un plan passant par C correspondent dans le plan de base des droites qui enveloppent un cycle. Aux sections planes passant par C et l'origine, correspondent des cycles de rayon nul. La correspondance $g \rightarrow g'$ transforme globalement ces cycles en eux-mêmes. La même correspondance $g \rightarrow g'$ entre les points du cylindre entraîne une correspondance biunivoque entre les sections planes du cylindre et, par suite, entre les cycles du plan de base. W. B. montre que si deux cycles C_1, C_2 se transforment en C'_1, C'_2 , les longueurs des tangentes communes à C_1 et C_2 sont conservées avec changement de sens, propriété analogue à la conservation des

(3) W. B. donne le résultat sans entrer dans le détail du calcul. Un lecteur inexpérimenté risque de s'engager dans un calcul long et fastidieux. Le lecteur français trouvera dans la *Théorie des Surfaces*, de G. DARBOUX, les éléments d'une démonstration très simple (t. I, 2^e éd., p. 4-5).

angles dans l'inversion. (Ne pas oublier que deux cycles n'ont que deux tangentes communes).

W. B. termine le chapitre par l'étude d'une autre correspondance. A un cycle de centre $\{x_1, x_2\}$ et de rayon r , correspond un point de l'espace $\{x_1, x_2, x_3 = r\}$. La distance tangentielle de deux cycles étant donnée par la formule

$$t^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 - (x_3 - x'_3)^2,$$

nous prendrons t comme définition de la distance de deux points dans l'espace E_3 , évidemment non euclidien. Aux droites d' E_3 correspondent dans le plan des faisceaux linéaires (tangentiels) de cycles. A une droite isotrope (4) correspond un faisceau de cycles ayant une tangente commune en un point fixe.

Le chapitre III est consacré aux glisseurs (vecteurs glissants). W. B. expose les théories classiques des moments, systèmes de glisseurs, couples, axe central. La réduction d'un système à deux glisseurs est l'occasion d'une étude des complexes linéaires. Le chapitre contient quelques applications des systèmes de glisseurs : distribution des vitesses, conditions d'équilibre d'un corps solide. Enfin W. B. étudie l'application des nombres et des vecteurs duaux à l'étude des déplacements et anti-déplacements (V. la note II à la fin du présent article).

Le chapitre IV est consacré aux moments d'inertie. W. B. suppose donné un système fini de points affectés de masses positives ou négatives dont il définit le moment d'inertie par rapport à un centre, un axe ou un plan. Le moment d'inertie par rapport à un plan apparaît comme une forme quadratique des coordonnées tangentielles du plan. Les plans correspondant à une valeur donnée f du moment d'inertie admettent une enveloppe de 2^e classe. En faisant varier f on trouve un faisceau de quadriques homofocales.

Un paragraphe est consacré aux moments mixtes. Si p_i et q_i désignent les puissances analytiques d'un point x_i par rapport à deux plans P et Q (dont les équations sont toujours écrites sous forme normale), la somme

$$(2) \quad H u_0 v_0 + \sum_i h_i p_i q_i \quad (5)$$

est appelée le moment mixte. Si cette somme est nulle, les deux plans sont dits conjugués. L'étude des plans perpendiculaires à leurs conjugués (en supposant $u_0 = v_0 = 0$) conduit à écrire l'équation (2) sous la forme

$$(3) \quad \sum_i^3 T_{jk} u_j u_k = 0.$$

La recherche des plans perpendiculaires à tous leurs conjugués conduit à former le polynôme caractéristique des éléments T_{jk} d'une matrice symétrique. W. B. établit très simplement les propriétés de ce polynôme : invariance vis-à-vis de toute rotation des axes autour de l'origine ; réalité des zéros. A tout zéro (valeur propre) correspond un vecteur propre. Le cas des zéros multiples a été traité un peu sommairement. Le procédé employé s'applique à un espace ayant un nombre quelconque de dimensions.

Le chapitre V est consacré aux quadriques. Les deux points de vue ponctuel et tangentiel sont développés simultanément. La classification est faite ici (et dans le formulaire final) aux deux points de vue affine et projectif.

Le dernier chapitre traite des quadriques homofocales. L'étude des moments d'inertie nous a déjà donné un exemple de quadriques homofocales. W. B. montre que, réciproquement, à tout faisceau de quadriques homofocales on peut faire corres-

(4) Droite sur laquelle la « distance » de deux points quelconques est nulle.

(5) h_i désigne la masse du point x_i et $H \neq 0$ la masse totale du système

pondre un système de masses tel que tous les plans tangents à une même quadrique donnent un même moment d'inertie. Les arêtes du trièdre trirectangle, formé par les normales aux trois quadriques passant par un point donné sont alors les axes principaux d'inertie.

Un paragraphe est consacré au théorème d'Ivory. Les focales des quadriques sont étudiées comme les quadriques dégénérées d'un faisceau (auxquelles il faut joindre le cercle de l'infini, appelé conique absolue). Les paraboloides homofocaux sont traités à part. Signalons enfin quelques résultats se rapportant à la géométrie différentielle et aux géodésiques. W. B. ne développe pas ces théories et renvoie à un autre ouvrage qu'il a publié en 1950. Un lecteur ayant une certaine habitude de l'analyse pourra cependant rétablir le détail des démonstrations.

Dans le formulaire final, il y a lieu de signaler une intéressante étude du plan numérique de Gauss et quelques applications géométriques des nombres complexes, en particulier une étude des coniques homofocales qui conduit à une démonstration très simple du théorème d'Ivory dans le plan. Signalons aussi les identités fondamentales de la géométrie projective d'après Grassmann. Ces considérations sont développées par W. B. dans un autre traité consacré à la géométrie projective.

Conclusion. — Les matières traitées dans ce volume de moins de 200 pages pourraient remplir un gros traité. L'exposé est très condensé, mais il faut insister sur le fait suivant : aucune question n'a été traitée d'une manière superficielle. Si beaucoup de démonstrations sont présentées d'une façon schématique (quelques formules sont même données sans démonstration), l'étudiant qui aura eu la constance de rétablir toutes les démonstrations dans leurs détails aura accompli un travail très profitable. Non seulement il aura assimilé les notions exposées, mais il saura les utiliser. Cela suppose évidemment que l'étudiant dispose d'un temps suffisant et qu'il n'est pas harcelé par la préparation d'un concours. Enfin, les indications bibliographiques sont là pour guider le lecteur qui voudra entreprendre des recherches plus poussées.

Une table détaillée permet de retrouver facilement tout renseignement utile. La qualité du papier et la netteté de l'impression sont de tout premier ordre.

NOTE I. — Nous possédons en France plusieurs exposés de la théorie des quaternions. Signalons en particulier :

G. BOULIGAND : *Analyse géométrique*, I, pp. 364-370.

L. CHATEBUN : *Calcul vectoriel*. Note III, pp. 473-507.

NOTE II. — Les nombres duaux sont des nombres complexes de la forme $a + b\varepsilon$, a et b étant réels et ε satisfaisant à la condition $\varepsilon^2 = 0$. D'après cela, en supposant $b_1 b_2 \neq 0$, on trouve $\varepsilon b_1, \varepsilon b_2 = 0$.

L'ensemble des nombres duaux admet donc des diviseurs de 0 ; il ne peut donc former un corps. Par contre, tout nombre dual $a + b\varepsilon$ ($a \neq 0$) admet un inverse.

Appelons maintenant \vec{u} un glisseur et \vec{m} son moment à l'origine. Un vecteur de la forme $\vec{u} + \varepsilon \vec{m}$ admet des propriétés remarquables.

Soient u et v deux glisseurs de module 1 placés sur des supports non coplanaires. Si nous désignons par φ (mod. 2π) leur angle, on trouve, en calculant le produit scalaire, des vecteurs duaux :

$$\cos \varphi - \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi,$$

où $\bar{\varphi}$ désigne la plus courte distance des supports. En posant :

$$\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$$

on obtient :

$$\cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi.$$

Soit F une fonction continue et dérivable de Φ . Si cette fonction est de la forme

$$f(\varphi) + \varepsilon \bar{\varphi} f'(\varphi),$$

le rapport $\frac{dF}{d\Phi}$ tend vers une limite bien déterminée quelle que soit la façon dont $d\varphi$ et $d\bar{\varphi}$ tendent vers zéro.

Si, dans un plan, φ désigne l'angle d'une droite orientée avec une direction fixe et $\bar{\varphi}$ sa distance à l'origine, la droite est entièrement déterminée par la donnée de

$$\Phi = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi}.$$

Si, à cette droite, nous en faisons correspondre une autre par la transformation (T)

$$\Phi' = \varphi' + \varepsilon\bar{\varphi}' = F(\varphi) + \varepsilon\bar{\varphi}F'(\varphi),$$

les deux droites admettent une enveloppe chaque fois que $\bar{\varphi}$ est une fonction donnée de φ . A deux fonctions $\bar{\varphi}$ distinctes de φ , correspondent des enveloppes distinctes. La transformation T conserve en grandeur et sens les tangentes communes aux deux enveloppes.

W. B. étudie les déplacements et anti-déplacements les plus généraux en utilisant des quaternions à éléments duaux. Les formules sont différentes suivant qu'on les applique à un point, une droite ou un plan. Ces formules (d'un emploi assez délicat, surtout pour les anti-déplacements) font apparaître très nettement les lois de composition de ces diverses transformations.

A. HERME (*Henri-IV*).

(A suivre).

Parmi les revues : MATHESIS

Parmi toutes les revues scientifiques de langue française, dont le service est assuré à l'A.P.M. (1), la moins connue en France est probablement *Mathésis*.

Chaque numéro (quatre fascicules annuels) comprend des articles originaux, des notes bibliographiques, des énoncés de questions originales proposées aux lecteurs, et des solutions très développées de telles questions.

Mathésis, qui a 75 ans, explore plus spécialement, depuis sa fondation, le domaine des Mathématiques enseignées à partir du cycle supérieur de l'Enseignement secondaire, sans s'occuper des matières spéciales vues en Licence. Son indépendance de nos Programmes constitue une importante fraction de son originalité et de son attrait.

Son animateur français, notre collègue V. THÉBAULT, fondateur du Prix Victor-Thébault, prix de l'Académie des Sciences, évite aux amateurs français qui veulent s'abonner les désagréables formalités du change en recevant bénévolement (et avec une gentillesse qu'on ne saurait trop dire) les abonnements à son C.C. 339.03 Rennes ; 1.500 francs français pour 1956.

Serge MINOIS.

(1) *L'Education Mathématique* (Vuibert), *Les Humanités Scientifiques* (Hatier), *Le Journal de Mathématiques Élémentaires* (Vuibert), *La Revue de Mathématiques Spéciales* (Vuibert), *L'Enseignement Mathématique* (Université de Genève et S.E.V.P.E.N.), *Mathematica et Paedagogia* (Revue de la Société Belge de Professeurs de Mathématiques), *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

Un matériel simple et pratique

Vit' Appris, 49, boulevard Diderot, Paris, 12°. La boîte complète, 385 F ; remise de 15 % par commande en quantité.

Le matériel *Vit' Appris* est particulièrement adapté à la construction des ensembles de droites et de plans qui constituent traditionnellement les premiers chapitres du cours de géométrie dans l'espace. Quand on sait les difficultés que rencontrent beaucoup d'élèves, on appréciera l'aide que ce matériel peut leur rendre.

Des tiges métalliques colorées sont facilement liées les unes aux autres par une matière plastique malléable et propre. Le montage ne nécessite aucune habileté manuelle spéciale et se fait rapidement.

Le matériel peut aussi être employé par le professeur. Le montage d'un ensemble faisant bien voir les droites mobiles s'appuyant sur trois droites fixes données est monté devant les élèves en quelques minutes : l'action que constitue une construction géométrique est ainsi vécue par tous.

G. W.

Livres reçus et dont il sera prochainement rendu compte

— Louis COUFFIGNAL : *Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires*; Gauthier-Villars et Eyrolles, Paris, 1956 (prix : 2 000 F).

— Lydia MULLER : *Recherches sur la compréhension des règles algébriques chez l'enfant*; Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1956 (prix : 720 F).

— J. LEGRAS : *Technique de résolution des équations aux dérivées partielles*; préface de J. PÉRÈS ; Dunod, Paris, 1956 (prix : 1 450 F).

— R.-W. ANDERSON : *Dansons avec les Mathématiques*; Dunod, Paris, 1956 (prix : 650 F).

— André BELLIVIER : *Henri Poincaré ou la vocation souveraine*; Gallimard, Paris, 1956 (prix : 620 F).

— *L'Enseignement Mathématique*, périodique trimestriel dont nous avons déjà signalé l'intérêt et qui est édité par l'Institut de Mathématiques de l'Université de Genève, nous prie de rappeler que l'on souscrit les abonnements pour la France au S.E.V.P.E.N., 13, rue du Four, Paris, 6°, C.C.P. Paris 9060-06. Tarif de l'abonnement au tome III de la nouvelle série (1957) : 2 000 F.

≡ VI. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS ≡

RECOMMANDATION N° 43
AUX MINISTÈRES DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
concernant
L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DANS LES ÉCOLES SECONDAIRES *

La Conférence internationale de l'instruction publique,

Convoquée à Genève par l'Organisation des Nations Unies pour l'éducation, la science et la culture et par le Bureau international d'Éducation, et s'y étant réunie le 9 juillet 1956 en sa dix-neuvième session, adopte le 17 juillet 1956 la recommandation suivante :

La Conférence,

Considérant que les Mathématiques ont eu, de tout temps, une valeur culturelle et pratique indiscutée et un rôle important dans l'essor scientifique, technique et économique et, en particulier que notre époque présente une conjoncture mathématique sans précédent dans l'histoire :

Considérant que la formation mathématique est un bien et un droit pour tout être humain, quels que soient sa race, son sexe, sa condition et ses activités ;

Considérant que, pour assurer le progrès et la prospérité des peuples, l'élévation du niveau mathématique général doit aller de pair avec l'épanouissement technique et scientifique supérieur ;

Considérant que les diverses civilisations ont joué un rôle dans la création et le développement des Mathématiques :

Considérant que la psychologie reconnaît que tout être humain est capable d'une certaine activité mathématique et que, notamment, il n'y a aucune raison de croire que les filles sont moins aptes que les garçons à étudier les Mathématiques ;

Considérant que la pédagogie des Mathématiques devient chaque jour plus scientifique et plus efficace ;

Considérant qu'il y a lieu de donner un prolongement à la Recommandation n° 31 concernant l'initiation mathématique à l'école primaire adoptée par la XIII^e Conférence internationale de l'Instruction publique,

Soumet aux Ministères de l'Instruction publique des différents pays la recommandation suivante :

BUTS DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

1. Au cours des études secondaires, tant techniques que de formation générale, il convient d'atteindre, dans la plus large mesure possible, les buts éducatifs de l'enseignement des Mathématiques qui touchent les fonctions intellectuelles et la formation du caractère. Ces buts ressortissent aux processus de la logique en acte (réfléchir,

(1) Adoptée par la 19^e Conférence internationale de l'Instruction publique réunie à Genève en juillet 1956, sous la responsabilité conjointe de l'U.N.E.S.C.O. et du Bureau International d'Éducation.

analyser, abstraire, schématiser, raisonner déductivement, généraliser, spécialiser, appliquer, critiquer, etc...), aux qualités rationnelles de la pensée et de son expression (ordre, précision, clarté, concision, etc...), à l'esprit d'observation, aux conceptions spatiales et quantitatives, à l'intuition et à l'imagination dans le domaine abstrait, au développement de l'attention et au pouvoir de concentration, à l'acquisition de la persévérance et de l'habitude du travail ordonné et, enfin, à la formation de l'esprit scientifique (objectivité, probité intellectuelle, goût de la recherche, etc...) ;

2. Les opérations d'ordre pratique, l'adaptation au milieu naturel et la nécessité de comprendre les problèmes que pose la vie technique, économique et sociale exigent de plus en plus des connaissances mathématiques courantes (calcul, géométrie usuelle, représentations géométriques, formules, équations, fonctions, tables et graphiques). Ces notions et moyens fondamentaux interviennent aussi dans un nombre croissant de professions ;

3. Les Mathématiques et le style de pensée qui leur est propre doivent être considérés comme un élément essentiel de la culture générale de l'homme moderne, même s'il n'a pas une activité scientifique ou technique. Il est souhaitable que l'enseignement des Mathématiques, en étroite liaison avec l'enseignement d'autres branches, amène les élèves à comprendre le rôle que jouent les Mathématiques dans les conceptions scientifiques et philosophiques du monde actuel ;

4. Un des buts principaux du cours avancé de Mathématiques dans les dernières années de l'Enseignement Secondaire doit être la préparation aux études supérieures scientifiques ou techniques dont la base mathématique grandit de jour en jour.

PLACE DES MATHÉMATIQUES

5. L'enseignement des Mathématiques, obligatoire dans les différentes classes du cycle inférieur des écoles secondaires, doit disposer d'un nombre d'heures adéquat ;

6. Dans le cycle supérieur des sections scientifiques, le cours de Mathématiques doit bénéficier d'un horaire étendu ;

7. Il est souhaitable que les élèves manifestant des dispositions spéciales pour les études scientifiques aient la possibilité de suivre un enseignement plus développé et qu'ils puissent se livrer à des études complémentaires personnelles ;

8. Dans les pays où l'enseignement des Mathématiques ne figure pas à titre obligatoire dans certaines sections (sections littéraires, par exemple), un enseignement des Mathématiques à tendance culturelle plutôt que de pure technique mathématique devrait être organisé, au moins à titre facultatif ;

9. Le poids affecté aux Mathématiques lors de l'appréciation des résultats des élèves, quelle que soit la manière de l'exprimer, doit être proportionné à la valeur qui est reconnue à cette discipline. Lorsque celle-ci est obligatoire, et spécialement en sections scientifiques, elle devra être considérée comme une des branches principales, notamment lors des passages de classe et de l'attribution des certificats de fin d'études.

PROGRAMMES

10. Le programme de Mathématiques d'une section déterminée de l'école secondaire doit être conforme aux buts généraux de l'enseignement de cette branche et aux objectifs particuliers de la section ;

11. Les programmes seront tenus à jour et adaptés aux progrès des sciences et aux besoins de la technique et de la vie moderne en sacrifiant des questions surannées. On prendra notamment en considération le fait que, pour élever le niveau des programmes des classes supérieures, certains pays ont introduit la géométrie analytique,

Le calcul infinitésimal, la statistique et les probabilités et accordent une importance croissante à l'étude des fonctions et des vecteurs, ainsi qu'aux applications des Mathématiques ;

12. La difficulté et l'étendue des matières à enseigner seront en rapport avec l'âge mental moyen correspondant à chaque classe et avec les intérêts et les besoins des élèves. S'il convient de donner aux individus doués pour les Mathématiques des compléments de formation, il faut éviter de provoquer le découragement des élèves faibles en leur imposant des matières dont la complexité dépasse leurs moyens intellectuels ;

13. Il convient d'établir les plans d'études de façon à organiser l'enseignement des Mathématiques autour d'unités fonctionnelles qui en coordonnent les diverses branches tout en dégagant les notions générales ;

14. Dans cet ordre d'idées, il est souhaitable de déterminer, par des essais pédagogiques réalisés sans préjugés, dans quelle mesure les structures largement polyvalentes des Mathématiques modernes peuvent servir à améliorer l'Enseignement Secondaire ;

15. Il serait souhaitable que les maîtres aient une certaine liberté d'initiative pour prolonger éventuellement les programmes de base par des compléments facultatifs.

MÉTHODES

16. Lorsque des directives méthodologiques sont données, il convient qu'elles soient des conseils et des suggestions tendant à conformer l'enseignement à la fois au progrès de la psychologie de l'intelligence et de la pédagogie des Mathématiques, et à la nature comme à l'usage des Mathématiques, science théorique ayant une origine liée au réel et une portée efficace dans notre action sur lui ;

17. Tout doit être mis en œuvre pour stimuler et favoriser chez l'élève l'apprentissage actif des Mathématiques par une participation personnelle aussi large que possible à leur élaboration ;

18. Il est nécessaire : *a)* d'éveiller et de soutenir l'intérêt des élèves, tant pour les Mathématiques elles-mêmes que pour leurs applications ;

b) d'être attentif au cheminement de la pensée mathématique juvénile ;

c) d'adapter l'enseignement aux capacités individuelles et à l'évolution mentale des élèves et de le différencier successivement suivant leur destination ;

19. Il faut : *a)* partir autant que possible du concret pour arriver à l'abstrait, surtout dans les classes inférieures et, chaque fois que la chose est utile, faire appel à l'expérimentation réelle, figurée ou imaginée pour suggérer la définition ou la démonstration ; *b)* tenir compte de ce que la connaissance mathématique naît et se développe par l'intériorisation des actions concrètes et l'organisation des schèmes opératoires ; *c)* profiter des questions soulevées par les situations concrètes, non seulement pour montrer l'importance pratique des Mathématiques, mais surtout pour motiver des développements théoriques ;

20. Il importe : *a)* d'amener l'élève à former les notions et à découvrir lui-même les relations et les propriétés mathématiques, plutôt que de lui imposer une pensée adulte toute faite ; *b)* d'assurer l'acquisition des notions et des processus opératoires avant d'introduire le formalisme ; *c)* de ne confier à l'automatisme que les opérations assimilées ;

21. Il est indispensable : *a)* de faire acquérir d'abord à l'élève l'expérience des êtres et des relations mathématiques et de l'initier ensuite au raisonnement déductif ; *b)* d'étendre progressivement la construction déductive des Mathématiques ; *c)* d'apprendre à poser des problèmes, à rechercher des données, à les exploiter et à apprécier des résultats ; *d)* d'accorder la préférence à l'investigation heuristique des questions

plutôt qu'à l'exposé doctrinal des théorèmes ; e) de faire prendre conscience de la structure d'une théorie hypothético-déductive où, sur la base des postulats, les théorèmes sont construits par des démonstrations et les termes nouveaux introduits par des définitions, de manière à parvenir à un exposé logique déductif de la matière étudiée ;

22. Il faut : a) étudier les erreurs des élèves et voir en elles un moyen de connaître leur pensée mathématique ; b) entraîner à la pratique du contrôle personnel et de l'autocorrection ; c) donner le sens de l'approximation, de l'ordre de grandeur et de la vraisemblance des résultats ; d) donner la priorité à la réflexion et au raisonnement plutôt qu'au « dressage » et au « par cœur », et limiter le rôle de la mémoire à la fixation des résultats fondamentaux ; e) proposer des sujets d'examen qui demandent plus de formation mathématique que de préparation intensive ;

23. Il importe : a) d'encourager les modes d'expression personnels, même approximatifs, et de les améliorer par degrés ; b) d'amener l'élève à la précision et à la rigueur par les besoins d'une communication efficace avec autrui et une exigence de clarté de sa propre pensée ; c) de favoriser la recherche et l'initiative individuelles autant que le travail en équipe ; d) d'accroître le nombre des élèves qui s'intéressent aux Mathématiques et de contribuer à développer leur formation et leurs connaissances, en organisant des cercles, des conférences, des compétitions et d'autres manifestations de caractère facultatif et en diffusant des livres et revues qui leur soient accessibles ;

24. Il est indispensable : a) de souligner l'unité intrinsèque des Mathématiques, de ne pas en cloisonner les branches et de rapprocher les diverses méthodes de résolution d'une question donnée ; b) d'indiquer les étapes importantes de l'histoire des notions et des théories mathématiques étudiées ;

25. Il est nécessaire : a) de maintenir la coordination des Mathématiques avec les sciences qui en font usage ; b) de tirer parti des exigences de la pensée mathématique pour accroître la précision, la clarté et la concision du langage ; c) de garder le contact des Mathématiques avec la vie et le réel.

MATÉRIEL DIDACTIQUE

26. L'évolution de la méthodologie des Mathématiques appelle une adaptation des manuels. A côté des livres d'initiation aux Mathématiques permettant l'accès progressif aux notions abstraites, l'élève devra pouvoir disposer d'ouvrages de révision où les matières acquises sont reprises et organisées sur un plan plus élevé. Des ouvrages de référence, de complément et de vulgarisation, des revues, etc..., devront être mis à la disposition de chacun dans les bibliothèques de classes. Cette documentation sera adaptée aux buts des différentes sections et respectera, pour chacune d'elles, le dosage entre le point de vue pratique, les besoins techniques, les développements théoriques et le souci culturel ;

27. Les auxiliaires audio-visuels, les modèles mathématiques concrets (empruntés à la vie courante, construits par les élèves ou les maîtres, ou encore fabriqués par des firmes commerciales) tenant une place de plus en plus grande dans l'enseignement, il convient de tirer parti de leur usage pour faire acquérir activement par les élèves les abstractions mathématiques.

PERSONNEL ENSEIGNANT

28. En Mathématiques plus peut-être qu'en d'autres branches, le rôle du maître est primordial. Le recrutement, la formation et le perfectionnement des professeurs de Mathématiques doivent être l'objet d'une attention et d'une sollicitude particulières de la part des autorités responsables de l'éducation de la jeunesse ;

29. Les maîtres chargés d'enseigner les Mathématiques dans les écoles secondaires doivent avoir une formation mathématique d'un niveau nettement supérieur à celui de leur enseignement. Cette formation doit comporter, non seulement l'étude des Mathématiques théoriques, mais une part de Mathématiques appliquées, l'histoire générale de la pensée mathématique, la méthodologie de la science mathématique elle-même et l'étude des Mathématiques Élémentaires considérées d'un point de vue supérieur ;

30. Une préparation pédagogique et psychologique adéquate doit être le complément indispensable de la formation mathématique du maître et s'inspirer d'une connaissance claire et assez mûrie des buts généraux et des principes de l'éducation humaine. Cette préparation doit mettre l'accent sur l'évolution structurelle de l'intelligence en rapport avec l'élaboration de la pensée mathématique. Elle fera une place aux relations du concret et de l'abstrait, de manière à situer la méthodologie des modèles dans l'enseignement mathématique. Le futur professeur sera entraîné à l'observation et à l'expérimentation en matière de pédagogie mathématique. Par-dessus tout, on l'intéressera aux adolescents et à leurs aspirations, afin qu'il puisse être l'animateur et le guide de la jeunesse ;

31. Il convient de veiller que tous les élèves des classes inférieures et les élèves les moins doués des classes supérieures aient de bons maîtres ;

32. Il faut que le maître de mathématiques en fonction puisse se tenir au courant à la fois de l'évolution moderne des sciences mathématiques théoriques, des applications actuelles importantes des Mathématiques et des progrès récents de la didactique de sa discipline. Il est souhaitable que des mesures soient prises en vue de faciliter le perfectionnement des maîtres (conférences, cours de vacances, séminaires, groupes de travail, stages, publications, etc...) ;

33. Les suggestions d'inspecteurs spécialisés ou de conseillers pédagogiques, l'exemple du travail de professeurs expérimentés, sont des moyens excellents pour augmenter le rendement de l'enseignement ;

34. Le professeur de Mathématiques doit jouir, dans la société moderne, de la considération et du rang social auxquels lui donnent droit sa formation scientifique et sa mission d'éducateur ;

35. Etant donné que dans tous les pays un enseignement adéquat des Mathématiques est un élément essentiel de l'éducation, il importe d'assurer le recrutement d'un nombre suffisant de maîtres qualifiés, d'autant plus que c'est là une condition de l'épanouissement scientifique, technique, économique et social de tous les peuples.

COLLABORATION INTERNATIONALE

36. Les gouvernements et les organismes culturels ou éducatifs internationaux, tels l'Unesco, le Bureau international d'Éducation, la Commission internationale de l'enseignement mathématique, la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques, doivent favoriser par tous les moyens (publications, conférences, rencontres, expositions, voyages d'étude et stages à l'étranger, etc...), l'échange international des idées, des travaux, des recherches et des résultats obtenus dans l'enseignement des Mathématiques, afin que la jeunesse du monde entier puisse bénéficier au plus tôt des expériences et des progrès réalisés par les maîtres de tous les pays.

Rectification

D'une lettre de M. l'Inspecteur général CAGNAC, nous extrayons le passage suivant :

« Sous le titre Nouveaux textes utiles à connaître (Bulletin 179, p. 72), vous ne rendez pas compte très exactement de l'Arrêté du 27 juin 1956. Il n'existe pas de classes de Spéciales A_1 et A_2 . Aucun changement n'a été apporté à la dénomination des classes actuellement existantes.

En outre, l'Arrêté précise que les programmes des classes de première année seront extraits des programmes A_1, B_1, C_1 ; ceux des classes de seconde année seront extraits des programmes A_2, B_2, C_2 . Ces précisions ne pourront être apportées que lorsque les Ecoles auront choisi leurs programmes à l'intérieur des programmes maximums qui ont été publiés.

Quant au retard apporté à la publication, rendez-vous compte que l'impression des programmes n'a pu commencer qu'après le 27 juin, date de l'Arrêté... et qu'au mois d'août l'Imprimerie Nationale a été en vacances... et qu'il a fallu trois épreuves!

Mais je suis surpris que les Collègues enseignant en Mathématiques Supérieures et en Mathématiques Spéciales aient déploré le retard de cette publication, car l'Ecole Polytechnique leur avait envoyé son programme propre au milieu de juillet. »

Rappel

Il peut être utile de rappeler ou de signaler à nos jeunes Collègues qui débutent dans le métier, qu'il existe une brochure intitulée : **Instructions générales concernant l'Enseignement des Mathématiques.**

Editée sous le numéro 106 EP/SD par le Centre National de Documentation Pédagogique, elle est en vente au S.E.V.P.E.N., rue du Four, Paris, 6^e, au prix de 50 F (franco 70 F).

C'est dans cette brochure qu'on retrouvera des recommandations fort utiles telle que :

— « Il ne peut s'agir, quelle que soit la classe, d'un enseignement ex cathedra où le professeur a seul la parole... »

— « Il est bon que les élèves gardent une trace écrite du travail d'acquisition réalisé au cours de chaque classe... »

— « A côté des titres des leçons, le cahier de textes doit contenir in extenso, sans renvoi à un livre, les textes des devoirs et des compositions... »

VII. LA VIE DE L'ASSOCIATION

« PETITE RÉFORME », CONTRE-RÉFORME OU CRÉPUSCULE DE LA RÉFORME ?

Dans le précédent *Bulletin*, j'avais tenté de fixer quelques aspects essentiels de la rentrée scolaire, du point de vue de l'enseignement des Mathématiques. A situation difficile, notre souhait était que l'on porte des remèdes raisonnables et efficaces. Prendre et faire prendre conscience de l'importance des Mathématiques dans la culture de notre temps est raisonnable. Remédier à la place insuffisante des sciences en général et des Mathématiques en particulier dans notre Enseignement du Second Degré est une manière efficace de répondre aux besoins des hommes et de la société de notre temps.

*
**

DANS LE SENS RÉTROGRADE.

Le jeudi 25 octobre, nous apprenions qu'un projet de « petite réforme » allait être soumis, dès le 29 octobre, au Conseil de l'Enseignement du Second Degré. Ce n'était plus de la hâte, c'était de la précipitation...

Le Bureau de l'A.P.M., aussitôt réuni, a examiné en commun avec les Collègues membres du Conseil, ce qu'il pouvait connaître de ces projets. Je ne reviendrai pas ici sur l'examen d'entrée en Sixième (pour lequel Mlle MASSON a obtenu que les deux épreuves de Mathématiques soient faites successivement, avec remise des copies après l'épreuve de calcul), ni sur le Baccalauréat dont la réforme a été renvoyée à une session ultérieure. Mais j'insisterai sur la révision des programmes. Sous prétexte d'*alléger* les programmes, le projet comportait, ou bien une nouvelle rédaction pour les classes du premier cycle, ou bien des suppressions pour les classes de Première et les classes terminales. De plus, ces nouveaux textes devaient être appliqués à partir du 1^{er} janvier 1957.

Le Bureau a été unanime pour demander qu'aucun changement de programme n'ait lieu en cours d'année. Toute modification, alors que les classes ont fonctionné depuis plusieurs semaines, signifie, pour les élèves et pour les professeurs, non un allègement mais une complication du travail.

Quant aux suppressions proposées, en particulier dans les programmes de Première et dans les classes terminales, elles avaient de quoi surprendre. Supprimer les applications de l'algèbre à la cinématique en Première, c'est peut-être diminuer la tâche des élèves, mais les priver d'une application pratique du calcul des dérivées introduites dans le cours, et surtout c'est compliquer la tâche du professeur de physique, l'année suivante, quand il commencera son cours. En Mathématiques Élémentaires, *toute l'arithmétique* était supprimée ; rien que cela. En dehors du scandale de cet escamotage, avait-on pris conscience des difficultés que l'on se créait pour la suite ? Rappelons que les nouveaux programmes de Mathématiques Supérieures commencent par la phrase : « Rappel des propriétés des nombres rationnels ». L'arithmétique était également supprimée de la classe de Sciences Expérimentales sans souci de l'effet concernant les élèves instituteurs de nos Ecoles Normales qui, le plus souvent, suivent ce programme. En géométrie de Mathématiques Élémentaires, on supprimait aussi les trièdres... (ces malheureux n'ont pas bonne réputation ; refoulés de Première en Mathématiques Élémentaires, ils auraient ainsi achevé leur existence scolaire). Rions un peu, en passant, des suppressions proposées pour la cosmographie : en Philosophie, le mot *saison* n'était pas supprimé, mais l'équateur

céleste et la sphère des fixes se trouvant proscrits, il devenait impossible de les définir autrement que par recours à l'almanach. En Mathématiques Élémentaires, suppression des planètes principales, mais non des petites planètes ; le mot crépuscule était rayé. Quand on sait combien le crépuscule alourdit ou assombrit nos classes, on constate que M. JOURDAIN (1), auteur de ces propositions, avait du concept d'allègement une notion sûre...

Le Conseil de l'Enseignement du Second Degré (le 21 octobre), puis le Conseil Supérieur (le 7 novembre) ont rejeté ces propositions.

Par 28 voix contre 24 et une abstention, le Conseil Supérieur a voté le texte ci-après :

« Le Conseil Supérieur de l'Education Nationale est convaincu, avec M. le Ministre, qu'il est nécessaire d'alléger les programmes à tous les niveaux du Second Degré et de l'Enseignement technique et notamment de modifier l'esprit dans lequel est donné l'enseignement scientifique.

Mais, considérant qu'il n'est pas désirable d'introduire en cours d'année des modifications importantes et qu'il ne saurait donc être question d'en proposer l'application dès 1956,

Considérant d'autre part que ces modifications doivent être étudiées avec soin si l'on ne veut pas risquer de compromettre l'efficacité de l'enseignement et la réforme elle-même,

Le Conseil demande que les propositions ministérielles d'allègement des programmes soient renvoyées immédiatement à des commissions de travail, dont les rapports devront être soumis aux différents Conseils au cours du deuxième trimestre de l'année scolaire 1956-57 ; les nouveaux programmes seraient appliqués durant l'année 1957-1958.

Il accepte toutefois d'envisager, à titre exceptionnel, pour cette année, des modalités pratiques destinées à alléger, en Première et dans les classes terminales, la préparation aux examens du Baccalauréat. »

*

**

Les journées d'étude de Sèvres, des 2-4 novembre, se sont ouvertes entre les réunions des deux Conseils. Nous avons tenu, à cette occasion, à dire les sentiments unanimes du Bureau et, je crois, de tous les professeurs de Mathématiques, à M. BRUNOLD, lors de la séance d'ouverture (2). Ces journées furent l'occasion de souligner l'insuffisance actuelle de l'horaire de Mathématiques dans le Second Degré. M. Francis PERRIN, Haut-Commissaire à l'énergie atomique, et M. Laurent SCHWARTZ, professeur à la Sorbonne, insistèrent particulièrement sur ce point. Ainsi se trouvait souligné l'aspect de contre-réforme de ces mesures improvisées.

*

**

On voudra bien noter que notre opposition à ces projets ne signifie nullement que nous soyons opposés à une vraie réforme. Au contraire, la position de l'A.P.M.,

(1) L'auteur véritable est resté inconnu, personne n'acceptant la paternité de textes aussi incohérents.

(2) M. BRUNOLD, souffrant, ne put assister à cette séance, mais le texte de l'allocution lui a été remis.

qu'elle est prête à affirmer chaque fois que cela pourra être utile, marque notre volonté d'expansion et d'amélioration de l'enseignement des Mathématiques :

1° Pour former des scientifiques, il faut leur donner, à la base, une culture mathématique suffisante et celle-ci ne peut s'acquérir sans un horaire suffisant. Les horaires actuels, ceux du premier cycle en particulier, ne le sont pas. De toute urgence il faut, ou améliorer substantiellement l'horaire, ou organiser des travaux pratiques de Mathématiques.

2° Cette condition de l'horaire étant remplie, un enseignement plus vivant, mieux adapté à la masse des élèves de nos classes et aux conditions de la société actuelle, est réalisable. Alors un allègement réel des programmes est, non seulement souhaitable, mais possible ; encore faut-il prendre le temps minimum de la réflexion pour rédiger ces textes et tous commentaires devant en préciser l'application.

3° Les examens devant sanctionner les études doivent comporter des sections à caractère scientifique. Aussi, quand il sera question de réformer le baccalauréat, insisterons-nous pour que, dans les sections telles que C, C', M et M', les coefficients affectés aux disciplines scientifiques soient au moins égaux à ceux des disciplines littéraires.

C'est parce que la « petite réforme » tournait le dos à ces principes généraux que nous y sommes opposés. Nous pensions d'ailleurs que les avis circonstanciés du Conseil Supérieur éclaireraient le Ministre.

*

**

Il semble bien que cela ne soit pas. Le B.O. du 29 novembre publie en effet un arrêté du 23 novembre modifiant les programmes des classes de Première et des classes terminales avec effet immédiat. Même si ces modifications n'ont plus le caractère provocant d'incohérence des premières propositions, et si leur portée est limitée, elles ont encore deux vices rédhibitoires :

1° *couper* dans les programmes scientifiques au lieu de les réformer pour en développer l'efficacité ;

2° provoquer des perturbations dans les classes en cours d'année.

Le premier défaut n'aurait pas manqué d'apparaître à un Ministre réellement convaincu de l'urgence extrême du développement de l'enseignement scientifique. Quant au second, ses effets seront heureusement limités, dans tous les cas, évidemment très nombreux, où les Collègues, ayant à choisir entre le respect de la lettre d'un texte administratif improvisé et le déroulement raisonnable de leur enseignement, agiront en bons professeurs.

Si le Ministre a décidé de passer outre à l'avis des Conseils, s'il a décidé d'alléger à sa façon à tout prix, il faut qu'il ait des raisons extérieures à la pédagogie. Dommage qu'il ne les dise pas et qu'un article non signé (encore le même M. JOURDAIN, sans doute) ne tienne à baptiser carpe ce qui est lapin : « Acceptées déjà par la grande majorité du personnel enseignant (1), ces mesures répondent à un besoin d'assouplissement de notre système scolaire et s'inspirent d'un souci de justice sociale et de satisfaction des besoins nationaux. »

Et on sait bien que la nation n'a pas besoin de crépuscule (2).

(1) Les modifications de programme auraient donc été acceptées par le personnel avant même d'être connues. Ce Ministre aurait vraiment un personnel « modèle ».

(2) Pas plus que de « cercles passant par deux points donnés et tangents à une droite donnée ou à un cercle donné ». Peut-être les cercles de rayon nul lui suffiront-ils.

*

**

DANS LE SENS DIRECT.

Dès le déclenchement de la campagne des allègements, le Bureau de l'A.P.M. avait demandé audience au Ministre. M. CROS, Directeur du Cabinet, nous a reçus le lundi 12 novembre ; il nous a écoutés avec une sympathique attention. Il nous a assuré que le Ministre, déjà au fait de nos demandes grâce au rapport sur les travaux pratiques que nous lui avions adressé, déjà alerté sur l'urgence d'un renforcement de la formation scientifique, avait décidé de prendre des mesures dans ce sens : A LA RENTREE D'OCTOBRE 1957, IL Y AURA QUATRE HEURES HEBDOMADAIRES DE MATHÉMATIQUES DANS TOUTES LES CLASSES DU PREMIER CYCLE. A l'occasion d'une conversation, M. BRUNOLD nous a confirmé cette décision dont l'importance n'échappera à aucun d'entre nous.

Reconnaissons que cette mesure représente un pas en avant dans la bonne direction. Et son effet durable aura vite fait de réparer le dommage causé par le faux-pas des « allègements 56 ». Cela nous invite, en tout cas, à travailler avec une ardeur accrue à la poursuite de ce début de réforme.

Cette amélioration de l'horaire paraît entendue sans augmentation de programme. Une nouvelle rédaction peut néanmoins intervenir et l'on voudra bien porter une attention toute spéciale au méritoire travail de notre Commission des programmes. Mais on peut souhaiter que ce temps plus large permette de mieux utiliser les méthodes actives et j'imagine, pour ma part, que c'est là ce que veut dire le Conseil Supérieur dans la motion citée plus haut à propos d'une modification de l'esprit dans lequel est donné l'enseignement scientifique. Nous devons aborder la discussion de ces méthodes sans hésitation ; même si nous souffrons parfois de voir présenter ce que nous faisons déjà de façon injuste ou pour le moins caricaturale. Ne nous attardons même pas à réfuter ces opinions malveillantes ; discutons ce qui est possible à partir de notre expérience. Nous pouvons aussi nous inspirer du texte de la conférence de Genève (voir page 140), qui nous paraît si intéressant que nous regrettons d'autant plus qu'il ait pu être élaboré à Genève sans que notre Association ait été invitée à faire partie de la délégation française.

Cette révision réfléchie des méthodes et des programmes, où nous savons bien qu'il y a des rameaux qui s'étiolent alors qu'ils devraient vivre, d'autres qui étouffent leurs voisins alors qu'un élagage devrait les ramener à de plus justes proportions, cette méthode de travail est la bonne voie des allègements réels.

*

**

AVENIR DE LA RÉFORME.

Que le sens des décisions ministérielles puisse être alternativement rétrograde puis direct, il faudrait avoir quelque candeur pour s'en indigner et il serait encore plus impardonnable d'y trouver motif à découragement. Quelles que puissent être les résistances, l'enseignement scientifique se développera.

Nous avons d'ailleurs eu le grand réconfort des déclarations de M. LONGCHAMRON, Président du Conseil Supérieur de la Recherche Scientifique. Dans un discours prononcé le 15 octobre, à l'inauguration des cours du centre de perfectionnement technique, M. LONGCHAMRON a dénoncé les lacunes de notre enseignement scientifique :

« Tout semble fait, a-t-il déclaré, pour dégoûter les enfants des Mathématiques dès le plus jeune âge. Les horaires y contribuent au premier chef. En Sixième, par exemple, le calcul n'occupe que deux heures par semaine quand le latin en occupe six. Même déséquilibre dans les classes suivantes, où les sciences n'ont jamais retrouvé la place qui leur était réservée en 1902. A une époque où le besoin de cadres scientifiques n'était pas impérieux, tous les élèves partageaient leur temps à égalité entre les lettres et les sciences ; aujourd'hui le manque d'ingénieurs et de techniciens étant ce qu'il est, les élèves des sections les plus « savantes », la Première moderne par exemple, « font » quinze heures de lettres contre huit heures trente de sciences.

La classe de Mathématiques Élémentaires fait, il est vrai, une place de choix aux sciences, mais il est trop tard. Bon nombre de lycéens se sont lassés en chemin, et ceux qui ont persévéré ne pourront plus rattraper les retards accumulés faute d'horaires suffisants. On voit alors les plus vaillants s'épuiser dans la « course folle » aux concours des Grandes Ecoles, cependant que près des deux tiers des candidats se voient ajourner à la propédeutique scientifique. « Car, souligne M. LONGCHAMBON, le pays qui manque le plus gravement de cadres techniciens s'offre le luxe d'écarter chaque année mille cinq cents des deux mille trois cents étudiants attirés par la licence de sciences. »

Le Ministre de l'Éducation Nationale envisage la création, par une loi, d'un « institut des sciences appliquées ». Sans concours d'entrée, cet établissement accueillerait chaque année un millier de bacheliers de Mathématiques : les meilleurs en sortiraient ingénieurs après cinq ans d'études et les autres deviendraient, au bout de trois ans seulement, les techniciens supérieurs dont le besoin n'est pas moins pressant.

« La propédeutique, les horaires des cycles secondaires et l'enseignement tout entier devraient être réformés dans ce même esprit, a conclu l'ancien Ministre. La sélection des élites telle que la pratiquent les Grandes Ecoles doit être poursuivie, mais elle ne doit pas exclure l'éducation de masse. La formule des barrages successifs par concours — ce meilleur moyen de tirer au sort ! — ne suffit plus. »

M. LONGCHAMBON a bien voulu nous recevoir et reprendre à notre intention l'exposé de ses idées. Il approuve en particulier l'esprit de notre projet de travaux pratiques et il veillera, avec nous, à la réalisation effective des quatre heures hebdomadaires. Car il insiste sur ce point : aux conditions scientifiques et sociales de notre temps, doit répondre un enseignement adapté et réellement décidé à donner à tous les moyens intellectuels d'agir et de comprendre.

Nous nous réjouissons du précieux concours que M. LONGCHAMBON nous apporte et nous lui exprimons notre sincère gratitude. Nous admirons d'ailleurs ses efforts au sein du Conseil Supérieur de la Recherche Scientifique et nous souhaitons faciliter la formation des ingénieurs et des chercheurs dont l'industrie et la science ont également besoin.

M. LONGCHAMBON nous suggère de développer les contacts entre professeurs de Mathématiques et les laboratoires ou les usines ; dès le prochain numéro du *Bulletin* nous espérons présenter des articles répondant à ce but ; des visites pourront aussi être organisées durant le deuxième trimestre.

Enfin, M. LONGCHAMBON nous offre le soutien le plus complet pour toute manifestation montrant notre volonté de rénover et de développer l'enseignement des Mathématiques. Nous ne manquerons pas d'en profiter.

Avant la rentrée 1956, chacun de nous prévoyait des difficultés, mais gardait l'espoir d'une réforme efficace. Le Ministre aurait bien voulu accroître ces difficultés ; il n'y a que partiellement réussi, et il nous promet un changement heureux. Eh bien nous ne récriminerons pas, et, au sein de l'A.P.M., nous travaillerons avec la seule préoccupation de cet avenir.

G. W.

Réunion du Comité (18 octobre 1956)

Présents : Mlles DIONOT, FÉLIX, MASSON ; MM. BAY, CHAZAL, FAVRELLE, FOUCHÉ, GIRARD, GUITTON, HUISMAN, ITARD, LEGRAND, MINOIS, ROSTOLLAND, SIROS, THÉRON, WALUSINSKI.

Excusés : Mlle AFFRE ; MM. BIGUENET, DURRANDE, MAILLARD, THOVERT.

WALUSINSKI, en transmettant les excuses des absents, lit la lettre de démission du Comité de M. MAILLARD, nommé Inspecteur Général. L'article VI des statuts prévoit son remplacement pour la fin de son mandat (avril 1957) par le candidat non élu ayant obtenu le plus de voix aux dernières élections. Mlle VERVAECKE (Lycée Faidherbe, à Lille) est donc élue membre du Comité.

Le Comité décide que Mlle VERVAECKE sera rééligible en avril 1957.

1. — WALUSINSKI rend compte des réponses reçues au sujet du rapport sur les travaux pratiques (cf. article du *Bulletin* 179).

La discussion porte sur les éventualités possibles pour réaliser l'augmentation des horaires. M. MINOIS met en garde contre toute augmentation de nos maxima de service. M. ITARD souligne que nous défendrons ceux-ci d'autant plus efficacement que l'on a besoin de nous.

Si, devant la pénurie de professeurs, l'organisation des travaux pratiques devait être réalisée par paliers, M. GUITTON propose, et le Comité adopte sa proposition, de réaliser cette réforme par première priorité dans les classes aux effectifs supérieurs à 35 élèves ; puis en seconde priorité dans les classes de plus de 20 élèves.

2. — WALUSINSKI signale l'action entreprise en commun avec les physiciens et les naturalistes, en prévision d'une réforme générale des horaires et des programmes (Cf. *Bulletin* 179, p. 76 et plus loin, p. 152).

Au sujet de la campagne lancée par le Ministre en faveur « d'allègements » des programmes, WALUSINSKI y voit une manœuvre destinée à frapper l'opinion publique. Le Comité est d'avis que si des allègements réels sont souhaitables, ils ne doivent en rien contrarier le développement de l'enseignement scientifique.

Mlle MASSON montre que la réforme des programmes doit être liée à celle du baccalauréat. M. MINOIS en profite pour rappeler qu'une note insuffisante de français n'est éliminatoire que si le jury tout entier le décide (la décision n'appartient pas au seul examinateur de français).

3. — WALUSINSKI met le Comité au courant de l'organisation des journées d'étude de Sèvres.

4. **Situation financière.** — Notre dévoué trésorier, M. LEGRAND, donne les précisions suivantes : avant le paiement du *Bulletin* 170 d'octobre 1955, il y avait en caisse 1 139 721 F ; après le paiement du *Bulletin* 177 de mai 1956, il y avait en caisse 680 870 F.

L'ensemble des *Bulletins* 170 à 177, représentant 498 pages + les deux volumes d'Annales, ont coûté 1 690 543 F.

Le Trésorier en conclut que si l'on veut conserver quelques réserves, il faudra diminuer le nombre de pages.

WALUSINSKI propose qu'un rapport sur cette question soit soumis à la réunion du Comité de janvier, qui pourra éventuellement soumettre les conclusions à l'ensemble des adhérents. L'Assemblée générale 1957 tranchera.

5. Travail des Commissions. — La Commission des programmes reprendra ses travaux le 15 novembre, sous la responsabilité de M. SIROS. Les textes déjà élaborés seront publiés.

La Commission de la formation des maîtres se réunira le 22 novembre sous la responsabilité de M. CHAZAL.

La séance est levée à 17 heures.

QUELQUES LETTRES...

Un vœu de l'Académie des Sciences.

D'une lettre de M. LE RÉVÉREND, président de l'Union des Physiciens, nous extrayons l'importante communication que voici :

M. LOUIS DE BROGLIE, *Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences*, me fait connaître que l'Académie des Sciences a pris connaissance du vœu commun de nos trois sociétés, reçu le 22 juillet, qu'elle en a délibéré à plusieurs reprises et qu'elle a décidé le 26 novembre d'adresser au gouvernement le vœu suivant :

« L'Académie des Sciences,

émue par la situation très grave que créent, pour l'avenir français, la pénurie croissante d'hommes de science, d'ingénieurs, de techniciens, et la proportion insuffisante des jeunes qui se destinent à une carrière scientifique ;

constatant que les diverses disciplines scientifiques ou techniques ont besoin de recruter, non seulement des éléments doués de réelles aptitudes pour les sciences abstraites, spécialement les Mathématiques, mais encore, des hommes aptes à l'observation et à l'expérimentation,

émet le vœu :

1° que les concours ou examens post-secondaires soient conçus de telle sorte qu'ils permettent de satisfaire à ce double besoin, et que ne soient pas, à priori, détournés des carrières scientifiques, les jeunes qui ne semblent pas spécialement doués pour les Mathématiques ;

2° que l'enseignement des sciences dans les établissements secondaires se préoccupe moins de dispenser une instruction détaillée, que de faire acquérir des connaissances durables, qu'il s'efforce d'attirer les élèves vers les sciences, d'éveiller leur vocation et de leur donner une ébauche de formation, en les initiant, dès le jeune âge, à l'observation et à la méthode expérimentale par des exercices pratiques et des exemples caractéristiques ; que soient rétablies, dans l'Enseignement du Deuxième Degré, des sections à prédominance scientifique effective ;

3° que les initiatives visant à recruter pour l'enseignement un personnel compétent, même sans diplôme, acceptant des élèves, même sans concours, s'efforçant de donner une spécialisation suffisante, soient encouragées et fassent l'objet de réalisations rapides, en présence de l'urgence des besoins. »

Signé : LOUIS DE BROGLIE ; R. COURRIER.

Réflexions sur le grade de bachelier ès-sciences.

De notre Collègue GUILBERT, professeur au Lycée Marcel-Roby (St-Germain-en-Laye) :

Le procès des épreuves de Mathématiques infligées aux candidats à la 2^e partie, aux deux sessions, n'est plus à faire : tout le monde est d'accord sans doute :

1^o sur le caractère exclusif des questions de cours, deux fois de suite (ce qui est cruel) ;

2^o sur la longueur abusive des problèmes (quel professeur aurait pu rédiger l'un ou l'autre en 2 h. 1/4, comme il était demandé aux candidats ?). En juin la moindre erreur dans les calculs demandés faussait toute l'étude géométrique ultérieure (ce qui a découragé plus d'un candidat sérieux).

Il faudrait savoir ce que l'on veut : si l'on désire sélectionner uniquement de futurs agrégés ou de futurs polytechniciens, qu'on le dise ; mais alors qu'on augmente la durée de l'épreuve, et qu'on crée pour les autres un autre Baccalauréat scientifique « Mathématiques et Physique » (à défaut du Baccalauréat « Sciences expérimentales », qui s'obstine à n'être qu'une caricature d'option scientifique).

A l'heure où l'on déplore le manque grave de techniciens qualifiés, est-il raisonnable d'exiger des candidats aux études scientifiques supérieures d'être des virtuoses en Mathématiques ?

Ce qui est désolant, à la lumière des épreuves de septembre, par exemple, c'est de constater que la sélection s'est souvent opérée à rebours. Elle s'est faite, en effet, sur les questions de cours de Mathématiques et de Physique (puisqu'en Physique également, le problème n'a pas pu mettre en valeur les candidats — mais pour une autre raison, dont il vaut mieux ne pas reparler). Ainsi la mémoire a été le critérium qui a permis aux candidats d'être sacrés « mathématiciens » !

Se décidera-t-on enfin à accorder aux futurs bacheliers « Mathématiques » une épreuve de Mathématiques de quatre heures ? (les « philosophes » ont bien une épreuve principale de quatre heures).

Epreuve comportant, si l'on y tient absolument, une « question de cours », mais conçue autrement que comme une « tranche de cours » à réciter ! et un problème *progressif* qui permettra à chacun de donner sa mesure, aussi bien dans la rédaction *soignée* que dans la recherche méthodique et *réfléchie* de la solution.

Et si l'on veut sélectionner des « taupins », on trouvera bien le moyen de mettre une « dernière question » très difficile, permettant aux meilleurs de décrocher la mention Bien qui leur ouvrira l'accès des temples du Savoir Mathématique.

Mais au moins les futurs techniciens, physiciens, chimistes, ne se verront pas écartés des Facultés et des Ecoles (autres que les « Grandes ») au moment même où réussissent des candidats parfois douteux, mais doués d'une puissante mémoire.

Le bloc-notes de L'A.P.M.

* **Le bel exemple de Lille.** — Nous sommes heureux de citer le bel exemple de la Faculté des Sciences de Lille, où des maîtres de l'Enseignement Supérieur assurent avec beaucoup de compétence et de dévouement des cours suivis et des conférences destinés aux professeurs de Mathématiques du Second Degré. Notre Collègue, Mlle VERVAECKE, du Lycée Fénelon, nous donne les précisions suivantes :

Pour la troisième année, M. le Professeur W. KOURGANOFF, directeur de l'Observatoire de Lille, organise, le quatrième jeudi de chaque mois, un cycle de confé-

rences pour lequel il fait appel à d'éminents spécialistes d'astrophysique (Universités de Liège, d'Utrecht, d'Oslo). La première conférence de cette année, faite par M. KOURGANOFF lui-même, portera sur l'enseignement de quelques questions de cosmographie élémentaire particulièrement importantes pour la philosophie des sciences.

En outre, M. KOURGANOFF vient d'inaugurer un cours hebdomadaire préparant à la lecture des articles et des livres scientifiques en langue russe, à l'usage des débutants n'ayant aucune notion de cette langue.

Par ailleurs, à l'Institut de Mathématiques, vient de s'ouvrir un « Séminaire de Mathématiques », mis sur pied après enquête auprès des étudiants du C.A.P.E.S. et de l'agrégation (enseignant pour la plupart à Lille ou dans les environs) et auprès des membres de l'Enseignement du Second Degré plus ou moins chevronnés. MM. M. DECUYPER, R. DESCOMBES et G. POITOU, sont les responsables de cette heureuse initiative.

Les séances des premier et troisième jeudis de chaque mois sont consacrées à « l'exposé suivi des principes de la géométrie des nombres avec application à des problèmes simples de minimum arithmétique de formes linéaires et quadratiques ». M. CHÂTELET, ancien recteur et doyen de Lille, a bien voulu faire la conférence inaugurale.

Les séances du second jeudi de chaque mois sont consacrées à des exposés pédagogiques pour lesquels les suggestions des professeurs sont sollicitées. M. G. CHOQUET a promis sa collaboration pour décembre.

Des feuilles ronéotypées par les soins de l'Institut des Mathématiques permettent aux absents de profiter des exposés et les présents peuvent ainsi mieux en profiter.

Les professeurs du Second Degré ont accueilli ces initiatives avec empressement et gratitude. Plus de trente participants assistent aux conférences et celles-ci se prolongent en de vives et cordiales discussions autour d'une tasse de thé offerte par l'Institut de Mathématiques...

Nous nous promettons de faire de larges échos aux conférences de Lille, ainsi qu'à toutes celles qui, dans les autres Universités, montrent bien que la coopération des professeurs de divers ordres d'enseignement est fructueuse et qu'elle témoigne de l'effort très général de rénovation de notre enseignement des Mathématiques.

* **Les journées d'étude de Sèvres.** — Ces journées ont connu une grande affluence. Pour les Collègues qui n'ont pu y participer, nous publierons, dans le prochain *Bulletin*, un compte rendu aussi détaillé que possible.

* **Les enquêtes de la C.I.E.M.** — Trois enquêtes sont organisées par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Elles portent sur les thèmes suivants :

1. L'enseignement des Mathématiques jusqu'à l'âge de 15 ans.
2. Les bases scientifiques des Mathématiques dans l'Enseignement Secondaire.
3. L'étude comparée des méthodes d'initiation à la géométrie.

Peu de réponses sont parvenues jusqu'ici aux rapporteurs qui renouvellent un appel pressant à tous ceux qui peuvent contribuer au succès de cette triple enquête (voir les détails dans le *Bulletin* 177, p. 441). Adresser les réponses à G. WALUSINSKI, P. DUBREIL et G. CHOQUET (à l'Institut Poincaré).

* **Les conférences de la Société Mathématique.** — Les conférences du cycle sur la topologie auront lieu, sauf avis contraire précisé par circulaire, aux dates suivantes :

17 janvier, M. DIXMIER : Etude de quelques espaces de fonctions et de différents modes de convergences.

14 février, M. PISOT : Notions de topologie générale, procédés de construction d'espaces topologiques.

14 mars, M. PISOT : Espaces compacts et localement compacts.

4 avril, M. GODEMENT : Comptabilité de structures algébriques et topologiques sur un espace ; groupes et espaces vectoriels topologiques.

Rappelons que ces conférences, particulièrement destinées à nos Collègues, ont lieu aux dates indiquées, à 14 h. 15, amphithéâtre Hermite, Institut Henri-Poincaré, II, rue Pierre-Curie, Paris, 5^e. Les trois premières conférences de ce cycle ont été faites par MM. CHOQUET et REVUZ. Elles ont eu un grand succès. Nous les publions dans le prochain *Bulletin*.

*** RAPPEL TRES IMPORTANT.** — Rappelons que, selon les nouveaux statuts, la cotisation annuelle de 600 F était payable AVANT le 1^{er} décembre. Il y a eu des retardataires ; il y en a encore.

Qu'ils s'acquittent au plus vite !

Les retardataires compliquent le travail de la trésorerie et du secrétariat.

Ils risquent de ne pas recevoir tous les BULLETINS et en particulier les recueils 181 et 182 (Annales du baccalauréat et du B.E.P.C.).

DELAGRAVE

COURS DE MATHÉMATIQUES
BRACHET-DUMARQUÉ-ROSTOLLAND

INITIATION A LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

avec la collaboration de L. RENAUD

Un vol. (14,5×20) 140 »

COURS DE MATHÉMATIQUES
SCHAEFFER-LEBAILE

ARITHMÉTIQUE, cl. de 6^e
Un vol. (14,5×20) Br. 255 », Cart. 345 »

MATHÉMATIQUES cl. de 5^e
Un vol. (14,5×20) Br. 390 », Cart. 480 »

MATHÉMATIQUES
Classe de Quatrième
Un vol. (14,5×20) Br. 520 », Cart. 620 »

G. WALUSINSKI

AIDE-MÉMOIRE DE COSMOGRAPHIE

Classes de Philosophie, Mathématiques et Sciences Expérimentales. 190 »

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 90.145. — Dépôt légal : IV-1956

MASSON & C^o, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE

NOUVEAUTÉ :

NOUVEAUTÉ :

ARITHMÉTIQUE

Classe de Mathématiques

par

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Un fort volume (15,5 × 22,5) de 412 pages, avec figures, exercices
et problèmes, broché fort **2.400 F**

RAPPEL :

**ALGÈBRE
ET
TRIGONOMÉTRIE**

EN PRÉPARATION :

GÉOMÉTRIE

Classe de Mathématiques

par

J. COMMEAU

Professeur agrégé au Lycée Kléber, à Strasbourg

Un fort volume (15,5 × 21,5) de
512 p., avec figures, exercices et
problèmes ; broché fort **1.970 F**

Un fort volume (15,5 × 21,5) avec
figures, exercices et problèmes ;
broché fort **octobre 57**

CULTURE SCIENTIFIQUE

QUELQUES BONS LIVRES

**DONT LA LECTURE SERA UTILE AUX PROFESSEURS
QUI LES RECOMMANDERONT A LEURS ÉLÈVES**

G. GAMOW (Prix Kalinga 1956, Prix international de vulgarisation scientifique). — Un, deux, trois... l'Infini	780 F
E.-P. NORTHROP. — Fantaisies et paradoxes mathématiques	880 F
R.-W. ANDERSON. — Dansons avec les mathématiques	650 F
A. BAKST. — Amusements mathématiques	750 F
H. FRIEDEL. — A la découverte de la géométrie	480 F
J.-L. PELLETIER. — Les mathématiques utiles	650 F

En librairie et chez

DUNOD 92, Rue Bonaparte-PARIS 6^e -- C.C.P. 75-45

NOUVEAUTÉ

Enseignement **AUDIO-VISUEL**
de la Géométrie dans l'Espace

1) POUR L'ÉLÈVE

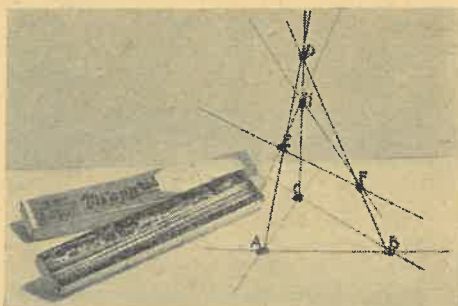
Le matériel permettant la construction dans l'espace de toutes les figures possibles.

VIT'APPRIS

49, Boul. Diderot-Paris 12^e

La Boîte. **385 F**

remise 15% par quantité



2) POUR LE PROFESSEUR. Le film fixe de toutes les questions du programme de première par des vues en couleurs analysant les figures complexes.

OFFICE DE DOCUMENTATION PAR LE FILM

31, rue du Général Delestrain, Paris 16^e

Série de 10 films **5 750 F**

GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VI°



CLAIRAUT (A.-Cl.)

ELEMENTS DE GEOMETRIE

(Collection des Maîtres de la pensée scientifique)

Tome 1 : XIV-95 pages, 69 fig., 1921

Tome 2 : 103 pages, 67 fig., 1921

(se vendent ensemble) 115 F

DEQUOY (N.)

Ancienne Elève de l'E.N.S. de J.F. de Sèvres

AXIOMATIQUE INTUITIONNISTE SANS NEGATION DE LA GEOMETRIE PROJECTIVE

(Fascicule VI de la Collection de Logique Mathématique, série A).

In-8° (16-25), 108 pages, 33 fig., 1954 1.250 F

DUBREIL (P.)

Maître de conférences à l'Ecole Polytechnique

ALGEBRE, Tome I

Equivalences, Opérations, Groupes, Anneaux, Corps. (Fascicule XX des Cahiers Scientifiques). 2° Edition revue et augmentée. In-8°

(16-25), XII-468 pages, 9 figures, 1954 3.900 F

DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers

LESIEUR (L.), Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers

et CROISOT (R.), Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Besançon

LEÇONS SUR LA THEORIE DES TREILLIS DES STRUCTURES ALGEBRIQUES ORDONNEES ET DES TREILLIS GEOMETRIQUES

(Fascicule XXI des Cahiers Scientifiques). In-8° (16-25), VIII-385

pages, 88 fig., 1953 5.500 F

NOUVEAUTÉ :

VIENT DE PARAÎTRE :

**PRÉCIS
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES**

PROGRAMMES A¹ et A²

PAR

R. GOUYON

Ancien élève de l'École normale supérieure
Agrégré des sciences mathématiques
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse



**OUVRAGE CONFORME AUX NOUVEAUX PROGRAMMES
APPLICABLES AU 1^{er} OCTOBRE 1956**



PREMIER FASCICULE

Vol. 16/24 cm, de 356 pages, broché **3 000 F**



DEUXIEME FASCICULE

Vol. 16/24 cm, de 288 pages, broché **2.700 F**



Le « PRECIS » sera vendu en un seul volume, relié pleine toile .. **6.300 F**



LIBRAIRIE VUIBERT

63, boulevard Saint-Germain, PARIS, V^e



vient de paraître

ciel et la terre

(**tome III** de l'Encyclopédie Française, fondateur Anatole de Monzie).

Rédigé sous la direction de André DANJON, membre de l'Institut, Pierre PRUVOST, membre de l'Institut et Jules BLACHE, recteur de l'Université d'Aix-Marseille, par un groupe de savants éminents dont les travaux sont mondialement connus, cet ouvrage éclaire une série de grandes questions au premier plan de l'actualité scientifique. Il comprend :

La description de l'univers céleste 1956 tel que le font apparaître les plus récentes découvertes, avec de larges aperçus sur les problèmes que tentent de résoudre les chercheurs.

L'étude de la Terre (Géophysique, Géologie, Morphologie) dont l'ensemble constitue, plutôt qu'un exposé exhaustif des faits, une explication générale des phénomènes replacés dans leur véritable perspective.

Un volume sous reliure mobile de 452 pages, 310 gravures dans le texte, 32 planches hors-texte en héliogravure, 3 dépliants - rel. cartonnage souple : 7 450 F - rel. "similoid" : 8 850 F rel. parchemin véritable : 11 950 F.

chez tous les libraires et :

LAROUSSE

dépositaire général, 114 bd Raspail, Paris 6



ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6° (<i>Jusqu'à épuisement</i>)	220 F
ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour	330 »
<i>Corrigé des exercices de 6°</i>	300 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5°	185 »
GÉOMÉTRIE 5° et 4°	400 »
ARITHMÉTIQUE 5°. — Nouvelle édition mise à jour	450 »
<i>Corrigé des exercices de 5°</i>	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4°	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3°	350 »
GÉOMÉTRIE 3°	325 »
GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3°	800 »
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages cartonné).	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.	100 »
ALGÈBRE 2° A.B.C.M.	500 »
GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M.	465 »
ALGÈBRE 1 ^{re} A.B.	180 »
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1 ^{re} C.M.	550 »
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A.B.C.M.	500 »
POUR LES EXAMENS :	
QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	390 »
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	410 »

CLASSIQUES HACHETTE

Couverture page IV

Roland MAILLARD et

Inspecteur Général
de l'Instruction Publique

Albert MILLET

Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'É. N. S. E. T.

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second degré

Classe de Sixième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Cinquième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Quatrième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Troisième. *Un volume.* + Corrigés.

Classes de Seconde Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Seconde Classique C et Moderne :

Algèbre. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.

Classes de Première Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Première Classique C et Moderne :

Algèbre et Trigonométrie. *Un volume.* Corrigés en préparation.

Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Sciences expérimentales :

Mathématiques. *Un volume.*

Classes de Philosophie et Sciences expérimentales :

Cosmographie. *Un volume.*

Classe de Philosophie :

Trigonométrie et Algèbre. *Un volume.*

Mathématiques (Trigonométrie, Algèbre et Cosmographie).

Un volume.

Classe de Mathématiques :

Algèbre. *Un volume.* Géométrie descriptive.

Arithmétique. *Un volume.* *Un volume.*

Cosmographie. *Un volume.* Trigonométrie. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume.* Mécanique. *Un volume.*

Classe de Mathématiques (Technique)

Algèbre. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume.*

Trigonométrie. *Un volume.*

Cours Complémentaires

Classe de Sixième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Cinquième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Quatrième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Troisième. *Un volume.* + Corrigés.

+ Les **Corrigés**, hors commerce, sont exclusivement réservés à MM. les Professeurs de Mathématiques.

