DEUX NOTES SUR L'INVERSION

I. — On sait qu'il faut insister le plus tôt possible sur le rôle que jouent les droites et les cercles, les plans et les sphères. Ces objets étant, respectivement dans le plan et dans l'espace, de la même nature, il est bon de leur donner une définition commune qui les fasse intervenir dès le début de la même façon.

On peut, pour cela, aussitôt qu'on a obtenu la relation métrique fondamentale de l'inversion, procéder comme suit :

Un cercle ou une droite — un plan ou une sphère — est le lieu des points du plan — de l'espace — défini par (A et B étant deux points fixes) : $\frac{MA}{MB} = \lambda$.

La relation métrique de l'inversion donne immédiatement :

$$\frac{M'B'}{M'A'} = \lambda' \quad \text{avec} \quad \lambda' = \lambda \frac{OB}{OA} \text{ ou } \lambda \frac{OA'}{OB'} \quad \text{(O pôle d'inversion).}$$

L'inverse est donc un lieu de même nature.

La discussion se fait selon que λ et λ' sont l'un ou l'autre, — ou tous les deux — ou aucun — égaux à l'unité.

Comme cette méthode peut être jugée « abstraite », la « leçon de chose » suit avec les figures.

Noter que cette méthode démontre que le faisceau à points limites A et B a pour inverse le faisceau à points limites A'B' ; la conservation de l'orthogonalité des droites et des cercles — des plans et des sphères — en résulte : à des familles conjuguées correspondent des familles conjuguées.

En même temps, ainsi on fait spécialement ressortir la conservation de l'orthogonalité. Orthogonalité et contact (qu'on étudie peu après) sont les deux cas où l'angle est « bien » conservé : o et $\frac{\pi}{2}$ sont les deux classes module π qui n'ont pas de signe.

II. — Pour que l'inversion soit *définie,* pour unifier les énoncés, pour éclairer les résultats, tout le monde désire le point à l'infini ; mais personne n'en veut, car sa notion n'arrive qu'après coup et se borne à un « tour de langage ».

Pourtant, sa définition précise — en géométrie plane — n'est pas plus difficile à comprendre que celle de la « vraie valeur » d'une fonction, et peut se donner dès qu'on a étudié les inverses des cercles et des sphères, et dès qu'on sait que la transmuée d'une inversion par une inversion est une inversion.

Je demande si l'on peut procéder ainsi :

1) Point a l'infini d'un plan.

a) Un plan P et une sphère Σ étant inverses (pôle d'inversion S), il y a correspondance univoque entre leurs points *sauf pour* S.

b) Quand M tend vers S, *m* s'éloigne au-delà de toute limite dans P.

Ces deux faits justifient la définition suivante :

Définition : On dit que le point S a pour inverse le point à l'infini du plan P (le plan ainsi « construit » par correspondance avec la sphère est l'image de celle-ci, il en a la structure).

2) Inversion sur une sphère Σ.

Etant donné O non sur Σ, les sécantes OMM' définissent l'inversion de pôle O sur la sphère. Cette inversion est *toujours définie.*

3) Transmuée sur le plan d'une inversion O sur la sphère.

La transmuée de l'inversion O par l'inversion S est une inversion plane dont le pôle ω est la trace de SO sur P.

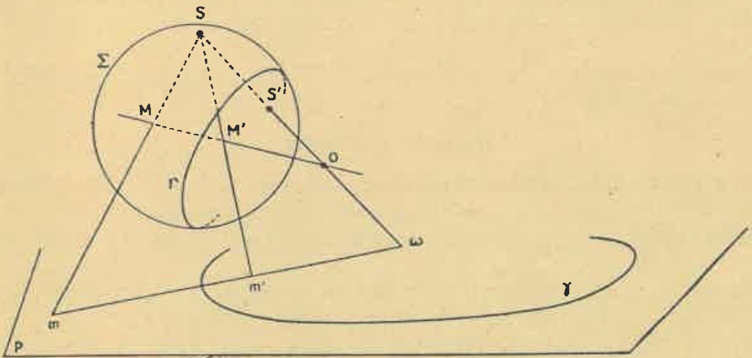
a) *Si* ω *est un point à distance finie :* quand M tend vers S, M' tend vers S' (inverse de S sur Σ), *m'* tend vers ω et *m* tend vers le point à l'infini dans P ; d'où :

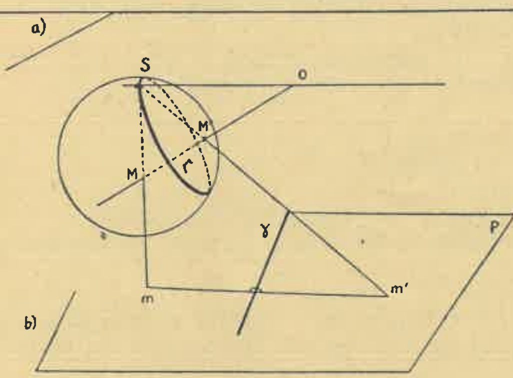
L'inverse du pôle d'inversion ω dans P est le point à l'infini de P.

b) *Si* ω *est le point à l'infini de* P (SO parallèle à P) : l'inversion obtenue dans P est une symétrie.

4) Points doubles.

Si O est extérieur à Σ, il y a sur Σ un cercle de points doubles (points de contact du cône circonscrit) ; les transmuées sont les points d'un cercle γ (cas *a*) ou d'une droite (cas *b*), et sont les points doubles de l'inversion dans P [en *a*) on retrouve ici la construction du centre de l'inverse d'un cercle].





J. Siros (*Lycée Lakanal*).