

## DES EXERCICES UN PEU INSOLITES

L'idée de cette note m'est venue en lisant le numéro des *Cahiers Pédagogiques* et particulièrement les articles consacrés aux classes non scientifiques. J'ai été frappé par la phrase de notre collègue GLAESER : « Notre enseignement doit être analogue à ce qu'est la fréquentation des concerts pour un auditeur qui a définitivement renoncé à devenir musicien exécutant. »

Je me suis dit qu'un élève braqué par le solfège-trinôme pourrait être séduit par un concert où on lui présenterait, mettons... un Bartok pas trop trop difficile. Et que peut-être on pourrait aller jusqu'à éveiller ces « vocations tardives » dont parle, je crois, Mlle FÉLIX.

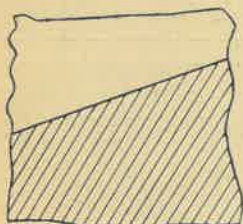
J'ai donc essayé de composer un petit programme de concert, à la fois homogène et varié. C'est évidemment au professeur qu'il conviendra de le réaliser sous la forme d'un concerto où le tutti ne restera pas trop silencieux...

\*  
\*\*

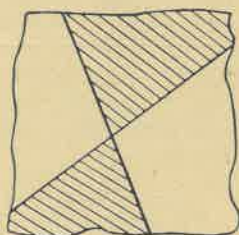
Les exercices suivants ne sont pas destinés à une classe déterminée, mais pourront servir de prétexte à des développements différents selon la nature et le niveau de l'auditoire. Je pense qu'on peut s'en servir dans les trois classes terminales, en liaison avec le cours de philosophie. Ils contribueraient alors à dépouiller notre collègue philosophe d'un monopole (que nous lui abandonnons généralement), celui de révéler l'existence de Mathématiques vivantes, non « scolaires » — le professeur de Mathématiques, lui, débitant du trinôme.

**Premier exercice.** — On trace dans le plan des droites en nombre quelconque. Démontrer la proposition suivante : pour colorier la figure de telle sorte que deux régions ayant une frontière commune (*ligne*, et non *point isolé*) reçoivent des couleurs différentes, il suffit d'utiliser *deux* couleurs.

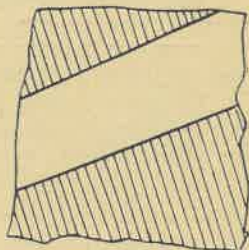
Démonstration : la proposition est manifestement exacte pour une ou deux droites (fig. 1, 2 et 3).



(fig. 1)



(fig. 2)



(fig. 3)

Supposons qu'elle soit vraie pour 3, 4, ...,  $n - 1$  droites.

Nous traçons une  $n^{\text{me}}$  droite (en tirets sur la fig. 4). Elle partage le plan en deux demi-plans I et II. Il suffit d'inverser les couleurs dans I (prendre le négatif si c'est en noir et blanc !) et de les garder dans II : la proposition est démontrée (fig. 5).

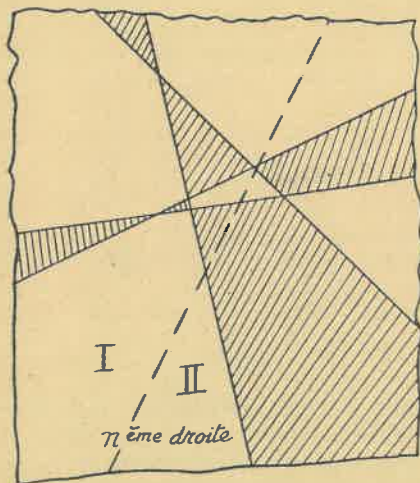
*Commentaires et prolongements.* — a. Démonstration par récurrence, principe d'induction complète. Extension à une figure contenant une infinité de droites ? Quelle infinité ? Dénombrable ou non ? La récurrence transfinie — avec prudence.

b. Autre démonstration. Elle résulte du fait que l'inéquation

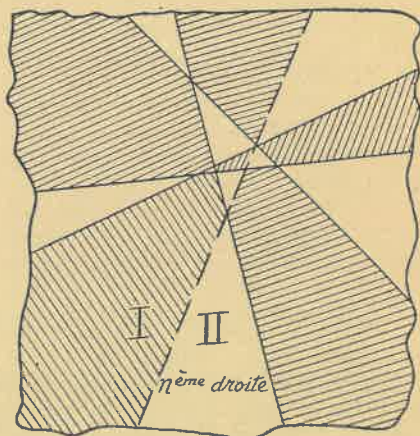
$$P_1 P_2 \dots P_n > 0 \quad \text{où} \quad P_i \equiv a_i x + b_i y + c_i$$

admet toujours des solutions. La traduction de la géométrie en algèbre et inversement (thème et version) est une nouvelle science : la géométrie analytique. La tra-

duction des propriétés métriques comparée à celle des propriétés affines. Et, ici, que traduisons-nous au juste ?



(fig. 4)



(fig. 5)

c. Dénombrer les régions dans le cas général (droites ni concourantes, ni parallèles quand on en prend trois quelconques) ; autre aspect du raisonnement par récurrence. Puis distinguer entre l'inéquation  $P_1 P_2 \dots P_n > 0$  et le système

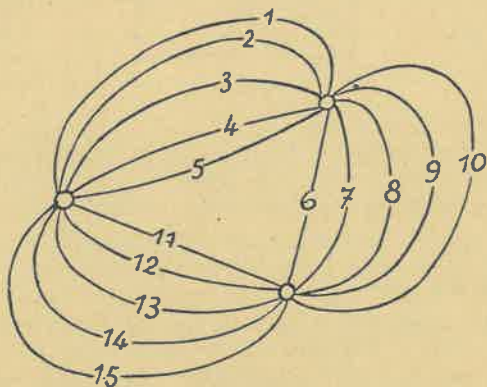
$$P_1 > 0 \quad P_2 > 0 \quad \dots \quad P_n > 0$$

qui n'a plus nécessairement de solution pour  $n \geq 3$ .

d. On a dessiné les  $n$  droites, non sur une feuille de papier, mais sur une feuille de caoutchouc qu'on tiraille, de-ci, de-là (sans la déchirer !) Peut-on sauver une partie du théorème ? Retour à la fin du b.

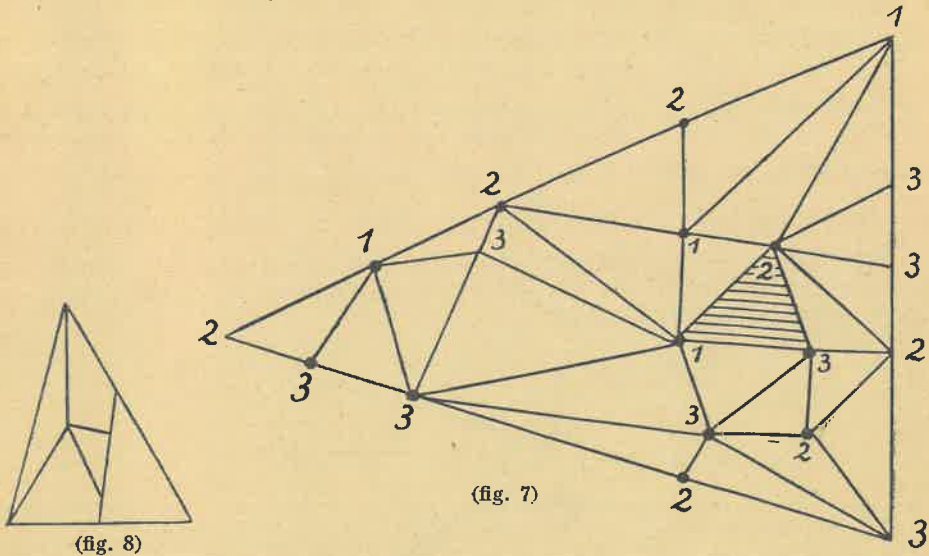
**Deuxième exercice.** — Dans un plan on trace un réseau de lignes, qui se croisent ou se rencontrent en un certain nombre de nœuds. Par chaque nœud il passe moins de dix lignes. On veut que deux lignes qui ont un nœud commun soient toujours de couleurs différentes. Démontrer que 15 couleurs suffisent, et 14 non.

Indications sur la démonstration : la figure 6 montre que 14 couleurs ne suffisent pas. Démontrer alors que 15 suffisent pour deux et trois nœuds et étendre ce résultat par récurrence sur le nombre de nœuds.



(fig. 6)

**Troisième exercice.** — Un triangle est triangulé en triangles partiels qui ont, ou bien zéro point commun, ou bien un seul sommet commun, ou bien tout un côté commun (fig. 7). La disposition de la figure 8 est donc exclue.



On affecte les sommets du triangle initial des numéros 1, 2 et 3 respectivement. On affecte les points de triangulation situés sur le côté 1, 2 des numéros 1 ou 2, sans autre loi. Analogie pour les points sur les autres côtés. Quant aux points intérieurs on les affecte des numéros 1, 2 ou 3 d'une façon parfaitement arbitraire.

Démontrer qu'il y aura toujours *au moins* un triangle (autre que le triangle initial) du type 1, 2, 3.

Démonstration : On démontre que les triangles du type (1, 2, 3) sont en nombre *impair*.

Soit X le nombre des triangles (1, 2, 3), Y celui des triangles (1, 1, 2) ou (1, 2, 2).

Soit U le nombre des segments (1, 2) intérieurs, et V le nombre des segments (1, 2) du contour, autre que le côté (1, 2) du triangle initial. On établit facilement que V est impair et, en étudiant le nombre des segments (1, 2) que

$$X + 2Y = 2U + V.$$

ce qui démontre la proposition.

*Commentaires et prolongements.* — a) On peut démontrer dans un esprit analogue que si chaque point de triangulation est commun à un nombre *pair* de triangles, il est possible de donner à tous les triangles la distribution 1, 2, 3.

b) On *présume*, mais la proposition n'a pas été démontrée, qu'en employant les numéros 1, 2, 3 et 4, il est toujours possible de donner des distributions évitant toute répétition de numéro.

c) Ce problème est en relation avec le célèbre problème dit des *quatre couleurs* dont les professeurs de philosophie parlent volontiers à leurs élèves. (Renseignements élémentaires dans le livre de MM. FRÉCHET et KY FAN : *Introduction à la topologie combinatoire*, Vuibert, éditeur). Les exercices précédents ont, à mon avis, le mérite de présenter des questions qu'on *peut* résoudre, avant de constater notre échec (provisoire !) relatif au nombre chromatique du plan.

d) Digression sur les rudiments de la topologie combinatoire : polyèdres et formule d'Euler ; ruban de Möbius et bouteille de Klein...

A. LENTIN (*Lycée Jacques-Decour*).