III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

RÉFLEXIONS SUR L'INTERPRÉTATION D'UN PROGRAMME *

Nous pouvons admettre que l'étude des Mathématiques commence en classe de Sixième. Considérons alors leur développement jusqu'au seuil de l'Enseignement Supérieur : ce développement est très étendu, très riche et approfondi. On se dit alors que l'enseignement des Mathématiques doit être une entreprise bien difficile et l'on reconnaît que, pour y réussir, il faut, avant tout, organiser un échelonnement correct dans l'acquisition d'un si grand nombre de connaissances. Ceci est, pour l'ensemble, le souci des auteurs de programmes et c'est, localement, le souci de chaque professeur dans sa classe.

Lorsque j'étais un jeune élève, je croyais que les Mathématiques se distinguaient des autres disciplines par leur fixité, leur rigidité. Je croyais que le professeur était chargé de nous transmettre des modèles parfaits et définitifs selon un rite très bien réglé, immuable, déterminé uniquement par la nature des problèmes à étudier et par les exigences propres à ces derniers. J'étais naïf.

J'ignorais qu'il y a cent façons de présenter une question ; j'ignorais que lorsque mon professeur entreprenait l'étude d'un chapitre, il allait, devant nous, faire une véritable *création*. Je prends ce mot dans le sens qu'on lui accorde au théâtre : la question avait sans doute déjà été traitée par lui et par d'autres, mais ce jour-là il allait — pour nous — lui donner une vie qu'elle n'avait jamais eue — une vie quelquefois précaire, à cause de nous — mais une vie quelquefois toute nouvelle et très riche, si nous le lui permettions.

J'ignorais qu'il devait m'arriver, trente ans plus tard, de penser à ces mêmes questions, pour apercevoir qu'un même sujet peut se situer dans l'échelle de l'enseignement, soit, tout en bas, soit tout en haut, selon l'*engagement* du départ, j'entends : la façon dont on engage la question, selon le but qu'on se propose, et selon même, simplement, les nuances, les allusions et les sous-entendus de l'exposé — je n'exagère pas beaucoup — nous pourrions dire : selon la tonalité de l'exposé de la question.

Faisons d'abord quelques observations générales qui vont fixer un plan pour notre étude : les paliers successifs de notre enseignement des Mathématiques sont marqués par :

— *le choix des matières* qu'on enseigne à chaque palier ;
— *le choix d'une interprétation* et d'un dosage des chapitres retenus.

Dans ce double choix on sera tenu de satisfaire respectivement à deux exigences qui seront quelquefois contradictoires :

— le respect de la question à étudier ;
— l'adaptation à l'auditoire.

Dans ce double choix nous serons guidés d'après trois points de vue, relativement à un sujet proposé :

1) l'état de la question dans les classes antérieures ;
2) l'état de la question dans la classe supérieure ;
3) les possibilités de l'auditoire.

De nombreux exemples vont préciser ce que nous voulons dire par tout cela, mais arrêtons-nous d'abord un instant sur ce que nous appelons le respect de la question.

(*) Conférence prononcée au Centre Pédagogique Régional de Paris, le 20 février 1956.

Respect de la question et adaptation à l'auditoire : deux exigences qui se contredisent. Le respect de la question a parfois une priorité inévitable, quand il s'agit par exemple d'enseigner des choses qui seront *définitives*, ou quand il s'agit d'un sujet *qui ne supporte pas*, justement, d'adaptation, sous forme de diminutif. On ne compose ni avec le théorème de Gauss en arithmétique, ni avec la définition du vecteur vitesse, par exemple. Tout essai de simplification qu'on puisse imaginer sur de tels sujets entraîne pour ces derniers un amenuisement fatal. Pensons plutôt alors qu'il faut préparer les élèves, par quelques détours, à recevoir correctement ces questions.

Nous reviendrons tout à l'heure sur ces sujets difficiles et en quelque sorte réservés.

Voyons d'abord des exemples, avec commentaires, de questions sujettes à des variations de niveau franches et nombreuses. En professeurs consciencieux nous cherchons à nous éclairer par les programmes officiels et nous allons être surpris de constater que malgré leur laconisme et leur allure un peu « table des matières » ils nous incitent à beaucoup de réflexion.

Exemples.

Quelques exemples très simples :

1) *L'arc capable* figure en Troisième (points d'où l'on voit...) et figure également en Seconde, sous la même forme ; mais à propos des angles et des angles inscrits, on a parlé du sens d'un angle orienté et on applique l'arc capable à un « mode de génération du cercle ». Ceci met en usage les angles orientés de droites : difficulté, comme on va le voir. En Mathématiques Elémentaires, la forme définitive est explicitée. Cela entraîne deux choses à ce niveau :

1. les angles, placés dans un plan orienté, sont mesurés par des classes mod. 2π ou mod. π, qui ne sont plus des nombres algébriques. La théorie a dû, ou doit en être faite ;

2. les raisonnements ne se font plus sur une figure *vue* — la géométrie des figures devient la géométrie des propriétés ; la figure n'est qu'un répertoire des notations. C'est la géométrie sans figure, seule valable ; on atteint le *cas général* très difficile à définir (qu'est-ce qu'un triangle *quelconque ?*).

Mais alors, puisque l'usage des angles de droites est un des premiers cas où ce nouvel état d'esprit se présente en classe de Mathématiques Elémentaires, que dire de cet usage dans une classe de Seconde ? Est-il bon, ou même seulement possible, de le préconiser ?

2) *Définition des rapports trigonométriques :* en Troisième, l'angle est aigu ; les définitions sont associées strictement au triangle rectangle. En Seconde, l'angle varie de zéro à deux droits. En Première et en Mathématiques Elémentaires : fonctions circulaires d'angles et arcs généralisés. Cet échelonnement est parfait : les angles s'ouvrent d'année en année. Notons bien que la définition des arcs généralisés en Première ne présente aucune des difficultés relatives à la définition de la classe associée à la figure de géométrie $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. Dans la fonction $y = \cos x$, x et y sont toujours des nombres algébriques [pour les classes $y = \operatorname{tg}(x)$, (x) classe mod. π, définie et douée d'une fonction inverse, il n'est pas question de courbe représentative].

3) Voici un exemple beaucoup plus riche : *la résolution des équations.*

a) En Cinquième, on fait des problèmes concrets où le nombre inconnu est représenté par une lettre ; celle-ci est l'initiale de l'objet qu'elle représente, par exemple, et elle garde sa signification concrète pendant toute la solution. Quand on a trouvé le nombre, on vérifie ; ce n'est pas de l'algèbre, c'est une certaine façon de raisonner en arithmétique qui va être systématisée — mais prudemment — afin d'éviter le mécanisme précoce. Ainsi, nous pensons aux partages proportionnels où « la valeur d'une part » peut être, pour abréger, représentée par p ; nous pensons aux problèmes dits de fausse supposition, aux problèmes d'intérêt, etc...

b) En Quatrième : équations et problèmes (équations numériques : 1^{er} degré, une inconnue). Si l'équation à résoudre constitue — elle toute seule — un problème, c'est déjà de l'algèbre.

c) En Quatrième, enseignement court, on voit : propriétés des sommes et des différences en vue de la transformation de l'équation.

d) En Troisième, enseignement court : deux inconnues, exemples d'indétermination et d'impossibilité ; pas de paramètre encore (et c'est heureux : j'ai vu des élèves, bien mécanisés sans doute, qui discutaient $2x = 3$: 1° si $2 = 0$, etc...).

e) En Seconde C et M, les discussions apparaissent ; ce n'est plus de la « bricole » si l'on peut avoir droit aux *théorèmes d'équivalence*. Sinon, il faudra toujours vérifier, et c'est une position intenable, car tout le monde (élèves et professeur) sait que c'est *presque* toujours inutile.

f) En Mathématiques Elémentaires : indispensable ; voir l'équivalence de

$$\left|\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda A + \mu B = 0, \\ \lambda' A + \mu' B = 0, \end{array}\right.$$

et passer à trois (en remplaçant une seule équation, bien entendu), cela pour éviter, autant que possible, cette impression de « bricole ».

L'équivalence aide à faire saisir ce qui caractérise l'algèbre : *la multivalence des écritures*.

Exemple : équivalence des systèmes :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ xy = k. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = \pm c. \end{array}\right.$$

et équivalence avec les problèmes de géométrie qu'ils traduisent si x et y sont coordonnées d'un point si x et y sont distances à deux points fixes. Mais parler d'équivalence est — encore aujourd'hui — ce que j'appelle plus loin un « dépassement » du programme ; nous y reviendrons.

4) Un exemple d'une richesse comparable nous est donné en cherchant comment se forme la notion de *correspondance* en géométrie. Comment arrive-t-on à son étude correcte et à son acquisition définitive ? Nous voyons trois étapes :

a) en Cinquième et en Quatrième : utilisation facultative de la symétrie (on fait sans cesse des déplacements, mais on ne le dit pas) ; en Quatrième enseignement court, à propos des polygones réguliers : rotations de 90°, 45° facultatives ; en Troisième enseignement court : homothétie facultative.

b) En Seconde et en Première, apparition explicite de certaines *transformations :* symétries, translation, homothétie (pas de rotation). On applique la transformation à une figure, c'est un problème de lieu géométrique.

c) En Mathématiques Elémentaires, il faut marquer une avance considérable : la notion de transformation laisse la place à celle de *correspondance* qui rejoint celle de *fonction* — les deux se renforcent alors mutuellement — en rappeler parallèlement les définitions en insistant longuement sur l'importance du *référentiel* et la *définition* de la fonction. Insistons sur deux exemples.

Premier exemple : *Sur les symétries.*

La construction qui consiste, étant donné une droite D, à mener MH perpendiculaire à D, puis à prolonger MH de HM' = HM, ne définit une correspondance qu'à partir du moment où on précise le référentiel : plan ou espace — les deux correspondances qu'on obtient respectivement ont des noms et des propriétés différents : c'est la symétrie par rapport à D — c'est la transposition D. L'éternelle confusion serait levée si l'on consentait à faire correctement cette distinction.

Au sujet des symétries, notons trois anomalies :

En Seconde, plusieurs manuels se servent du produit de deux symétries pour démontrer que la translation est un déplacement (nous reviendrons un peu plus loin là-dessus).

En Première le programme *nous borne aux définitions :* par rapport à une droite, un point, un plan.

En Mathématiques Elémentaires, le programme nous parle de comparaisons entre figure et figure symétrique, ce qui semble une manière de nous interdire les produits de symétries.

Que peut-on penser de cette restriction, de ces nuances d'interprétation ?

DEUXIÈME EXEMPLE : *Sur l'homothétie.*

En Première, transformer un plan, une sphère... c'est un problème de lieu géométrique, étudié soigneusement comme tel.

Il n'en est plus de même en Mathématiques Elémentaires, c'est une correspondance vectorielle, $\overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$; ainsi, au plan défini comme ensemble de points M par $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$, correspond l'ensemble de points M' défini par

$$\overrightarrow{A'M'} = x\,\overrightarrow{A'B'} + y\,\overrightarrow{A'C'}.$$

Ainsi, à la sphère définie par $|\overrightarrow{AM}| = R$ correspond la sphère $|\overrightarrow{A'M'}| = |k|\,R$, etc...

On ne recommence pas ce qui a été fait en Première, c'est vu d'une façon toute nouvelle.

Dépaysements.

Nous allons maintenant parler de *certaines difficultés.* Tout d'abord : de *certains dangers* d'un changement de niveau, *les dépaysements.*

Considérons le premier enseignement comme celui d'une *langue maternelle* (l'enfant apprend les mathématiques comme le français). Il ne faut pas que, lors d'un deuxième enseignement, l'enfant soit placé comme devant une seconde langue, avec des façons de penser ou de s'exprimer trop différentes ou opposées. C'est du moins ce qui semble souhaitable.

Exemples de dépaysements : 1) les nombres irrationnels en Troisième. Les élèves de Troisième ont raison de manifester une répugnance envers les symboles tels que $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre, c'est l'indication d'un calcul à faire. Ceux de Première qui promènent sans hésiter des $\dfrac{3+\sqrt{17}}{3-\sqrt{5}}$ ont tort ;

2) l'usage des angles orientés (il faudra amener leur nécessité) ;

3) toute l'arithmétique en Mathématiques Elémentaires (arrêt pendant quatre ans, sondages stupéfiants) ;

4) la rigueur intransigeante qui semble une plaisanterie de mauvais goût, une brimade (c'est une extravagance de démontrer, en Seconde, que la translation est un déplacement, en la remplaçant par un produit de symétries).

(Notons pourtant que ce dépaysement est quelquefois recherché. Ainsi on analyse mieux, on explique mieux la théorie des opérations sur les entiers écrits dans un système de numération en prenant la base 7 plutôt que la base 10, pour rompre avec les mécanismes trop usuels).

Comment pouvons-nous *prévenir ces dangers ?* Nous l'avons dit plus haut : dans l'exposé d'une question, penser à ce que les élèves en connaissent déjà, s'en informer et penser aux développements de la question dans les classes supérieures. Il ne faut pas fermer la question, il faut lui garder de nouvelles ouvertures possibles (pas de modèles immuables) ; en particulier quand on donne une définition, il faut réserver dans ce moule une large place pour l'avenir.

En somme, il faut soigner les *raccordements* avec ce qui précède et ce qui suivra.

Exemple : On étudie en Mathématiques Elémentaires la limite de

$$1 + q + \dots + q^n.$$

Cette question est une nouveauté ; elle se traite avec toute la rigueur possible, elle prépare pour la classe suivante tout un monde très vaste. A soigner. Faire sentir par des exemples ($q = 2$; $q = 0{,}1$; $q = 1{,}01$; $q = 0{,}9$) que le résultat peut sembler très évident, ou peu... ou même très douteux, puis démontrer (on a senti l'urgence d'une démonstration), puis dépasser, par des exemples *traitables* $\left(u_n = \dfrac{1}{n(n+1)},\right)$ ce qui n'était qu'un cas particulier, sans atteindre le théorème général, bien entendu, qu'on se garderait bien d'énoncer, de peur de le faire prendre pour évident ! Plutôt donnerait-on le contre-exemple de $\Sigma \cos nx$ borné, mais sans limite, traitable par la somme géométrique, extrême limite tolérable dans un dépassement du programme. Ceci nous amène à une deuxième difficulté dans le problème du niveau assigné à une question : les *dépassements*.

Dépassements.

C'est extrêmement délicat.

Les dépassements possibles sont certainement un souci pour les auteurs de programmes qui manifestent de grandes craintes et une grande prudence à leur sujet. Ils nous dressent, de-ci, de-là, des balises, des poteaux de sens interdit, ils nous font disparaître, comme sournoisement de temps en temps, un terme, un demi-alinéa, qui semble oublié dans une réédition...

(C'est ainsi qu'on nous a supprimé la dérivée d'une fonction de fonction). En général, cette prudence est de bon aloi car c'est un garde-fou à l'examen pour l'examinateur. Exemples :

En Première C : dérivée pour une valeur numérique... ; l'étude du sens de variation par y' n'est pas au programme ; problèmes simples...

En Mathématiques Elémentaires et Sciences Expérimentales : préambules à l'algèbre, à l'arithmétique.

Il faut comprendre cette prudence avec discernement.

Je demandais une fois à l'Inspecteur Général : « Pourquoi nous refuse-t-on en Mathématiques Elémentaires l'étude complète des déplacements dans l'espace ? » Sa réponse mérite réflexion : « C'est, dit-il, parce que trop rares seraient les professeurs qui auraient le souci de démontrer l'unicité du déplacement hélicoïdal équivalent à tout déplacement donné. » Voyez à quel point se trouve poussé le désir de la qualité dans notre enseignement !

Mais cette prudence est quelquefois inacceptable : nous calculerons la dérivée d'une fonction de fonction *en soulignant la difficulté ;* nous calculerons la vitesse $v = 2at + b$ pour pouvoir définir l'accélération constante $2a$, et, pour les vecteurs, en Seconde, ce qui est indiqué est si insuffisant que nous nous octroierons un dépassement très accusé. Nous allons d'ailleurs en parler plus loin, car cette question nous amène à une autre difficulté, relative à l'accrochage, la première rencontre, le *niveau d'accès* à une question.

Accrochages.

Comment faisons-nous acquérir la notion de vecteur dans notre enseignement ? Nous y arrivons difficilement. (Il faut reconnaître qu'il n'y a pas très longtemps qu'elle est définitivement acquise par les professeurs eux-mêmes). Longtemps les vecteurs ont été considérés comme un moyen commode pour formuler certains résultats et non comme un outil de recherche, d'exposé et de découverte. Quelle est la progression ?

En Quatrième et Seconde AB, mesure algébrique de vecteurs *sur une droite orientée ;*

En Seconde CM, même indication, mais avec la relation de Chasles. A la même époque, en physique, la notion est liée à l'image d'un ressort tendu. Dans tout cela, il n'y a rien de vectoriel — ou pas assez — la notion est beaucoup trop celle d'une grandeur : l'élève veut instinctivement une mesure, il y met *le nombre algébrique,* ce qu'on lui a appris, ou l'intensité de la force représentée par le vecteur, *et il n'y voit plus que cela.*

L'accrochage de la notion de vecteur est mal fait, il faudra des années pour corriger *l'erreur dans la notion.*

Alors, pour éviter cela, nous saisirons dans le programme de géométrie de Seconde CM les mots : parallélogramme, vecteurs équipollents, translation ; nous définirons correctement la famille des vecteurs libres (*classes d'équivalences*) avec une *opération :* l'addition vectorielle que nous étudierons très correctement, pour faire ce que nous appelons un groupe abélien. C'est un dépassement que nous nous octroyons. Bien entendu beaucoup d'exemples viennent à l'appui dans le programme.

Et le point de vue de la physique ne sera pas à dédaigner, au contraire, en rappelant ce qu'il y a de vectoriel. Les ressorts donnent des forces représentées par des vecteurs liés, et, avec les ficelles, cela fait des vecteurs glissants. La somme vectorielle, particulière ici, s'appelle résultante.

Il reste bon de rattacher une définition abstraite à un support concret, mais à condition que ce dernier ne fausse pas, par avance, la notion correcte.

Autres exemples d'accrochages.

L'accrochage se fait presque toujours par un passage du concret à l'abstrait ; on cultive longtemps la notion de fonction, la définition ne vient qu'après quelques années ; de même, nous l'avons vu, la définition d'une correspondance, et, ce qu'il y a de remarquable, c'est que *la définition est commune.* Cette remarque est à soigner, tout particulièrement en Mathématiques Elémentaires. L'accrochage a été correct.

La cinématique du solide en Mathématiques Elémentaires est d'un accrochage difficile. Ainsi, l'image concrète du mouvement de translation est mal obtenue par le tiroir ou par la « grande roue ». Elle l'est parfaitement, par le téléférique (équipollences conservées, mouvement déterminé par le mouvement d'un point).

Le calcul algébrique : cela dure longtemps ! Y arrive-t-on ? Un fait : les niveaux successifs ne sont pas marqués ; c'est toujours de la « bricole » ; il faut pourtant bien arriver à ceci, « qu'un calcul se mène à la cravache ». Dans l'enseignement élémentaire, sous prétexte de faire acquérir des mécanismes, on bachote les enfants, on leur fait sans cesse développer des calculs, l'habitude se prend, s'enracine. « On développe ». Voir les sujets absurdes donnés au B.E.P.C. (Dix exemples où on demande *d'abord* de développer, *puis* de résoudre, alors que la décomposition *était évidente*). La difficulté vient de ce que les calculs qu'on demande sont sans raison d'être ; on ne sait, ni d'où ils sortent, ni où ils doivent conduire. Au lieu que ce soit l'élève qui mène le calcul, c'est l'inverse. Sur $y = \frac{1}{x}$, les monstruosités que l'on connaît, viennent d'un mauvais accrochage des opérations sur les fractions.

Simplifications.

Enfin, une mise en garde au sujet de certains procédés qu'on peut être amené à utiliser dans une adaptation : *simplifier* une question. *Simplifier, c'est fausser.*

Exemple : $x = \frac{1}{2} g t^2$ obtenu par $x = t . v_m$. $v_m = \frac{0 + gt}{2}$ (relevé dans un manuel de physique). Il ne faut pas esquiver une difficulté.

S'il faut se garder de certaines simplifications, il faut se garder tout autant de certaines *complications,* faute de moyens suffisants, pour traiter dans une classe, une question qu'on étudierait avec toutes les facilités dans la classe supérieure.

Exemples : 1) la droite de Simson en Seconde ;

2) beaucoup de démonstrations obtenues à grand renfort de triangles égaux ; elles s'obtiendraient d'un seul trait en utilisant un déplacement ;

3) le sens de variation étudié par $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour la fonction homographique. Il conduit au même calcul que la dérivée, ce qu'on ne peut faire en Première. Mieux vaut commencer par $y = \frac{1}{x}$, puis forme canonique, et utiliser les théorèmes généraux.

Le changement de niveau consiste souvent en un *recommencement à zéro :* en Sixième, en Seconde, en Mathématiques Elémentaires (pas en Mathématiques Spéciales). Pour l'élève, un recommencement intégral est très déplaisant (c'est connu : « je n'écoute pas »). A éviter.

Ce recommencement est quelquefois *simulé,* on le sent très bien, et il faut le faire sentir (voir P. VALÉRY : « Essayer de définir un nombre... », *Tel quel,* t. II). S'il est réel, il faut l'accompagner d'un grand changement dans les idées. Exemples :

— dans le choix d'une démonstration : recherche de la causalité ;

— la petite propriété curieuse s'intègre à un ensemble plus vaste ;

— la fonction linéaire peut être reprise en Mathématiques Elémentaires par la voie vectorielle ;

— le faisceau harmonique, vu en Seconde, est repris en Mathématiques Elémentaires comme application de la conservation du birapport dans une perspective, etc...

Respect de la question.

Pour terminer, disons quelques mots de ce que nous avons signalé tout à l'heure sous le titre : *respect de la question.* Il est des questions qui ne supportent pas différents niveaux d'exposition, avec lesquelles on ne compose pas, et dont l'acquisition doit se faire d'emblée, sous la forme définitive.

Exemples : *a*) la théorie des fractions en Mathématiques Elémentaires et toute l'arithmétique ;

b) la définition des angles et de « classes » qui les mesurent en Mathématiques Elémentaires ;

c) toutes les questions de limites. Insistons un peu.

Dès la classe de Seconde, une phrase telle que « $y = \frac{1}{x}$ tend vers plus l'infini lorsque x positif tend vers zéro » devra être précisée avec toute sa rigueur ; des exemples numériques ne suffiront pas (car « grand » n'est pas synonyme de « tend vers l'infini »). Il faut, dès ce moment, la mise en forme définitive, en insistant sur sa nécessité. De même, en Première, l'étude d'une limite comme celle de $\frac{2h + h^2}{h}$ quand $h \to 0$ demande toutes les exigences qu'on sait : pour simplifier la fraction, il faut $h \neq 0$; alors $h \to 0$ implique $h \neq 0$ et $2 + h \to 2$, ce qui est évident peut-être, mais pas parce qu'on fait $h = 0$!

d) Signalons qu'il ne faut pas associer les deux faits « y croît » et « $y \to +\infty$ » même pour une fonction où les deux sont vrais, car, trop longtemps, les élèves croiront à tort, que ces deux faits sont liés (exemple : $y = \frac{x}{2} + \sin x$).

e) A propos des asymptotes, éviter les expressions comme : « se rapproche indéfiniment... sans jamais l'atteindre », qui sont des tours de langage visant à faire évoquer l'objet intuitivement, mais par le sacrifice de la vérité.

Il n'y a pas de démonstration approximative. Une démonstration peu rigoureuse est fausse.

f) Un autre exemple encore, qui est important : la définition du vecteur vitesse ; il est bon d'avoir vu précédemment la dérivée vectorielle (par rapport à l'arc : séparer les difficultés).

Dans ce qui précède, le respect de la question entraîne des obligations ; il peut entraîner des *interdictions :*

1) On pourrait croire qu'il faut interdire la définition de l'équivalence des équations, même en Mathématiques Elémentaires, car on pense à $x^3 - 1 = 0$ et $x - 1 = 0$ qui seront déclarées équivalentes en Mathématiques Elémentaires et ne le seront plus en Mathématiques Spéciales, mais donnons-la cependant, cette définition, car elle est hautement profitable, et il n'y aura aucune contradiction possible si nous précisons chaque fois *le référentiel.* De tels scrupules vous interdiraient-ils d'étudier, avant les Spéciales, l'intersection de deux cercles, faute de pouvoir dire que deux cercles se coupent toujours en quatre points !

2) Parlera-t-on des points à l'infini ? Avant Mathématiques Elémentaires, sûrement pas ; on évitera même le mot, trop chargé d'un sens confus. Si on en parle en algèbre, on le réduira à son sens le plus strict, qui se réduit lui-même à une inégalité (hypothèse ou inégalité à résoudre). Si en Mathématiques Elémentaires on veut parler des points à l'infini, il faut les *définir*, on le peut, mais seulement en géométrie plane ; absolument pas, en géométrie dans l'espace.

C'est dans cet esprit qu'on nous a dit : il ne faut pas « déflorer » certaines questions, sous prétexte d'ouvrir des horizons. Il est bien entendu que nous ne devons pas jouer au professeur de la classe supérieure, ni faire, dans notre classe, des leçons pour jury d'agrégation.

Exemple : les éléments de géométrie analytique introduits par la fonction linéaire et les discussions graphiques ne sont pas de la géométrie analytique (mais, par contre, l'analyse de Mathématiques Elémentaires, c'est de l'analyse).

Il ne faut pas « déflorer », c'est entendu, mais il ne faut pas non plus *étouffer ;* il faut s'abstenir, en principe, des dépassements trop accentués, mais il ne faut pas non plus, masquer l'identité ou la connexion avec une question qui sera développée dans la classe supérieure. Exemple : ce qu'on a dit à propos de a^n en Mathématiques Elémentaires. Il est édifiant d'interroger les élèves de Mathématiques Spéciales sur les premiers éléments de la théorie des suites et des séries : ils ne savent pas qu'ils savaient tout ce qui concerne les suites et séries géométriques ! Il faut rechercher, au contraire, les connexions.

Il faudrait signaler encore quelques exemples de questions où l'on se trouve dans une situation difficile : les élèves abordent un sujet dont ils ne connaissent rien et où ils devront apprendre tout. Là un échelonnement accéléré s'impose. Exemple : l'étude de l'inversion en Mathématiques Elémentaires. La notion, l'étude correcte et la portée philosophique se suivent en quelques semaines ou en quelques heures. Ainsi, en arithmétique (les restes et les congruences) et dans l'inversion il faudra bien arriver à la définition du point à l'infini, dans lesquelles l'inversion ne peut absolument pas être assimilée.

En conclusion, je voudrais dire que ce que je viens de vous exposer est sujet à de nombreuses discussions, que nous sommes très loin d'être tous d'accord sur ces questions. Ainsi M. GOUYON écrit, p. 156, *Cahiers Pédagogiques :* « Je bous littéralement... » (critique de la méthode axiomatique). Mais, en ce qui me concerne, j'ai toujours bouilli en voyant que la théorie des fractions et celle des opérations sur les nombres relatifs risquent de rester à l'état de petites combines qui réussissent.

Il faut adopter une attitude de sagesse et nous ne pouvons mieux terminer qu'en lisant une page de la préface de l' « Introduction à la théorie des fonctions d'une variable », de J. TANNERY :

« *Quoique les vérités mathématiques se déduisent, dans un ordre rigoureux, d'un petit nombre de principes réputés évidents, on ne parvient pas à les posséder pleinement en commençant par ces principes, en en suivant pas à pas les déductions, en allant toujours dans le même sens du connu à l'inconnu, sans jamais revenir en arrière sur un chemin où l'on n'a rien laissé d'obscur. Le sens et la portée des principes échappent au débutant, qui saisit mal la distinction entre ce qu'on lui demande d'accorder et les conséquences purement logiques des hypothèses ou des axiomes ; parfois, la démonstration lui paraît plus obscure que l'énoncé ; c'est en vain qu'il s'attarderait dans la région des principes pour la mieux connaître, il faut que son esprit acquière des habitudes qu'il n'a pas, qu'il aille en avant, sans trop savoir où il va, ni d'où il part ; il prendra confiance dans ce mode de raisonnement auquel il lui faut plier son intelligence, il s'habituera aux symboles et à leurs combinaisons. Revenant ensuite sur ses pas, il sera capable de voir, du point de départ et d'un seul coup d'œil, le chemin parcouru ; quelques parties de la route resteront pour lui dans l'ombre, quelques-unes même seront peut-être entièrement obscures ; mais d'autres sont vivement éclairées ; il sait nettement comment on peut aller de cette vérité à cette autre ; il sait où il doit porter son attention ; ses yeux mieux exercés arrivent à voir clair dans ces passages difficiles dont il n'aurait jamais pu se rendre maître s'il ne les avait franchis. Il est maintenant capable d'aller plus loin ou de suivre une autre direction ; il entre en possession de vérités nouvelles qui s'ajoutent aux vérités anciennes et qui les éclairent ; il s'étonne parfois des perspectives inattendues qui s'ouvrent devant lui et lui laissent voir, sous un aspect nouveau, des régions qu'il croyait connaître entièrement ; peu à peu les ombres disparaissent et la beauté de la science, si une dans sa riche diversité, lui apparaît avec tout son éclat.*

Ce qui se passe dans l'esprit de celui qui étudie les Mathématiques, n'est que l'image de ce qui s'est passé dans la création et l'organisation de la science ; dans ce long travail, la rigueur déductive n'a pas été seule à jouer un rôle. On peut raisonner fort bien et fort longtemps sans avancer d'un pas, et la rigueur n'empêche pas un raisonnement d'être inutile. Même en Mathématiques, c'est souvent par des chemins peu sûrs que l'on va à la découverte. Avant de faire la grande route qui y mène, il faut connaître la contrée où l'on veut aller ; c'est cette connaissance même qui permet de trouver les voies les plus directes ; c'est l'expérience seule qui indique les points où il faut porter l'effort ; ce sont les difficultés, parfois imprévues, qui se dressent devant les géomètres qui les forcent à revenir à leur point de départ, à chercher une route nouvelle qui permette de tourner l'obstacle... »

J. SIROS (*Lycée Lakanal*).