

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS

ÉTUDE sur une ALGÈBRE ABSTRAITE BOOLEIENNE

I. On considère dans ce qui suit un ensemble E dont les éléments sont désignés par a, b, c, \dots . On suppose définie sur cet ensemble une relation d'égalité notée $=$ réflexive, symétrique et transitive. Deux lois de composition interne sont définies sur cet ensemble. Une loi notée $(+)$ que nous appellerons « addition » et une loi notée (\times) ou \cdot ou par un blanc que nous appellerons « multiplication ».

II. AXIOMES.

1° il existe un élément noté o tel que :

$$(1) \quad a + o = a \text{ quel que soit } a \in E ;$$

2° il existe un élément noté 1 tel que :

$$(2) \quad a \times 1 = a \text{ quel que soit } a \in E ;$$

3° les deux lois de composition interne sont commutatives :

$$(3) \quad a + b = b + a,$$

$$(4) \quad ab = ba ;$$

4° on a les deux lois de distributivité suivantes :

$$(5) \quad a + bc = (a + b)(a + c),$$

$$(6) \quad a(b + c) = ab + ac.$$

5° Si les éléments notés o et 1 sont uniques, à tout a correspond un élément noté \bar{a} tel que l'on ait simultanément :

$$(7) \quad a + \bar{a} = 1,$$

$$(8) \quad a\bar{a} = o \quad a \text{ sera dit le complément de } \bar{a}.$$

Remarquons que contrairement à ce qui se passe dans l'algèbre ordinaire, les deux opérations notées $(+)$ et (\times) jouent le même rôle l'une par rapport à l'autre [axiomes (5) et (6)] et que plus généralement à tout axiome où interviennent les symboles $\times, +, 1, o$ on peut associer un axiome dual obtenu en remplaçant les symboles précédents par $+, \times, o, 1$, respectivement.

A toute démonstration sera ainsi associée une démonstration duale qu'il sera inutile de faire explicitement.

La compatibilité de ces axiomes sera résolue plus loin en indiquant un modèle géométrique de cet édifice de relations logiques. On n'examinera pas le problème de l'indépendance des axiomes.

III. THÉORÈMES.

1° *Unicité des éléments neutres o et 1 .*

S'il existait un autre élément neutre pour l'addition, soit o' , on aurait :

$$o + o' = o \text{ par définition,}$$

$$o' + o = o' \text{ d'après (1) où on fait } a = o'.$$

or $o' + o = o + o'$ d'après (3).

donc $o = o'$ (transitivité de l'égalité)

(1) (Le segment SM' est en ponctué jusque M').

Une démonstration duale assure l'unicité de l'élément noté 1.

Conséquence : \bar{a} existe (II, 5°).

2° Lois d'idempotence.

$a + a = a$ (9) et par dualité $aa = a$ (10).

Montrons que $a + a = a$,

$$\begin{array}{l} (a + a) (a + \bar{a}) = a + a\bar{a}, \quad \text{axiome (5),} \\ \text{or } \left. \begin{array}{l} a + a = 1 \\ a\bar{a} = 0 \end{array} \right\} \text{axiomes (7) et (8),} \end{array}$$

il vient donc :

$$(a + a) \times 1 = a + 0,$$

et en appliquant (1) et (2)

$$a + a = a.$$

3° $a \times 0 = 0$ (11) et par dualité $a + 1 = 1$ (12),

démontrons (11) :

$$\bar{a} + 0 = \bar{a},$$

donc : $a(\bar{a} + 0) + a\bar{a}$, appliquons (6)

$$a\bar{a} + a0 = a\bar{a}, \quad \text{appliquons (7)}$$

$$0 + a0 = 0, \quad \text{appliquons (1)}$$

$$a0 = 0,$$

4° $a + ab = a$ (13) et $a(a + b) = a$ (14) (lois d'absorption),

démontrons (13) :

$$\begin{array}{l} a + ab = (a \times 1) + ab \quad \text{axiome (2).} \\ \quad = a(1 + b) \quad \text{axiome (6)} \\ \quad = a \times 1 \quad \text{axiome (3) et théorème (12)} \\ \quad = a \quad \text{axiome (2)} \end{array}$$

5° Unicité de \bar{a} .

Montrons que s'il existe a' tel que :

$$\left. \begin{array}{l} a + a' = 1 \\ aa' = 0 \end{array} \right\} \text{on a nécessairement } a' = \bar{a}$$

En effet :

$$a' + a\bar{a} = (a' + a) (a' + \bar{a}) \quad \text{d'après (5)}$$

$$= 1 \times (a' + \bar{a})$$

$$= a' + \bar{a},$$

or : $a' + a\bar{a} = a' + 0 = a'$,

donc : $a' + \bar{a} = a'$

en remplaçant a' et \bar{a} et \bar{a} par a' dans le calcul précédent on trouve :

$$\bar{a} + a' = \bar{a},$$

mais :

$$a' + \bar{a} = \bar{a} + a',$$

donc : $a' = \bar{a}.$

Conséquence : comme le complément est unique et que :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{a} + a = 1 \\ \bar{a} a = 0, \\ \bar{a} = \bar{a} \quad (15), \end{array} \right\} a \text{ est le complément de } \bar{a}$$

donc : la complémentation définit donc une correspondance biunivoque

$$\left(\begin{array}{l} a \rightarrow \bar{a} \\ \bar{a} \rightarrow a \end{array} \right) \text{ entre éléments de } E$$

6° $\bar{a}(ab) = 0$ (16) et $\bar{a} + (a + b) = 1$ (17) par dualité. Démontrons (16) :

$$a + ab = a \text{ (loi d'absorption), (13),}$$

$$\bar{a}(a + ab) = \bar{a}a = 0 \quad \text{développons le premier membre :}$$

$$\bar{a}a + \bar{a}(ab) = 0,$$

$$0 + \bar{a}(ab) = 0,$$

$$\bar{a}(ab) = 0,$$

7° $\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ (18) et $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$ (19). Démontrons (18) :

Il faut établir que le complément de $a + b$ est égal à $\bar{a} \cdot \bar{b}$, donc que :

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})(a + b) = 0,$$

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) + (a + b) = 1,$$

développons en appliquant (6) :

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})(a + b) = (\bar{a} \cdot \bar{b})a + (\bar{a} \cdot \bar{b})b$$

Or, d'après (16) les deux termes trouvés sont nuls ; de même :

$$\begin{aligned} (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (a + b) &= [(a + b) + \bar{a}] [(a + b) + \bar{b}] \text{ d'après (3) et (5),} \\ &= 1 \times 1 \quad \text{d'après (17).} \\ &= 1. \end{aligned}$$

La complémentation définit, nous l'avons remarqué, une correspondance biunivoque entre éléments de E :

$$\left(\begin{array}{l} a \xrightarrow{\quad} \bar{a} \\ b \xrightarrow{\quad} \bar{b} \end{array} \right)$$

La relation $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a + b}$ montre que la complémentation est un automorphisme sur (E) muni des deux lois de composition interne notées (.) et (+).

8° $((ab)c) \bar{a} = 0$ (20) et $((a + b) + c) + \bar{a} = 1$ (21). Démontrons (20) :

$$(ab) + (ab)c = ab \text{ loi d'absorption (13),}$$

$$\text{or : } ab = ba = (bc + b)a \text{ toujours d'après (13).}$$

$$= ab + (bc)a,$$

$$\text{donc : } (ab) + (ab)c = ab + (bc)a.$$

Multiplions par \bar{a} et développons :

$$(ab)\bar{a} + ((ab)c)\bar{a} = (ab)\bar{a} + ((bc)a)\bar{a},$$

$$0 + ((ab)c)\bar{a} = 0 + 0 \quad \text{d'après (16).}$$

$$\text{donc : } ((ab)c)\bar{a} = 0.$$

9° $((ab)c) \bar{bc} = 0$ (22) et $((a + b) + c) + \bar{b} + \bar{c} = 1$ (23) par dualité.

De l'égalité établie plus haut :

$$ab + (ab)c = ab + (bc)a \text{ on tire en permutant } a \text{ et } c$$

$$bc + (bc)a = bc + (ab)c,$$

multiplions les deux membres par \overline{bc}

$$(bc) (\overline{bc}) + ((bc)a)\overline{bc} = (bc) (\overline{bc}) + ((ab)c)\overline{bc},$$

$$0 + 0 = 0 + ((ab)c)bc \text{ d'après (8) et (16),}$$

donc : $((ab)c)\overline{bc} = 0.$

10° *L'addition et la multiplication sont associatives* $(a + b) + c = a + (b + c)$ (24) et $(ab)c = a(bc)$ (25) par dualité.

Pour établir (25) par exemple, il suffit de montrer que les deux membres ont le même complément, or le complément de $a(bc)$ est : $\overline{a + bc}$.

Montrons donc selon (7) et (8) que :

$$\{ [(ab)c] \cdot [\overline{a + bc}] = 0$$

$$\} (ab)c + (\overline{a + bc}) = 1$$

$$[(ab)c] [\overline{a + bc}] = ((ab)c)\overline{a} + ((ab)c)\overline{bc}, \text{ d'après (6).}$$

$$= 0 + 0 = 0 \text{ d'après (20) et (22).}$$

$$(ab)c + (\overline{a + bc}) = [(\overline{a + bc}) + c] [(\overline{a + bc}) + ab] \text{ d'après (5).}$$

$$= [(\overline{a + bc}) + c] \{ [(\overline{a + bc}) + a] [(\overline{a + bc}) + b] \} \text{ d'après (5).}$$

or : $(\overline{a + bc}) + a = 1$ (n° 17), il vient :

$$(ab)c + (\overline{a + bc}) = [(\overline{a + bc}) + c] [(\overline{a + bc}) + b],$$

$$= (\overline{a + bc}) + bc \text{ d'après (5),}$$

$$= 1 \text{ d'après (17),}$$

ce qui établit la formule (25).

11° *La relation* $a + b = b$ *est une relation d'ordre dans E.* — Une relation notée \leq est une relation d'ordre si :

$$a \leq a \text{ (réflexivité),}$$

$$a \leq b \text{ et } b \leq c \text{ entraînent } a \leq c \text{ (transitivité),}$$

$$a \leq b \text{ et } b \leq a \text{ entraînent } a = b, \text{ (antisymétrie),}$$

nous avons bien ici :

$$a + a = a \text{ (réflexivité),}$$

$$a + b = b \text{ et } b + c = c \text{ entraînent :}$$

$$a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c,$$

$$a + c = c \text{ (transitivité).}$$

de plus : $a + b = b,$

et $b + a = a$ entraînent $a = b.$ Axiome (3).

Si nous remarquons que $a + b = b$ entraîne :

$$ab = a(a + b) = a, \text{ d'après (14),}$$

et que : $ab = a$ entraîne

$$b + a = b + ab = b, \text{ d'après (13),}$$

$$b + a = b.$$

Les relations $a + b = b$ et $ab = a$ définissent la même relation d'ordre dans (E) ; nous pourrions noter cette relation $a \leq b.$

Remarquons que $a \leq b$ ou $a + b = b$ entraîne $(a + b)\overline{b} = b.\overline{b}$. donc : $a.\overline{b} = 0.$

Réciproquement : $a\overline{b} = 0$ entraîne

$$a\overline{b} + b = b$$

$$\begin{aligned} (a + b) (\bar{b} + b) &= b \\ (a + b) \mathbf{1} &= b \\ a + b &= b \\ a &\leq b \end{aligned}$$

IV. Nous montrerons la compatibilité du système d'axiomes précédents en donnant un modèle géométrique de cette algèbre qui est des plus classiques.

Considérons l'ensemble des parties P(E) d'un ensemble E, A, B, C... sont des parties de E. Nous écrivons que $A = B$ si tout élément de A est élément de B et inversement. Nous poserons :

$$\begin{aligned} A + B &= A \cup B \text{ (réunion de A et de B),} \\ AB &= A \cap B \text{ (intersection de A et de B),} \\ \mathbf{0} &\text{ sera l'ensemble vide,} \\ \mathbf{1} &\text{ l'ensemble plein,} \\ \bar{A} &\text{ est le complémentaire de A.} \end{aligned}$$

La relation d'ordre est la relation d'inclusion. Les axiomes posés sont immédiats à vérifier intuitivement : nous admettons que cela suffit à affirmer leur compatibilité.

V. LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS EST UNE ALGÈBRE DE BOOLE.

Dans ce paragraphe, les objets $a, b, c...$ seront des propositions, par exemple : « il pleut » est une proposition. Nous admettons la notion de proposition équivalente que nous noterons par l'infixe \longleftrightarrow .

$a \longleftrightarrow b$, l'équivalence étant une relation binaire, réflexive, symétrique, transitive, nous désignerons par $a + b$ l'affirmation de l'une au moins des propositions a et b (disjonction) et par ab l'affirmation conjointe de a et b (conjonction). A toute proposition a correspond une proposition contraire ou négation notée \bar{a} . Nous pourrions noter $\mathbf{1}$ une proposition toujours vraie et $\mathbf{0}$ une proposition toujours fausse. Nous admettons donc les équivalences

$$\begin{aligned} a + \mathbf{0} &\longleftrightarrow a & a + b &\longleftrightarrow b + a & a + bc &\longleftrightarrow (a + b) (a + c) \\ a \times \mathbf{1} &\longleftrightarrow a & ab &\longleftrightarrow ba & a(b + c) &\longleftrightarrow ab + ac \\ & & a + \bar{a} &\longleftrightarrow \mathbf{1} & \bar{a}\bar{a} &\longleftrightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\bar{a}\bar{a} \longleftrightarrow \mathbf{0}$ est la loi de non contradiction,

$a + \bar{a} \longleftrightarrow \mathbf{1}$ est la loi du tiers-exclu (la logique étudiée est la logique bivalente classique).

Comment interpréter ici la relation d'ordre $a + b = b$ ou $\bar{a}\bar{b} = \mathbf{0}$? Dire que $\bar{a}\bar{b} \longleftrightarrow \mathbf{0}$ revient à affirmer que la conjonction de a et \bar{b} est impossible. Nous dirons alors que a implique b ($a \rightarrow b$). La double implication donne bien une équivalence ($\bar{a}\bar{b} = \mathbf{0}$ et $a\bar{b} = \mathbf{0}$ conduit à $a \leq b$ et $b \leq a$, soit $a = b$, ce qui se traduit ici par $a \longleftrightarrow b$). Notons que la transitivité de la relation d'ordre se traduit ici par :

$$(a \rightarrow b) (b \rightarrow c)$$

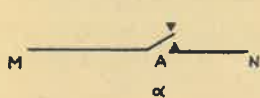
$\rightarrow (a \rightarrow c)$, c'est le syllogisme.

Ces résultats étant acquis, « démontrons », à titre d'exemple, ce théorème de la logique dû à Leibniz :

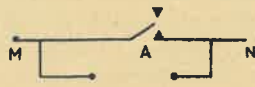
$$(a \rightarrow b) (c \rightarrow d) \rightarrow (ac \rightarrow bd),$$

en effet

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b} &\longleftrightarrow \mathbf{0} & \text{et} & & \bar{c}\bar{d} &\longleftrightarrow \mathbf{0} \\ ac.\bar{b}\bar{d} &\longleftrightarrow ac(\bar{b} + \bar{d}) & \longleftrightarrow & & ac.\bar{b} + ac.\bar{d} \end{aligned}$$



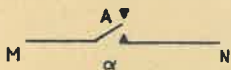
(1)



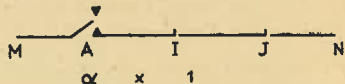
$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + 0$$

(Mise en parallèle de A avec une connexion ouverte)



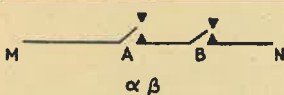
(2)



$$\alpha \times 1 = \alpha$$

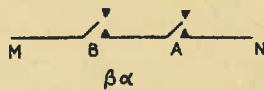
$$\alpha \times 1$$

(Mise en serie de A avec la connexion IJ toujours fermée)



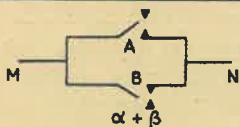
(3)

$$\alpha \beta = \beta \alpha$$



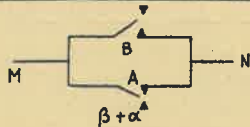
$$\alpha \beta$$

$$\beta \alpha$$



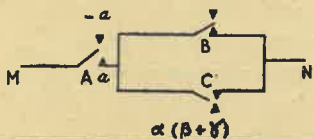
(4)

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$



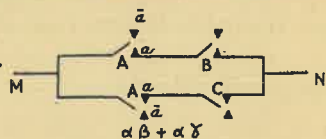
$$\alpha + \beta$$

$$\beta + \alpha$$



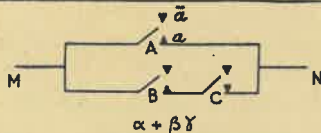
(5)

$$\alpha (\beta + \gamma) = \alpha \beta + \alpha \gamma$$



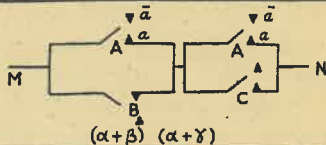
$$\alpha (\beta + \gamma)$$

$$\alpha \beta + \alpha \gamma$$



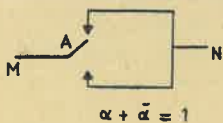
(6)

$$\alpha + \beta \gamma = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$$



$$\alpha + \beta \gamma$$

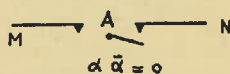
$$(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$$



(7)

$$\alpha + \bar{\alpha} = 1$$

(8)



$$\alpha \bar{\alpha} = 0$$

$$\longleftrightarrow a\bar{b}.c + c\bar{d}.a$$

$$\longleftrightarrow 0 + 0$$

$$\longleftrightarrow 0$$

On obtient ainsi une langue abstraite, sténographiée, dont la syntaxe est l'algèbre de Boole. L'utilité de ces considérations pourra se discuter, elles se placent naturellement sur le plan de la métamathématique et leur intérêt épistémologique est considérable, on ne peut le nier. Le lecteur qui s'intéresse à ces questions trouvera une documentation abondante dans les ouvrages de Beth et de Curry (Gauthier-Villars) par exemple.

VI. LA STRUCTURE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES SE RATTACHE A L'ALGÈBRE DE BOOLE.

Considérons un circuit électrique relié à deux bornes M et N et comprenant, intercalés entre M et N, un certain nombre de relais à deux contacts A, B, C... Au relais A nous associerons les deux contacts a et \bar{a} , si l'un est « ouvert » l'autre est « fermé ». L'ensemble des relais intercalés entre M et N pourra à son tour être considéré comme un relais à deux « positions » : une « position " fermé " » correspondant au passage possible du courant entre ces points, une « position " ouvert " » correspondant à un passage impossible. Deux montages seront considérés comme équivalents s'ils réalisent l'un et l'autre, soit le passage, soit l'interruption du courant entre M et N.

A la mise en série de deux contacts α et β nous faisons correspondre le produit $\alpha\beta$. A la mise en parallèle de ces mêmes contacts correspond la somme $\alpha + \beta$.

Nous désignerons par 1 une connexion toujours fermée, par 0 une connexion toujours ouverte.

Dès lors, les axiomes (1) à (8) traduisent simplement des équivalences de montage que nous rappelons dans les schémas ci-dessous. (Voir schémas feuille spéciale)

Notons que si on ne distingue pas les relais fermés on pourra remplacer leurs symboles par 1 et de même on pourra noter 0 tout relais ouvert. Si $\bar{a} = 1$ $a = 0$. Toute fonction algébrique de $a, b, c, \dots, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ sera égale à 1 ou à 0 selon qu'elle correspond à un circuit fermé ou à un circuit ouvert. L'algèbre obtenue sera simplement à deux éléments 0 et 1.

Donnons un exemple [tiré de la revue des *Télécommunications* (1952)] (1) de réalisation d'un schéma de montage utilisant les résultats précédents.

Entre M et N intercalons une lampe L et trois relais A, B, C. On veut que L s'allume pour le fonctionnement de un ou deux des trois contacts a, b, c et ne s'allume pas si ces trois contacts fonctionnent ou ne fonctionnent pas simultanément.

Admettons que le problème soit possible. Le polynôme $abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ correspond à un schéma satisfaisant aux conditions d'extinction. Formons le schéma correspondant au polynôme complémentaire et examinons si les conditions d'allumage sont satisfaites.

$$\begin{aligned} \overline{abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}} &= \overline{abc} \times \overline{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \\ &= (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) (a + b + c) \\ &= \bar{a}(b + c) + a(\bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$

(1) Cette revue m'a été communiquée par M. HURON, professeur à la Faculté de Toulouse.

en appliquant les théorèmes établis plus haut. Le polynôme $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(a + b + c)$ correspond au montage (I), qui convient au problème, et le polynôme

$$\bar{a}(b + c) + a(\bar{b} + \bar{c})$$

au montage (II) qui convient également.

A. CRUMEYROLLES (*Lycée de Toulouse*).

