

BULLETIN de l'ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'Enseignement Public

SOMMAIRE

I. ETUDES.

A. LICHNEROWICZ : Applications linéaires et matrices	1
P. LELONG . Formes quadratiques et hermitiennes	22

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS.

A. CRUMEYROLLES : Etude sur une algèbre abstraite booléenne	37
L. FÉLIX : Anneaux où zéro a des diviseurs	44

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

J. SIROS : Réflexions sur l'interprétation d'un programme	46
A. LENTIN : Des exercices un peu insolites	55
C. DELAP;ERRE : Une application des angles à l'observation de l'horizon	58
J. S. : Deux notes sur l'inversion	59
Le travail du groupe de Sèvres	61

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.

J. ITARD : Grandeur et servitude de l'histoire des sciences	64
G. W. : La Physique et les professeurs de mathématiques	66
Pour le Calcul numérique	68

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.

Concours de l'enseignement public en 1956	69
Distinctions ; Ecole des Sciences de Reims ; nouveaux textes utiles à connaître	72

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

G. W. : La rentrée à l'heure de la réforme	73
Réunions du Bureau	80
Le bloc-notes de l'A.P.M.	80
Les journées d'étude de Sèvres (2-4 novembre 1956)	81



La table des matières de la 35^e année du Bulletin de l'A.P.M.
est encartée dans ce numéro.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)
 Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Énoncés*.

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ...	300 F
Prix de l'abonnement au <i>Bulletin</i>	1 000 F
Prix du numéro	200 F

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

- Président :* M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11^e). OBE. 56-95.
Vice-Présidents : Mlle AFFRE, 5, rue Gustave-Le-Bon, Paris (14^e).
 M. BIGUENET, 41, rue M.-Michelis, Neuilly-sur-Seine.
 M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14^e).
 M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5^e).
 M. THÉRON, 38, rue Lacépède, Paris (5^e).
Secrétaires : Mlle FÉLIX, 3, rue Pierre-Berland, Versailles (S.-et-O.) (Conférences).
 M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16^e).
 M. HUISMAN, 11, rue J.-Cœur, Paris (4^e) (Bibliothèque et « Bulletin »).
 M. ITARD, 6, avenue Paul-Appell, Paris (14^e) (Bibliographie).
 M. ROSTOLLAND, 19, rue des Ursulines, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
 M. SIROS, 13, avenue J.-Racine, Sceaux (Seine) (Programmes).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).
Comité de rédaction du « Bulletin » : Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, GIRARD, ITARD, SIROS ;
 Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbé*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (Nice) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. WALUSINSKI (*St-Cloud*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; RUFF (*St-Louis*) ; SIROS (*Lakanal*) ; THÉRON (*Louis-le-Grand*).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOUUD (Lyon, *Marie-Lidaleuc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — Concours général : M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Tunis :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES *

Dans les conférences précédentes de ce cycle, les principales structures algébriques, celles de groupe, anneau, corps et celle d'espace vectoriel, ont été étudiées. Dans mes deux conférences consacrées aux applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre et à leur représentation par des matrices, nous rencontrerons des exemples variés de ces différentes notions.

Le sujet de mes deux conférences correspond exactement à ce qu'on nommait naguère la théorie des substitutions linéaires et, en toute honnêteté, l'optique moderne n'apporte pas ici de résultats substantiellement nouveaux. Ce que je vais dire, vous le savez tous. C'est l'économie de moyens, la puissance de généralisation qui fait le prix du point de vue moderne et de cette mutation de la règle du jeu mathématique qu'il impose.

Sous la pluie dense d'écritures et d'indices explicités de l'antique théorie des substitutions linéaires, on ne distinguait qu'assez péniblement les résultats fondamentaux et les idées directrices des démonstrations. Les déterminants et la théorie des équations linéaires fondée sur leur considération semblaient jouer un rôle essentiel.

Dans notre nouveau jeu, nous aimons écrire le moins possible, raisonner directement, intrinsèquement, sur les vecteurs ou les applications, distinguer clairement les grandes structures algébriques qui sous-tendent la théorie, et nous n'aimons plus les déterminants ; ils nous apparaissent comme un outil qui, lorsqu'on en fait trop usage, masque la simplicité des faits algébriques fondamentaux. Je ne les utiliserai pratiquement pas dans mes deux conférences, à la seule exception de la partie consacrée aux valeurs propres ; il est là aussi utile et possible de s'en passer, mais cela m'aurait entraîné trop loin. Je ne suppose pas non plus connus les résultats de la classique théorie des équations linéaires, et j'ai essayé de choisir les différentes démonstrations exposées de façon à mettre en lumière la souplesse et la richesse des modes de démonstrations de l'algèbre moderne.

La théorie que je suis amené à vous exposer vous choquera sans

(*) Cette étude est la rédaction, par l'auteur lui-même, des deux Conférences qu'il a prononcées, les 19 et 26 avril 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, dans le cadre des conférences sur l'Algèbre organisées par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

doute plus qu'elle ne vous séduira parce que vous, comme moi, avons été initialement conditionnés à autre chose. Ne me reprochez pas trop d'être « abstrait » : il est bien difficile de savoir au juste ce que cette douce injure signifie et la dose de concret n'est pas proportionnelle à la quantité de craie éparse sur un tableau. Le concret est bien souvent précisément ce à quoi nous avons été conditionnés, les éléments de l'histoire de notre formation personnelle. Pour bien des mathématiciens de ma génération, l'algèbre moderne a paru abstraite jusqu'au moment où nous l'avons assimilée. A ceux de nos collègues plus jeunes qui ont — si j'ose dire — sucé dès l'enfance le lait des espaces vectoriels, ce sont eux qui apparaissent un splendide concret.

Rappel.

On rappelle qu'une structure d'espace vectoriel est définie sur un ensemble E, relativement à un corps commutatif K (corps des scalaires), par la donnée de deux lois de composition :

1° une loi de composition interne à E, notée additivement, définissant sur E une structure de groupe abélien ;

2° une loi de composition dite « le produit par un scalaire » qui à $\alpha \in K, \vec{x} \in E$ associe $\alpha\vec{x} \in E$ et qui jouit des propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 1. \vec{x} &= \vec{x} & \alpha(\beta\vec{x}) &= (\alpha\beta)\vec{x} \\ (\alpha + \beta)\vec{x} &= \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} & \alpha(\vec{x} + \vec{y}) &= \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} \end{aligned}$$

quels que soient $\alpha, \beta \in K, \vec{x}, \vec{y} \in E$.

Les espaces vectoriels envisagés ici sont supposés de dimension finie, la dimension étant l'ordre maximum d'un système libre de vecteurs de E (ou système de vecteurs linéairement indépendants).

Un sous-espace vectoriel de E est une partie V de E telle que, quels que soient $\vec{x}, \vec{y} \in V$ et $\alpha \in K, \vec{x} + \vec{y}$ et $\alpha\vec{x}$ appartiennent à V. Les combinaisons linéaires des vecteurs d'un système de E sont les éléments d'un sous-espace de E, le sous-espace « engendré par le système ». Le rang du système de vecteurs est l'ordre maximum des systèmes libres de vecteurs que l'on peut extraire du système donné ; c'est aussi la dimension du sous-espace engendré par le système de vecteurs.

Etant donné un sous-espace V de E, il existe des sous-espaces U tels que tout vecteur de E soit, d'une manière et d'une seule, somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de V. En particulier, $U \cap V = 0$; U est dit un sous-espace supplémentaire de V dans E.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES

1. Notion d'application linéaire.

a) Donnons-nous deux espaces vectoriels E et F, de dimensions respectives n et p, définis sur le même corps K de scalaires (par exemple le corps des réels ou le corps des complexes).

DÉFINITION : Une application f de E dans F est dite linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} a) \text{ quels que soient } \vec{x}, \vec{y} \in E & & f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \\ b) \text{ quels que soient } \vec{x} \in E, \alpha \in K & & f(\alpha\vec{x}) &= \alpha f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Une application linéaire f de E sur F est dite un *homomorphisme* de E sur F ; si de plus f est *biunivoque*, f est dit un *isomorphisme* de E sur F .

Une forme linéaire sur E fournit un exemple d'application linéaire de E dans l'espace vectoriel à 1 dimension défini par K relativement à lui-même. Si la forme n'est pas identiquement nulle, on a même un homomorphisme de E sur K . La géométrie élémentaire met en jeu un grand nombre d'applications linéaires : étant donné dans l'espace de la géométrie élémentaire un trièdre $oxyz$, prenons pour E l'espace vectoriel de tous les vecteurs (libres), pour F celui des vecteurs du plan xyo , pour application f la projection parallèlement à oz . On a une application linéaire de E sur F .

De même, E restant le même, prenons F confondu avec E . L'homothétie de centre O , de rapport λ , définit une application linéaire biunivoque de E sur lui-même.

b) Les vecteurs de F images par f des vecteurs de E constituent une partie $f(E)$ de F qui en est une sous-espace vectoriel. En effet, si (\vec{l}_i) est une base, quelconque de E , au vecteur :

$$(1-1) \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{l}_i \quad (x^i \in K)$$

correspond, f étant linéaire, le vecteur de F :

$$(1-2) \quad f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x^i f(\vec{l}_i).$$

Ainsi, tout élément de $f(E)$ s'exprime par une combinaison linéaire des $f(\vec{l}_i)$. Inversement, tout vecteur de F qui s'exprime par une telle combinaison linéaire avec des coefficients (x^i) est l'image par f de (1-1) et $f(E)$ est le sous-espace de F engendré par les $f(\vec{l}_i)$.

On appelle *rang de l'application linéaire* f la dimension de $f(E)$; ce rang r n'est autre que le rang du système des n vecteurs $f(\vec{l}_i)$ de F ; ainsi $r \leq n, p$.

c) Si l'application f de E sur $f(E)$ est *biunivoque*, $f(\vec{x}) = 0$ entraîne $\vec{x} = 0$. Si $f(\vec{x})$ défini par (1-2) est nul, \vec{x} défini par (1-1) est nul et $x^i = 0$. Par suite, les $f(\vec{l}_i)$ forment un système libre et $r = n$, soit :
 $\dim. f(E) = \dim. E$.

Inversement, considérons deux espaces E et F de même dimension. Il est aisé de construire des isomorphismes de l'un sur l'autre : si (\vec{l}_i) est une base de E , (\vec{f}_i) une base de F , appliquons $\vec{x} = \sum x^i \vec{l}_i \in E$ sur $f(\vec{x}) = \sum x^i \vec{f}_i \in F$. On vérifie immédiatement qu'on définit ainsi une application linéaire biunivoque f de E sur F , c'est-à-dire un isomorphisme. Ainsi, pour que deux espaces vectoriels soient isomorphes, il faut et il suffit qu'ils aient même dimension.

2. Image d'un sous-espace vectoriel.

a) Les applications linéaires f ont la propriété fondamentale de conserver la structure d'espace vectoriel. D'une façon précise, si V est un sous-espace vectoriel de E , les vecteurs de F images par f de vecteurs de V constituent une partie $f(V)$ de F qui en est un sous-espace vectoriel : il suffit de restreindre f à V et d'appliquer le résultat que nous venons d'établir pour $f(E)$. Si f est biunivoque, $\dim. V = \dim. f(V)$; le rang d'un système de vecteurs est conservé par isomorphisme.

Si W est un sous-espace de $f(E)$, $f^{-1}(W)$ est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f appartient à W . Il est clair que $f^{-1}(W)$ est encore un sous-espace de E ; en effet, si $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(W)$, $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \in W$ et $\vec{x} + \vec{y} \in f^{-1}(W)$; de même si $\alpha \in K$, $f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \in W$ et $\alpha\vec{x} \in f^{-1}(W)$.

En particulier, si nous prenons $W = 0$, $f^{-1}(0)$ est un sous-espace de E .

b) Au sujet de ce sous-espace, nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME : *L'espace vectoriel $f(E)$ est isomorphe à tout sous-espace de E supplémentaire de $f^{-1}(0)$.*

Soit L un sous-espace supplémentaire de $f^{-1}(0)$ dans E . A tout élément $\vec{z} \in L$ associons l'élément $f(\vec{z})$ de $f(E)$. Il est aisé de voir que tout $f(E)$ est ainsi atteint ; en effet, si $f(\vec{x})$ ($\vec{x} \in E$) est un élément quelconque de $f(E)$, considérons la décomposition :

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \quad (\vec{y} \in f^{-1}(0), \vec{z} \in L).$$

On a :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) = f(\vec{z}),$$

puisque $f(\vec{y}) = 0$. L'application ainsi définie de L sur $f(E)$ est biunivoque, puisque si $f(\vec{z}) = 0$, $\vec{z} \in L \cap f^{-1}(0)$ donc est nul. Nous avons ainsi défini une application linéaire biunivoque de L sur $f(E)$ et ces deux espaces sont isomorphes. On en déduit :

$$\dim. f^{-1}(0) = n - r.$$

En particulier, pour que f soit un isomorphisme de E sur $f(E)$, il faut et il suffit que $r = n$. Pour que f applique E sur F , il faut et il suffit que $r = p$. Pour que f soit un isomorphisme de E sur F , il faut et il suffit que $r = n = p$.

3. L'espace vectoriel des applications de E dans F .

A l'ensemble $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F , nous pouvons étendre les lois de composition introduites sur l'ensemble des

formes linéaires sur E. Introduisons sur $L(E, F)$ les deux lois de composition suivantes :

1° Etant donnés $f, g \in L(E, F)$, nous pouvons leur associer l'application, notée $f + g$, définie par :

$$f + g : \vec{x} \rightarrow f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \text{ quel que soit } \vec{x} \in E.$$

Il est clair que cette application est linéaire.

2° Etant donnés $\alpha \in K$ et $f \in L(E, F)$, nous pouvons leur associer l'application, notée αf , manifestement linéaire, définie par :

$$\alpha f : \vec{x} \rightarrow f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \text{ quel que soit } \vec{x} \in E.$$

On vérifie aisément que l'ensemble de ces deux lois définit sur $L(E, F)$ une structure d'espace vectoriel. Nous savons ainsi ajouter des applications linéaires et les multiplier par un scalaire. L'application nulle est celle qui à $\vec{x} \in E$ fait toujours correspondre $\vec{0} \in F$; l'application opposée de f est celle qui à tout \vec{x} fait correspondre le vecteur opposé à $f(\vec{x})$.

4. Produit de deux ou plusieurs applications linéaires.

Considérons trois espaces vectoriels E, F, G de dimensions respectives n, p, q . Soit f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G. Considérons l'application de E dans G définie de la manière suivante : si $\vec{x} \in E$, on obtient par f l'élément $\vec{y} = f(\vec{x})$ de F, puis par g l'élément $\vec{z} = g(\vec{y}) = g[f(\vec{x})]$ de G. Cette application de E dans G sera notée $g \circ f$. Elle est manifestement linéaire, car :

$$g[f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)] = g[f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)] = y[f(\vec{x}_2)] + g[f(\vec{x}_2)]$$

$$g[f(\alpha \vec{x})] = g[\alpha f(\vec{x})] = \alpha g[f(\vec{x})]$$

pour $\alpha \in K, \vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$.

L'application linéaire $g \circ f$ est dite le *composé* ou *produit* des applications linéaires f et g . Ce produit s'étend immédiatement à plus de deux applications linéaires et est *associatif* d'après sa définition même. Il est *distributif* par rapport à l'addition des applications linéaires [dans $L(E, F)$ ou $L(F, G)$].

II. REPRÉSENTATION PAR DES MATRICES RECTANGULAIRES

5. Représentation d'une application linéaire par une matrice.

a) Reprenons les espaces vectoriels E et F de dimensions n et p et choisissons dans E une base (\vec{l}_i) . Cette base étant fixée, à toute application linéaire $f \in L(E, F)$ correspond un système de n vecteurs $f(\vec{l}_i)$ de F ; inversement, à tout système de n vecteurs (f_i) de F, faisons correspondre l'application f de E dans F qui applique :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{l}_i \in E$$

sur le vecteur.

santes. Pour un choix arbitraire de bases de E et F, le rang de A est égal au rang du système des n vecteurs de F définis par les vecteurs lignes et par suite est égal au rang de l'application f dont la matrice A est représentative. Ainsi, toute matrice A, représentative d'une application linéaire f a même rang que cette application.

De même qu'on calcule souvent sur les vecteurs par l'intermédiaire de leurs composantes ou sur les points par l'intermédiaire de leurs coordonnées, on conçoit qu'il est souvent commode de calculer sur les applications linéaires par l'intermédiaire de matrices représentatives. On aboutit ainsi à une véritable « géométrie analytique » des applications linéaires.

6. Exemples de matrices représentatives.

a) Matrice-projection.

Dans l'espace de la géométrie ordinaire, donnons-nous trois vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, deux à deux orthogonaux. Prenons pour E l'espace vectoriel des vecteurs de la géométrie ordinaire, pour F le sous-espace engendré par \vec{i} et \vec{j} , pour f la projection orthogonale de E sur F qui est une application linéaire de E sur F ; E étant rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, F à la base (\vec{i}, \vec{j}) , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{i}) = \vec{i} \\ f(\vec{j}) = \vec{j} \\ f(\vec{k}) = \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{d'où la mention représentative } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2, dimension de $f(E) = F$.

b) Matrice-homothétie.

E restant le même, prenons F confondu avec E et pour f l'application linéaire de E sur lui-même défini par une homothétie de rapport λ ; E et F étant rapportés à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{i}) = \lambda \vec{i} \\ f(\vec{j}) = \lambda \vec{j} \\ f(\vec{k}) = \lambda \vec{k} \end{array} \right. \quad \text{d'où la matrice représentative } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

qui est de rang 3.

7. Algèbre des matrices rectangulaires : addition et multiplication par un scalaire.

Désignons par $M(n, p)$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à éléments dans K. Nous nous proposons de définir sur $M(n, p)$ une structure d'espace vectoriel relativement à K.

a) Addition de deux éléments de $M(n, p)$. Soit A et B deux matrices $n \times p$ à éléments dans K. Si E et F sont deux espaces vectoriels relativement à K, de dimensions respectives n et p , et munis de bases, A et B sont les matrices représentatives de deux applications linéaires f et g de E dans F.

Étudions la matrice S représentative, pour ces bases (\vec{l}_i) et $(\vec{\varepsilon}_\mu)$, de l'application $f + g$. Si $A = (a_i^\mu)$ et $B = (b_i^\mu)$, on a :

$$f(\vec{l}_i) = \sum_{\mu} a_i^\mu \vec{\varepsilon}_\mu \qquad g(\vec{l}_i) = \sum_{\mu} b_i^\mu \vec{\varepsilon}_\mu$$

et par suite :

$$(f + g)(\vec{l}_i) = f(\vec{l}_i) + g(\vec{l}_i) = \sum_{\mu} a_i^\mu \vec{\varepsilon}_\mu + b_i^\mu \vec{\varepsilon}_\mu$$

et S a pour éléments :

$$(7-1) \quad s_i^\mu = a_i^\mu + b_i^\mu$$

A la matrice $n \times p$, S dont les éléments sont donnés par (7-1), nous donnerons le nom de somme des matrices A et B :

$$S = A + B.$$

La loi de composition ainsi définie doue $M(n, p)$ d'une structure de groupe abélien. La matrice O est celle dont tous les éléments sont nuls ; la matrice opposée à une matrice a pour éléments les opposés des éléments de cette matrice.

b) *Produit par un scalaire.* Les notations étant les mêmes et $\alpha \in K$, étudions la matrice P représentative de l'application αf . Il vient :

$$f(\vec{l}_i) = \sum_{\mu} a_i^\mu \vec{\varepsilon}_\mu \qquad \alpha f(\vec{l}_i) = \sum_{\mu} \alpha a_i^\mu \vec{\varepsilon}_\mu$$

et P a pour éléments :

$$(7-2) \quad p_i^\mu = \alpha a_i^\mu$$

On vérifie immédiatement que les deux lois ainsi définies douent $M(n, p)$ d'une *structure d'espace vectoriel*.

c) Une base étant choisie dans E et une dans F , considérons l'application biunivoque Φ de $L(E, F)$ sur $M(n, p)$ qui à toute application linéaire $f \in L(E, F)$ fait correspondre sa matrice représentative $A = \Phi(f)$. D'après nos définitions de l'addition et du produit par un scalaire :

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g) \qquad \Phi(\alpha f) = \alpha \Phi(f).$$

Par suite, Φ est un *isomorphisme de l'espace vectoriel* $L(E, F)$ sur l'espace vectoriel $M(n, p)$.

Il est aisé de construire une base de $M(n, p)$: soit E_μ^i la matrice $n \times p$ dont tous les éléments sont nuls, à l'exception de l'élément e_i^μ qui vaut 1. Il est clair que si $A = a_i^\mu$,

$$A = \sum_{i, \mu} a_i^\mu E_\mu^i$$

Ainsi, toute matrice $n \times p$ s'exprime par une combinaison linéaire des E . De plus, pour la matrice O , tous les coefficients sont nécessairement nuls. Les E forment une base de $M(n, p)$ qui se compose de np éléments. Ainsi, les espaces vectoriels isomorphes $M(n, p)$ et $L(E, F)$ ont la dimension np .

8. *Produit de matrices rectangulaires.*

A partir de la composition ou produit d'applications linéaires, on peut définir dans certains cas le produit de matrices rectangulaires.

Soit E, F, G trois espaces vectoriels relativement à K, de dimensions respectives n, p, q , dans lesquels nous choisissons des bases respectives

(\vec{l}_i) $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ $(\vec{\gamma}_\lambda)$.

Si A est une matrice $n \times p$, B une matrice $p \times q$, A est représentative pour les bases choisies d'une application f de E dans F et B d'une application g de F dans G. Etudions la matrice D représentative de l'application $g \circ f$ de E dans G ; c'est une matrice $n \times q$. Si :

$$f(\vec{l}_i) = \sum_{\mu} a_i^{\mu} \vec{\varepsilon}_{\mu} \qquad g(\vec{\varepsilon}_{\mu}) = \sum_{\lambda} b_{\mu}^{\lambda} \vec{\gamma}_{\lambda}$$

on a :

$$g[f(\vec{l}_i)] = \sum_{\mu} a_i^{\mu} g(\vec{\varepsilon}_{\mu}) = \sum_{\mu, \lambda} a_i^{\mu} b_{\mu}^{\lambda} \vec{\gamma}_{\lambda}$$

soit :

$$g[f(\vec{l}_i)] = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\mu} b_{\mu}^{\lambda} a_i^{\mu} \right) \vec{\gamma}_{\lambda}$$

Ainsi, la matrice D a pour éléments :

$$(8-1) \qquad d_i^{\lambda} = \sum_{\mu} b_{\mu}^{\lambda} a_i^{\mu}$$

La matrice D est dite le produit de B par A et est notée BA. On ne peut effectuer le produit BA que si le nombre des colonnes de A est égal au nombre des lignes de B, et ce produit s'effectue ligne de A par colonne de B. Les remarques suivantes sont évidentes :

a) Le produit des matrices est *associatif* : si A est $n \times p$, B est $p \times q$, C est $q \times r$, on a :

$$(CB)A = C(BA).$$

Cela résulte immédiatement du fait que cette associativité est vérifiée par les produits des applications linéaires que les différentes matrices représentent.

b) Le produit des matrices est *distributif* à droite et à gauche par rapport à l'addition : si A, A₁ et A₂ sont des matrices $n \times p$, B, B₁, B₂ des matrices $p \times q$:

$$B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2 \qquad (B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A,$$

les mêmes relations étant vérifiées par les applications linéaires correspondantes.

c) A étant $n \times p$ et B $p \times q$, on peut effectuer BA, mais on ne peut effectuer AB que si $n = q$. S'il en est ainsi, BA est $n \times n$ et AB est $p \times p$. Même si en outre $n = p$, on voit facilement sur des exemples que AB et BA sont en général distincts. Le produit n'est pas commutatif.

9. Exemples de produit.

a) Considérons un plan rapporté à deux axes rectangulaires oxy de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} ; E, F, G étant confondus avec l'espace des vecteurs libres du plan, prenons pour f une rotation d'angle α et pour g une symétrie par rapport à ox . Il vient :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha \\ f(\vec{j}) = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha \end{cases} \quad \text{matrice représentative dans } (\vec{i}, \vec{j}) : \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

de même :

$$\begin{cases} g(\vec{i}) = \vec{i} \\ g(\vec{j}) = -\vec{j} \end{cases} \quad \text{matrice représentative :} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Géométriquement, AB représente une symétrie par rapport à ox suivie d'une rotation d'angle α , c'est-à-dire une symétrie par rapport à la droite d'angle $\alpha/2$; BA représente la symétrie par rapport à la droite d'angle $-\alpha/2$.

b) Reprenons la projection (§ 6 a), mais en la considérant comme une application de E dans E. La matrice représentative dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Géométriquement, $f \circ f = f$. Il en résulte $A \cdot A = A$, ce qu'on peut vérifier immédiatement.

10. Matrice représentative d'un vecteur par rapport à une base.

Soit E un espace vectoriel relativement au corps K et considérons K comme un espace vectoriel à 1 dimension de base canonique définie par l'élément 1. A toute application linéaire ξ de K dans E correspond un vecteur $\vec{x} = \xi(1)$ de E. Inversement, à tout vecteur \vec{x} de E correspond l'application linéaire ξ de K dans E :

$$\xi(1) = \alpha \rightarrow \alpha \vec{x} \quad (\alpha \in K).$$

Nous définissons ainsi un isomorphisme entre E et $L(K, E)$.

Choisissons dans E une base (\vec{l}_i) . On a :

$$\xi(1) = \vec{x} = x^1 \vec{l}_1 + x^2 \vec{l}_2 + \dots + x^n \vec{l}_n$$

et la matrice représentative de ξ dans les bases choisies est la matrice $1 \times n$.

$$X = (x^1 x^2 \dots x^n).$$

Nous disons que cette matrice est représentative du vecteur \vec{x} dans la base (\vec{l}_i) .

Soit F un autre espace vectoriel relativement à K, f une application linéaire de E dans F. L'application $f \circ \xi$ est une application linéaire de K dans F qui correspond au vecteur $f(\vec{x})$. Si A est la matrice représentative de f relativement à (\vec{l}_i) et une base $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ de F, la matrice représentative de $f \circ \xi$ relativement à 1 et $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ est AX. Cette matrice $1 \times p$ est représentative dans la base $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ du vecteur $f(\vec{x})$ de F.

Nous sommes ainsi conduits à représenter les vecteurs d'un espace vectoriel par des matrices X à 1 ligne et autant de colonnes qu'il y a de

dimensions dans l'espace envisagé. Le vecteur image par une application linéaire est représenté par une matrice AX de même type, produit de la matrice représentant l'application linéaire par la matrice représentant le vecteur initial.

11. *Matrice représentative d'une forme linéaire par rapport à une base.*

Soit y^* une forme linéaire sur l'espace vectoriel F . Par définition, y^* n'est autre qu'une application linéaire de F dans K . Si $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ est une base de F , 1 la base canonique de K , la matrice représentative de y^* se déduit des formules :

$$\begin{cases} y^*(\vec{\varepsilon}_1) = y_1^* \cdot 1 \\ y^*(\vec{\varepsilon}_2) = y_2^* \cdot 1 \\ \dots \dots \dots \\ y^*(\vec{\varepsilon}_p) = y_p^* \cdot 1 \end{cases} \quad \text{soit } Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \dots \\ y_p^* \end{pmatrix}$$

où Y^* est une matrice à 1 colonne.

Soit f une application linéaire de E dans F . L'application $y^* \circ f$ est une application linéaire de E dans K , c'est-à-dire une forme linéaire sur E , ou un élément du dual E^* de E . Si A est la matrice représentative de f relativement aux bases (\vec{l}_i) de E et $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ de F , la matrice représentative de $y^* \circ f$ relativement à (l_i) et 1 est Y^*A .

On a ainsi déduit de f une application linéaire f^* de F^* dans E^* définie par :

$$f^* : y^* \in F^* \rightarrow y^* \circ f \in E^*.$$

C'est l'application duale de f . Si on la rapportait aux bases de F^* et E^* duales des bases introduites, il y aurait passage aux matrices transposées (échange des lignes et des colonnes) et retour au formalisme du § 10.

III. OPÉRATEURS LINÉAIRES ET MATRICES CARRÉES

12. *Anneaux des opérateurs linéaires et des matrices carrées.*

a) Etant donné un espace vectoriel E de dimension n , on appelle opérateur linéaire f de E (ou endomorphisme de E) une application linéaire de E dans lui-même.

Toute la théorie précédente peut donc être appliquée aux opérateurs linéaires en supposant seulement F confondu avec E . Pour représenter un opérateur linéaire f par une matrice, il suffit ici de se donner une base (\vec{l}_i) de E et de rapporter les vecteurs $f(\vec{l}_i)$ à cette base même :

$$f(\vec{l}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \vec{l}_j$$

L'opérateur f est ainsi représenté relativement à la base (\vec{l}_i) [la base $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ du cas général est confondue avec (\vec{l}_i)] par la matrice $n \times n$ (matrice carrée) :

$$A = (\alpha_i^j)$$

b) Soit $L(E, E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de E ; $L(E, E)$ se trouve naturellement doué d'une structure d'espace vectoriel. Mais ici

il y a plus : le produit $g \circ f$ de deux opérateurs linéaires de E est *toujours défini* et est un opérateur linéaire de E . Cette loi de composition dans $L(E, E)$ est associative, distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition, mais elle n'est pas commutative. Enfin, il existe un opérateur linéaire remarquable, l'opérateur identité e , qui à tout vecteur de E fait correspondre le vecteur lui-même ; quel que soit $f \in L(E, E)$:

$$f \circ e = e \circ f = f.$$

Ainsi, notre loi de composition admet un élément unité. Si $\alpha \in K$, on a :

$$f \circ (\alpha e) = (\alpha e) \circ f = \alpha f,$$

et la multiplication par le scalaire α peut être considérée comme un cas particulier du produit des opérateurs linéaires (produit à droite ou à gauche par αe).

Nous disposons ainsi sur $L(E, E)$ de deux lois de composition :

une loi notée additivement douant $L(E, E)$ d'une structure de groupe abélien ;

une loi notée \circ satisfaisant aux axiomes des anneaux non commutatifs et admettant un élément unité.

THÉORÈME : *L'addition et le produit des opérateurs linéaires définissent sur $L(E, E)$ une structure d'anneau non commutatif admettant un élément unité.*

c) Soit $M(n, n)$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$; le produit de deux telles matrices A, B est toujours défini et $BA = (\sum_j b_j^k a_j^i)$. Une

base (\vec{e}_i) étant choisie dans E , considérons l'application biunivoque Φ de $L(E, E)$ sur $M(n, n)$ qui à tout opérateur linéaire f fait correspondre sa matrice représentative $A = \Phi(f)$. D'après la définition de l'addition et du produit des matrices :

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g) \qquad \Phi(g \circ f) = \Phi(g) \cdot \Phi(f),$$

et ce que nous venons d'établir sur $L(E, E)$ est automatiquement valable pour $M(n, n)$. En particulier, le produit admet pour élément unité la matrice I représentative de l'opérateur identité, soit :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_j^i).$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME : *L'addition et le produit des matrices $n \times n$ définissent sur $M(n, n)$ une structure d'anneau non commutatif, admettant un élément unité, et isomorphe à la structure d'anneau de $L(E, E)$.*

Ces anneaux admettent des *diviseurs de zéro* : on entend par là que le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles le soit, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, il est aisé de définir la notion de *polynôme* à coefficients

dans K et à variable (et valeurs) dans l'un des anneaux des opérateurs ou des matrices carrées. Nous poserons :

$$A^0 = I \quad A^1 = A \quad A^2 = A \cdot A \quad A^p = A^{p-1} \cdot A.$$

On a manifestement :

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q} = A^q \cdot A^p.$$

Un monôme est ici un produit αA^p d'une puissance de A par $\alpha \in K$. Un polynôme est une somme d'un nombre fini de monômes. A tout polynôme à coefficients et variable dans K :

$$P(\zeta) = \sum_{k=0}^p \alpha_k \zeta^k$$

on peut associer le polynôme de variable matricielle :

$$P(A) = \sum_{k=0}^p \alpha_k A^k \quad (A \in M(n, n))$$

Si K est le corps des complexes, on peut mettre $P(\zeta)$ sous la forme :

$$P(\zeta) = \alpha_p \prod_{k=1}^p (\zeta - \mu_k)$$

On vérifie immédiatement par identification que :

$$P(A) = \alpha_p \prod_{k=1}^p (A - \mu_k I)$$

13. Opérateurs linéaires réguliers et matrices régulières.

a) Un opérateur linéaire f de E est dit *régulier* s'il définit une application linéaire de E sur E . Pour que f soit régulier, il faut et il suffit que $f(E)$ coïncide avec E , c'est-à-dire que f soit de rang n . S'il en est ainsi, f est biunivoque et définit un isomorphisme de E sur E (§ 2), c'est-à-dire ce qu'on nomme un *automorphisme* de E . Un opérateur non régulier est dit *singulier*.

Le produit $g \circ f$ de deux opérateurs linéaires réguliers f et g est un opérateur linéaire lui-même manifestement régulier, puisqu'il applique E sur E . Inversement, si f et g sont deux opérateurs linéaires tels que $g \circ f$ soit régulier, f et g sont tous deux réguliers. En effet :

$$\text{rang}(g \circ f) = \dim g[f(E)] \leq \dim f(E) = \text{rang } f.$$

Comme $\text{rang}(g \circ f) = n$, on a $\text{rang } f = n$; f est donc régulier et $f(E) = E$; $g(E)$ étant de dimension n , g est aussi régulier.

f étant régulier, donc biunivoque, à tout $\vec{y} \in E$ correspond un vecteur \vec{x} et un seul tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$; l'application biunivoque $\vec{y} \rightarrow \vec{x}$ de E sur E est l'application inverse f^{-1} de f , et pour tout $\vec{x} \in E$:

$$(13-1) \quad f^{-1}[f(\vec{x})] = \vec{x},$$

ce qui caractérise l'application f^{-1} . Celle-ci est linéaire comme on le voit par un raisonnement identique à celui de § 2 a. Ainsi, tout opérateur

linéaire régulier f admet une application inverse f^{-1} qui est aussi un opérateur linéaire régulier, l'opérateur inverse. Manifestement, l'inverse

de f^{-1} est f . La relation (13-1) et la relation obtenue par échange de f et f^{-1} peuvent être traduites par :

$$(13-2) \quad f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e.$$

Si deux opérateurs linéaires f et g sont tels que $g \circ f = e$, ils sont réguliers, et pour tout $\vec{x} \in E$:

$$g[f(\vec{x})] = \vec{x},$$

ce qui exprime que g est l'inverse de l'opérateur linéaire régulier f . Nous énoncerons :

THÉORÈME : *Le produit noté \circ doue l'ensemble des opérateurs linéaires réguliers de E d'une structure de groupe : le groupe des automorphismes de E .*

Si f et g sont deux opérateurs linéaires réguliers, $g \circ f$ étant régulier admet un inverse qui n'est autre que $f^{-1} \circ g^{-1}$. Cette propriété valable dans tout groupe se vérifie immédiatement, car :

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = e.$$

b) Toute matrice représentative d'un opérateur linéaire régulier est dite régulière. Pour qu'une matrice $n \times n$ soit régulière, il faut et il suffit qu'elle soit de rang n . Une base de E étant choisie, l'application Φ , qui à tout opérateur linéaire régulier fait correspondre sa matrice représentative, permet de traduire les résultats précédents concernant les opérateurs réguliers en résultats concernant les matrices régulières.

En particulier, à toute matrice $n \times n$ régulière A , on peut associer une matrice $n \times n$ unique A^{-1} telle que, quelle que soit la matrice X :

$$A^{-1} A X = X,$$

c'est-à-dire telle que :

$$A^{-1} A = I,$$

Cette matrice qui est régulière est appelée l'inverse de A et satisfait aussi à :

$$A A^{-1} = I.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME : *Le produit des matrices $n \times n$ doue l'ensemble des matrices $n \times n$ régulières à éléments dans K d'une structure de groupe isomorphe au groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur K de dimension n . Ce groupe est appelé le groupe linéaire à n variables de K : $GL(n, K)$.*

Si A et B sont deux matrices $n \times n$ régulières, BA régulière admet pour inverse $A^{-1} B^{-1}$. On notera aussi que si A est régulière, chacune des égalités $AB = 0$ et $BA = 0$ entraîne $B = 0$. Car si A^{-1} est l'inverse de A ,

de $AB = 0$, on déduit $A^{-1} AB = 0$, soit $B = 0$; de même pour l'autre égalité.

[14. *Intervention des déterminants.*

a) A toute matrice carrée, $n \times n$, A, on peut associer son déterminant (à valeur dans K), $D(A)$. Pour que ce déterminant soit nul, il faut et il suffit que les vecteurs lignes soient linéairement dépendants, c'est-à-dire que le rang de la matrice soit inférieur à n . Par suite, pour qu'une matrice soit régulière, il faut et il suffit que son déterminant soit $\neq 0$.

Si A et B sont deux matrices $n \times n$, la règle usuelle de multiplication des déterminants se traduit par la relation :

$$D(BA) = D(B) \cdot D(A).$$

b) La théorie usuelle des systèmes de Cramer fournit immédiatement la valeur des éléments de la matrice A^{-1} inverse d'une matrice régulière A. L'équation matricielle :

$$AX = Y$$

où Y ($1 \times n$) est donnée et X ($1 \times n$) inconnue se traduit par le système des n équations linéaires :

$$\sum_{i=1}^n a_i^j x^i = y^j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

qui est un système de Cramer. Si α_j^i est le coefficient de développement dans $D(A)$ de l'élément a_i^j , on sait que :

$$x^i = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j^i y^j}{D(A)} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^i}{D(A)} y^j = \sum_{j=1}^n b_j^i y^j$$

en posant :

$$(14-1) \quad b_j^i = \frac{\alpha_j^i}{D(A)}$$

Si $B = (b_j^i)$, on a la relation matricielle :

$$X = BY$$

et B' est la matrice inverse de A].

15. *Utilisation des matrices carrées pour la détermination du rang d'une matrice quelconque.*

Etant donnée une matrice $n \times p$, A, on appelle matrice carrée d'ordre q ($q \leq n, p$) extraite de A une matrice $q \times q$ obtenue en biffant $(n-q)$ lignes et $(p-q)$ colonnes de A. Le rang de la matrice A peut alors être déterminé à l'aide du théorème suivant :

THÉORÈME : *Le rang d'une matrice A est égal à l'ordre maximum des matrices carrées régulières que l'on peut extraire de A.*

Supposons A de rang r . Il nous faut montrer qu'il est impossible d'extraire de A une matrice carrée régulière d'ordre $s > r$, mais qu'il est possible d'en extraire au moins une d'ordre r .

A étant de rang r , il existe une relation linéaire au moins entre $s > r$ vecteurs-lignes arbitraires de A. Soit B une matrice carrée d'ordre s extraite de A. Ses lignes sont des parties de s lignes de A ; par suite, il existe entre elles une relation linéaire au moins et B ne peut être de rang s , donc ne peut être régulière.

Le second point est un peu plus long à établir : nous considérons l'espace vectoriel K^p muni de sa base canonique $(\vec{\varepsilon}_\mu)$.

Si A est de rang r , il existe un système libre de r vecteurs-lignes et nous pouvons supposer, pour simplifier les notations, qu'ils correspondent aux r premières lignes de A ; soit $(\vec{\lambda}_a)$ ($a = 1, \dots, r$) ces vecteurs, V_1 le sous-espace de K^p qu'ils engendrent.

Si $r < p$, il existe un $\vec{\varepsilon}_\mu$ au moins n'appartenant pas à V_1 , donc linéairement indépendant des $\vec{\lambda}_a$; adjoignons-le aux $\vec{\lambda}$ et recommençons avec le nouveau système de vecteurs ainsi obtenu. On voit ainsi qu'on peut toujours choisir parmi les $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ ($p-r$) vecteurs tels qu'avec les $\vec{\lambda}_a$ ils définissent une base de K^p ; supposons que ce soit les $(p-r)$ derniers vecteurs $(\vec{\varepsilon}_{r+1} \dots \vec{\varepsilon}_p)$, soit $(\vec{\varepsilon}_\Lambda)$ ($\Lambda = r+1, \dots, p$).

Nous désignerons par V_2 le sous-espace de K^p engendré par les r vecteurs $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_r)$, soit $(\vec{\varepsilon}_a)$, et par V_3 le sous-espace engendré par les $(\vec{\varepsilon}_\Lambda)$. Il est clair que V_1 et V_2 sont tous deux supplémentaires de V_3 .

Soit $\vec{x} = \sum_{\mu=1}^p x^\mu \vec{\varepsilon}_\mu \in V_1$; K^p étant somme directe de V_2 et V_3 :

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \quad (\vec{y} \in V_2, \vec{z} \in V_3),$$

et l'on a :

$$\vec{y} = \sum_{a=1}^r x^a \vec{\varepsilon}_a \qquad \vec{z} = \sum_{\Lambda=r+1}^p x^\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda$$

L'application f de V_1 dans V_2 définie par $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$ est manifestement linéaire. Elle est biunivoque puisque $\vec{y} = \vec{0}$ ne peut être obtenu que pour un vecteur \vec{x} appartenant simultanément à V_1 et V_3 , donc nul. Par suite, le rang de f est égal à la dimension r de V_1 et f est un *isomorphisme* de V_1 sur V_2 .

Dans cet isomorphisme au vecteur :

$$\vec{\lambda}_a = \sum_{\mu=1}^p a_a^\mu \vec{\varepsilon}_\mu \quad (a = 1, \dots, r)$$

correspond le vecteur :

$$f(\vec{\lambda}_a) = \sum_{b=1}^r a_a^b \vec{\varepsilon}_b \quad (a = 1, \dots, r)$$

et la matrice $B = (a_a^b)$ représentative de l'isomorphisme f dans les

bases $(\vec{\alpha}_a)$ de V_1 et $(\vec{\varepsilon}_b)$ de V_2 est de rang r , donc régulière. C'est une matrice régulière d'ordre r extraite de A .

16. *Contravariance et matrices semblables.*

a) Soit g un opérateur linéaire régulier de E , (\vec{l}_i) une base de E , P la matrice régulière représentative de g dans cette base. Les n vecteurs $\vec{\varepsilon}_i = g(\vec{l}_i)$ formant un système libre définissent une autre base de E . Inversement, étant donnée une base $(\vec{\varepsilon}_i)$ de E , il existe un opérateur linéaire g et un seul appliquant la base (\vec{l}_i) sur la base $(\vec{\varepsilon}_i)$ (§ 1) : c'est l'opérateur manifestement régulier qui à $\vec{x} = \sum x^i \vec{l}_i$ fait correspondre $g(\vec{x}) = \sum x^i \vec{\varepsilon}_i$.

Le vecteur $\vec{x} = g(\vec{x}')$, qui est un vecteur arbitraire de E , est défini dans la base $(\vec{\varepsilon}_i)$ par la matrice $1 \times n$:

$$X' = (x^i).$$

Dans la base initiale (l_i) , il est défini par la matrice :

$$X = PX'.$$

Ainsi, étant données deux bases (\vec{l}_i) et $(\vec{\varepsilon}_i)$, telles que la seconde se déduit de la première par l'opérateur linéaire représenté dans la première par la matrice régulière P , un vecteur \vec{x} défini dans la base initiale par la matrice X est défini dans la base finale par la matrice :

$$(16-1) \quad X' = P^{-1} X.$$

C'est ce qu'on entend en disant que les composantes d'un vecteur se transforment de façon *contravariante*.

b) L'espace E étant muni de deux bases (\vec{l}_i) et $(\vec{\varepsilon}_i)$, soit A une matrice $n \times n$. Elle représente, relativement à (\vec{l}_i) , un certain opérateur linéaire f . Si X représente par rapport à (\vec{l}_i) un vecteur \vec{x} de E , le vecteur $f(\vec{x})$ est représenté par :

$$Y = AX.$$

Relativement à $(\vec{\varepsilon}_i)$, \vec{x} et $f(\vec{x})$ sont représentés respectivement par :

$$X' = P^{-1} X \quad Y' = P^{-1} Y.$$

Par suite :

$$Y' = P^{-1} APX'$$

et la matrice représentative de f dans la base $(\vec{\varepsilon}_i)$ est :

$$B = P^{-1} AP \quad [P \in GL(n, K)].$$

La matrice B est dite *semblable* à A dans le groupe linéaire ; A et B représentent le même opérateur linéaire par rapport à deux bases différentes. En particulier, étant donnée une permutation π de la suite des indices i , les matrices $A = (a^i_j)$ et $B = (a^{\pi(i)}_{\pi(j)})$ sont semblables puis-

qu'elles représentent le même opérateur linéaire par rapport aux bases (l_i) et $(\tilde{e}_{\pi(i)})$. Nous dirons dans ce cas que B se déduit de A par *permutation*.

Il est aisé de voir que la similitude est une *relation d'équivalence* entre éléments de $M(n, n)$: en particulier, la transitivité est immédiate ;

si $C = \overset{-1}{Q} B Q$ [$Q \in GL(n, n)$] et $B = \overset{-1}{P} A P$,

$$C = \overset{-1}{Q} \overset{-1}{P} A P Q = (PQ)^{-1} A PQ$$

où PQ est régulière.

IV. NOTIONS SUR LE SPECTRE ET LA RÉDUCTION DES MATRICES CARRÉES DANS LE GROUPE LINÉAIRE

17. Le problème de la réduction.

La similitude étant une relation d'équivalence dans $M(n, n)$, considérons l'ensemble des matrices semblables à une matrice donnée. Cet ensemble dont les éléments sont deux à deux semblables est dit une *classe d'équivalence* dans le groupe linéaire et $M(n, n)$ est ainsi partagé en classes d'équivalence.

Une classe étant connue dès qu'on en connaît une matrice, il est naturel de chercher parmi toutes les matrices d'une classe une matrice aussi simple que possible de telle sorte qu'à chaque classe on puisse associer d'une manière unique à une permutation près une matrice qui la caractérise. Cette matrice, semblable à toute matrice de la classe, est dite la *réduite* d'une matrice quelconque A de la classe.

La réduite fait intervenir des fonctions des éléments de A qui jouissent d'une propriété importante : elles prennent mêmes valeurs pour toutes les matrices semblables à A. Une telle fonction est dite un *invariant de la matrice A relativement au groupe linéaire*. Le problème de la réduction d'une matrice $n \times n$ dans le groupe linéaire est un assez difficile problème d'Algèbre ; nous ne le traiterons que dans un cas particulier.

18. Matrices diagonales.

L'un des exemples les plus simples de matrices carrées est fourni par les matrices diagonales : une matrice $n \times n$, A est dite diagonale si tous ses éléments sont nuls, à l'exception de ceux figurant dans la diagonale principale ; I par exemple est une matrice diagonale. Soit α_i l'élément figurant à la i° place de la diagonale de la matrice diagonale A. Si (\tilde{l}_i) est une base de E, A représente un opérateur linéaire f tel que :

$$f(\tilde{l}_i) = \alpha_i \tilde{l}_i.$$

Par suite, chaque sous-espace de E de dimension 1 engendré par un \tilde{l}_i est invariant par f . Nous écrirons $A = (\alpha_i)$.

Les matrices diagonales définissent un *sous-anneau commutatif* de $M(n, n)$. En effet, si $A = (\alpha_i)$ et $B = (\beta_i)$ sont deux matrices diagonales, elles représentent par rapport à (\tilde{l}_i) deux opérateurs f et g tels que :

$$f(\vec{l}_i) = \alpha_i \vec{l}_i \quad g(\vec{l}_i) = \beta_i \vec{l}_i$$

Par suite :

$$f(\vec{l}_i) + g(\vec{l}_i) = (\alpha_i + \beta_i) \vec{l}_i \quad g[f(\vec{l}_i)] = \beta_i \alpha_i \vec{l}_i$$

et $A + B = (\alpha_i + \beta_i)$, $BA = (\beta_i \alpha_i)$ sont des matrices diagonales, le produit BA étant manifestement commutatif.

Il est naturel de rechercher s'il est possible de prendre pour réduite une matrice diagonale. Cela est *impossible* en général, mais nous allons mettre en évidence un cas important où il en est ainsi.

19. Vecteurs propres et valeurs propres.

Dans toute la suite, nous supposons que K est le corps des complexes C .

a) Soit E un espace vectoriel relativement à C . Etant donné un opérateur linéaire f de E , cherchons les sous-espaces de dimension 1 invariants par f . Si $\vec{p} \neq 0$ appartient à un tel sous-espace, il existe un scalaire χ tel que :

$$(19-1) \quad f(\vec{p}) = \chi \vec{p} \quad \chi \in C$$

ce qui peut s'écrire :

$$(19-2) \quad (\chi e - f)(\vec{p}) = 0.$$

S'il existe un tel vecteur \vec{p} , $(\chi e - f)$ ne peut être régulier. Inversement, si $(\chi e - f)$ est singulier, $(\chi e - f)^{-1}(0)$ est différent de zéro, et il existe des $\vec{p} \neq 0$ satisfaisant à (19-2) ou (19-1). Nous sommes ainsi amenés à la définition suivante :

DÉFINITION : On appelle *valeur propre* d'un opérateur linéaire f toute valeur $\chi \in C$ telle que $(\chi e - f)$ soit singulier. Tout vecteur $\vec{p} \neq 0$ tel que $f(\vec{p}) = \chi \vec{p}$ est dit *vecteur propre associé* à la valeur propre χ . L'ensemble des valeurs propres de f est dit le *spectre* de f .

b) [Adoptons dans E une base (\vec{l}_i) et soit A la matrice représentative de f ; $(\chi e - f)$ admet la matrice représentative $(\chi I - A)$. Pour que χ soit valeur propre de f , il faut et il suffit que $D(\chi I - A) = 0$, c'est-à-dire que χ soit un zéro de :

$$(19-3) \quad \psi(\chi) = D(\chi I - A) = \begin{vmatrix} \chi - a_1^1 & -a_1^2 & \dots & -a_1^n \\ -a_2^1 & \chi - a_2^2 & \dots & -a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n^1 & -a_n^2 & \dots & \chi - a_n^n \end{vmatrix}$$

Il importe de noter que, d'après sa définition même, le polynôme $\psi(\chi)$ de degré n est le même pour deux matrices semblables. En effet, si $B = \vec{P}^{-1} A \vec{P}$:

$$\chi I - B = \vec{P}^{-1} (\chi I - A) \vec{P}$$

et :

$$D(\chi I - B) = D(\chi I - A).$$

Au polynôme $\psi(\chi)$, on donne le nom de *polynôme caractéristique* de l'opérateur f ou de la matrice A . Ses zéros χ_1, \dots, χ_n , distincts ou non, qui sont les valeurs propres de f , sont aussi dits les valeurs propres de A . Les différents coefficients de $\psi(\chi)$ sont des invariants de A dans le groupe linéaire. En particulier, les deux premiers termes de $\psi(\chi)$ s'écrivent manifestement :

$$\psi(\chi) = \chi^n - \left(\sum_i a_i^t \right) \chi^{n-1} + \dots$$

Par suite, la fonction :

$$\text{tr. } A = \sum a_i^t = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n$$

est un invariant de A que l'on nomme la *trace* de cette matrice ou de l'opérateur f qu'elle représente dans une base $\{\vec{l}_i\}$.

20. Réduction d'une matrice à valeurs propres distinctes.

Soit A une matrice $n \times n$ à éléments dans C dont les valeurs propres χ_1, \dots, χ_n sont *toutes distinctes*. Dans l'espace vectoriel E sur C muni d'une base $\{\vec{l}_i\}$, A représente un opérateur f de valeurs propres (χ_i) que nous allons étudier. A chaque valeur propre χ_i correspond un vecteur propre $\vec{p}_i \neq 0$ au moins.

$$(20-1) \quad f(\vec{p}_i) = \chi_i \vec{p}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les n vecteurs propres \vec{p}_i ainsi obtenus *forment un système libre si les χ_i sont distinctes*. En effet, supposons qu'il n'y ait que $q < n$ vecteurs \vec{p}_i qui soient linéairement indépendants, par exemple les q premiers ; \vec{p}_n peut alors s'exprimer d'une manière et d'une seule comme combinaison linéaire des p_μ ($\mu = 1, \dots, q$).

$$(20-2) \quad \vec{p}_n = \sum_{\mu=1}^q \alpha_\mu \vec{p}_\mu \quad (\alpha_\mu \text{ non tous nuls})$$

On en déduit :

$$f(\vec{p}_n) = \sum_{\mu} \alpha_\mu f(\vec{p}_\mu)$$

soit :

$$\chi_n \vec{p}_n = \sum_{\mu} \alpha_\mu \chi_\mu \vec{p}_\mu$$

Si $\chi_n = 0$, les χ_μ sont tous non nuls et il existerait une combinaison linéaire des \vec{p}_μ à coefficients non tous nuls qui serait égale à 0. On a donc $\chi_n \neq 0$ et

$$(20-3) \quad \vec{p}_n = \sum_{\mu} \alpha_\mu \frac{\chi_\mu}{\chi_n} \vec{p}_\mu$$

qui doit coïncider avec (20-2) ; si $\alpha_\mu \neq 0$, on a donc $\chi_\mu = \chi_n$ et les valeurs propres ne seraient pas distinctes.

Le système libre (\vec{p}_i) définit une base de E. Rapportons l'opérateur f à cette base ; d'après (20-1), f est représenté par la matrice diagonale :

$$R(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

qui est ainsi semblable à A.

Ainsi, toute matrice A à valeurs propres distinctes est semblable à une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de A. Dans le cas où les valeurs propres ne sont pas distinctes, les réduites ont des formes plus compliquées (réduites de Jordan).

Pour qu'une matrice B soit semblable à une matrice A, il est nécessaire qu'elles aient mêmes valeurs propres. Cette condition est suffisante si les valeurs propres sont distinctes, car les deux matrices sont alors semblables à R(A).

21. THÉORÈME D'HAMILTON-CAYLEY.

Indiquons une démonstration élémentaire d'une propriété importante du polynôme caractéristique $\psi(\chi)$ d'une matrice carrée A.

Soit $\alpha_j^i(\chi)$ le coefficient de développement dans $D(\chi I - A)$ de l'élément qui figure à la i^e ligne et à la j^e colonne. C'est un polynôme en χ de degré $(n - 1)$. Posons $C(\chi) = (\alpha_j^i(\chi))$; on a (§ 14) :

$$(\chi I - A)^{-1} = \frac{C(\chi)}{\psi(\chi)}$$

et par suite :

$$(21-1) \quad C(\chi) (\chi I - A) = \psi(\chi) I$$

où $C(\chi)$ est un polynôme en χ à coefficients matriciels :

$$C(\chi) = \Gamma_1 \chi^{n-1} + \Gamma_2 \chi^{n-2} + \dots + \Gamma_n \quad [\Gamma_i \in M(n, n)].$$

Si $\psi(\chi)$ s'écrit explicitement :

$$\psi(\chi) = \chi^n + c_1 \chi^{n-1} + \dots + c_n,$$

on déduit de (21-1) par identification :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= I \\ \Gamma_2 - \Gamma_1 A &= c_1 I \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Gamma_n - \Gamma_{n-1} A &= c_{n-1} I \\ -\Gamma_n A &= c_n I \end{aligned}$$

En multipliant les différents membres de ces relations successivement par A^n, A^{n-1}, \dots, A^0 et ajoutant membre à membre, il vient :

$$\psi(A) = 0.$$

THÉORÈME D'HAMILTON-CAYLEY : Si $\psi(\chi)$ désigne le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A, on a :

$$\psi(A) = 0.$$

André LICHNEROWICZ,
Professeur au Collège de France.

FORMES QUADRATIQUES ET HERMITIENNES *

1. — INTRODUCTION

Une forme quadratique des n variables réelles x_1, x_2, \dots, x_n est un polynôme homogène du second degré de ces variables, à coefficients réels, soit :

$$(1) \quad F = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

Dans la notation (1), la sommation est faite par rapport aux indices i et j variant indépendamment l'un de l'autre de 1 à n ; la multiplication $x_i x_j = x_j x_i$ étant commutative, on supposera $a_{ij} = a_{ji}$, c'est-à-dire la matrice $n \times n$, $A = (a_{ij})$, *symétrique*. On écrit encore :

$$(2) \quad F = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$$

L'étude des formes quadratiques figure indirectement au programme de Mathématiques Spéciales ; l'équation d'une surface du second degré s'écrit en effet $F = 0$ en coordonnées homogènes $x_1 = X, x_2 = Y, x_3 = Z, x_4 = T$, ou encore :

$$F = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + \dots + 2CT + \dots + DT^2 = 0.$$

A la réduction de la forme (1) dans le groupe orthogonal est attachée « l'équation en s ». L'introduction explicite des formes quadratiques au programme de certaines Ecoles est susceptible de modifier le point de vue de l'exposé. On fera appel plus nettement aux notions essentielles (transformations linéaires, groupe orthogonal, symétrie $\vec{y} \cdot A\vec{x} = A\vec{y} \cdot \vec{x}$ de la forme polaire, $\vec{A}\vec{x}$ étant le transformé d'un vecteur \vec{x} par une matrice symétrique, etc...), notions qu'on retrouve dans d'autres chapitres ; on obtiendra ainsi les démonstrations les plus élémentaires, avec cet avantage qu'elles seront valables pour un nombre quelconque de variables. Il existe une autre raison de modifier un enseignement tourné jusqu'ici uniquement vers l'étude des quadriques : c'est de le rapprocher des applications que le plus grand nombre des élèves rencontreront en Physique et en Mécanique. Tout en conservant une place aux applications aux surfaces du second degré, qui interviennent commodément pour représenter et matérialiser une forme quadratique (exemple : l'ellipsoïde d'inertie d'un solide), on insistera sur l'étude de la transformation linéaire :

$$(3) \quad y_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \quad a_{ij} = a_{ji}$$

où $\vec{y} = A\vec{x}$ [$A = (a_{ij})$ matrice symétrique], sur les notions de vecteurs et valeurs propres de la transformation (3), celle-ci intervenant dans de nombreuses applications (exemple : la correspondance entre la rotation et le moment cinétique d'un solide, entre le couple de flexion d'une poutre et la ligne neutre, etc...), à tous les niveaux de la science.

On a traité ici, en même temps que les formes (1), les formes dites *hermitiennes* :

$$(4) \quad \Phi = \sum_{p,q} c_{pq} \bar{x}_p x_q$$

(*) Conférence prononcée le 17 mai 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, sixième conférence du cycle sur l'Algèbre organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

à coefficients c_{pq} complexes. On note a et \bar{a} deux nombres complexes conjugués. La forme Φ est *bilinéaire* en les deux groupes de variables x_p, \bar{x}_p . Elle sera dite *hermitienne* si sa valeur est réelle, quelle que soient les valeurs conjugués x_p, \bar{x}_p . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(5) \quad c_{pq} = \overline{c_{qp}}$$

comme on le voit aisément (on annulera les variables, sauf celles d'indices i et j). Les formes hermitiennes jouent un rôle essentiel, en Mécanique quantique, notamment.

L'étude des formes hermitiennes, leur réduction dans le groupe unitaire, se fait en mettant à profit leur caractère bilinéaire. Celle des formes quadratiques n'en est qu'un cas particulier. En effet, si dans (4) c_{pq} est réel, (5) donne $c_{pq} = c_{qp}$; une forme quadratique (1) est donc une forme hermitienne à coefficients réels, que l'on étudie pour les valeurs réelles des variables. On fera ici l'étude des formes hermitiennes en indiquant au passage les quelques simplifications à faire dans le cas de formes quadratiques : elles consistent essentiellement à confondre une quantité réelle avec sa conjuguée. Au prix de cette modification d'écriture, qui sera signalée dans chaque cas particulier, on disposera ici d'un exposé indépendant des formes quadratiques dans l'espace E_n à coordonnées réelles.

2. — ESPACE C_n ET ESPACE E_n NORMÉS

On désignera par C_n l'espace vectoriel de dimension n sur le corps des nombres complexes. Il existe un ensemble de n éléments (ou vecteurs) \vec{e}_i de C_n formant une base R_0 de C_n , c'est-à-dire permettant d'exprimer un élément quelconque \vec{x} de C_n sous la forme :

$$\vec{x} = \sum \vec{x}_i e_i.$$

Les x_i sont n nombres complexes appelés les coordonnées de \vec{x} par rapport à la base R_0 . Un endomorphisme de C_n est une transformation $\vec{x}' = g(\vec{x})$ de C_n dans lui-même, qui conserve la structure d'espace vectoriel (1) ; il est déterminé quand on connaît :

$$(6) \quad \vec{e}'_i = g(\vec{e}_i) = \sum_j a_{ji} \vec{e}_j.$$

On aura alors $\vec{x}' = \sum_i x_i g(\vec{e}_i) = \sum_{i,j} x_i a_{ji} \vec{e}_j$. Dans la base R_0 , la transformation $\vec{x}' = g(\vec{x})$ s'exprime par :

$$(7) \quad x'_i = \sum_j a_{ij} x_j.$$

On dira alors que l'endomorphisme $\vec{x}' = g(\vec{x})$, soit (6), est représenté par la matrice $A = (a_{ij})$ dans la base R_0 ; celle-ci permet en effet d'ex-

(1) On se reportera à la conférence de M. G. CHOQUET : Espaces vectoriels (*Bulletin de mai 1956*).

primer les coordonnées de \vec{x}' en fonction de celles de \vec{x} dans la base R_0 par les formules (7). On écrira encore celles-ci sous la forme condensée :

$$(8) \quad \vec{x}' = A\vec{x},$$

en interprétant dans (7) un vecteur $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ comme une matrice ($n \times 1$).

Deux endomorphismes $\vec{x}'' = B\vec{x}'$, $\vec{x}' = A\vec{x}$ opérés successivement donnent l'endomorphisme $\vec{x}'' = BA\vec{x} = C\vec{x}$ où $C = BA$ est la matrice produit :

$$c_{ij} = \sum_s b_{is} a_{sj}$$

Si A désigne la matrice (a_{ij}) , on appellera *transposée* de A la matrice A' d'élément :

$$a'_{ji} = a_{ij}.$$

On a : $(A')' = A$ et $(BA)' = A'B'$

Produit scalaire et norme dans C_n . On appellera *produit scalaire hermitien* de deux vecteurs, \vec{a} , \vec{b} , le nombre *complexe* noté $\vec{a} \cdot \vec{b}$, défini comme une fonction des vecteurs \vec{a} , \vec{b} , avec les propriétés :

$$a) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

$$b) \quad \vec{a}(\lambda \vec{b}_1 + \mu \vec{b}_2) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \mu \vec{a} \cdot \vec{b}_2,$$

λ et μ étant des nombres complexes quelconques.

c) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ est un nombre positif, et est nul seulement si \vec{a} est le vecteur nul. On appellera *norme* de \vec{a} le nombre positif $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Si \vec{a} et \vec{b} sont rapportés à une base $R_0(\vec{e}_j)$, on a :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_i a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j b_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$$

et le produit scalaire sera complètement défini si l'on fixe la valeur des produits $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$.

Deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont dits *orthogonaux* si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Un vecteur de norme $\|\vec{a}\| = 1$ sera dit *unitaire*. Un ensemble de vecteurs est dit *orthonormé* s'il est formé de vecteurs unitaires, orthogonaux deux à deux. Une base R_0 est dite *orthonormée* si elle est formée de vecteurs orthonormés.

THÉORÈME 1 : Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ sont m vecteurs linéairement indépendants, il existe un ensemble de vecteurs orthonormés $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m$ tels que pour chaque entier k ($1 \leq k \leq m$), les vecteurs $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ et $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ forment une base du même espace vectoriel.

Pour $m = 1$, l'énoncé est évident, car l'hypothèse entraîne $\|\vec{a}_1\| \neq 0$, et il suffit de prendre $\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}$.

On procède alors par récurrence sur m , en supposant l'énoncé établi pour $m - 1$: on dispose donc de $m - 1$ vecteurs $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{m-1}$ tels que $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ et $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ sous-tendent le même espace vectoriel pour $k \leq m - 1$, et en particulier pour $k = m - 1$.

Posons :

$$\vec{c} = \vec{a}_m - \sum_i \vec{b}_i (\vec{b}_i \cdot \vec{a}_m),$$

\vec{c} n'appartient visiblement pas à l'espace vectoriel déterminé par $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{m-1})$, sinon il en serait de même de \vec{a}_m , contrairement à l'hypothèse.

Définissons :

$$\vec{b}_m = \vec{c} (\|\vec{c}\|^{-1}).$$

On a alors :

$$\|\vec{b}_m\| = 1 \text{ et } \vec{b}_m \cdot \vec{b}_k = \|\vec{c}\|^{-1} [\vec{a}_m \cdot \vec{b}_k - (\vec{b}_k \cdot \vec{a}_m)] = 0.$$

Ainsi, $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ sous-tendent le même espace vectoriel que $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ et sont orthonormés.

REMARQUES : 1) Le produit hermitien $\vec{a} \cdot \vec{b}$ n'est pas commutatif, mais satisfait à a).

2) p vecteurs $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_p$ orthogonaux deux à deux et non nuls sont linéairement indépendants : de $\sum_1^p \lambda_i \vec{c}_i = 0$, on déduit en effet :

$$\vec{c}_i \cdot \sum \lambda_i \vec{c}_i = \lambda_i \|\vec{c}_i\|^2 = 0, \lambda_i = 0.$$

La démonstration précédente donne un procédé pour construire de proche en proche les vecteurs \vec{b}_i . On commencera d'abord par *orthogonaliser* le système des \vec{a}_i , c'est-à-dire par construire les vecteurs \vec{c}_i :

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 &= \vec{a}_1 \\ \vec{c}_2 &= \vec{a}_2 + \lambda_2^1 \vec{c}_1 \\ \vec{c}_3 &= \vec{a}_3 + \lambda_3^1 \vec{c}_1 + \lambda_3^2 \vec{c}_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \vec{c}_n &= \vec{a}_n + \lambda_n^1 \vec{c}_1 + \dots + \lambda_n^{n-1} \vec{c}_{n-1} \end{aligned}$$

Quels que soient les λ_p^q , aucun de ces vecteurs \vec{c}_i ne peut être nul.

On détermine les $\lambda_2^1, \dots, \lambda_m^q$ en écrivant successivement $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0, \dots, \vec{c}_m \cdot \vec{c}_q = 0$, soit : $\lambda_2^1 \|\vec{c}_1\|^2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0$, qui détermine λ_2^1 , puis :

$$\lambda_3^2 \|\vec{c}_1\|^2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{c}_1 = 0 \text{ et } \lambda_3^1 \|\vec{c}_2\|^2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{c}_2 = 0$$

qui déterminent λ_3^1 et λ_3^2 , etc... On *normera* ensuite le système des \vec{c}_i ,

en posant $\vec{b}_i = \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|}$; les \vec{b}_i sont alors le système orthonormé cherché.

Produit scalaire réel dans E_n . On désignera par E_n l'espace vectoriel de dimension n sur le corps des nombres réels. Un élément \vec{a} , ou vecteur de E_n , est déterminé par ses coordonnées réelles (a_i) , par rapport à un système de n vecteurs indépendants ou base R_0 dans E_n . La seule modification à apporter à ce qui précède concerne la définition du produit scalaire, qu'on notera toujours $\vec{a} \cdot \vec{b}$, et qu'on définit comme une fonction réelle de \vec{a} et \vec{b} satisfaisant à :

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

b) $\vec{a}(\lambda \vec{b}_1 + \mu \vec{b}_2) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \mu \vec{a} \cdot \vec{b}_2$,
 λ, μ étant des nombres réels quelconques.

c) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ est positif et n'est nul que si a est le vecteur nul.

On dira encore que \vec{a} et \vec{b} sont orthogonaux si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, que \vec{a} est un vecteur unitaire si $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = 1$; on définira comme plus haut un repère orthonormé et l'on établira le théorème 1 par la même démonstration, à ceci près qu'on peut écrire indifféremment $\vec{b}_m \cdot \vec{b}_k$ ou $\vec{b}_k \cdot \vec{b}_m$, le produit scalaire étant réel et commutatif.

Propriétés du produit scalaire hermitien (dans C_n) et du produit scalaire réel (dans E_n) :

a) Rapportons \vec{a} et \vec{b} à une base orthonormée R_0 , de vecteurs \vec{e}_i :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j} a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_i \bar{a}_i b_i \quad \text{et} \quad \|\vec{a}\|^2 = \sum_i \|a_i\|^2$$

on a

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left| \sum_i \bar{a}_i b_i \right| \leq \sum_i |a_i| |b_i|$$

et

$$\left(\sum_i |a_i| |b_i| \right)^2 \leq \sum_i |a_i|^2 \cdot \sum_i |b_i|^2$$

la dernière inégalité résultant du fait que dans le trinôme en λ :

$$M(\lambda) = \sum_i (|a_i| + \lambda |b_i|)^2 \geq 0$$

le discriminant est positif ou nul. On a donc :

$$(9) \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|.$$

b) Il en résulte :

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

$$(10) \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

dite inégalité triangulaire : la démonstration s'applique au produit scalaire hermitien défini dans C_n et au produit scalaire réel dans E_n ; dans ce cas, on interprétera (10) en rappelant le théorème de géométrie euclidienne : dans un triangle, un côté est inférieur ou égal à la somme des deux autres.

Opérateur adjoint : Soit T un opérateur du type déjà considéré au début de ce paragraphe, c'est-à-dire un endomorphisme représenté par la matrice (t_{ij}) . On associera à T un opérateur T* qui sera dit *opérateur adjoint* de T. On définira T* par :

$$(11) \quad T^* \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot T \vec{b}.$$

Il est facile de voir que $T^* \vec{a}$ est un endomorphisme de C_n . Si la matrice associée à T* est (t^*_{ij}) , on obtient, en explicitant (11) par rapport à une base R_0 orthonormée :

$$\sum_{i,j} \bar{t}^*_{ij} \bar{a}_j b_i = \sum_{i,j} \bar{a}_j t_{ji} b_i.$$

Donc, par rapport à R_0 , T* est déterminé par la matrice :

$$(12) \quad t^*_{ij} = \bar{t}_{ji}.$$

On appellera alors *adjointe* d'une matrice (t_{ij}) la matrice (t^*_{ij}) définie par (12) ; elle s'obtient en prenant la conjuguée de la transposée T' de $T = (t_{ij})$, les deux opérations, transposition et conjugaison, étant d'ailleurs commutatives. La définition de l'opérateur T* adjoint de T peut être présentée élémentairement, en définissant d'abord la matrice adjointe par (12) et constatant ensuite l'égalité (11). Toutefois, la définition directe de T* à partir de (11) est générale et s'étend à l'adjoint d'un opérateur quelconque dans un espace où est défini un produit scalaire hermitien.

On établit soit à partir de (11), soit à partir de (12) les propriétés suivantes de la matrice adjointe :

a) $(A^*)^* = A.$
 b) $(BA)^* = A^*B^*.$

c) Si A est une matrice $(n \times n)$ régulière, c'est-à-dire ayant un inverse (ou encore de déterminant non nul), on aura $AA^{-1} = 1$, ou, en appliquant b) : $(A^{-1})^* A^* = 1$; d'où : $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Opérateur hermitien. On est conduit alors à distinguer les opérateurs qui sont leurs propres adjoints. Un opérateur T sera dit *hermitien* (dans l'espace C_n) si l'on a :

$$\vec{y} \cdot T \vec{x} = T \vec{y} \cdot \vec{x}$$

ou encore $T = T^*$. Les opérateurs de la mécanique quantique sont de ce type en général. Cherchons à quelles conditions l'endomorphisme $T \vec{x} = A \vec{x}$, déterminé par la matrice $A = (a_{ij})$, possède cette propriété ; on aura :

$$(13) \quad \vec{y} \cdot A \vec{x} = A \vec{y} \cdot \vec{x}$$

ou d'après (12) : $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Pour que $A = (a_{ij})$ soit hermitien, il faut et il suffit que la forme :

$$\Phi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A \vec{x} = \sum_i \bar{x}_i \sum_j a_{ij} x_j = \sum_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i x_j$$

soit hermitienne, au sens précisé dans l'Introduction.

Opérateur symétrique dans E_n . Dans l'espace E_n , à coordonnées réelles, muni du produit scalaire réel et commutatif, on dira que l'opérateur T' est *transposé* de l'opérateur T si l'on a :

$$(11)' \quad T\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot T\vec{b}.$$

Si T est un endomorphisme de E_n , il en est de même de T' . La matrice (t'_{ij}) associée à T' est donnée par :

$$(12)' \quad t'_{ij} = t_{ji}$$

c'est la matrice *transposée* de $(t_{ij}) = A$. On a d'ailleurs ici $A' = A^*$; l'adjointe d'une matrice se confond avec sa transposée, les éléments étant réels. On dira que l'opérateur T est *symétrique* s'il coïncide avec son transposé. Pour que l'opérateur $T\vec{x}$, représenté dans la base orthonormée R_0 par $\vec{y} = A\vec{x}$, $A = (a_{ij})$, soit symétrique, il faut et il suffit que $a_{ij} = a_{ji}$, donc que la matrice A soit symétrique. La forme :

$$F(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A\vec{x} = \sum a_{ij} x_i x_j$$

est dite *associée à l'opérateur dans R_0* et l'on appellera *forme polaire* la fonction des deux vecteurs \vec{x}, \vec{y} : $F_1(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} \cdot A\vec{x} = A\vec{y} \cdot \vec{x}$, qui s'écrit encore $\vec{x} \cdot A\vec{y}$, le produit scalaire réel étant commutatif.

Vecteurs propres et valeurs propres (1). Soit T un opérateur hermitien (dans C_n) ou symétrique (dans E_n). On appelle vecteur propre de l'opérateur T un vecteur \vec{x} non nul tel que l'on ait :

$$(14) \quad T\vec{x} = s\vec{x},$$

le nombre s est dit *valeur propre* de l'opérateur et \vec{x} *vecteur propre* associé à s . On désignera par A la matrice associée à T dans R_0 .

Propriétés des vecteurs et des valeurs propres :

1) Il existe n valeurs propres (réelles ou distinctes). En effet, I étant la matrice unité, (14) s'écrit $(A - sI)\vec{x} = 0$. En annulant les n coordonnées du premier membre, on obtient n équations linéaires ; elles n'admettent une solution $\vec{x} \neq 0$, que si l'on a :

$$D_A(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$

où $D_A(s) = (-1)^n s^n + \dots$; il existe donc au plus n valeurs propres distinctes ou confondues. Réciproquement, si s est racine de $D_A(s) = 0$, il existe un vecteur $\vec{x} \neq 0$ satisfaisant à $A\vec{x} = s\vec{x}$, donc vecteur propre associé à s .

2) Les vecteurs propres et les valeurs propres, par définition, ne dépendent que de la correspondance :

$$(15) \quad \vec{y} = T\vec{x}$$

et non de la matrice A qui représente l'opérateur dans la base R_0 . On montrera plus loin la propriété plus précise : si l'on représente T par $A = (a_{ij})$ dans R_0 et par $B = (b_{ij})$ dans une autre base R_1 également orthonormée, on a : $D_A(s) \equiv D_B(s)$.

(1) Voir la conférence de M. A. Lichnerowicz : Applications linéaires et matrices.

3) Toute valeur propre est réelle. En effet, de (14) on déduit :

$$\vec{x} \cdot A\vec{x} = s\vec{x} \cdot \vec{x} = s\|\vec{x}\|^2 \quad \text{d'où } s = \frac{\vec{x} \cdot A\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\Phi(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2}$$

Si \vec{x} est vecteur propre, $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ l'est aussi. Donc, on obtient : la valeur propre s est la valeur de la forme hermitienne $\Phi(\vec{x})$ pour un vecteur propre \vec{x} associé à s , et unitaire.

4) Deux vecteurs propres \vec{x}, \vec{y} , associés à deux valeurs propres s_1, s_2 distinctes sont orthogonaux.

En effet, de $A\vec{x} = s_1\vec{x}$ et de $A\vec{y} = s_2\vec{y}$, on déduit en considérant la forme polaire : $\vec{y} \cdot A\vec{x} = s_1\vec{y} \cdot \vec{x}$ et $A\vec{y} \cdot \vec{x} = s_2\vec{y} \cdot \vec{x}$. On a donc :

$$(s_1 - s_2)\vec{y} \cdot \vec{x} = 0, \quad \text{ou } \vec{y} \cdot \vec{x} = 0.$$

Cas de E_n . Les énoncés subsistent. On modifiera la démonstration de 3) comme suit : Soit s une racine de $D_A(s) = 0$. Que s soit réel ou complexe, il lui correspond des nombres x_i (éventuellement complexes)

non tous nuls, solutions des n équations homogènes ; $sx_i = \sum_j a_{ij}x_j$.

On a alors :

$$\sum_{i,j} \bar{x}_i a_{ij} x_j = s \sum_i \bar{x}_i x_i = s \sum_i |x_i|^2$$

D'où :

$$s = \frac{\sum a_{ij} \bar{x}_i x_j}{\sum |x_i|^2}$$

Le numérateur est réel d'après $a_{ij} = a_{ji}$; donc s est réel ; les valeurs propres d'une matrice symétrique sont donc réelles.

3. — RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES ET HERMITIENNES

On dira qu'un opérateur $\vec{y} = f(\vec{x})$ est unitaire si l'on a $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. Une matrice $A = (a_{ij})$ sera dite unitaire si l'endomorphisme de C_n défini par $\vec{y} = A\vec{x}$ par rapport à une base orthonormée est unitaire, c'est-à-dire si l'on a $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

THÉORÈME 2 : Pour que la matrice A soit unitaire, il faut et il suffit qu'on ait $A^*A = I$, I étant la matrice unité.

En effet, si A vérifie :

$$(18) \quad A^*A = I,$$

on a, d'après la définition même de l'adjointe A^* :

$$\|A\vec{a}\|^2 = A\vec{a} \cdot A\vec{a} = \vec{a} \cdot A^*A\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2.$$

Réciproquement, si $\|A\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2$, pour tout vecteur \vec{a} , on a :

$$\begin{aligned} \|A(\vec{a} + \vec{b})\|^2 &= (A\vec{a} + A\vec{b}) \cdot (A\vec{a} + A\vec{b}) = \|A\vec{a}\|^2 + \|A\vec{b}\|^2 + A\vec{a} \cdot A\vec{b} + A\vec{b} \cdot A\vec{a} \\ &= \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

D'où :

$$(19) \quad A\vec{a} \cdot A\vec{b} + A\vec{b} \cdot A\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Remplaçons dans (19) \vec{b} par $\vec{b}' = i\vec{b}$:

$$A\vec{a} \cdot A\vec{b}' - A\vec{b}' \cdot A\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}' - \vec{b}' \cdot \vec{a}.$$

On obtient par addition des deux égalités :

$$(20) \quad A\vec{a} \cdot A\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Ainsi : la conservation de la norme entraîne plus généralement celle du produit scalaire. On obtient alors :

$$A\vec{a} \cdot A\vec{b} = \vec{a} \cdot A^*A\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

ou $\vec{a}[A^*A\vec{b} - \vec{b}] = 0$, quel que soit \vec{a} . Si l'on prend pour \vec{a} le vecteur qui figure dans le crochet, on obtient $A^*A\vec{b} - \vec{b} = 0$, pour tout \vec{b} , donc (18).

Une matrice unitaire est donc régulière, c'est-à-dire de déterminant δ non nul, car on a :

$$\delta\bar{\delta} = 1, \quad |\delta| = 1.$$

Cas de E_n . Les endomorphismes unitaires, si l'on interprète E_n comme un ensemble de vecteurs issus d'un point O, sont les rotations autour de O. Une matrice A qui définit un tel endomorphisme par rapport à une base orthonormée est dite *orthogonale*. Le théorème 3 (même démonstration) s'énonce : *Pour que A soit orthogonale, il faut et il suffit qu'on ait : $A'A = 1$ ou $A' = A^{-1}$.*

La démonstration est simplifiée : à partir de (19), on déduit, le produit scalaire réel étant commutatif : $A\vec{a} \cdot A\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$, soit (20), et on achève comme plus haut.

REMARQUES :

1) Les transformations unitaires de C_n forment un groupe dit *groupe unitaire* ; de même, les transformations orthogonales de E_n forment le *groupe orthogonal*. De tels groupes sont d'une espèce particulière : chaque opération du groupe est déterminée par la connaissance de n^2 paramètres (à savoir les éléments a_{ij} de la matrice A), complexes dans le premier cas, réels dans le second, et les paramètres qui correspondent à l'opération $O = O_1O_2$, produit des opérations O_1, O_2 du groupe, s'obtiennent analytiquement en fonction des paramètres de O_1 et de O_2 (il suffit de calculer les termes de la matrice produit) : de tels groupes sont appelés *groupes de Lie*.

2) Les n^2 éléments (a_{ij}) d'une matrice unitaire sont liés par des relations qu'on obtient à partir de (18) ; notons δ_{ij} les éléments de la matrice unité I : ($\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$).

On aura :

$$(21) \quad \sum_s \bar{a}_{si} a_{sj} = \delta_{ij}$$

en exprimant (18). Réciproquement, (21) entraîne $BA = I$ avec $B = A^*$, d'où :

$$(22) \quad A^*A = I = AA^*.$$

La seconde égalité (22) équivaut à :

$$(23) \quad \sum_s a_{is} \bar{a}_{js} = \delta_{ij}$$

Ainsi, les systèmes d'équations (21) et (23) sont équivalents. Dans le cas orthogonal (a_{ij} réels), on retrouve pour $n=3$ une condition classique pour que 9 nombres soient les éléments d'une matrice orthogonale.

3) Etant données deux bases R_0 et R_1 orthonormées de vecteurs \vec{e}_i, \vec{e}'_i respectivement, il existe une matrice S unitaire telle que :

$$\vec{e}'_i = S\vec{e}_i.$$

En effet, on a d'après (6), si $S = (s_{ij})$ est telle que :

$$\vec{e}'_i = S\vec{e}_i = \sum_j s_{ji} \vec{e}_j, \text{ d'où :}$$

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_k = S\vec{e}_i \cdot S\vec{e}_k = \sum_j \bar{a}_{ji} a_{jk} = \delta_{ik},$$

qui d'après (21) exprime que S est unitaire.

On peut déterminer (théorème 1) une base orthonormée en prenant comme vecteur \vec{e}_i un vecteur unitaire arbitraire. On peut donc déterminer une matrice unitaire S telle que : $S\vec{e}_1 = \vec{a}_1$, \vec{a}_1 étant un vecteur unitaire donné.

L'énoncé (en remplaçant unitaire par orthogonal) subsiste dans E_n et s'interprète géométriquement.

THÉORÈME 3 : Si A est une matrice hermitienne et S une matrice unitaire, $B = SAS^{-1}$ est une matrice hermitienne.

Par rapport à une base R_0 orthonormée, interprétons $\vec{y} = A\vec{x}$ comme un opérateur hermitien, et montrons que $\vec{y} = B\vec{x}$ est aussi hermitien, c'est-à-dire qu'on a :

$$B\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot B\vec{y}$$

ou :

$$SAS^{-1}\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot SAS^{-1}\vec{y}.$$

Or, on a :

$$A\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot A\vec{v}, \text{ etc...}$$

où en posant $\vec{u} = S^{-1}\vec{x}$, $\vec{v} = S^{-1}\vec{y}$,

$$AS^{-1}\vec{x} \cdot S^{-1}\vec{y} = S^{-1}\vec{x} \cdot AS^{-1}\vec{y},$$

ou encore, d'après (20) appliqué aux matrices unitaires S et S^{-1} :

$$SAS^{-1}\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot SAS^{-1}\vec{y}.$$

De même : si A est une matrice symétrique, et S une matrice orthogonale, $B = SAS^{-1}$ est une matrice symétrique.

REMARQUE : Si l'opérateur (15) est représenté par une matrice hermitienne A par rapport à une base orthonormée R₀ et par une matrice B dans la base R₁, D_A(s) ≡ D_B(s).

En effet, S étant la matrice unitaire qui fait passer de R₀ à R₁, B' = (S*)⁻¹AS⁻¹ = SAS⁻¹, d'où : D_B = déterminant de [B — sI] = déterminant de [SAS⁻¹ — sI] = déterminant S. [A — sI]S⁻¹ = D_A.

Réduction d'une forme hermitienne. Soit $\Phi = \sum_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i x_j$ une forme que nous interprétons : $\Phi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A \vec{x}$; A = (a_{ij}) étant la matrice associée à l'opérateur hermitien $\vec{y} = A \vec{x} = T \vec{x}$ dans une base R₀ orthonormée, x_i les coordonnées de \vec{x} dans R₀, Φ(\vec{x}) étant la forme hermitienne associée à T dans R₀.

THÉORÈME A : Il existe dans C_n au moins une base orthonormée R, telle que si ξ_i sont les coordonnées de \vec{x} dans R, Φ(\vec{x}) = $\vec{x} \cdot T \vec{x}$ soit ramenée à l'expression :

$$(24) \quad \Phi = \sum_{i=1}^p s_i \xi_i \bar{\xi}_i \quad p \leq n.$$

les s_i étant réels.

Soit $\vec{x}_i = \sum_j s_{ij} \xi_j$; la matrice S = (s_{ij}) est unitaire, et l'on a $\Phi = \sum_{s,t} b_{st} \xi_s \bar{\xi}_t$ avec B = (b_{st}) = S*AS = S⁻¹AS.

L'énoncé précédent équivaut donc encore à :

THÉORÈME B : A une matrice hermitienne A, on peut associer au moins une matrice unitaire S telle que B = S⁻¹AS ait la forme diagonale :

$$B = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ 0 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

les s_i étant réels.

On établira l'énoncé A à partir de la propriété :

LEMME : Si \vec{a}_1 est un vecteur propre unitaire de l'opérateur hermitien T, et si l'on pose $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \vec{u}$, avec $\vec{a}_1 \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{y} = T \vec{x}$ se décompose sous la forme :

$$\vec{y} = T \vec{x} = s_1 x_1 \vec{a}_1 + \vec{v}$$

s₁ est la valeur propre associée à \vec{a}_1 ; de plus, on a les propriétés :

1) $\vec{v} = T \vec{u}$, 2) \vec{v} est ainsi que \vec{u} , dans le sous-espace C_{n-1}(\vec{a}_1) orthogonal à \vec{a}_1 , 3) $\Phi = \vec{x} \cdot T \vec{x} = s_1 \bar{x}_1 x_1 + \vec{u} \cdot T \vec{u}$ où $\vec{u} \cdot T \vec{u}$ est une forme hermitienne de l'espace C_{n-1}(\vec{a}_1).

En effet : $T(\vec{x}) = T(x_1\vec{a}_1 + \vec{u}) = x_1T(\vec{a}_1) + T(\vec{u}) = s_1x_1\vec{a}_1 + T(\vec{u})$.

De plus : $\vec{a}_1 \cdot T(\vec{u}) = T(\vec{a}_1) \cdot \vec{u} = s_1\vec{a}_1 \cdot \vec{u} = 0$. Par suite :

$$\vec{x} \cdot T\vec{x} = (x_1\vec{a}_1 + \vec{u}) \cdot (s_1x_1\vec{a}_1 + T\vec{u}) = s_1x_1x_1 + \vec{u} \cdot T\vec{u}.$$

COROLLAIRE : Si on rapporte \vec{x} à une base orthonormée de C_n , soit $R_1 = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, pour laquelle \vec{a}_1 est un vecteur propre de $T\vec{x}$ associé à s_1 , la forme hermitienne $\Phi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot T\vec{x}$ se décompose :

$$(25) \quad \Phi = s_1\bar{x}_1x_1 + \Phi_1$$

où $\Phi_1 = \vec{u} \cdot T\vec{u}$ est une forme hermitienne d'au plus $n-1$ variables, associée à la trace de l'opérateur T dans $C_{n-1}(\vec{a}_1)$.

En effet, si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ dans R_1 , on a $\Phi_1 = \vec{u} \cdot T\vec{u}$, où \vec{u} et $T\vec{u}$ sont dans l'espace $C_{n-1}(\vec{a}_1)$ des coordonnées x_2, \dots, x_n .

DISCUSSION : L'existence de \vec{a}_1 et de s_1 (qui peut éventuellement être nulle) étant assurée, on est ramené à étudier Φ_1 .

a) Si $\Phi_1 \equiv 0$, ce théorème A est établi avec $p \leq 1$ et

$$R = (\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n),$$

$\vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ étant une base orthonormée quelconque de $C_{n-1}(\vec{a}_1)$ définie par $\vec{a}_1 \cdot \vec{x} = 0$. On a $T\vec{b}_k = 0$, pour $k \geq 2$; les vecteurs $\vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ sont $n-1$ vecteurs propres de T associés à la valeur propre $s = 0$. Par rapport à R , on a $\Phi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot T\vec{x} = s_1\bar{x}_1\xi_1$, avec $x_1 = \xi_1$, et

$$D_R(s) = (-1)^{n-1}(s_1 - s)s^{n-1}.$$

b) Si $\Phi_1 \not\equiv 0$, on poursuit en choisissant \vec{b}_2 unitaire, vecteur propre de $v = T\vec{u}$, T agissant comme opérateur hermitien dans $C_{n-1}(\vec{a}_1)$; \vec{b}_2 est un vecteur propre de T dans C_n , orthogonal à $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$. On obtient :

$$\Phi = s_1\bar{x}_1x_1 + s_2\bar{x}_2x_2 + \Phi_2$$

dans $R_2(\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \vec{b}_2 = \vec{a}_2, \vec{b}_3, \dots, \vec{b}_n)$; Φ_2 est une forme hermitienne à $n-2$ variables au plus : $\Phi_2 = \vec{\omega} \cdot T\vec{\omega}$, $\vec{\omega}$ étant dans le sous-espace $C_{n-1}(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ défini par $\vec{b}_1 \cdot \vec{x} = 0$, $\vec{b}_2 \cdot \vec{x} = 0$.

Si $\Phi_2 \equiv 0$, A est établi avec $p \leq 2$, $R = (\vec{a}_1 = \vec{b}_1, \vec{b}_2, b_3, \dots, \vec{b}_n)$, $\vec{b}_3, \dots, \vec{b}_n$ étant une base orthonormée quelconque de $C_{n-2}(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Si $\Phi_2 \not\equiv 0$, on poursuit par application répétée du lemme et du corollaire précédents; on obtiendra la forme canonique (24) après $p \leq n$ opérations.

REMARQUES : Indiquons quelques variantes :

1) On peut procéder sur les matrices en utilisant le théorème 3; on aboutit aisément à la forme (B) de l'énoncé; \vec{a}_1 étant toujours un vecteur propre unitaire de $y = T\vec{x}$, R_1 une base orthonormée $(\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$, S la transformation unitaire qui fait passer de R_0 à R_1 , on a :

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i x_j = \vec{x} \cdot A \vec{x} \quad (\text{dans } R_0) \quad A = (a_{ij})$$

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j} b_{ij} \bar{x}'_i \bar{x}'_j = \vec{x} \cdot B \vec{x} \quad (\text{dans } R_1) \quad B = (b_{ij})$$

avec $B = S^{-1}AS$.

On sait (théorème 3) que B est hermitienne ; $B\vec{a}_1 = s_1\vec{a}_1$ entraîne donc $b_{11} = s_1$, $b_{1j} = b_{j1} = 0$, ($j \geq 2$), et $b_{11} = \bar{b}_{11}$; on établit ainsi directement que la valeur propre s_1 est réelle ; B est constituée d'une matrice $B' = (b'_{ij})$ hermitienne, $b'_{ij} = b_{ij}$ ($2 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$) de type $(n-1) \times (n-1)$, complétée en haut et à gauche par s_{11} et par des zéros ; si donc l'énoncé est supposé vrai pour $n-1$, il existe une matrice unitaire θ , de type $(n-1) \times (n-1)$, telle que $\theta^{-1}B'\theta$ soit une matrice diagonale d'éléments s_2, \dots, s_n réels ; la matrice T de type $(n \times n)$, obtenue en complétant θ en haut et à gauche par 1 sur la diagonale, par zéro ailleurs, est une matrice unitaire de C_n ; il en est de même de $S_1 = TS$; $B'_1 = S_1^{-1}AS$ est alors hermitienne, diagonale, ce qui établit l'énon-

cé B. Soit $S_1 = (s_{ij}^{(1)})$; la substitution $x_i = \sum_1^n s_{ij}^{(1)} \xi_j$ donne alors

$\Phi = \sum_1^n s_i \bar{\xi}_i \xi_i$. Au prix d'un changement dans l'ordre des indices (ce qui effectue une transformation unitaire), on peut écrire d'abord les termes non nuls, d'où la forme (A) de l'énoncé.

2) Soient $\vec{\beta}_k$ les vecteurs de la base R obtenue par le théorème précédent ; ce sont des vecteurs propres de T : $T\vec{\beta}_k = s_k\vec{\beta}_k$. Supposons-les rangés de manière qu'on ait $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p$, s_{p+1}, \dots, s_n étant nuls si l'on a $p < n$ dans l'énoncé (A). On a alors, à partir de (24) :

$$\begin{aligned} s_1 &= \max. \Phi(\vec{x}) \text{ pour } \|\vec{x}\| = 1, & \text{ou } s_1 &= \max. \frac{\Phi(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} \\ s_2 &= \max. \Phi(\vec{x}) \text{ pour } \|\vec{x}\| = 1, & \text{et } \vec{x} \cdot \beta_1 &= 0 \\ (26) \quad s_k &= \max. \Phi(\vec{x}) \text{ pour } \|\vec{x}\| = 1, & \text{et } \vec{x} \cdot \beta_j &= 0, \quad 1 \leq j \leq k-1. \end{aligned}$$

Un procédé de calcul du vecteur propre $\vec{\beta}_k$ consiste donc à chercher le vecteur $\vec{\beta}_k$ qui réalise le maximum (26) et à calculer $s_k = \Phi(\vec{\beta}_k)$.

On peut en déduire une démonstration du théorème A en admettant l'énoncé suivant : une fonction de plusieurs variables, définie et continue dans un espace compact, atteint effectivement dans ce domaine sa borne supérieure et sa borne inférieure.

On a en effet l'énoncé suivant :

THÉORÈME : Soit $\vec{\beta}_1$ un vecteur unitaire pour lequel $\Phi(\vec{x})$ atteint son maximum sous la condition $\|\vec{x}\| = 1$; soit $\vec{\beta}_2$ un vecteur unitaire pour lequel $\Phi(\vec{x})$ atteint son maximum sous les conditions $\|\vec{x}\| = 1$, $\vec{x} \cdot \beta_1 = 0 \dots$; soit de proche en proche $\vec{\beta}_k$ ($1 \leq k \leq n$) un vecteur unitaire pour lequel $\Phi(\vec{x})$ atteint son maximum sous les conditions $\|\vec{x}\| = 1$,

$\vec{x} \cdot \vec{\beta}_j = 0, 1 \leq j \leq k-1$. Alors si on exprime $\vec{x} = (\xi_j)$ dans la base orthonormée $R (\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n)$, on obtient la forme canonique (24), s_k étant donné par (26).

Soit en effet $\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j} b_{ij} \bar{\xi}_i \xi_j$ dans $R : (b_{ij})$ est hermitienne d'après le théorème 3. On a $\Phi(\vec{\beta}_1) = s_1 = b_{11}$; de plus, on a $\Phi(\vec{x}) \leq s_1$ pour $\|\vec{x}\| = 1$, ce qui entraîne, quel que soit \vec{x} :

$$h(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}) - s_1 \|\vec{x}\|^2 \leq 0$$

$h(\vec{x})$ est évidemment une forme hermitienne. Annulons les ξ_j , d'indices $j \geq 3$; $h(\vec{x}) \leq 0$ s'écrit alors :

$$h(\vec{x}) = b_{12} \bar{\xi}_1 \xi_2 + b_{21} \bar{\xi}_2 \xi_1 + b_{22} \bar{\xi}_2 \xi_2 \leq 0,$$

inégalité réalisée quels que soient ξ_1, ξ_2 . Pour $\xi_2 = \lambda \xi_1, \lambda$ réel, on obtient $|\xi_1|^2 [(b_{12} + b_{21})\lambda + b_{22}\lambda^2] \leq 0$, quel que soit λ réel, ce qui exige $b_{12} + b_{21} = 0, b_{22} \leq 0$. Pour $\xi_2 = i\lambda \xi_1, \lambda$ réel, on obtient de même $b_{12} - b_{21} = 0$. Finalement, on a nécessairement $b_{12} = b_{21} = 0$, et, de même, $b_{1j} = b_{j1} = 0$ pour $j > 1$. La forme s'écrit donc dans R :

$$\Phi(\vec{x}) = s_1 \bar{\xi}_1 \xi_1 + \Phi_1(\vec{x})$$

où $\Phi_1(\vec{x})$ est hermitienne et ne contient que les variables ξ_2, \dots, ξ_n . Sous la condition $\xi_1 = 0$, Φ se réduit à Φ_1 et le procédé s'applique maintenant à Φ_1 . Ainsi, dans la base R des vecteurs $\vec{\beta}_k$ déterminés comme éléments maximaux successifs, T a nécessairement l'expression canonique (24).

3) Le calcul qui ramène $\Phi = \sum a_{ij} \bar{x}_i x_j$ à la forme canonique (24) n'est pas modifié si l'on substitue à la multiplication commutative $\bar{x}_i x_j$ toute opération distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition. Ainsi, en considérant la multiplication extérieure ($\bar{x}_i \Delta x_j = x_j \Delta \bar{x}_i$), on énoncera : la substitution $x_i = \sum_j s_{ij} \bar{\xi}_j$ qui ramène la forme hermitienne Φ à la forme canonique (24) ramène simultanément la forme $\Psi = \sum a_{ij} \bar{x}_i \Delta x_j$ à la forme canonique $\Psi = \sum s_{ij} \bar{\xi}_i \Delta \xi_j$.

Cas de E_n . Les résultats et les démonstrations qui précèdent se transcrivent sans autre modification que celles qui proviennent du fait qu'on peut identifier x_i et \bar{x}_i . On obtient alors :

THÉORÈMES : A) Il existe dans E_n au moins une base R orthonormée telle que si l'on exprime $\vec{x} = (\xi_i)$ dans R , la forme quadratique symétrique :

$$F = a_{ij} x_i x_j = \vec{x} \cdot \vec{A} \vec{x} \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

s'écrit :

$$F = \sum_1^p s_i \xi_i^2, \quad p \leq n.$$

les s_k sont réels, les vecteurs $\vec{\beta}_k$ de R sont des vecteurs propres de l'opérateur symétrique $\vec{y} = A\vec{x}$. La transformation $x_i = \sum s_{ij} \xi_j$ est faite par une matrice $S = (s_{ij})$ orthogonale.

B) A une matrice symétrique $A = (a_{ij})$, on peut associer une matrice $S = (s_{ij})$ orthogonale telle que $B = S^{-1}AS$ ait la forme diagonale.

DÉFINITIONS : 1) On dira qu'une forme quadratique F (ou une forme hermitienne Φ) est définie positive si l'on a $F > 0$ (ou $\Phi > 0$) pour tout vecteur $\vec{x} = (x_i)$ non nul.

2) On dira qu'elle est semi-définie positive si l'on a $F \geq 0$ (ou $\Phi \geq 0$).

THÉORÈME : Pour que F (ou Φ) soit définie positive, il faut et il suffit qu'elle soit de rang maximum $p = n$ et que l'on ait $s_k > 0$ pour toutes les valeurs propres ($1 \leq k \leq n$).

On appliquera les résultats qui précèdent à la réduction en axes rectangulaires de l'équation des coniques et des quadriques ; leur classification s'appuie sur les notions de rang et de signature de la forme. Des remarques du genre de celle-ci : les racines s_k de l'équation en s sont les valeurs du paramètre s pour lesquelles la conique à l'infini du faisceau, définie en coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 , par :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) + s \sum_1^3 x_i^2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

est décomposée, peuvent être d'abord présentées sous la forme suivante : les valeurs propres s_k de la transformation symétrique $\vec{y} = A\vec{x}$ associée à la forme quadratique F sont celles et seulement celles pour lesquelles le rang de la forme

$$F_s = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + s \sum_1^n x_i^2$$

est inférieur à n ; on utilisera ensuite cet énoncé en faisant remarquer qu'une forme de rang $p \leq 2$ est visiblement le produit de deux formes linéaires réelles ou conjuguées.

Pierre LELONG,
Professeur à la Sorbonne.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) H. WEYL. — *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Leipzig, 1931 (Edition américaine chez Dover).
- (2) G. JULIA. — *Introduction mathématique aux théories quantiques*. Gauthier-Villars, 1936.
- (3) A. LICHNEROWICZ. — *Algèbre et analyse linéaires*, Masson.
- (4) C. CHEVALLEY. — *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, 1946.
- (5) R. FORTET. — *Espaces vectoriels*. Cours de M.M.P. édité par le Centre de documentation universitaire, Paris.

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS

ÉTUDE sur une ALGÈBRE ABSTRAITE BOOLEIENNE

I. On considère dans ce qui suit un ensemble E dont les éléments sont désignés par a, b, c, \dots . On suppose définie sur cet ensemble une relation d'égalité notée $=$ réflexive, symétrique et transitive. Deux lois de composition interne sont définies sur cet ensemble. Une loi notée $(+)$ que nous appellerons « addition » et une loi notée (\times) ou \cdot ou par un blanc que nous appellerons « multiplication ».

II. AXIOMES.

1° il existe un élément noté o tel que :

$$(1) \quad a + o = a \text{ quel que soit } a \in E ;$$

2° il existe un élément noté 1 tel que :

$$(2) \quad a \times 1 = a \text{ quel que soit } a \in E ;$$

3° les deux lois de composition interne sont commutatives :

$$(3) \quad a + b = b + a,$$

$$(4) \quad ab = ba ;$$

4° on a les deux lois de distributivité suivantes :

$$(5) \quad a + bc = (a + b)(a + c),$$

$$(6) \quad a(b + c) = ab + ac.$$

5° Si les éléments notés o et 1 sont uniques, à tout a correspond un élément noté \bar{a} tel que l'on ait simultanément :

$$(7) \quad a + \bar{a} = 1,$$

$$(8) \quad a\bar{a} = o \quad a \text{ sera dit le complément de } \bar{a}.$$

Remarquons que contrairement à ce qui se passe dans l'algèbre ordinaire, les deux opérations notées $(+)$ et (\times) jouent le même rôle l'une par rapport à l'autre [axiomes (5) et (6)] et que plus généralement à tout axiome où interviennent les symboles $\times, +, 1, o$ on peut associer un axiome dual obtenu en remplaçant les symboles précédents par $+, \times, o, 1$, respectivement.

A toute démonstration sera ainsi associée une démonstration duale qu'il sera inutile de faire explicitement.

La compatibilité de ces axiomes sera résolue plus loin en indiquant un modèle géométrique de cet édifice de relations logiques. On n'examinera pas le problème de l'indépendance des axiomes.

III. THÉORÈMES.

1° *Unicité des éléments neutres o et 1 .*

S'il existait un autre élément neutre pour l'addition, soit o' , on aurait :

$$o + o' = o \text{ par définition,}$$

$$o' + o = o' \text{ d'après (1) où on fait } a = o',$$

or $o' + o = o + o'$ d'après (3).

donc $o = o'$ (transitivité de l'égalité)

(1) (Le segment SM' est en ponctué jusque M').

Une démonstration duale assure l'unicité de l'élément noté 1.

Conséquence : \bar{a} existe (II, 5°).

2° Lois d'idempotence.

$a + a = a$ (9) et par dualité $aa = a$ (10).

Montrons que $a + a = a$,

$$\begin{array}{l} (a + a) (a + \bar{a}) = a + a\bar{a}, \quad \text{axiome (5),} \\ \text{or } \left. \begin{array}{l} a + a = 1 \\ a\bar{a} = 0 \end{array} \right\} \text{axiomes (7) et (8),} \end{array}$$

il vient donc :

$$(a + a) \times 1 = a + 0,$$

et en appliquant (1) et (2)

$$a + a = a.$$

3° $a \times 0 = 0$ (11) et par dualité $a + 1 = 1$ (12),

démontrons (11) :

$$\bar{a} + 0 = \bar{a},$$

donc : $a(\bar{a} + 0) + a\bar{a}$, appliquons (6)

$$a\bar{a} + a0 = a\bar{a}, \quad \text{appliquons (7)}$$

$$0 + a0 = 0, \quad \text{appliquons (1)}$$

$$a0 = 0,$$

4° $a + ab = a$ (13) et $a(a + b) = a$ (14) (lois d'absorption),

démontrons (13) :

$$\begin{array}{l} a + ab = (a \times 1) + ab \quad \text{axiome (2)} \\ \quad = a(1 + b) \quad \text{axiome (6)} \\ \quad = a \times 1 \quad \text{axiome (3) et théorème (12)} \\ \quad = a \quad \text{axiome (2)} \end{array}$$

5° Unicité de \bar{a} .

Montrons que s'il existe a' tel que :

$$\left. \begin{array}{l} a + a' = 1 \\ aa' = 0 \end{array} \right\} \text{on a nécessairement } a' = \bar{a}$$

En effet :

$$a' + a\bar{a} = (a' + a) (a' + \bar{a}) \quad \text{d'après (5)}$$

$$= 1 \times (a' + \bar{a})$$

$$= a' + \bar{a},$$

or : $a' + a\bar{a} = a' + 0 = a'$,

donc : $a' + \bar{a} = a'$

en remplaçant a' et \bar{a} et \bar{a} par a' dans le calcul précédent on trouve :

$$\bar{a} + a' = \bar{a},$$

mais :

$$a' + \bar{a} = \bar{a} + a',$$

donc : $a' = \bar{a}$.

Conséquence : comme le complément est unique et que :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{a} + a = 1 \\ \bar{a} \cdot a = 0, \\ \bar{a} = \bar{a} \quad (15), \end{array} \right\} a \text{ est le complément de } \bar{a}$$

donc :

la complémentation définit donc une correspondance biunivoque

$$\left(\begin{array}{l} a \rightarrow \bar{a} \\ \bar{a} \rightarrow a \end{array} \right) \text{ entre éléments de } E$$

6° $\bar{a}(ab) = 0$ (16) et $\bar{a} + (a + b) = 1$ (17) par dualité. Démontrons (16) :

$$a + ab = a \text{ (loi d'absorption), (13),}$$

$$\bar{a}(a + ab) = \bar{a}a = 0 \quad \text{développons le premier membre :}$$

$$\bar{a}a + \bar{a}(ab) = 0,$$

$$0 + \bar{a}(ab) = 0,$$

$$\bar{a}(ab) = 0,$$

7° $\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ (18) et $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$ (19). Démontrons (18) :

Il faut établir que le complément de $a + b$ est égal à $\bar{a} \cdot \bar{b}$, donc que :

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})(a + b) = 0,$$

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) + (a + b) = 1,$$

développons en appliquant (6) :

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})(a + b) = (\bar{a} \cdot \bar{b})a + (\bar{a} \cdot \bar{b})b$$

Or, d'après (16) les deux termes trouvés sont nuls ; de même :

$$\begin{aligned} (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (a + b) &= [(a + b) + \bar{a}] [(a + b) + \bar{b}] \text{ d'après (3) et (5),} \\ &= 1 \times 1 \quad \text{d'après (17).} \\ &= 1. \end{aligned}$$

La complémentation définit, nous l'avons remarqué, une correspondance biunivoque entre éléments de E :

$$\left(\begin{array}{l} a \xrightarrow{\quad} \bar{a} \\ b \xrightarrow{\quad} \bar{b} \\ \bar{a} \xleftarrow{\quad} a \\ \bar{b} \xleftarrow{\quad} b \end{array} \right)$$

La relation $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a + b}$ montre que la complémentation est un automorphisme sur (E) muni des deux lois de composition interne notées (.) et (+).

8° $((ab)c)\bar{a} = 0$ (20) et $((a + b) + c) + \bar{a} = 1$ (21). Démontrons (20) :

$$(ab) + (ab)c = ab \text{ loi d'absorption (13),}$$

$$\text{or : } ab = ba = (bc + b)a \text{ toujours d'après (13).}$$

$$= ab + (bc)a,$$

$$\text{donc : } (ab) + (ab)c = ab + (bc)a.$$

Multiplions par \bar{a} et développons :

$$(ab)\bar{a} + ((ab)c)\bar{a} = (ab)\bar{a} + ((bc)a)\bar{a},$$

$$0 + ((ab)c)\bar{a} = 0 + 0 \quad \text{d'après (16).}$$

$$\text{donc : } ((ab)c)\bar{a} = 0.$$

9° $((ab)c)\bar{b}\bar{c} = 0$ (22) et $((a + b) + c) + \bar{b} + \bar{c} = 1$ (23) par dualité.

De l'égalité établie plus haut :

$$ab + (ab)c = ab + (bc)a \text{ on tire en permutant } a \text{ et } c$$

$$bc + (bc)a = bc + (ab)c,$$

multiplions les deux membres par \overline{bc}

$$(bc) (\overline{bc}) + ((bc)a)\overline{bc} = (bc) (\overline{bc}) + ((ab)c)\overline{bc},$$

$$0 + 0 = 0 + ((ab)c)bc \text{ d'après (8) et (16),}$$

donc : $((ab)c)\overline{bc} = 0.$

10° *L'addition et la multiplication sont associatives* $(a + b) + c = a + (b + c)$ (24) et $(ab)c = a(bc)$ (25) par dualité.

Pour établir (25) par exemple, il suffit de montrer que les deux membres ont le même complément, or le complément de $a(bc)$ est : $\overline{a + bc}$.

Montrons donc selon (7) et (8) que :

$$\{ [(ab)c] \cdot [\overline{a + bc}] = 0$$

$$\} (ab)c + (\overline{a + bc}) = 1$$

$$[(ab)c] [\overline{a + bc}] = ((ab)c)\overline{a} + ((ab)c)\overline{bc}, \text{ d'après (6).}$$

$$= 0 + 0 = 0 \text{ d'après (20) et (22).}$$

$$(ab)c + (\overline{a + bc}) = [(\overline{a + bc}) + c] [(\overline{a + bc}) + ab] \text{ d'après (5).}$$

$$= [(\overline{a + bc}) + c] \{ [(\overline{a + bc}) + a] [(\overline{a + bc}) + b] \} \text{ d'après (5).}$$

or : $(\overline{a + bc}) + a = 1$ (n° 17), il vient :

$$(ab)c + (\overline{a + bc}) = [(\overline{a + bc}) + c] [(\overline{a + bc}) + b],$$

$$= (\overline{a + bc}) + bc \text{ d'après (5),}$$

$$= 1 \text{ d'après (17),}$$

ce qui établit la formule (25).

11° *La relation* $a + b = b$ *est une relation d'ordre dans E.* — Une relation notée \leq est une relation d'ordre si :

$$a \leq a \text{ (réflexivité),}$$

$$a \leq b \text{ et } b \leq c \text{ entraînent } a \leq c \text{ (transitivité),}$$

$$a \leq b \text{ et } b \leq a \text{ entraînent } a = b, \text{ (antisymétrie),}$$

nous avons bien ici :

$$a + a = a \text{ (réflexivité),}$$

$$a + b = b \text{ et } b + c = c \text{ entraînent :}$$

$$a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c,$$

$$a + c = c \text{ (transitivité).}$$

de plus : $a + b = b,$

et $b + a = a$ entraînent $a = b.$ Axiome (3).

Si nous remarquons que $a + b = b$ entraîne :

$$ab = a(a + b) = a, \text{ d'après (14),}$$

et que : $ab = a$ entraîne

$$b + a = b + ab = b, \text{ d'après (13),}$$

$$b + a = b.$$

Les relations $a + b = b$ et $ab = a$ définissent la même relation d'ordre dans (E) ; nous pourrions noter cette relation $a \leq b.$

Remarquons que $a \leq b$ ou $a + b = b$ entraîne $(a + b)\overline{b} = b.\overline{b}$, donc : $a.\overline{b} = 0.$

Réciproquement : $a\overline{b} = 0$ entraîne

$$a\overline{b} + b = b$$

$$\begin{aligned} (a + b) (\bar{b} + b) &= b \\ (a + b) \mathbf{1} &= b \\ a + b &= b \\ a &\leq b \end{aligned}$$

IV. Nous montrerons la compatibilité du système d'axiomes précédents en donnant un modèle géométrique de cette algèbre qui est des plus classiques.

Considérons l'ensemble des parties $P(E)$ d'un ensemble E , A, B, C, \dots sont des parties de E . Nous écrivons que $A = B$ si tout élément de A est élément de B et inversement. Nous poserons :

$$\begin{aligned} A + B &= A \cup B \text{ (réunion de } A \text{ et de } B), \\ AB &= A \cap B \text{ (intersection de } A \text{ et de } B), \\ \mathbf{0} &\text{ sera l'ensemble vide,} \\ \mathbf{1} &\text{ l'ensemble plein,} \\ \bar{A} &\text{ est le complémentaire de } A. \end{aligned}$$

La relation d'ordre est la relation d'inclusion. Les axiomes posés sont immédiats à vérifier intuitivement : nous admettons que cela suffit à affirmer leur compatibilité.

V. LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS EST UNE ALGÈBRE DE BOOLE.

Dans ce paragraphe, les objets a, b, c, \dots seront des propositions, par exemple : « il pleut » est une proposition. Nous admettons la notion de proposition équivalente que nous noterons par l'infixe \longleftrightarrow .

$a \longleftrightarrow b$, l'équivalence étant une relation binaire, réflexive, symétrique, transitive, nous désignerons par $a + b$ l'affirmation de l'une au moins des propositions a et b (disjonction) et par ab l'affirmation conjointe de a et b (conjonction). À toute proposition a correspond une proposition contraire ou négation notée \bar{a} . Nous pourrions noter $\mathbf{1}$ une proposition toujours vraie et $\mathbf{0}$ une proposition toujours fausse. Nous admettons donc les équivalences

$$\begin{aligned} a + \mathbf{0} &\longleftrightarrow a & a + b &\longleftrightarrow b + a & a + bc &\longleftrightarrow (a + b) (a + c) \\ a \times \mathbf{1} &\longleftrightarrow a & ab &\longleftrightarrow ba & a(b + c) &\longleftrightarrow ab + ac \\ & & a + \bar{a} &\longleftrightarrow \mathbf{1} & \bar{a}\bar{a} &\longleftrightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\bar{a}\bar{a} \longleftrightarrow \mathbf{0}$ est la loi de non contradiction,

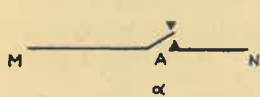
$a + \bar{a} \longleftrightarrow \mathbf{1}$ est la loi du tiers-exclu (la logique étudiée est la logique bivalente classique).

Comment interpréter ici la relation d'ordre $a + b = b$ ou $\bar{a}\bar{b} = \mathbf{0}$? Dire que $\bar{a}\bar{b} \longleftrightarrow \mathbf{0}$ revient à affirmer que la conjonction de a et \bar{b} est impossible. Nous dirons alors que a implique b ($a \rightarrow b$). La double implication donne bien une équivalence ($\bar{a}\bar{b} = \mathbf{0}$ et $a\bar{b} = \mathbf{0}$ conduit à $a \leq b$ et $b \leq a$, soit $a = b$, ce qui se traduit ici par $a \longleftrightarrow b$). Notons que la transitivité de la relation d'ordre se traduit ici par :

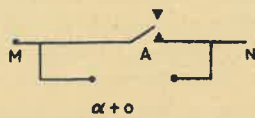
$$\begin{aligned} &(a \rightarrow b) (b \rightarrow c) \\ \rightarrow &(a \rightarrow c), \text{ c'est le syllogisme.} \end{aligned}$$

Ces résultats étant acquis, « démontrons », à titre d'exemple, ce théorème de la logique dû à Leibniz :

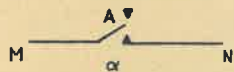
$$\begin{aligned} &(a \rightarrow b) (c \rightarrow d) \rightarrow (ac \rightarrow bd), \\ \text{en effet} & \quad \bar{a}\bar{b} \longleftrightarrow \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \bar{c}\bar{d} \longleftrightarrow \mathbf{0} \\ & \quad ac.\bar{b}\bar{d} \longleftrightarrow ac(\bar{b} + \bar{d}) \longleftrightarrow ac.\bar{b} + ac.\bar{d} \end{aligned}$$



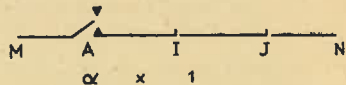
(1) $\alpha + 0 = \alpha$



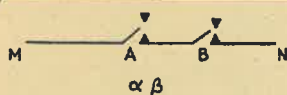
(Mise en parallèle de A avec une connexion ouverte)



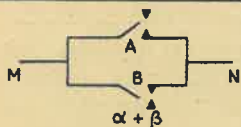
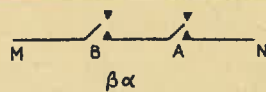
(2) $\alpha \times 1 = \alpha$



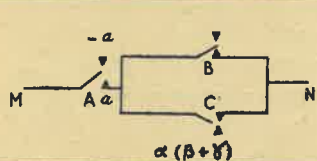
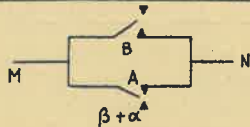
(Mise en serie de A avec la connexion IJ toujours fermée)



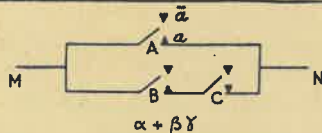
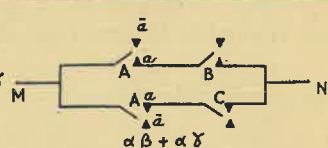
(3) $\alpha \beta = \beta \alpha$



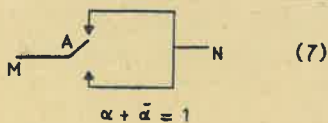
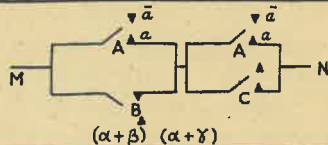
(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$



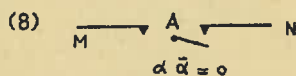
(5) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$



(6) $\alpha + \beta \gamma = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$



(7) $\alpha + \bar{\alpha} = 1$



(8) $\alpha \bar{\alpha} = 0$

$$\longleftrightarrow a\bar{b}.c + c\bar{d}.a$$

$$\longleftrightarrow 0 + 0$$

$$\longleftrightarrow 0$$

On obtient ainsi une langue abstraite, sténographiée, dont la syntaxe est l'algèbre de Boole. L'utilité de ces considérations pourra se discuter, elles se placent naturellement sur le plan de la métamathématique et leur intérêt épistémologique est considérable, on ne peut le nier. Le lecteur qui s'intéresse à ces questions trouvera une documentation abondante dans les ouvrages de Beth et de Curry (Gauthier-Villars) par exemple.

VI. LA STRUCTURE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES SE RATTACHE A L'ALGÈBRE DE BOOLE.

Considérons un circuit électrique relié à deux bornes M et N et comprenant, intercalés entre M et N, un certain nombre de relais à deux contacts A, B, C... Au relais A nous associerons les deux contacts a et \bar{a} , si l'un est « ouvert » l'autre est « fermé ». L'ensemble des relais intercalés entre M et N pourra à son tour être considéré comme un relais à deux « positions » : une « position " fermé " » correspondant au passage possible du courant entre ces points, une « position " ouvert " » correspondant à un passage impossible. Deux montages seront considérés comme équivalents s'ils réalisent l'un et l'autre, soit le passage, soit l'interruption du courant entre M et N.

A la mise en série de deux contacts α et β nous faisons correspondre le produit $\alpha\beta$. A la mise en parallèle de ces mêmes contacts correspond la somme $\alpha + \beta$.

Nous désignerons par 1 une connexion toujours fermée, par 0 une connexion toujours ouverte.

Dès lors, les axiomes (1) à (8) traduisent simplement des équivalences de montage que nous rappelons dans les schémas ci-dessous. (Voir schémas feuille spéciale)

Notons que si on ne distingue pas les relais fermés on pourra remplacer leurs symboles par 1 et de même on pourra noter 0 tout relais ouvert. Si $\bar{a} = 1$ $a = 0$. Toute fonction algébrique de $a, b, c, \dots, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ sera égale à 1 ou à 0 selon qu'elle correspond à un circuit fermé ou à un circuit ouvert. L'algèbre obtenue sera simplement à deux éléments 0 et 1.

Donnons un exemple [tiré de la revue des *Télécommunications* (1952)] (1) de réalisation d'un schéma de montage utilisant les résultats précédents.

Entre M et N intercalons une lampe L et trois relais A, B, C. On veut que L s'allume pour le fonctionnement de un ou deux des trois contacts a, b, c et ne s'allume pas si ces trois contacts fonctionnent ou ne fonctionnent pas simultanément.

Admettons que le problème soit possible. Le polynôme $abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ correspond à un schéma satisfaisant aux conditions d'extinction. Formons le schéma correspondant au polynôme complémentaire et examinons si les conditions d'allumage sont satisfaites.

$$\begin{aligned} \overline{abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}} &= \overline{abc} \times \overline{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \\ &= (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) (a + b + c) \\ &= \bar{a}(b + c) + a(\bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$

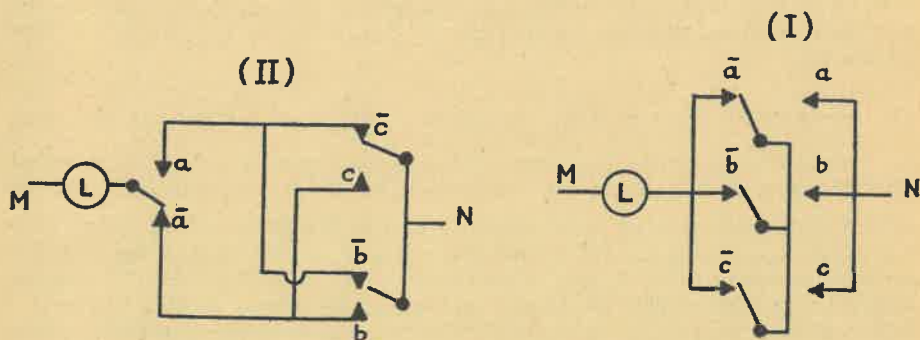
(1) Cette revue m'a été communiquée par M. HURON, professeur à la Faculté de Toulouse.

en appliquant les théorèmes établis plus haut. Le polynôme $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ ($a + b + c$) correspond au montage (I), qui convient au problème, et le polynôme

$$\bar{a}(b + c) + a(\bar{b} + \bar{c})$$

au montage (II) qui convient également.

A. CRUMEYROLLES (*Lycée de Toulouse*).



Anneaux où zéro a des diviseurs

Voici quelques exemples susceptibles d'illustrer un aspect délicat de la conférence de M. H. CARTAN, publiée dans le Bulletin 176.

1^{er} EXEMPLE. — Dans l'ensemble des entiers positifs ou nuls, considérons comme équivalents ceux qui donnent le même reste dans leur division par 6. L'ensemble constitué par les classes d'équivalence, c'est-à-dire l'ensemble-quotient, possède six éléments, que nous allons noter $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$. Cet ensemble constitue un anneau commutatif pour les opérations d'addition (par exemple, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}, \bar{2} + \bar{5} = \bar{1}$, etc.) et de multiplication (par exemple, $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{2}$). On vérifie bien la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et les autres conditions exigées par la définition. Or, $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$, donc l'anneau n'est pas domaine d'intégrité.

Plus généralement, l'anneau des classes d'équivalences modulo p n'est anneau d'intégrité que si p est premier, d'où l'importance de ce cas.

2^e EXEMPLE. — Soit E l'ensemble des fonctions d'une variable x continues sur $(0,1)$. Considérant les deux opérations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= f + g && \text{signifiant } u(x) = f(x) + g(x), \\ v &= f \cdot g && \text{signifiant } v(x) = f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

L'ensemble a bien structure d'anneau commutatif. Or, considérons les deux fonctions continues :

$$\begin{aligned} f(x) & \text{ valant } 0 \text{ sur } (0, 1/2) \text{ et valant } x - 1/2 \text{ sur } (1/2, 1) ; \\ g(x) & \text{ valant } x - 1/2 \text{ sur } (0, 1/2) \text{ et valant } 0 \text{ sur } (1/2, 1). \end{aligned}$$

Leur produit est l'élément neutre de l'addition, c'est-à-dire la fonction constamment nulle. L'ensemble n'est pas un domaine d'intégrité.

3^e EXEMPLE. — Considérons l'ensemble C des couples d'entiers modulo 2 : il y a quatre éléments que nous noterons $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. Nous définissons la somme

de deux couples comme le couple constitué par la somme de ses constituants (modulo 2 naturellement) : ainsi, $(0,1) + (1,1) = (1,0)$.

L'élément neutre de cette addition est $(0,0)$.

Ceci posé, considérons l'ensemble des lois de correspondance transformant un couple en un couple de façon à respecter l'addition : si le transformé du couple c par l'opération t est noté ct , on exige donc $(c + c')t = ct + c't$, $\forall c$

On peut aisément former toutes ces correspondances : on se rend compte qu'il faut toujours $(0,0)t = (0,0)$. On distinguera des lois qui donnent comme images les quatre couples de C , par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,0)f = (0,0) \\ (0,1)f = (0,1) \\ (1,0)f = (1,1) \\ (1,1)f = (1,0) \end{array} \right. \quad \text{et en particulier} \quad \left\{ \begin{array}{l} (0,0)u = (0,0) \\ (0,1)u = (0,1) \\ (1,0)u = (1,0) \\ (1,1)u = (1,1) \end{array} \right.$$

(ce sont les *automorphismes* de C) ; d'autres lois ne donnent pas comme images tous les couples : par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,0)i = (0,0) \\ (0,1)i = (0,1) \\ (1,0)i = (0,0) \\ (1,1)i = (0,1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (0,0)j = (0,0) \\ (0,1)j = (0,0) \\ (1,0)j = (0,1) \\ (1,1)j = (0,1) \end{array} \right. \quad \text{et en particulier} \quad \left\{ \begin{array}{l} (0,0)z = (0,0) \\ (0,1)z = (0,0) \\ (1,0)z = (0,0) \\ (1,1)z = (0,0) \end{array} \right.$$

L'ensemble E de toutes ces transformations se nomme l'ensemble des *endomorphismes* de C .

Pour faire de E un anneau, il faut le munir de deux opérations convenant à la définition d'un anneau.

La *multiplication* est celle qui convient à des transformations : à partir de $ct = c'$ et $c't_1 = c''$, on posera $f = t.t_1$, si $cf = c''$ pour tout c .

La transformation notée plus haut u est l'élément neutre (unité).

L'*addition* sera définie par $c(t + t_1) = ct + ct_1$, $\forall c$, l'addition indiquée au second membre étant celle que nous connaissons dans l'ensemble C des couples.

La transformation notée plus haut z est l'élément neutre (zéro). Il faut vérifier que pour l'addition ainsi définie, E forme bien un groupe et que la multiplication est bien distributive par rapport à cette addition. (On pourra le faire sur les exemples ou plus généralement pour les endomorphismes d'un groupe abélien quelconque. Comme le produit n'est pas commutatif, il faut vérifier la double distributivité à gauche et à droite).

Or l'on constate que $i.j = z$.

L'anneau E n'est donc pas un anneau d'intégrité pour la double raison qu'il n'est pas commutatif et que zéro a des diviseurs.

L. FÉLIX.

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

RÉFLEXIONS SUR L'INTERPRÉTATION D'UN PROGRAMME *

Nous pouvons admettre que l'étude des Mathématiques commence en classe de Sixième. Considérons alors leur développement jusqu'au seuil de l'Enseignement Supérieur : ce développement est très étendu, très riche et approfondi. On se dit alors que l'enseignement des Mathématiques doit être une entreprise bien difficile et l'on reconnaît que, pour y réussir, il faut, avant tout, organiser un échelonnement correct dans l'acquisition d'un si grand nombre de connaissances. Ceci est, pour l'ensemble, le souci des auteurs de programmes et c'est, localement, le souci de chaque professeur dans sa classe.

Lorsque j'étais un jeune élève, je croyais que les Mathématiques se distinguaient des autres disciplines par leur fixité, leur rigidité. Je croyais que le professeur était chargé de nous transmettre des modèles parfaits et définitifs selon un rite très bien réglé, immuable, déterminé uniquement par la nature des problèmes à étudier et par les exigences propres à ces derniers. J'étais naïf.

J'ignorais qu'il y a cent façons de présenter une question ; j'ignorais que lorsque mon professeur entreprenait l'étude d'un chapitre, il allait, devant nous, faire une véritable *création*. Je prends ce mot dans le sens qu'on lui accorde au théâtre : la question avait sans doute déjà été traitée par lui et par d'autres, mais ce jour-là il allait — pour nous — lui donner une vie qu'elle n'avait jamais eue — une vie quelquefois précaire, à cause de nous — mais une vie quelquefois toute nouvelle et très riche, si nous le lui permettions.

J'ignorais qu'il devait m'arriver, trente ans plus tard, de penser à ces mêmes questions, pour apercevoir qu'un même sujet peut se situer dans l'échelle de l'enseignement, soit, tout en bas, soit tout en haut, selon l'*engagement* du départ, j'entends : la façon dont on engage la question, selon le but qu'on se propose, et selon même, simplement, les nuances, les allusions et les sous-entendus de l'exposé — je n'exagère pas beaucoup — nous pourrions dire : selon la tonalité de l'exposé de la question.

Faisons d'abord quelques observations générales qui vont fixer un plan pour notre étude : les paliers successifs de notre enseignement des Mathématiques sont marqués par :

- le choix des matières qu'on enseigne à chaque palier ;
- le choix d'une interprétation et d'un dosage des chapitres retenus.

Dans ce double choix on sera tenu de satisfaire respectivement à deux exigences qui seront quelquefois contradictoires :

- le respect de la question à étudier ;
- l'adaptation à l'auditoire.

Dans ce double choix nous serons guidés d'après trois points de vue, relativement à un sujet proposé :

- 1) l'état de la question dans les classes antérieures ;
- 2) l'état de la question dans la classe supérieure ;
- 3) les possibilités de l'auditoire.

De nombreux exemples vont préciser ce que nous voulons dire par tout cela, mais arrêtons-nous d'abord un instant sur ce que nous appelons le respect de la question.

(*) Conférence prononcée au Centre Pédagogique Régional de Paris, le 20 février 1956.

Respect de la question et adaptation à l'auditoire : deux exigences qui se contredisent. Le respect de la question a parfois une priorité inévitable, quand il s'agit par exemple d'enseigner des choses qui seront *définitives*, ou quand il s'agit d'un sujet *qui ne supporte pas*, justement, d'adaptation, sous forme de diminutif. On ne compose ni avec le théorème de Gauss en arithmétique, ni avec la définition du vecteur vitesse, par exemple. Tout essai de simplification qu'on puisse imaginer sur de tels sujets entraîne pour ces derniers un amenuisement fatal. Pensons plutôt alors qu'il faut préparer les élèves, par quelques détours, à recevoir correctement ces questions.

Nous reviendrons tout à l'heure sur ces sujets difficiles et en quelque sorte réservés.

Voyons d'abord des exemples, avec commentaires, de questions sujettes à des variations de niveau franches et nombreuses. En professeurs consciencieux nous cherchons à nous éclairer par les programmes officiels et nous allons être surpris de constater que malgré leur laconisme et leur allure un peu « table des matières » ils nous incitent à beaucoup de réflexion.

Exemples.

Quelques exemples très simples :

1) *L'arc capable* figure en Troisième (points d'où l'on voit...) et figure également en Seconde, sous la même forme ; mais à propos des angles et des angles inscrits, on a parlé du sens d'un angle orienté et on applique l'arc capable à un « mode de génération du cercle ». Ceci met en usage les angles orientés de droites : difficulté, comme on va le voir. En Mathématiques Élémentaires, la forme définitive est explicitée. Cela entraîne deux choses à ce niveau :

1. les angles, placés dans un plan orienté, sont mesurés par des classes mod. 2π ou mod. π , qui ne sont plus des nombres algébriques. La théorie a dû, ou doit en être faite ;

2. les raisonnements ne se font plus sur une figure *vue* — la géométrie des figures devient la géométrie des propriétés ; la figure n'est qu'un répertoire des notations. C'est la géométrie sans figure, seule valable ; on atteint le *cas général* très difficile à définir (qu'est-ce qu'un triangle *quelconque* ?).

Mais alors, puisque l'usage des angles de droites est un des premiers cas où ce nouvel état d'esprit se présente en classe de Mathématiques Élémentaires, que dire de cet usage dans une classe de Seconde ? Est-il bon, ou même seulement possible, de le préconiser ?

2) *Définition des rapports trigonométriques* : en Troisième, l'angle est aigu ; les définitions sont associées strictement au triangle rectangle. En Seconde, l'angle varie de zéro à deux droits. En Première et en Mathématiques Élémentaires : fonctions circulaires d'angles et arcs généralisés. Cet échelonnement est parfait : les angles s'ouvrent d'année en année. Notons bien que la définition des arcs généralisés en Première ne présente aucune des difficultés relatives à la définition de la classe associée à la figure de géométrie (\vec{MA} , \vec{MB}). Dans la fonction $y = \cos x$, x et y sont toujours des nombres algébriques [pour les classes $y = \operatorname{tg}(x)$, (x) classe mod. π , définie et douée d'une fonction inverse, il n'est pas question de courbe représentative].

3) Voici un exemple beaucoup plus riche : *la résolution des équations*.

a) En Cinquième, on fait des problèmes concrets où le nombre inconnu est représenté par une lettre ; celle-ci est l'initiale de l'objet qu'elle représente, par exemple, et elle garde sa signification concrète pendant toute la solution. Quand on a trouvé le nombre, on vérifie ; ce n'est pas de l'algèbre, c'est une certaine façon de raisonner en arithmétique qui va être systématisée — mais prudemment — afin d'éviter le mécanisme précoce. Ainsi, nous pensons aux partages proportionnels où « la valeur

d'une part » peut être, pour abrégé, représentée par p ; nous pensons aux problèmes dits de fausse supposition, aux problèmes d'intérêt, etc...

b) En Quatrième : équations et problèmes (équations numériques : 1^{er} degré, une inconnue). Si l'équation à résoudre constitue — elle toute seule — un problème, c'est déjà de l'algèbre.

c) En Quatrième, enseignement court, on voit : propriétés des sommes et des différences en vue de la transformation de l'équation.

d) En Troisième, enseignement court : deux inconnues, exemples d'indétermination et d'impossibilité ; pas de paramètre encore (et c'est heureux : j'ai vu des élèves, bien mécanisés sans doute, qui discutaient $2x = 3 : 1^{\circ}$ si $2 = 0$, etc...).

e) En Seconde C et M, les discussions apparaissent ; ce n'est plus de la « bricole » si l'on peut avoir droit aux *théorèmes d'équivalence*. Sinon, il faudra toujours vérifier, et c'est une position intenable, car tout le monde (élèves et professeur) sait que c'est *presque* toujours inutile.

f) En Mathématiques Elémentaires : indispensable ; voir l'équivalence de

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda A + \mu B = 0, \\ \lambda' A + \mu' B = 0, \end{array} \right.$$

et passer à trois (en remplaçant une seule équation, bien entendu), cela pour éviter, autant que possible, cette impression de « bricole ».

L'équivalence aide à faire saisir ce qui caractérise l'algèbre : la *multivalence des écritures*.

Exemple : équivalence des systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = a \\ xy = k. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = \pm c. \end{array} \right.$$

et équivalence avec les problèmes de géométrie qu'ils traduisent si x et y sont coordonnées d'un point si x et y sont distances à deux points fixes. Mais parler d'équivalence est — encore aujourd'hui — ce que j'appelle plus loin un « dépassement » du programme ; nous y reviendrons.

4) Un exemple d'une richesse comparable nous est donné en cherchant comment se forme la notion de *correspondance* en géométrie. Comment arrive-t-on à son étude correcte et à son acquisition définitive ? Nous voyons trois étapes :

a) en Cinquième et en Quatrième : utilisation facultative de la symétrie (on fait sans cesse des déplacements, mais on ne le dit pas) ; en Quatrième enseignement court, à propos des polygones réguliers : rotations de 90° , 45° facultatives ; en Troisième enseignement court : homothétie facultative.

b) En Seconde et en Première, apparition explicite de certaines *transformations* : symétries, translation, homothétie (pas de rotation). On applique la transformation à une figure, c'est un problème de lieu géométrique.

c) En Mathématiques Elémentaires, il faut marquer une avance considérable : la notion de transformation laisse la place à celle de *correspondance* qui rejoint celle de *fonction* — les deux se renforcent alors mutuellement — en rappeler parallèlement les définitions en insistant longuement sur l'importance du *référentiel* et la *définition* de la fonction. Insistons sur deux exemples.

PREMIER EXEMPLE : *Sur les symétries.*

La construction qui consiste, étant donné une droite D , à mener MH perpendiculaire à D , puis à prolonger MH de $HM' = HM$, ne définit une correspondance qu'à partir du moment où on précise le référentiel : plan ou espace — les deux correspondances qu'on obtient respectivement ont des noms et des propriétés différents : c'est la symétrie par rapport à D — c'est la transposition D . L'éternelle confusion serait levée si l'on consentait à faire correctement cette distinction.

Au sujet des symétries, notons trois anomalies :

En Seconde, plusieurs manuels se servent du produit de deux symétries pour démontrer que la translation est un déplacement (nous reviendrons un peu plus loin là-dessus).

En Première le programme nous borne aux définitions : par rapport à une droite, un point, un plan.

En Mathématiques Élémentaires, le programme nous parle de comparaisons entre figure et figure symétrique, ce qui semble une manière de nous interdire les produits de symétries.

Que peut-on penser de cette restriction, de ces nuances d'interprétation ?

DEUXIÈME EXEMPLE : *Sur l'homothétie.*

En Première, transformer un plan, une sphère... c'est un problème de lieu géométrique, étudié soigneusement comme tel.

Il n'en est plus de même en Mathématiques Élémentaires, c'est une correspondance vectorielle, $\vec{AB} \rightarrow \vec{A'B'} = k \vec{AB}$; ainsi, au plan défini comme ensemble de points M par $\vec{AM} = x \vec{AB} + y \vec{AC}$, correspond l'ensemble de points M' défini par $\vec{A'M'} = x \vec{A'B'} + y \vec{A'C'}$.

Ainsi, à la sphère définie par $|\vec{AM}| = R$ correspond la sphère $|\vec{A'M'}| = |k| R$, etc...

On ne recommence pas ce qui a été fait en Première, c'est vu d'une façon toute nouvelle.

Dépaysements.

Nous allons maintenant parler de *certaines difficultés*. Tout d'abord : de *certaines dangers* d'un changement de niveau, les *dépaysements*.

Considérons le premier enseignement comme celui d'une *langue maternelle* (l'enfant apprend les mathématiques comme le français). Il ne faut pas que, lors d'un deuxième enseignement, l'enfant soit placé comme devant une seconde langue, avec des façons de penser ou de s'exprimer trop différentes ou opposées. C'est du moins ce qui semble souhaitable.

Exemples de dépaysements : 1) les nombres irrationnels en Troisième. Les élèves de Troisième ont raison de manifester une répugnance envers les symboles tels que $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre, c'est l'indication d'un calcul à faire. Ceux de Première qui promènent sans hésiter des

$\frac{3 + \sqrt{17}}{3 - \sqrt{5}}$ ont tort ;

2) l'usage des angles orientés (il faudra amener leur nécessité) ;

3) toute l'arithmétique en Mathématiques Élémentaires (arrêt pendant quatre ans, sondages stupéfiants) ;

4) la rigueur intransigeante qui semble une plaisanterie de mauvais goût, une brimade (c'est une extravagance de démontrer, en Seconde, que la translation est un déplacement, en la remplaçant par un produit de symétries).

(Notons pourtant que ce dépaysement est quelquefois recherché. Ainsi on analyse mieux, on explique mieux la théorie des opérations sur les entiers écrits dans un système de numération en prenant la base 7 plutôt que la base 10, pour rompre avec les mécanismes trop usuels).

Comment pouvons-nous *prévenir ces dangers* ? Nous l'avons dit plus haut : dans l'exposé d'une question, penser à ce que les élèves en connaissent déjà, s'en informer et penser aux développements de la question dans les classes supérieures. Il ne faut pas fermer la question, il faut lui garder de nouvelles ouvertures possibles (pas de modèles immuables) ; en particulier quand on donne une définition, il faut réserver dans ce moule une large place pour l'avenir.

En somme, il faut soigner les *raccordements* avec ce qui précède et ce qui suivra.

Exemple : On étudie en Mathématiques Élémentaires la limite de

$$1 + q + \dots + q^n.$$

Cette question est une nouveauté ; elle se traite avec toute la rigueur possible, elle prépare pour la classe suivante tout un monde très vaste. A soigner. Faire sentir par des exemples ($q = 2$; $q = 0,1$; $q = 1,01$; $q = 0,9$) que le résultat peut sembler très évident, ou peu... ou même très douteux, puis démontrer (on a senti l'urgence d'une

démonstration), puis dépasser, par des exemples *traitables* ($u_n = \frac{1}{n(n+1)}$) ce qui n'était qu'un cas particulier, sans atteindre le théorème général, bien entendu, qu'on se garderait bien d'énoncer, de peur de le faire prendre pour évident ! Plutôt donnerait-on le contre-exemple de $\sum \cos nx$ borné, mais sans limite, traitable par la somme géométrique, extrême limite tolérable dans un dépassement du programme. Ceci nous amène à une deuxième difficulté dans le problème du niveau assigné à une question : les *dépassements*.

Dépassements.

C'est extrêmement délicat.

Les dépassements possibles sont certainement un souci pour les auteurs de programmes qui manifestent de grandes craintes et une grande prudence à leur sujet. Ils nous dressent, de-ci, de-là, des balises, des poteaux de sens interdit, ils nous font disparaître, comme sournoisement de temps en temps, un terme, un demi-alinéa, qui semble oublié dans une réédition...

(C'est ainsi qu'on nous a supprimé la dérivée d'une fonction de fonction). En général, cette prudence est de bon aloi car c'est un garde-fou à l'examen pour l'examineur. Exemples :

En Première C : dérivée pour une valeur numérique... ; l'étude du sens de variation par y' n'est pas au programme ; problèmes simples...

En Mathématiques Élémentaires et Sciences Expérimentales : préambules à l'algèbre, à l'arithmétique.

Il faut comprendre cette prudence avec discernement.

Je demandais une fois à l'Inspecteur Général : « Pourquoi nous refuse-t-on en Mathématiques Élémentaires l'étude complète des déplacements dans l'espace ? » Sa réponse mérite réflexion : « C'est, dit-il, parce que trop rares seraient les professeurs qui auraient le souci de démontrer l'unicité du déplacement hélicoïdal équivalent à tout déplacement donné. » Voyez à quel point se trouve poussé le désir de la qualité dans notre enseignement !

Mais cette prudence est quelquefois inacceptable : nous calculerons la dérivée d'une fonction de fonction *en soulignant la difficulté* ; nous calculerons la vitesse $v = 2at + b$ pour pouvoir définir l'accélération constante $2a$, et, pour les vecteurs, en Seconde, ce qui est indiqué est si insuffisant que nous nous octroyerons un dépassement très accusé. Nous allons d'ailleurs en parler plus loin, car cette question nous amène à une autre difficulté, relative à l'accrochage, la première rencontre, le *niveau d'accès* à une question.

Accrochages.

Comment faisons-nous acquérir la notion de vecteur dans notre enseignement ? Nous y arrivons difficilement. (Il faut reconnaître qu'il n'y a pas très longtemps qu'elle est définitivement acquise par les professeurs eux-mêmes). Longtemps les vecteurs ont été considérés comme un moyen commode pour formuler certains résultats et non comme un outil de recherche, d'exposé et de découverte. Quelle est la progression ?

En Quatrième et Seconde AB, mesure algébrique de vecteurs *sur une droite orientée* ;

En Seconde CM, même indication, mais avec la relation de Chasles. A la même époque, en physique, la notion est liée à l'image d'un ressort tendu. Dans tout cela, il n'y a rien de vectoriel — ou pas assez — la notion est beaucoup trop celle d'une grandeur : l'élève veut instinctivement une mesure, il y met *le nombre algébrique*, ce qu'on lui a appris, ou l'intensité de la force représentée par le vecteur, *et il n'y voit plus que cela*.

L'accrochage de la notion de vecteur est mal fait, il faudra des années pour corriger *l'erreur dans la notion*.

Alors, pour éviter cela, nous saisisons dans le programme de géométrie de Seconde CM les mots : parallélogramme, vecteurs équipollents, translation ; nous définissons correctement la famille des vecteurs libres (*classes d'équivalences*) avec une *opération* : l'addition vectorielle que nous étudierons très correctement, pour faire ce que nous appelons un groupe abélien. C'est un dépassement que nous nous octroyons. Bien entendu beaucoup d'exemples viennent à l'appui dans le programme.

Et le point de vue de la physique ne sera pas à dédaigner, au contraire, en rappelant ce qu'il y a de vectoriel. Les ressorts donnent des forces représentées par des vecteurs liés, et, avec les ficelles, cela fait des vecteurs glissants. La somme vectorielle, particulière ici, s'appelle résultante.

Il reste bon de rattacher une définition abstraite à un support concret, mais à condition que ce dernier ne fausse pas, par avance, la notion correcte.

Autres exemples d'accrochages.

L'accrochage se fait presque toujours par un passage du concret à l'abstrait ; on cultive longtemps la notion de fonction, la définition ne vient qu'après quelques années ; de même, nous l'avons vu, la définition d'une correspondance, et, ce qu'il y a de remarquable, c'est que *la définition est commune*. Cette remarque est à soigner, tout particulièrement en Mathématiques Élémentaires. L'accrochage a été correct.

La cinématique du solide en Mathématiques Élémentaires est d'un accrochage difficile. Ainsi, l'image concrète du mouvement de translation est mal obtenue par le tiroir ou par la « grande roue ». Elle l'est parfaitement, par le téléféric (équipollences conservées, mouvement déterminé par le mouvement d'un point).

Le calcul algébrique : cela dure longtemps ! Y arrive-t-on ? Un fait : les niveaux successifs ne sont pas marqués ; c'est toujours de la « bricole » ; il faut pourtant bien arriver à ceci, « qu'un calcul se mène à la cravache ». Dans l'enseignement élémentaire, sous prétexte de faire acquérir des mécanismes, on bachote les enfants, on leur fait sans cesse développer des calculs, l'habitude se prend, s'enracine. « On développe ». Voir les sujets absurdes donnés au B.E.P.C. (Dix exemples où on demande *d'abord* de développer, *puis* de résoudre, alors que la décomposition *était évidente*). La difficulté vient de ce que les calculs qu'on demande sont sans raison d'être ; on ne sait, ni d'où ils sortent, ni où ils doivent conduire. Au lieu que ce soit l'élève qui mène le calcul, c'est l'inverse. Sur $y = \frac{1}{x}$, les monstruosité que l'on connaît, viennent d'un mauvais accrochage des opérations sur les fractions.

Simplifications.

Enfin, une mise en garde au sujet de certains procédés qu'on peut être amené à utiliser dans une adaptation : *simplifier* une question. *Simplifier, c'est fausser*.

Exemple : $x = \frac{1}{2} g t^2$ obtenu par $x = t \cdot v_m$, $v_m = \frac{0 + gt}{2}$ (relevé dans un manuel de physique). Il ne faut pas esquiver une difficulté.

S'il faut se garder de certaines simplifications, il faut se garder tout autant de certaines *complications*, faute de moyens suffisants, pour traiter dans une classe, une question qu'on étudierait avec toutes les facilités dans la classe supérieure.

Exemples : 1) la droite de Simson en Seconde ;
2) beaucoup de démonstrations obtenues à grand renfort de triangles égaux ; elles s'obtiendraient d'un seul trait en utilisant un déplacement ;

3) le sens de variation étudié par $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour la fonction homographique. Il conduit au même calcul que la dérivée, ce qu'on ne peut faire en Première. Mieux vaut commencer par $y = \frac{1}{x}$, puis forme canonique, et utiliser les théorèmes généraux.

Le changement de niveau consiste souvent en un *recommencement à zéro* : en Sixième, en Seconde, en Mathématiques Élémentaires (pas en Mathématiques Spéciales). Pour l'élève, un recommencement intégral est très déplaisant (c'est connu : « je n'écoute pas »). A éviter.

Ce recommencement est quelquefois *simulé*, on le sent très bien, et il faut le faire sentir (voir P. VALÉRY : « Essayer de définir un nombre... », *Tel quel*, t. II). S'il est réel, il faut l'accompagner d'un grand changement dans les idées. Exemples :

- dans le choix d'une démonstration : recherche de la causalité ;
- la petite propriété curieuse s'intègre à un ensemble plus vaste ;
- la fonction linéaire peut être reprise en Mathématiques Élémentaires par la voie vectorielle ;
- le faisceau harmonique, vu en Seconde, est repris en Mathématiques Élémentaires comme application de la conservation du birapport dans une perspective, etc...

Respect de la question.

Pour terminer, disons quelques mots de ce que nous avons signalé tout à l'heure sous le titre : *respect de la question*. Il est des questions qui ne supportent pas différents niveaux d'exposition, avec lesquelles on ne compose pas, et dont l'acquisition doit se faire d'emblée, sous la forme définitive.

Exemples : a) la théorie des fractions en Mathématiques Élémentaires et toute l'arithmétique ;

b) la définition des angles et de « classes » qui les mesurent en Mathématiques Élémentaires ;

c) toutes les questions de limites. Insistons un peu.

Dès la classe de Seconde, une phrase telle que « $y = \frac{1}{x}$ tend vers plus l'infini lorsque x positif tend vers zéro » devra être précisée avec toute sa rigueur ; des exemples numériques ne suffiront pas (car « grand » n'est pas synonyme de « tend vers l'infini »). Il faut, dès ce moment, la mise en forme définitive, en insistant sur sa nécessité. De même, en Première, l'étude d'une limite comme celle de $\frac{2h + h^2}{h}$

quand $h \rightarrow 0$ demande toutes les exigences qu'on sait : pour simplifier la fraction, il faut $h \neq 0$; alors $h \rightarrow 0$ implique $h \neq 0$ et $2 + h \rightarrow 2$, ce qui est évident peut-être, mais pas parce qu'on fait $h = 0$!

d) Signalons qu'il ne faut pas associer les deux faits « y croît » et « $y \rightarrow +\infty$ » même pour une fonction où les deux sont vrais, car, trop longtemps, les élèves croiront à tort, que ces deux faits sont liés (exemple : $y = \frac{x}{2} + \sin x$).

e) A propos des asymptotes, éviter les expressions comme : « se rapproche indéfiniment... sans jamais l'atteindre », qui sont des tours de langage visant à faire évoquer l'objet intuitivement, mais par le sacrifice de la vérité.

Il n'y a pas de démonstration approximative. Une démonstration peu rigoureuse est fausse.

f) Un autre exemple encore, qui est important : la définition du vecteur vitesse ; il est bon d'avoir vu précédemment la dérivée vectorielle (par rapport à l'arc : séparer les difficultés).

Dans ce qui précède, le respect de la question entraîne des obligations ; il peut entraîner des *interdictions* :

1) On pourrait croire qu'il faut interdire la définition de l'équivalence des équations, même en Mathématiques Élémentaires, car on pense à $x^3 - 1 = 0$ et $x - 1 = 0$ qui seront déclarées équivalentes en Mathématiques Élémentaires et ne le seront plus en Mathématiques Spéciales, mais donnons-la cependant, cette définition, car elle est hautement profitable, et il n'y aura aucune contradiction possible si nous précisons chaque fois *le référentiel*. De tels scrupules vous interdiraient-ils d'étudier, avant les Spéciales, l'intersection de deux cercles, faute de pouvoir dire que deux cercles se coupent toujours en quatre points !

2) Parlera-t-on des points à l'infini ? Avant Mathématiques Élémentaires, sûrement pas ; on évitera même le mot, trop chargé d'un sens confus. Si on en parle en algèbre, on le réduira à son sens le plus strict, qui se réduit lui-même à une inégalité (hypothèse ou inégalité à résoudre). Si en Mathématiques Élémentaires on veut parler des points à l'infini, il faut les *définir*, on le peut, mais seulement en géométrie plane ; absolument pas, en géométrie dans l'espace.

C'est dans cet esprit qu'on nous a dit : il ne faut pas « déflorer » certaines questions, sous prétexte d'ouvrir des horizons. Il est bien entendu que nous ne devons pas jouer au professeur de la classe supérieure, ni faire, dans notre classe, des leçons pour jury d'agrégation.

Exemple : les éléments de géométrie analytique introduits par la fonction linéaire et les discussions graphiques ne sont pas de la géométrie analytique (mais, par contre, l'analyse de Mathématiques Élémentaires, c'est de l'analyse).

Il ne faut pas « déflorer », c'est entendu, mais il ne faut pas non plus *étouffer* ; il faut s'abstenir, en principe, des dépassements trop accentués, mais il ne faut pas non plus, masquer l'identité ou la connexion avec une question qui sera développée dans la classe supérieure. Exemple : ce qu'on a dit à propos de a^n en Mathématiques Élémentaires. Il est édifiant d'interroger les élèves de Mathématiques Spéciales sur les premiers éléments de la théorie des suites et des séries : ils ne savent pas qu'ils savaient tout ce qui concerne les suites et séries géométriques ! Il faut rechercher, au contraire, les connexions.

Il faudrait signaler encore quelques exemples de questions où l'on se trouve dans une situation difficile : les élèves abordent un sujet dont ils ne connaissent rien et où ils devront apprendre tout. Là un échelonnement accéléré s'impose. Exemple : l'étude de l'inversion en Mathématiques Élémentaires. La notion, l'étude correcte et la portée philosophique se suivent en quelques semaines ou en quelques heures. Ainsi, en arithmétique (les restes et les congruences) et dans l'inversion il faudra bien arriver à la définition du point à l'infini, dans lesquelles l'inversion ne peut absolument pas être assimilée.

En conclusion, je voudrais dire que ce que je viens de vous exposer est sujet à de nombreuses discussions, que nous sommes très loin d'être tous d'accord sur ces questions. Ainsi M. GUYON écrit, p. 156, *Cahiers Pédagogiques* : « Je bous littéralement... » (critique de la méthode axiomatique). Mais, en ce qui me concerne, j'ai toujours bouilli en voyant que la théorie des fractions et celle des opérations sur les nombres relatifs risquent de rester à l'état de petites combines qui réussissent.

Il faut adopter une attitude de sagesse et nous ne pouvons mieux terminer qu'en lisant une page de la préface de l' « Introduction à la théorie des fonctions d'une variable », de J. TANNERY :

« Quoique les vérités mathématiques se déduisent, dans un ordre rigoureux, d'un petit nombre de principes réputés évidents, on ne parvient pas à les posséder pleinement en commençant par ces principes, en en suivant pas à pas les déductions, en allant toujours dans le même sens du connu à l'inconnu, sans jamais revenir en arrière sur un chemin où l'on n'a rien laissé d'obscur. Le sens et la portée des principes échappent au débutant, qui saisit mal la distinction entre ce qu'on lui demande d'accorder et les conséquences purement logiques des hypothèses ou des axiomes ; parfois, la démonstration lui paraît plus obscure que l'énoncé ; c'est en vain qu'il s'attarderait dans la région des principes pour la mieux connaître, il faut que son esprit acquière des habitudes qu'il n'a pas, qu'il aille en avant, sans trop savoir où il va, ni d'où il part ; il prendra confiance dans ce mode de raisonnement auquel il lui faut plier son intelligence, il s'habitue aux symboles et à leurs combinaisons. Revenant ensuite sur ses pas, il sera capable de voir, du point de départ et d'un seul coup d'œil, le chemin parcouru ; quelques parties de la route resteront pour lui dans l'ombre, quelques-unes même seront peut-être entièrement obscures ; mais d'autres sont vivement éclairées ; il sait nettement comment on peut aller de cette vérité à cette autre ; il sait où il doit porter son attention ; ses yeux mieux exercés arrivent à voir clair dans ces passages difficiles dont il n'aurait jamais pu se rendre maître s'il ne les avait franchis, il est maintenant capable d'aller plus loin ou de suivre une autre direction ; il entre en possession de vérités nouvelles qui s'ajoutent aux vérités anciennes et qui les éclairent ; il s'étonne parfois des perspectives inattendues qui s'ouvrent devant lui et lui laissent voir, sous un aspect nouveau, des régions qu'il croyait connaître entièrement ; peu à peu les ombres disparaissent et la beauté de la science, si une dans sa riche diversité, lui apparaît avec tout son éclat.

Ce qui se passe dans l'esprit de celui qui étudie les Mathématiques, n'est que l'image de ce qui s'est passé dans la création et l'organisation de la science ; dans ce long travail, la rigueur déductive n'a pas été seule à jouer un rôle. On peut raisonner fort bien et fort longtemps sans avancer d'un pas, et la rigueur n'empêche pas un raisonnement d'être inutile. Même en Mathématiques, c'est souvent par des chemins peu sûrs que l'on va à la découverte. Avant de faire la grande route qui y mène, il faut connaître la contrée où l'on veut aller ; c'est cette connaissance même qui permet de trouver les voies les plus directes ; c'est l'expérience seule qui indique les points où il faut porter l'effort ; ce sont les difficultés, parfois imprévues, qui se dressent devant les géomètres qui les forcent à revenir à leur point de départ, à chercher une route nouvelle qui permette de tourner l'obstacle... »

J. SIROS (Lycée Lakanal).

DES EXERCICES UN PEU INSOLITES

L'idée de cette note m'est venue en lisant le numéro des *Cahiers Pédagogiques* et particulièrement les articles consacrés aux classes non scientifiques. J'ai été frappé par la phrase de notre collègue GLAESER : « Notre enseignement doit être analogue à ce qu'est la fréquentation des concerts pour un auditeur qui a définitivement renoncé à devenir musicien exécutant. »

Je me suis dit qu'un élève braqué par le solfège-trinôme pourrait être séduit par un concert où on lui présenterait, mettons... un Bartok pas trop trop difficile. Et que peut-être on pourrait aller jusqu'à éveiller ces « vocations tardives » dont parle, je crois, Mlle FÉLIX.

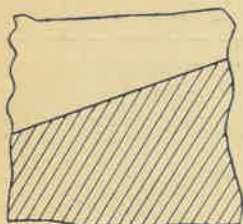
J'ai donc essayé de composer un petit programme de concert, à la fois homogène et varié. C'est évidemment au professeur qu'il conviendra de le réaliser sous la forme d'un concerto où le tutti ne restera pas trop silencieux...

*
**

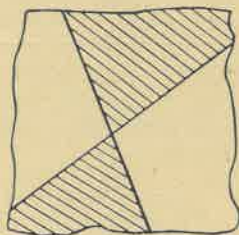
Les exercices suivants ne sont pas destinés à une classe déterminée, mais pourront servir de prétexte à des développements différents selon la nature et le niveau de l'auditoire. Je pense qu'on peut s'en servir dans les trois classes terminales, en liaison avec le cours de philosophie. Ils contribueraient alors à dépouiller notre collègue philosophe d'un monopole (que nous lui abandonnons généralement), celui de révéler l'existence de Mathématiques vivantes, non « scolaires » — le professeur de Mathématiques, lui, débitant du trinôme.

Premier exercice. — On trace dans le plan des droites en nombre quelconque. Démontrer la proposition suivante : pour colorier la figure de telle sorte que deux régions ayant une frontière commune (*ligne*, et non *point isolé*) reçoivent des couleurs différentes, il suffit d'utiliser *deux* couleurs.

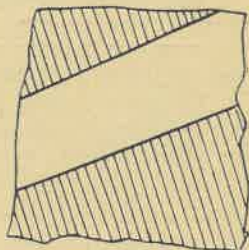
Démonstration : la proposition est manifestement exacte pour une ou deux droites (fig. 1, 2 et 3).



(fig. 1)



(fig. 2)



(fig. 3)

Supposons qu'elle soit vraie pour 3, 4, ..., $n - 1$ droites.

Nous traçons une n^{me} droite (en tirets sur la fig. 4). Elle partage le plan en deux demi-plans I et II. Il suffit d'inverser les couleurs dans I (prendre le négatif si c'est en noir et blanc !) et de les garder dans II : la proposition est démontrée (fig. 5).

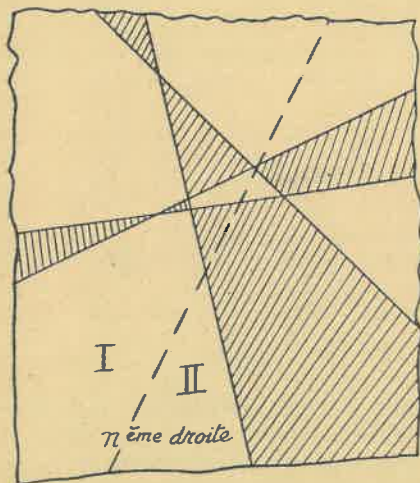
Commentaires et prolongements. — a. Démonstration par récurrence, principe d'induction complète. Extension à une figure contenant une infinité de droites ? Quelle infinité ? Dénombrable ou non ? La récurrence transfinie — avec prudence.

b. Autre démonstration. Elle résulte du fait que l'inéquation

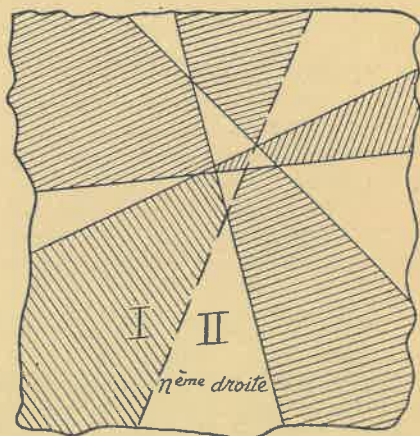
$$P_1 P_2 \dots P_n > 0 \quad \text{où} \quad P_i \equiv a_i x + b_i y + c_i$$

admet toujours des solutions. La traduction de la géométrie en algèbre et inversement (thème et version) est une nouvelle science : la géométrie analytique. La tra-

duction des propriétés métriques comparée à celle des propriétés affines. Et, ici, que traduisons-nous au juste ?



(fig. 4)



(fig. 5)

c. Dénombrer les régions dans le cas général (droites ni concourantes, ni parallèles quand on en prend trois quelconques) ; autre aspect du raisonnement par récurrence. Puis distinguer entre l'inéquation $P_1 P_2 \dots P_n > 0$ et le système

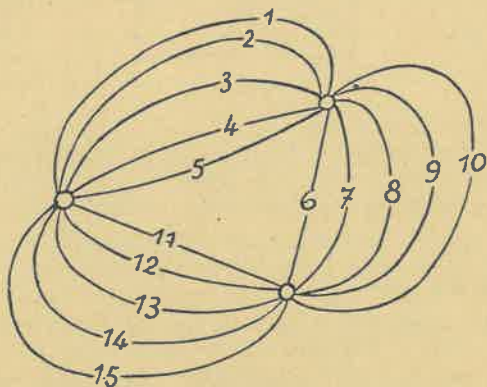
$$P_1 > 0 \quad P_2 > 0 \quad \dots \quad P_n > 0$$

qui n'a plus nécessairement de solution pour $n \geq 3$.

d. On a dessiné les n droites, non sur une feuille de papier, mais sur une feuille de caoutchouc qu'on tiraille, de-ci, de-là (sans la déchirer !) Peut-on sauver une partie du théorème ? Retour à la fin du b.

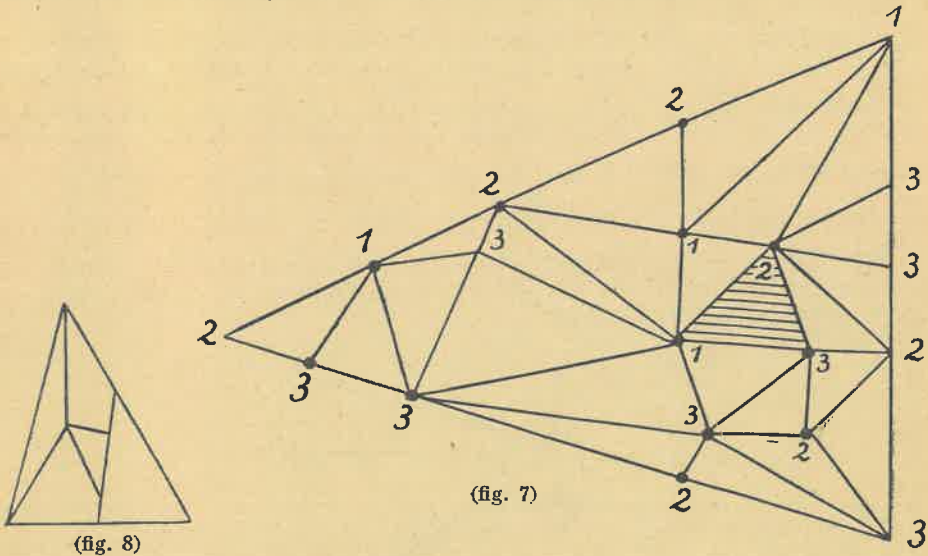
Deuxième exercice. — Dans un plan on trace un réseau de lignes, qui se croisent ou se rencontrent en un certain nombre de nœuds. Par chaque nœud il passe moins de dix lignes. On veut que deux lignes qui ont un nœud commun soient toujours de couleurs différentes. Démontrer que 15 couleurs suffisent, et 14 non.

Indications sur la démonstration : la figure 6 montre que 14 couleurs ne suffisent pas. Démontrer alors que 15 suffisent pour deux et trois nœuds et étendre ce résultat par récurrence sur le nombre de nœuds.



(fig. 6)

Troisième exercice. — Un triangle est triangulé en triangles partiels qui ont, ou bien zéro point commun, ou bien un seul sommet commun, ou bien tout un côté commun (fig. 7). La disposition de la figure 8 est donc exclue.



On affecte les sommets du triangle initial des numéros 1, 2 et 3 respectivement. On affecte les points de triangulation situés sur le côté 1, 2 des numéros 1 ou 2, sans autre loi. Analogie pour les points sur les autres côtés. Quant aux points intérieurs on les affecte des numéros 1, 2 ou 3 d'une façon parfaitement arbitraire.

Démontrer qu'il y aura toujours *au moins* un triangle (autre que le triangle initial) du type 1, 2, 3.

Démonstration : On démontre que les triangles du type (1, 2, 3) sont en nombre *impair*.

Soit X le nombre des triangles (1, 2, 3), Y celui des triangles (1, 1, 2) ou (1, 2, 2).

Soit U le nombre des segments (1, 2) intérieurs, et V le nombre des segments (1, 2) du contour, autre que le côté (1, 2) du triangle initial. On établit facilement que V est impair et, en étudiant le nombre des segments (1, 2) que

$$X + 2Y = 2U + V.$$

ce qui démontre la proposition.

Commentaires et prolongements. — a) On peut démontrer dans un esprit analogue que si chaque point de triangulation est commun à un nombre *pair* de triangles, il est possible de donner à tous les triangles la distribution 1, 2, 3.

b) On *présume*, mais la proposition n'a pas été démontrée, qu'en employant les numéros 1, 2, 3 et 4, il est toujours possible de donner des distributions évitant toute répétition de numéro.

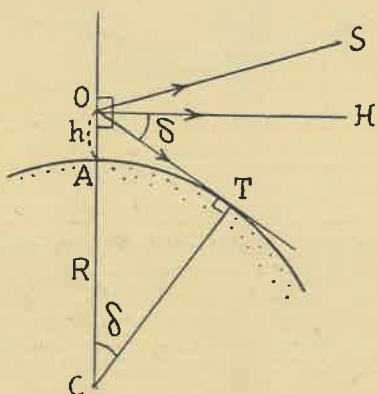
c) Ce problème est en relation avec le célèbre problème dit des *quatre couleurs* dont les professeurs de philosophie parlent volontiers à leurs élèves. (Renseignements élémentaires dans le livre de MM. FRÉCHET et KY FAN : *Introduction à la topologie combinatoire*, Vuibert, éditeur). Les exercices précédents ont, à mon avis, le mérite de présenter des questions qu'on *peut* résoudre, avant de constater notre échec (provisoire !) relatif au nombre chromatique du plan.

d) Digression sur les rudiments de la topologie combinatoire : polyèdres et formule d'Euler ; ruban de Möbius et bouteille de Klein...

A. LENTIN (*Lycée Jacques-Decour*).

UNE APPLICATION DES ANGLES à l'observation de l'horizon

Considérons un point d'observation O d'élévation h par rapport au niveau de la mer. Le rayon visuel OT tangent à la surface de la mer se trouve un peu au-dessous de l'horizontale OH ; soit δ l'écart angulaire \widehat{HOT} . Cet angle est appelé *dépression de l'horizon*. Sa connaissance est indispensable en navigation dans la mesure de la hauteur \widehat{HOS} d'un astre S (Soleil) ; en effet, l'instrument dont on se sert, le *sextant*, se réfère à l'horizon : il indique \widehat{TOS} . Pour obtenir la hauteur, il faut retrancher de \widehat{TOS} la dépression de l'horizon. Celle-ci dépend de l'élévation h (pont du navire) ; il s'agit donc de trouver δ en fonction de h . Nous découvrirons, chemin faisant, un autre intérêt pratique de ce calcul.



L'angle δ se retrouve en C , centre de la Terre, car on a deux angles à côtés perpendiculaire. Soit R le rayon terrestre, on a aussitôt : $\cos \delta = \frac{R}{R+h}$, ce qui définit δ .

Or δ est petit, $\cos \delta$ est proche de l'unité, il est tout indiqué de prendre $1 - \cos \delta$ et d'appliquer la formule d'approximation $1 - \cos \delta = \frac{\delta^2}{2}$; on obtient ainsi :

$$\frac{\delta^2}{2} = 1 - \frac{R}{R+h} = \frac{h}{R+h} \approx \frac{h}{R}$$

d'où la formule :

$$\delta = \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

On remarque immédiatement que δ varie comme la racine de h .

Il reste à rendre utilisable cette formule. On a $R = 6\,366$ km environ, mais on prendra commodément h en mètres. De plus, dans l'approximation, δ est en radian, alors qu'il est intéressant de l'obtenir en minutes.

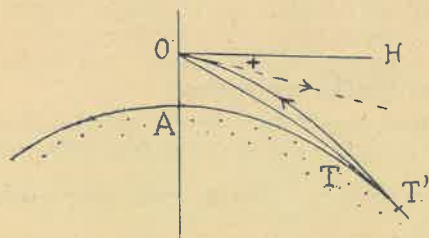
Le calcul numérique qu'on doit faire à cette occasion, avec la question des changements d'unités, donne finalement :

$$\delta = 1,93 \sqrt{h}$$

Cependant, si l'on tient à posséder une formule bien réelle, on doit tenir compte de la *réfraction atmosphérique*. On admettra que celle-ci réduit d'environ 8 % le résultat précédent, si bien que le vrai coefficient de la formule est $1,93 \times 0,92 = 1,78$.

Or, la formule qui donne δ en minutes présente un autre intérêt pratique, et qui touche davantage à l'observation de la nature. Elle fournit la *distance de l'horizon*, vu d'une élévation h . En effet, l'arc \widehat{AT} est proportionnel à l'angle au centre δ . Même, si l'on prend comme unité de longueur le *mille marin*, on a cette loi remarquable que le nombre de milles est δ , d'après la définition même du mille.

Là aussi, pour disposer d'une formule vraie, il faut tenir compte de la réfraction, qui, cette fois, augmente le résultat. Nous admettrons que l'augmentation est encore de 8 %, ce qui donne le coefficient $1,93 \times 1,08 = 2,08$. Ainsi on possède la distance de l'horizon par la formule : $\delta = 2,08 \sqrt{h}$ (δ en milles, h en mètres).



Exemple. — La carte d'Etat-Major indique comme côte élevée sur les hauteurs de Boulogne : 85 mètres. Calculer la distance de l'horizon visible depuis cet observatoire.

Réponse : $1,852 \times 2,08 \times \sqrt{85} = 35,500$ km.

On comprend qu'on aperçoive parfaitement de ces hauteurs, par temps clair, les falaises d'Angleterre, qu'on sait distantes, en effet, d'une trentaine de kilomètres.

Autre exercice : à Paris, calculer la distance de l'horizon pour une observation effectuée du haut de la *Tour Eiffel*.

Autre application : la même formule donne évidemment la *portée d'un phare*. En inversant le problème on demandera l'élévation d'un phare dont la portée est par exemple de 21 milles (Penmarc'h).

Réponse : $h = \left(\frac{\quad}{2,08}\right)^2 = \left(\frac{21}{2,08}\right)^2 = 102$ mètres.

Pour ces calculs numériques l'emploi de la *règle à calcul* est opportun.

On peut faire dresser une *Table* des distances, avec l'argument h variant par exemple de 10 en 10 m, de 0 à 100 m, voire jusqu'à 500 m pour les côtes montagneuses. Cette petite table peut présenter pour les élèves, au cours d'un voyage par exemple, un intérêt de curiosité.

C. DELAPIERRE (*Ecole Militaire Préparatoire, Les Andelys*).

DEUX NOTES SUR L'INVERSION

I. — On sait qu'il faut insister le plus tôt possible sur le rôle que jouent les droites et les cercles, les plans et les sphères. Ces objets étant, respectivement dans le plan et dans l'espace, de la même nature, il est bon de leur donner une définition commune qui les fasse intervenir dès le début de la même façon.

On peut, pour cela, aussitôt qu'on a obtenu la relation métrique fondamentale de l'inversion, procéder comme suit :

Un cercle ou une droite — un plan ou une sphère — est le lieu des points du plan — de l'espace — défini par (A et B étant deux points fixes) : $\frac{MA}{MB} = \lambda$.

La relation métrique de l'inversion donne immédiatement :

$$\frac{M'B'}{M'A'} = \lambda' \quad \text{avec} \quad \lambda' = \lambda \frac{OB}{OA} \quad \text{ou} \quad \lambda \frac{OA'}{OB'} \quad (\text{O pôle d'inversion}).$$

L'inverse est donc un lieu de même nature.

La discussion se fait selon que λ et λ' sont l'un ou l'autre, — ou tous les deux — ou aucun — égaux à l'unité.

Comme cette méthode peut être jugée « abstraite », la « leçon de chose » suit avec les figures.

Noter que cette méthode démontre que le faisceau à points limites A et B a pour inverse le faisceau à points limites A'B' ; la conservation de l'orthogonalité des droites et des cercles — des plans et des sphères — en résulte : à des familles conjuguées correspondent des familles conjuguées.

En même temps, ainsi on fait spécialement ressortir la conservation de l'orthogonalité. Orthogonalité et contact (qu'on étudie peu après) sont les deux cas où l'angle est « bien » conservé : 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont les deux classes module π qui n'ont pas de signe.

II. — Pour que l'inversion soit *définie*, pour unifier les énoncés, pour éclairer les résultats, tout le monde désire le point à l'infini ; mais personne n'en veut, car sa notion n'arrive qu'après coup et se borne à un « tour de langage ».

Pourtant, sa définition précise — en géométrie plane — n'est pas plus difficile à comprendre que celle de la « vraie valeur » d'une fonction, et peut se donner dès qu'on a étudié les inverses des cercles et des sphères, et dès qu'on sait que la transmuée d'une inversion par une inversion est une inversion.

Je demande si l'on peut procéder ainsi :

1) POINT A L'INFINI D'UN PLAN.

a) Un plan P et une sphère Σ étant inverses (pôle d'inversion S), il y a correspondance univoque entre leurs points *sauf pour S*.

b) Quand M tend vers S, m s'éloigne au-delà de toute limite dans P.

Ces deux faits justifient la définition suivante :

Définition : On dit que le point S a pour inverse le point à l'infini du plan P (le plan ainsi « construit » par correspondance avec la sphère est l'image de celle-ci, il en a la structure).

2) INVERSION SUR UNE SPHÈRE Σ .

Etant donné O non sur Σ , les sécantes OMM' définissent l'inversion de pôle O sur la sphère. Cette inversion est *toujours définie*.

3) TRANSMUÉE SUR LE PLAN D'UNE INVERSION O SUR LA SPHÈRE.

La transmuée de l'inversion O par l'inversion S est une inversion plane dont le pôle ω est la trace de SO sur P.

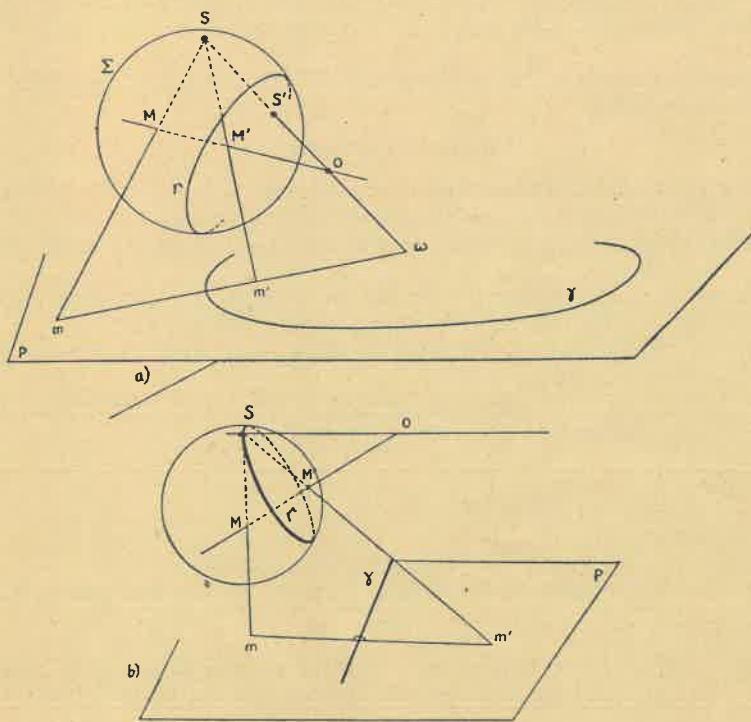
a) Si ω est un point à distance finie : quand M tend vers S, M' tend vers S' (inverse de S sur Σ), m' tend vers ω et m tend vers le point à l'infini dans P ; d'où :

L'inverse du pôle d'inversion ω dans P est le point à l'infini de P.

b) Si ω est le point à l'infini de P (SO parallèle à P) : l'inversion obtenue dans P est une symétrie.

4) POINTS DOUBLES.

Si O est extérieur à Σ , il y a sur Σ un cercle de points doubles (points de contact du cône circonscrit) ; les transmuées sont les points d'un cercle γ (cas a) ou d'une droite (cas b), et sont les points doubles de l'inversion dans P [en a) on retrouve ici la construction du centre de l'inverse d'un cercle].



J. SIROS (*Lycée Lakanal*).

LE TRAVAIL DU GROUPE DE SÈVRES

Il nous paraît intéressant de signaler aux Collègues les sujets d'études du groupe de Sèvres qui se réunit régulièrement sous la direction de Mlle DIONOT. Tous les Collègues qui le désireront pourront adresser leurs remarques et observations aux responsables indiqués ou écrire directement à Mlle DIONOT, au Centre International d'Études Pédagogiques, à Sèvres (Seine-et-Oise).

I. La règle de trois

Les élèves de Sixième connaissent la technique de la règle de trois et l'emploient volontiers. Son utilisation, souvent trop systématique et peu intelligente, nous a conduits à étudier les points suivants sur lesquels nous souhaiterions connaître votre avis :

- 1° Le raisonnement « par réduction à l'unité » souvent employé et quelquefois malheureux quand il porte sur des grandeurs discontinues, doit-il être condamné ?
- 2° La règle de trois, qui laisse provisoirement les opérations en suspens, a-t-elle

pour unique but la simplification finale des calculs ? ou bien peut-on espérer qu'elle contribue à un entraînement au raisonnement abstrait ?

3° La question de la technique de la règle de trois ne peut-elle se comprendre qu'après la technique des fractions ou bien est-elle au contraire un excellent exemple pour comprendre les fractions ?

A ce sujet, la règle de trois étant posée, la possibilité de faire d'abord la multiplication, puis la division, n'a pas été démontrée aux élèves. Cette justification doit-elle être rattachée à la technique des fractions, ou bien à celle de la règle de trois ?

Adresser les remarques à Mlle MARCHAND (Lycée de Sèvres), ou à M. FOUCHÉ (Lycée Janson-de-Sailly).

II. Les fractions

Il serait particulièrement intéressant de confronter les diverses méthodes de présentation de la théorie et des techniques opératoires des fractions.

a) Pourriez-vous étudier la façon dont la question est présentée dans différents manuels ?

Ce travail de documentation a pour but de préciser les différents ordres de présentation, leurs oppositions et, s'il y a lieu, leurs insuffisances.

Il pourrait être intéressant d'étudier des livres plus anciens et des manuels destinés aux classes primaires.

b) En outre, nous vous proposons un plan, et nous vous demandons de bien vouloir l'étudier au même titre que ceux des manuels.

Voici ce plan :

A. *Façons de définir les fractions de :*

- 1° grandeurs continues,
- 2° grandeurs discontinues (en général non définissables),
- 3° nombres (qui ne peuvent être définies en toute rigueur que plus tard).

B. *Opérations avec les fractions :*

1° Equivalence de la définition de la fraction en tant qu'opérateur composé et de l'opération : multiplier par une fraction, indépendamment de la nature du multiplicande.

2° Opération inverse : diviser par une fraction.

3° Simplification et « complication ».

4° Comparaison.

5° Addition et soustraction.

6° Combinaisons quelconques (en particulier, à titre de techniques opératoires fréquemment utilisées : produit de deux fractions, division d'une fraction par une autre).

Références bibliographiques permettant de comprendre ce plan proposé à votre étude :

- BRACHET, *L'enfant et le nombre* (Delagrave).
- THIBERGE, CAGNAC et SIROS, *Classe de Cinquième* (Masson).
- FOUCHÉ, *Pédagogie des Mathématiques* (P.U.F.).

Adresser les remarques à Mlle STOULS (Lycée de Sèvres), M. CASSÉ (Savigny-sur-Orge), ou FOUCHÉ (Janson-de-Sailly).

III. Coordination Géographie-Mathématiques

Le professeur de Géographie de Sixième est obligé d'utiliser des notions de Mathématiques que les élèves n'ont pas encore et qui ne figurent pas toutes au programme de cette classe. Une entente avec son collègue de Mathématiques permet-

trait à ce dernier de donner ces notions, même en marge du programme : ce qui allégerait l'enseignement de la Géographie et assurerait l'unité et la continuité des définitions et du langage.

Pour des raisons analogues, la même coordination serait souhaitable en Seconde et dans les classes terminales.

Enfin, à tous les niveaux, de nombreuses coordinations sont rendues souhaitables et possibles par l'étude du milieu.

A. — CLASSE DE SIXIEME

Extrait du programme. — La Terre dans l'Univers, forme et mouvements, orientation ; mode de représentation : cartes.

Plan de travail.

I. LES LIVRES DE GÉOGRAPHIE

a) *Relever les erreurs d'ordre mathématique* contenues dans certains manuels de Géographie mis à la disposition des élèves.

b) *Proposer des corrections* qui puissent satisfaire le géographe.

II. ETUDE DE CERTAINES DIFFICULTÉS RENCONTRÉES PAR LES ÉLÈVES

a) *Nature de ces difficultés.* — 1. Manque de connaissances de géométrie dans l'espace.

2. Difficulté d'imaginer un espace autre que l'espace local auquel les élèves sont habitués et, par suite, d'expliquer les apparentes contradictions.

Exemples : Parallélisme ou convergence des directions N.-S., des verticales ; diverses interprétations du mot « distance » dans : distance angulaire, distance à vol d'oiseau, par la route ou par chemin de fer, etc...

b) *Recherche d'exercices* qui pourraient aider les élèves à comprendre ces apparentes contradictions et à adapter leur raisonnement aux différentes représentations utilisées en Géographie : cartes, mappemondes, planisphère.

III. NOTIONS DE GÉOMÉTRIE

A propos de ce qui précède, relever les notions de Géométrie :

a) qui sont déjà acquises par les élèves ;

b) qui sont entachées d'erreurs ;

c) qu'il a été nécessaire de faire admettre et d'expliquer.

B. — CLASSE DE SECONDE

Extrait du programme. — Le globe terrestre ; forme et situation dans le système solaire ; les éléments : l'atmosphère, les terres, les mers, leur structure, leur répartition et les phénomènes de contact.

— Les cartes : le problème de la carte, les levés, les coordonnées géographiques, l'échelle. Les cartes d'atlas et les croquis géographiques scolaires.

Plan de travail. — Etudier, en se plaçant au niveau des élèves de Seconde, le plan proposé pour la Sixième. Rechercher, d'autre part, des exercices de Mathématiques illustrant le programme de Géographie, ou inspirés par ce programme, par exemple : graphiques, établissement de cartes, notions d'angles et d'arcs (variation de la longueur d'un arc d'un nombre de degrés donné avec le rayon du cercle), etc...

C. — CLASSES TERMINALES

Recherche des notions du programme de Mathématiques utilisables en Géographie économique (par exemple : statistique, graphiques).

Adresser les réponses à Mmes LEMONNIER (Mathématiques) et PAVARD, au Lycée de Sèvres.

≡ IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE ≡

GRANDEUR ET SERVITUDE DE L'HISTOIRE DES SCIENCES

L'Histoire des Sciences, disons l'histoire générale des sciences, est une discipline encore jeune qui s'efforce de réaliser la synthèse des histoires de chaque science particulière.

Comme tous les êtres jeunes, elle est fort ambitieuse, qualité précieuse, et il faut lui pardonner beaucoup, et suivre ses efforts avec sympathie.

Certains historiens se cantonnent dans une époque déterminée. Citons par exemple deux travaux en langue anglaise, déjà un peu anciens. D'abord, de Georges Sarton, maître éminent, qui vient de disparaître, *A History of Science. Ancient science through the Golden age of Greece*, Harvard University Press, Cambridge 38, Massachusetts. C'est un ouvrage de plus de six cents pages, d'une lecture captivante. Il expose l'évolution scientifique, de la préhistoire à la fin de l'Empire d'Alexandre. Georges Sarton avait une conception très large du domaine scientifique, et il nous entretient de Mathématiques, d'Astronomie, de Médecine, de Philosophie, d'Histoire, de Géographie, de métallurgie, des systèmes d'écriture, de la fabrication du papyrus, etc., etc... Sa culture considérable en fait un guide hors de pair, qui peut être critiqué sur quelques points de détail, mais qui, dans l'ensemble, est un modèle à suivre.

A.-C. Crombie, professeur d'histoire des Sciences à Oxford, a une formation de biologiste. Il nous promène à travers tout le Moyen Age dans son livre très attachant *Augustine to Galileo*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1953. En quelque quatre cents pages il montre l'évolution des sciences et des techniques de 400 à 1650, mais sa conception de la science est un peu plus restrictive que celle de G. Sarton.

Pour un mathématicien pur, les deux historiens paraissent parfois insuffisamment informés de notre discipline. Mais ils présentent des synthèses qui apportent à notre pensée un enrichissement profitable.

La maison Armand Colin vient de faire paraître une *Histoire des sciences*, traduction française d'une tentative très sympathique et un peu ambitieuse d'un jeune historien des Sciences, S.-F. Mason, de l'Université Nationale d'Australie. Il ne s'agit de rien moins que de faire défiler devant nos yeux, en quatre cent cinquante pages environ, toute l'évolution scientifique des cinq derniers millénaires ! Au début de l'ouvrage nous sommes en 3000, voire même en 6000 !, avant notre ère. A la fin nous dissertons sur Mendel, Lyssenko et Mitchourine.

L'ouvrage est cependant agréable et apporte bien des aperçus intéressants, par exemple sur les interactions entre science et technique, ou sur l'influence de la religion sur la science. Si l'on n'est nullement tenu d'accepter toutes ses thèses, il est bon de les connaître. Je passe sur les erreurs de détail, comme cette conception bizarre de la méthode mécanique d'Archimède : le grand mathématicien aurait pesé des plaques en forme de segment de parabole, pour trouver l'aire de ce segment. Cette expérience lui ayant fourni la valeur à trouver, il aurait ensuite bâti une théorie mathématique adéquate ! Il y a là de quoi faire crier de douleur tout mathématicien. Mais nous touchons ici à l'incompréhension mathématique dont disserta si bien en 1940 (Vuibert), M. Dugas.

J'ai signalé l'an dernier son importante histoire de la mécanique. En 1954, il a fait paraître un ouvrage qui complète et illustre cette histoire pour une période capitale, le XVII^e siècle. *La Mécanique au XVII^e siècle* (Dunod) donne en plus de six cents pages une vision très détaillée et très accessible de la création et de l'évolution des théories mécaniques de Galilée à Newton et Leibniz. Je l'ai lue et relue, durant

une quinzaine de Pâques, avec grand intérêt et grand profit. C'est un ouvrage de fond, qui restera longtemps classique.

En 1951 paraissait à Bonn (Athenäum Verlag) l'histoire des Mathématiques, *Geschichte der Mathematik*, de deux historiens très compétents, les professeurs Oskar Becker et Jos. E. Hofmann.

L'ouvrage est de dimensions modestes, 340 pages. O. Becker y traite de l'Antiquité, J.-E. Hofmann de l'Occident et de l'Orient, XIX^e siècle inclus. La bibliographie, très riche, est remarquable. L'Antiquité grecque, les XVI^e, XVII^e, XVIII^e siècles, sont bien exposés, dans un style forcément très rapide, mais avec une grande exactitude.

Une traduction française était attendue avec impatience. Elle vient de sortir aux éditions Lamarre, Paris, avec une très belle préface de M. Bouligand, et sous le titre, *Histoire des Mathématiques*. Malheureusement, l'art de la traduction et celui de l'édition sont très difficiles par la minutie et la rigueur qu'ils exigent, surtout dans ces matières. La réussite n'est pas ici à la hauteur de la tâche, et les lecteurs de l'édition française, lorsqu'ils se trouveront en présence d'une obscurité ou d'une erreur manifeste, ne devront pas en reporter la faute sur les auteurs allemands.

Ces derniers sont gens fort sérieux, dont il faut accueillir les opinions avec un préjugé favorable. Je n'ai à peu près rien à leur reprocher. Je ne puis cependant accepter sans protestation ce jugement sur Bossut (1730-1814) : « L'histoire générale des Mathématiques de Ch. Bossut prend un caractère assez partial du fait de sa préférence affichée pour les ouvrages anglais. » J'ai pensé qu'il y avait là une allusion à la querelle entre les partisans de Newton et ceux de Leibniz, j'ai relu Bossut sur l'argument et je maintiens ce que j'ai écrit ici-même sur cet historien dont les ouvrages se trouvent assez souvent dans les bibliothèques et chez les bouquinistes : il est à consulter sur les XVII^e et XVIII^e siècles.

Parlant du triangle arithmétique, J.-E. Hofmann — (je cite l'édition française, page 218, qui est ici assez fidèle) — nous dit « [Pascal] y met en évidence l'induction complète (qui se rencontre déjà chez Euclide) en se référant à l'arithmétique de Maurolico (1575). »

L'induction complète est aussi appelée en France, et, du moins je le crois, en France seulement, « raisonnement par récurrence ».

Que l'on se reporte à l'article de M. H. Freundenthal, *Zur Geschichte der vollständigen Induktion*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 6^e année, n^o 22, 1953. On y verra d'abord l'histoire des Mathématiques traitée par un mathématicien, phénomène trop rare pour ne pas être signalé. On y verra aussi que dans Euclide ce type de raisonnement n'est pas nettement dégagé.

— En fait, le plus ancien exemple que je connaisse pour ma part est la cinquième proposition, livre deux de l'Équilibre des Plans, d'Archimède. M. Freundenthal a lu Maurolico avec soin. Vacca (1872-1953) avait tellement affirmé que ce dernier appliquait systématiquement l'Induction complète, qu'on l'avait cru sur parole. Il n'en est rien, une fois ou deux elle apparaît épisodiquement, et c'est tout. Quant à moi, je l'ai vue plusieurs fois dans Bachet de Méziriac (1581-1638) que l'on oublie un peu trop en la circonstance. De même, Pascal utilise la récurrence une fois, et une seule, avec beaucoup de clarté d'ailleurs. Le premier mathématicien qui en ait fait un emploi systématique est Jacques Bernoulli (1654-1705).

Mais puisque nous voici dans les Mathématiques pures, signalons, du D^r Alpinolo Natucci, le *Sviluppo Storico dell'Arithmetica generale e dell'Algebra*, Pellegrano del Gaudio, Napoli. En trois cent cinquante pages l'histoire du nombre est étudiée de l'Antiquité à nos jours, dans un style technique et qui tient un peu du dictionnaire bibliographique, en contraste avec le style humaniste de M. Dugas dans sa Mécanique au XVII^e siècle.

Il y a certains points critiquables et le rôle des mathématiciens français me paraît minimisé. Est-ce chauvinisme de ma part, est-ce chauvinisme de la part de

L'auteur, je ne saurais le dire, mais nous avons tous certainement, en la matière, un grand chemin à parcourir.

Tout de même ! quand on insiste surtout sur les XIX^e et XX^e siècles, citer à peine Study (Allemand, 1862-1930), et pas du tout Elie Cartan (1869-1951)...

Cela m'a conduit à relire l'article du premier sur les nombres complexes, traduit et considérablement augmenté par le second en 1908, dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*. Il est heureusement réédité dans les *Œuvres Complètes* d'Elie Cartan, 2^e partie, vol. 1, Gauthier-Villars, 1953. C'est un travail d'une richesse inimaginable et à conseiller à ceux d'entre nous à qui incombe l'enseignement nouveau de l'algèbre linéaire. Ils pourront faire des rapprochements instructifs avec les idées modernes telles qu'elles sont exposées dans les belles conférences qui paraissent dans notre *Bulletin*.

Et puisque je dois montrer que l'histoire, ça sert tout de même à quelque chose, je me permets de signaler ce petit fait : Nos collègues Lentin et Rivaud ont publié chez Vuibert d'excellents *Éléments d'Algèbre moderne*. On y voit pages 238 à 241 une démonstration quasi-parfaite du théorème de d'Alembert.

Je crois qu'elle figure dans l'*Algèbre*, de Van der Waerden, mais je ne saurais l'affirmer aujourd'hui. Ce que je puis dire cependant, c'est qu'elle est une mise au point de celle que Laplace exposait à l'École Normale de l'An III, elle-même mise au point de celle de Daviet de Foncenex (Thonon, 1734, Casal, 1799), disciple et ami de Lagrange à Turin. Le grand progrès de Laplace à nos jours, le voici : il admettait, le Principe de Girard (1629), une équation a un nombre de racines égal à son degré. De nos jours, Galois et quelques autres étant passés par là, on adjoint au corps des coefficients des symboles adéquats pour créer un corps de rupture où l'équation aura le nombre de racines voulu. Puis on revient à Laplace, montrant, comme lui, que ces racines appartiennent au corps des complexes ordinaires, si les coefficients en font eux-mêmes partie.

Il y a progrès, certes, mais, comme disent les Hégéliens ou les Marxistes, synthèse après thèse (Laplace) et antithèse (Gauss).

Encore fallait-il regarder de près l'histoire. Or, on doit justement à B.-L. van der Waerden. *Ontwikende Wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde*, Groningen (Noordhoff), 1950. (L'aube de la science. Mathématiques égyptienne, babylonienne et grecque), ouvrage dont a paru depuis une traduction anglaise. Ce qu'il fallait démontrer.

Jean ITARD.

La Physique et les professeurs de Mathématiques

Au départ, il y a cette idée pas du tout originale que, même dans l'enseignement le plus élémentaire des Mathématiques, il y a et il doit y avoir présence des préoccupations de la Physique. Le programme de Sixième sur la mesure des grandeurs en est un bon exemple. N'est-il donc pas souhaitable que ce *Bulletin* fasse régulièrement une place aux problèmes de la Physique traités par ou pour les professeurs de Mathématiques ?

En attendant de pouvoir donner la parole à des physiciens qualifiés, je citerai trois ouvrages qui, à des titres très divers, méritent notre attention.

La Physique mathématique classique, de Th. VOGEL (Collection Armand Colin, n° 308) est fidèle à la formule qui a fait la réputation de cette collection. Parce qu'elle consiste à ordonner l'ensemble de nos connaissances dans certains domaines de la Physique, la Physique mathématique est la plus proche parente des Mathématiques dans la famille des sciences. La frontière qui les distingue est-elle même défi-

nitivement fixée ? La mécanique des solides fait partie des Mathématiques, celle des corps déformables de la Physique mathématique.

Après un rappel des notions mathématiques indispensables le livre étudie quelques types de champs fondamentaux, puis il introduit véritablement à l'axiomatique de la Physique dans les domaines classiques : mécanique des corps déformables, électromagnétisme et optique, transmission de la chaleur. En quelque 200 pages l'auteur a le mérite de présenter clairement un sujet rarement abordé et il facilitera à ses lecteurs l'étude des ouvrages spécialisés.

Les *Nouvelles perspectives en Microphysique*, de M. Louis DE BROGLIE (Albin Michel, Collection « Sciences d'Aujourd'hui », Paris, 1956, 780 F), sont un recueil d'études dont certaines avaient déjà été publiées. Certaines avaient été d'autant plus remarquées qu'elles indiquaient une évolution de la pensée du grand théoricien de la Mécanique ondulatoire vers un retour au déterminisme classique. La réunion de ces études en volume leur donne encore plus de poids et la diversité du sommaire fait bien apprécier la largeur de vues du savant.

Dans la première série d'exposés, indépendants de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire, j'ai relevé particulièrement la note synthétique sur « les particules de l'échelle atomique » et l'étude sur « le champ nucléaire ». Dans la seconde partie, essentielle, se trouve l'article « La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ? » qui avait paru, je crois, dans *La Revue d'Histoire des Sciences*, mais qui sert ici d'introduction à une étude plus avancée du problème. En plus de l'intérêt scientifique de cette partie du livre qui nous met en présence du problème crucial de la Physique contemporaine, il y a la grande leçon du savant qui révisé courageusement les idées et les principes auxquels il avait cru devoir se rallier. Cet aspect moral, ou si l'on veut sentimental de la recherche scientifique est particulièrement sensible dans le récit que l'auteur nous fait de sa rencontre avec EINSTEIN, au Conseil Solvay, en 1927. La seule photographie du livre, un portrait d'EINSTEIN, qui date de 1951, donne un visage émouvant à ce drame du savant face à son œuvre passée et au progrès de la science.

Les deux dernières parties du livre contiennent des textes qui retiendront notre attention. Celui qui a pour titre : « La culture scientifique suffit-elle à faire un homme ? » pourrait peut-être servir de charte à tous ceux qui veulent faire vivre un véritable humanisme moderne. D'autres textes, tel celui sur Pierre DUHEM, serviront à l'histoire des sciences.

M. Louis DE BROGLIE, qui a si bien su dire l'objet et les limites de la vulgarisation scientifique, a eu le rare mérite de montrer l'exemple en ce domaine. Ses *Nouvelles perspectives* montrent que depuis *La Physique nouvelle et les Quanta* (Flammarion, 1937) et en passant par *Matière et Lumière* (Albin Michel, 1938), le savant n'a jamais oublié qu'une condition de son existence était l'explication de son œuvre à un grand public cultivé.

Le tome II de l'Encyclopédie Française permanente, *la Physique* (Larousse, 1956, un volume 7 500 F) est un monument ; un non spécialiste ne peut guère que s'émerveiller devant l'ampleur du travail et la densité de ces pages.

Les chapitres d'introduction seront ceux qui, peut-être, retiendront particulièrement l'attention des professeurs de Mathématiques : la méthode (par L. DE BROGLIE), l'historique (par Mme TONNELAT), les mesures (par FERRARD et TERRIEN) et enfin les instruments mathématiques de la physique, groupes tenseurs et spineurs par A. LICHNEROWICZ, les géométries et les probabilités par Georges DARMOIS. Ces chapitres de Mathématiques sont forcément réduits à des squelettes ; ils font espérer que la révision périodique des tomes de cette Encyclopédie sera réalisée, en particulier celle du tome I sur les Mathématiques.

Je ne peux que signaler quelques chapitres qui seront parmi ceux que nous pourrions consulter le plus fréquemment : les principes de la mécanique classique par J.-L.

DESTOUCHES et la Relativité, par Mme TONNELAT, M. Georges DARMOIS et MM. COSTA DE BEAUREGARD et LENNUIER.

Si M. LOUIS DE BROGLIE a dirigé la rédaction de ce tome, il a joué aussi un rôle essentiel dans les chapitres qui étaient de sa particulière compétence. La publication d'une telle œuvre est d'autant plus remarquable que les progrès continus de la science risquent plus vite de dépasser cet exposé. Il faut donc espérer que nous pourrions consulter ce livre dans les bibliothèques de nos établissements.

G. W.

Pour le calcul pratique

Manuel de calcul pratique numérique et graphique, par A. DESFRETIERE. Deux volumes, Paris, 1956, Masson et C^{ie} éditeurs.

Si ces deux ouvrages sont particulièrement destinés aux élèves de l'Enseignement Technique, je crois qu'ils rendront également service à tous les Collèges du Second Degré qui pourront organiser des travaux pratiques.

Comme le précise justement l'auteur, il s'agit de faire acquérir aux élèves ces deux qualités d'un bon calculateur : *rapidité* et *exactitude*. Le premier livre traite du calcul numérique : opérations fondamentales, calculs approchés, opérations abrégées (ce qui me paraît très utile), usage des tables numériques, puissances, logarithmes, série Renard, table des logarithmes des fonctions circulaires. Le second livre traite du calcul à la règle et par le graphique ; le calcul à la règle devrait être connu de tous les élèves de Mathématiques Élémentaires ; le calcul par le graphique est une application presque obligatoire du programme de Sciences Expérimentales. Les deux derniers chapitres traitent des abaques à points alignés et des diagrammes géométriques (comme on pourrait en faire en travaux pratiques de Seconde).

Il faut souligner la parfaite présentation de l'ouvrage et se féliciter, je crois, de sa très opportune publication. Ou plutôt en féliciter l'auteur...

G. W.

≡ V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS ≡

Concours de l'Enseignement public en 1956

Agrégation masculine de Mathématiques

MM. : 1. GABRIEL (E.N.S.) ; 2. PAIR (E.N.S.) ; 3. BAILLE (E.N.S.) ; 4. MARTIN André (E.N.S.) ; 5. *ex-aquo* : BARRA (E.N.S.), DESQ (E.N.S. de St-Cloud) ; 7. BERRON (E.N.S.) ; 8. AVEZ, étudiant, Paris ; 9. PARIZET (E.N.S.) ; 10. FERNIQUE, prof. lycée de Haguenau ; 11. OVAERT (E.N.S.) ; 12. *ex-aquo* : KEKENBOSCH (E.N.S. de Saint-Cloud), MILLOT (E.N.S.) ; 14. SAADA, prof. lycée Condorcet ; 15. CORTET (E.N.S.) ; 16. *ex-aquo* : MOTTAL (E.N.S.), ROYER (E.N.S.) ; 18. GUIGUE, étudiant, Paris ; 19. RICARD (E.N.S. de St-Cloud) ; 20. BÉAN (E.N.S.) ; 21. GRAND, professeur collège de Lunel ; 22. DUMAS, professeur certifié lycée de St-Rambert ; 23. HACQUÉ (E.N.S. de St-Cloud) ; 24. TURNER, professeur certifié lycée de Blida ; 25. BASTIÉ René, professeur certifié lycée de Chartres ; 26. *ex-aquo* : GOBY, service militaire, PHILIPPON, professeur certifié collège moderne de Rouen ; 28. *ex-aquo* : AUGIER, étudiant, Clermont-Ferrand, COATMELEC, assistant à la Faculté de Rennes, KERNEVEZ, élève-professeur du C.P.R. de Paris, SILVESTRE, professeur certifié collège de Lunéville ; 32. *ex-aquo* : DUPUIS (E.N.S. de St-Cloud), GERMAIN (E.N.S.), OYALLON, professeur certifié lycée de Tulle, PAULY, professeur certifié lycée de Foix, PLOUGET, assistant à la Faculté d'Alger ; 37. BILLARD, étudiant, Poitiers ; 38. MARTIN Jean, professeur à l'E.N.I. de Draguignan.

Liste des candidats qui, n'ayant pas été proposés pour le titre d'agrégé, ont été, en raison de leurs qualités pédagogiques, l'objet d'une proposition du jury qui leur tient lieu de certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement Public du Second Degré (C.A.P.E.S. parties théorique et pratique). Ces candidats jouissent d'une priorité pour être nommés professeur certifié :

MM. DUMONT Yves (E.N.S. de St-Cloud) ; VITART, étudiant à Paris ; PONASSE, assistant à la Faculté de Clermont-Ferrand.

Liste des candidats admissibles proposés pour la dispense de la partie théorique du C.A.P.E.S. (2^e concours) :

MM. CHAMBADAL (E.N.S.) ; LEROUX (E.N.S.).

Ces candidats recevront une affectation dans un C.P.R. pour le 1^{er} octobre 1956.

Agrégation féminine de Mathématiques

Mmes et Mlles : 1. *ex-aquo* : CHOPARD-LALLIER (E.N.S. de Sèvres), TOURAINE (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 3. NAZÉ, étudiante à Marseille ; 4. CHAIZE (E.N.S. de Sèvres) ; 5. BLUMEAU (E.N.S. de Sèvres) ; 6. BOURREAU (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 7. MARCHADIER (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 8. *ex-aquo* : BESSON (E.N.S. de Sèvres), MOREAU (E.N.S. de Sèvres) ; 10. *ex-aquo* : GALMARD, professeur au collège de Châteaudun, JEANDIDIER, née MASSON, professeur en congé ; 12. DUTHEIL, professeur au lycée de J.F. de Dijon ; 13. MENEZ (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 14. VALETTE, étudiante à Marseille ; 15. LAUVIN, née DUMANY, élève-professeur du C.P.R. de Dijon ; 16. HÉRODOTE (E.N.S. de Sèvres) ; 17. PHILIPPE (E.N.S. de Sèvres) ; 18. BRAHEMIA (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 19. MERDRIGNAC, professeur au lycée de St-Brieuc ; 20. HERVIER (E.N.S. de Sèvres) ; 21. *ex-aquo* : BERNARD, professeur au lycée de Chalon-sur-Saône, MIROUSE, élève-professeur du C.P.R. de Toulouse ; 23. BOUCHE, née VALÈRE, étudiante à Paris ; 24. PEYRO, professeur en congé ; 25. MICHEL, née LAPEYRE (E.N.S. de Sèvres) ; 26. FAVRELLE, élève-professeur du C.P.R. de Lille ; 27. GARRIGUES, née GUIGNARD, professeur en congé ; 28. *ex-aquo* : BOISSON, née GIRAUDON (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses), MAHÉ, née DELESTRE, professeur au collège de Perpignan ; 30. SIMON (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 31. CHESNATS, née DUBOIS, élève-professeur du C.P.R. de Paris ; 32. NOROTTE, née FAUCHER, élève-professeur du C.P.R. de Paris.

Liste des candidates qui, n'ayant pas été proposées pour le titre d'agrégée, ont été, en raison de leurs qualités pédagogiques, l'objet d'une proposition du jury qui

leur tient lieu de certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement Public du Second Degré (C.A.P.E.S., parties théorique et pratique). Ces candidates jouissent d'une priorité pour être nommées professeur certifié.

Mlles JOIGNEAU, étudiante à Paris, auditrice à l'E.N.S. de Sèvres ; GAUSSON, E.N.S. de Sèvres ; MOCQUERY, étudiante à Paris ; BARDOU, étudiante à Marseille.

Admission dans les Centres Pédagogiques Régionaux

(Candidats)

MM. 1. POMMIEZ, étudiant à Bordeaux ; 2. VITART, étudiant à Paris ; 3. QUILLCHINI, A.E. stagiaire au lycée Montaigne ; 4. GUIGUE, étudiant à Paris ; 5. BILLARD, étudiant à Poitiers ; 6. CHAUMFIL, M.A. à la Maison des paralysés de St-Fargeau ; 7. FOESSER, étudiant à Strasbourg ; 8. BARTHOMEUF, A.E. au collège de St-Flour ; 9. CORRIEU, A.E. au lycée d'Oran ; 10. *ex æquo* : BISSOL, A.E. au collège de Porto-Novo (F.O.M.), CANAC, étudiant à Toulouse ; 12. GAUTHIER, M.I. au lycée du Parc à Lyon ; 13. BELLAICHE, professeur délégué au lycée de Bizerte (F.O.M.) ; 14. CELLIAY, A.E. au collège technique de Lille ; 15. ZAMUTH, étudiant à Montpellier ; 16. BOISSE, A.E. tit. au collège d'Armentières ; 17. *ex-æquo* : FROMAGEOT, étudiant à Paris, PARPAY, A.E. stag. au lycée de La Rochelle ; 19. ABITBOL, professeur délégué au lycée de Bizerte (F.O.M.) ; 20. *ex-æquo* : DUPUY, M.A. au collège technique de St-Chamond, GLAYMANN, chargé de cours à Beyrouth (F.O.M.) ; 22. GUILLOUET, A.E. tit. au collège de Verneuil ; 23. VIDAL, étudiant à Marseille ; 24. HÉBERT, A.E. tit. au collège de Valognes ; 25. BUREL, A.E. tit. au collège de Romans ; 26. LETERRIER, étudiant à Caen ; 27. ANTONINI, étudiant à Marseille ; 28. *ex-æquo* : FLAMANT, étudiant à Paris (F.O.M.), SOLET, M.A. à l'Ecole française de Meunerie ; 28 *bis* BESSIS, prof. tit. au collège technique de Tunis (1) ; 30. *ex-æquo* : MANDEMENT, étudiant à Toulouse, ROUX, professeur au lycée Yersin à Dalat ; 32. PILOT-MONTACHARD, étudiant à Grenoble ; 33. MOULIA, étudiant à Toulouse ; 34. LIANDRAT, M.A. au collège de Vizille (F.O.M.) ; 35. RIVOAL, A.E. au lycée de St-Brieuc ; 36. ROUDIER, étudiant à Clermont-Ferrand ; 37. *ex-æquo* : SITBON, étudiant à Paris (F.O.M.), VINSONNEAU, étudiant à Toulouse ; 39. CIPAN, M.I. au lycée de Bordeaux ; 40. *ex-æquo* : BLANC, A.E. tit. au lycée de Marseille, MARQUETTY, prof. contract. au lycée de Phnom-Penh (F.O.M.) ; 42. AUBERT, M.A. au collège moderne de Nantes ; 43. *ex-æquo* : FAIVRE, M.A. au lycée Condorcet à Paris, SOURIAU, professeur contract. au Cambodge (F.O.M.) ; 45. ADAM, M.A. au collège de Chauny ; 45 *bis*, BOCCARA, prof. au collège technique de Sousse (1) ; 46. RAOUL, M.A. au coll. de Redon ; 47. DRUGE, M.I. stag. au collège de Bourgoin ; 48. *ex-æquo* : LALIN, A.E. au lycée de Péronne. NICOL, A.E. tit. au lycée de Guingamp ; 50. *ex-æquo* : JOVENTAUX, A.E. tit. au collège de Cambrai, OBERKAMPF DE DABRUN, M.A. au lycée de Sarreguemines ; 52. REDON, étudiant à Lyon ; 53. MONFEUGA, étudiant à Bordeaux ; 54. ABONNEL, étudiant à Marseille ; 55. SCHACHERER, étudiant à Strasbourg ; 56. *ex-æquo* : BESNARD, A.E. tit. au lycée de Suresnes, ATTARIAN, professeur au collège de Beyrouth (F.O.M.) ; 58. RODIER, A.E. au lycée de Poitiers ; 59. *ex-æquo* : BOUYER, professeur détaché au collège du Havre, MÉGY, A.E. stag. au collège technique du bâtiment à Marseille ; 61. LE ROUX, étudiant à Rennes ; 62. HÉBEL, étudiant à Rennes ; 63. HUGOT, A.E. tit. au lycée de Damas ; 64. *ex-æquo* : CAUJOLLE, M.A. au lycée Claude-Bernard à Paris, LECOUTOUR, A.E. au lycée de Landerneau, SMAL, A.E. au lycée de Roubaix ; 67. BÈS, A.E. tit. au lycée de Carcassonne ; 68. *ex-æquo* : BARRAJA, M.A. au lycée Ampère à Lyon, BOIREAU, A.E. à l'E.N.P. de Nantes ; 70. *ex-æquo* : DUPUIS, M.A. au collège de Dieuze, HÉNIN, A.E. au collège de Montreuil-sur-Mer, LUMBROSO, étudiant à Paris, MANUNTA, étudiant à Marseille (F.O.M.), QUÉNIS, étudiant à Lyon ; 75. MONIER, A.E. tit. au lycée de Talence ; 76. LEYROLLE, M.A. au lycée d'Aurillac ; 77. GARNAUD, A.E. stag. à l'E.N. de Châteauroux ; 78. ROAGNA, service militaire ;

(1) Candidat admis à titre tunisien.

79. RIBARD, A.E. au collège de Conakry (F.O.M.) ; 80. VITALI, professeur délégué au lycée de Soussé (F.O.M.) ; 81. JOUBERT, M.A. au collège de Thouars ; 82. MANNENT, surv. d'externat au lycée de Toulouse ; 83. *ex-æquo* : MOLINA, M.A. au lycée d'Alger, NAKACHE, A.E. tit. au lycée d'ens. franco-musulman d'Alger, RAMPARANY, étudiant à Paris ; 86. *ex-æquo* : CUBELLS, A.E. au collège de Bédarioux, HURSON, A.E. stag. au lycée J.-Decour à Paris, MACHIN, M.A. au collège d'Albert ; 89. *ex-æquo* : CHASSEIGNE, professeur détaché au collège de Marrakech (F.O.M.), JUILLOT, A.E. au lycée de Basse-Terre, FRANCONI, S.E. au lycée de Toulon, rap. A.F.N. ; 92. *ex-æquo* : BÉNARD, M.A. au collège de Tizi-Ouzou, LANFRANCHI, A.E. Marseille, rap. A.F.N.

Elèves des E.N.S. dispensés des épreuves écrites

MM. 1. ELHORGA Jean (E.N.S. de St-Cloud) ; 2. LEGLAND Michel (E.N.S. de St-Cloud) ; 3. REYNAUD Max (E.N.S. de St-Cloud) ; 4. *ex-æquo* : DUMONT Yves (E.N.S. de St-Cloud), MARQUANT (E.N.S. de St-Cloud).

Admission dans les Centres Pédagogiques Régionaux

(Candidates)

Mmes et Mlles 1. BOUCHE-VALÈRE, auditrice à l'E.N.S. ; 2. VALETTE, étudiante à Marseille ; 3. CAMPLAN, étudiante à Paris ; 4. BARDOU, étudiante à Marseille ; 5. HAGGIAG, assistante à l'Institut des Hautes Etudes de Tunis ; 6. PANISSE, étudiante à Marseille ; 7. SAULNIER, étudiante à Rennes ; 8. PENNE, née GENSUL, auditrice à l'E.N.S. de Sèvres ; 9. LEFÈVRE, étudiante à Paris ; 10. ARIBAUD, étudiante à Toulouse ; 11. HOUÉE, M.A. au collège de Tréguier ; 12. LÉON, étudiante à Rennes ; 13. BARDON, née DESHAYES, étudiante à Clermont-Ferrand ; 14. POSTAIRE, née SAQUET, A.E. au collège de Granville ; 15. MALCUIT, M.A. au collège de Colmar ; 16. LEBERON, étudiante à Toulouse ; 17. FRAISSINES, étudiante à Montpellier ; 18. VERNAZOBRES, étudiante à Toulouse ; 19. REBY, étudiante à Clermont-Ferrand ; 20. LANORE, née COLLOT, A.E. au collège de Pantin ; 21. DANIEL, née DAVID, A.E. stagiaire, M.A. au coll. de Fougères ; 22. LECOUTOUR, née ROGIER, A.E. au lycée de Landerneau ; 23. SELIG, étudiante à Lyon ; 24. HAUTCŒUR, étudiante à Rennes ; 25. GRAVICHE, M.A. au collège de Rambouillet ; 26. HÉBERT, étudiante à Paris ; 27. MEYER, maît. pérenn. au cours complém. de Vizille ; 28. BRUYÈRE, étudiante à Marseille ; 29. DANTHONY, M.A. au collège moderne de St-Etienne ; 30. BUISSART, étudiante à Lille ; 31. LEBŒUF, née DONANT, A.E. au lycée de J.F. de Moulins ; 32. BIÈVRE, étudiante à Lyon ; 33. DUFOR, étudiante à Lyon ; 34. PLAT, A.E. au lycée de Meaux ; 35. DEVERGNE, née ACHACH, A.E. au collège Octave-Gréard à Paris ; 36. TOIROT, A.E. au collège de Montbéliard ; 37. MÉTIVIER, née BENOIT, étudiante à Rennes ; 38. FRANÇOIS, étudiante à Rennes ; 39. FERDINAND-DREYFUS, A.E. stag. au collège moderne de Nogent-le-Rotrou ; 40. BRESSON, A.E. au C.T. d'Argenteuil ; 41. CAU, institutrice en congé ; 42. COULON, A.E. stagiaire au lycée St-Just à Lyon ; 43. GAMI, professeur au collège Millet de Tunis (F.O.M.) ; 44. *ex-æquo* : ARGOULOÏN, A.E. stagiaire en congé, LOSTIES, M.A. au lycée de Montgeron ; 46. CAPITAN, née BÉZANGER, institutrice en congé.

Elèves des E.N.S. dispensées des épreuves écrites

Mmes et Mlles 1. CHOPART-LALLIER (E.N.S. de Sèvres) ; 2. *ex-æquo* : BLUMEAU (E.N.S. de Sèvres), MYOT (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 4. *ex-æquo* : AMAR (E.N.S. de Sèvres), TOURAINE (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses) ; 6. *ex-æquo* : BOURREAU (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses), HÉRODOTE (E.N.S. de Sèvres) ; 8. GAUSSON (E.N.S. de Sèvres) ; 9. ANACLET (E.N.S. de Fontenay-aux-Roses).

Première partie du Professorat des Ecoles Nationales Professionnelles et des Collèges Techniques

(Section A1)

1. MINIUSI Claude ; 2. CARMONA Emile ; 3. LECERF André ; 4. LAVABRE Guy ; 5. GOSNET Jean ; 6. GUILLEMER Odette ; 7. FAIVRE Geneviève ; 8. CASTELLANE Pierre ;

9. CHAUVIN Gérard ; 10. DUBOST René ; 11. BÉRAIL Simone ; 12. WEISS Idelette ; 13. CHAUVET Edouard ; 14. ATGÉ Claudette ; 15. CAULLE Raphaël ; 16. VADON Albert ; 17. DURET Robert ; 18. MORISOT René.

Professorat de Sciences Industrielles (A₁)

(1^{re} partie)

Liste, par ordre alphabétique, des candidats proposés pour l'admission définitive :
Mlle BELLEIN ; Mlle BOUSSIER ; Mme CAVIER ; Mlle GHIOT ; Mlle LABEUR ;
Mlle LAGLAINE ; Mlle LANET ; Mme SARDA ; Mlle TOIROT. — MM. BOUYER, BRET,
DUTT, FAUCHES, GALZY, GAUTIER, LECOUTOUR, MAZÉ, MONIER, PERRET.

Première partie du Professorat des Ecoles Nationales Professionnelles et des Collèges Techniques

(Section A₂)

1. PASCAL Yves ; 2. CAILLON Nicole ; 3. SEILHAN Marie-Antoinette ; 4. ROUX
Françoise ; 5. NÉDÉLEC Odette ; 6. VILLENEUVE Simone ; 7. GUÉNIN Suzanne ;
8. COURTOIS Mireille ; 9. BÉNÉZECH Jean ; 10. POGGI Jacqueline ; 11. BRANDY
Jeanne ; 12. GAUTHIER Jeannine ; 13. TAMISIER Annie ; 14. *ex-æquo* : MASSON Chris-
tiane, BRIVET Jacqueline ; 16. VEDEL Eliane ; 17. HELBERT Jean ; 18. SIMON Clau-
dette ; 19. CHELET Suzanne ; 20. FROT Jacqueline ; 21. SEN Stefka ; 22. ARNAULT
Marie-Thérèse ; 23. CHOCAT Janine ; 24. CAURIER Marie-Louise ; 25. MORILLON
Claude ; 26. GINOUX Yvette.

Distinctions.

Le *Journal Officiel* du 28 août 1956 annonce que M. CAGNAC, Inspecteur de
l'Académie de Paris, et M. MAILLARD, professeur de Mathématiques Spéciales au
Lycée Charlemagne, sont chargés de mission d'Inspection générale de Mathématiques.

Au nom de l'A.P.M. nous adressons nos félicitations à nos deux Collègues et
nous les remercions de leur dévouement à l'œuvre de notre Association au Comité de
laquelle ils ont, l'un et l'autre, apporté le précieux concours de leur expérience.

**

Ecole des Sciences de Reims.

Premier essai de décentralisation, rendu nécessaire par la surcharge des ensei-
gnements parisiens, l'*Ecole des Sciences* de Reims ouvrira ses portes au début de
novembre 1956. Cette annexe de la Faculté des Sciences de Paris préparera, en
1956-57, au Certificat de Mathématiques Générales, sous la direction de M. DAVID,
Maître de conférences. Programme, horaire et épreuves de l'examen seront les mêmes
à Reims et à Paris.

**

Nouveaux textes utiles à connaître.

* Arrêté du 27 juin 1956, paru au *B.O.* n° 27, précisant l'organisation des classes
de Spéciales A₁ et A₂ à partir du 1^{er} octobre 1956.

* Circulaire du 22 septembre 1956, parue au *B.O.* n° 33, précisant l'horaire de
ces classes.

* Note du 21 septembre 1956, parue au *B.O.* n° 33, précisant le programme des
agrégations masculine et féminine de Mathématiques pour 1957.

N.D.L.R. — Au 2 octobre 1956, les Services d'Édition et de Vente des Publica-
tions de l'Éducation Nationale (SEVPEN), 13, rue du Four, Paris, 6^e, annonçaient
comme *très prochaine* la publication des nouveaux programmes applicables dans les
classes de Spéciales A₁ et A₂ à partir du 1^{er} octobre 1956.

Au nom de l'A.P.M. et des Collègues qui enseignent dans ces classes en parti-
culier, je n'ai pu que déplorer le retard de cette publication. Il s'agit ici de textes
qu'il aurait été utile de connaître dès juin dernier.

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION

LA RENTRÉE A L'HEURE DE LA RÉFORME

« Le privilège des grands, c'est d'assister aux catastrophes d'une terrasse. »

J. GIRAUDOUX. *La guerre de Troie n'aura pas lieu...*

Ainsi que chaque professeur aux prises avec les problèmes de la rentrée peut le faire, je voudrais essayer d'apprécier les perspectives de notre travail pédagogique au cours de la nouvelle année scolaire. J'accueillerai volontiers toutes les remarques qui permettront de corriger cette esquisse, car, comme beaucoup de Collègues, je n'ai pas le privilège de pouvoir contempler la situation présente du haut d'une terrasse...

*

**

Formation des maîtres.

Sans avoir sous les yeux la moindre statistique officielle ou valable, on peut certainement dire que la rentrée 1956 sera difficile : nombre considérablement accru d'élèves et nombre très insuffisamment accru de professeurs. Plus de 70 places mises au concours pour l'agrégation masculine de Mathématiques et 38 candidats reçus. Les jeunes stagiaires recus aux épreuves théoriques du C.A.P.E.S. en juillet, et affectés, dès octobre, à des postes de titulaires avec 12 heures de service hebdomadaire (auxquelles s'ajouteront pour chacun d'eux, les heures normales d'étude et de service des stagiaires dans les C.P.R. ; espérons que nos jeunes Collègues pourront, sans danger pour leurs santé, subir ce régime). Le travail des Conseillers pédagogiques ne sera pas simplifié. Les services que beaucoup de Collègues devront assurer sera sans doute bien lourd.

Cette situation n'est pas nouvelle. Elle est seulement de plus en plus inquiétante, au fur et à mesure que persiste la préférence de l'Administration pour les solutions dites de fortune, alors que, depuis des décades, on attend une politique cohérente de formation des maîtres.

Sachant que cette formation est la clé de toute réforme de l'enseignement, le Bureau de l'A.P.M. a décidé la création d'une Commission particulièrement chargée d'étudier cette question. Elle devra étendre son activité à tous les aspects du problème. Cela comprend la réforme de la licence d'enseignement qui ne pourra être réalisée que par entente avec l'Enseignement Supérieur. Je suis persuadé que l'accord est possible, si, de part et d'autre, on sait dire calmement et nettement ce qu'on veut. Quand on n'est pas très « initié », on est parfois surpris de découvrir que des conflits qui paraissent graves et porter sur des oppositions fondamentales, seraient ramenés à de plus modestes proportions par des conversations franches où les « adversaires » pourraient s'accorder, pour commencer, sur leur terminologie. De tels contacts pourraient être préconisés et organisés par la Commission ; ils profiteraient à l'avenir des Mathématiques dans ce pays.

Bien qu'elles se placent sur un autre plan, les conférences organisées en coopération avec la Société Mathématique de France et la collaboration si cordiale des professeurs des Facultés, participent à créer ce climat de compréhension mutuelle. Nous, professeurs du Second Degré ou du Technique, sommes mis en contact direct avec les progrès des Mathématiques modernes ; les professeurs de l'Enseignement Supérieur mesurent mieux les problèmes de notre enseignement et les exigences de la formation des maîtres.

Les travaux pratiques.

Par un vote unanime, l'Assemblée générale de Pâques 1956 a réclamé l'organisation d'une heure hebdomadaire de travaux pratiques de Mathématiques dans toutes les classes du Second Degré (effectifs d'une demi-classe, heure s'ajoutant aux horaires actuels. Cette *petite réforme* a, selon nous, de multiples avantages :

— l'organisation de ces travaux pratiques est *immédiatement* réalisable dans *toutes* les classes avec un minimum de dépenses nouvelles ;

— elle permet donc *immédiatement* et à *tous les niveaux* de la scolarité une amélioration sensible du rendement de l'enseignement scientifique à une époque où la pénurie de travailleurs scientifiques qualifiés se fait durement sentir ;

— elle n'exige aucune révision d'ensemble des programmes, opération délicate qui doit être longuement mûrie ;

— dans toutes les classes, et celles du premier cycle en particulier, les travaux pratiques doivent permettre d'alléger, voire de supprimer, le travail écrit à la maison ;

— quel que soit l'avenir d'une réforme générale de l'enseignement, quelles que puissent être les perspectives alors ouvertes à l'enseignement scientifique, ces travaux pratiques développent la pédagogie des Mathématiques dans le sens d'une plus active participation des élèves à la recherche, d'un plus habile usage pratique des connaissances théoriques acquises et par conséquent d'une compréhension plus saine et plus profonde de la nature et des vertus de l'abstraction mathématique.

Que l'organisation de ces heures, alors que l'on manque de professeurs, soit difficile, nous en convenons volontiers. Mais il nous paraît impossible qu'on nous oppose de mauvais arguments :

— l'augmentation des horaires de Mathématiques susciterait des « revendications » du même genre de la part des professeurs d'autres disciplines ; mais le Congrès 1956 du S.N.E.S. a émis un vote favorable à l'accroissement immédiat d'une heure hebdomadaire au moins de l'horaire de Mathématiques de toutes les classes ;

— l'imminence d'une réforme générale de l'enseignement interdirait qu'on ébranle le dispositif actuel ; mais, que la réforme générale soit proche ou non, une amélioration partielle de l'organisation actuelle ne peut compromettre les chances de réalisation de la réforme générale et l'idée des travaux pratiques cadre bien avec les intentions affirmées par les divers projets et en particulier par le dernier en date.

Deux arguments sérieux seulement peuvent nous être opposés et nous devons les considérer : toute réforme, même petite, coûte cher et le manque actuel de professeurs de Mathématiques empêche toute augmentation des horaires de cette discipline. Quant à moi, je répondrai que si l'enseignement scientifique et celui des Mathématiques en particulier (car il est la clé de tous les autres) ne sont pas promptement renforcés, la situation déjà dramatique de la formation de la jeunesse face aux exigences de la civilisation moderne deviendra catastrophique. Le rapport de l'Inspection générale sur l'Enseignement du Second Degré en 1953 précisait : « *Plus encore que dans toutes les autres classes, l'utilité de travaux dirigés est désirable en Quatrième.* » Ce qui était désirable en 1953 ne l'est pas moins en 1956 : les élèves de Quatrième, qui n'ont pas eu de travaux pratiques en 1953, vont entrer en Première cette année et s'ils n'ont encore pas de travaux pratiques cette année, certains d'entre eux entreront en Mathématiques avec une préparation insuffisante qui les contraindra peut-être à redoubler cette classe, d'où un alourdissement des effectifs scolaires et l'« économie » faite sur le dos de ces élèves de Quatrième se traduira par une dépense plus grande et d'un moindre rendement en 1957. Et ainsi de suite. On ne résoudra pas les problèmes qui se posent à l'échelon agrégation, licence d'enseignement ou Grandes Ecoles en laissant dans l'état où il est l'horaire de Mathématiques dans le Second Degré. Il n'y a d'ailleurs pas que le cas des élèves qui poursuivront leurs études au-delà du bachot ; pour l'ensemble de la jeunesse, sa préparation aux condi-

tions de la vie au xx^e siècle réclame un accroissement de sa formation mathématique. Le méconnaître serait une faute grave. Si, ne le méconnaissant pas, on n'en veut pas les moyens, sous prétexte d'économie, on aura commis pire qu'une faute.

Aucun d'entre nous n'aura la vanité de prétendre que ces heures de travaux pratiques, à elles seules, sauveront l'avenir de la science. Mais nous pouvons calmement affirmer qu'elles sont une mesure raisonnable et réalisable qui peut efficacement y participer. Et nous devons refuser qu'on enterre notre projet (même sous des fleurs).

Le Bureau de l'A.P.M. a pensé qu'une certaine publicité devait être donnée à nos propositions, en particulier auprès de personnalités susceptibles de nous aider de leurs conseils ou de soutenir nos arguments du poids de leur autorité. Un rapport de six grandes pages, expliquant nos raisons, a été adressé au Ministre de l'Éducation Nationale, au Directeur de l'Enseignement du Second Degré, à d'éminents savants et professeurs, aux directeurs des Grandes Ecoles, au Président de l'Association des Parents d'élèves, aux Commissions parlementaires, aux Directeurs de grandes Administrations publiques (Mines, E.D.F., S.N.C.F...) et à certains journaux qui font habituellement écho aux choses de l'enseignement.

Au nom de tous nos Collègues, je remercie les personnalités qui nous ont déjà répondu. Voici d'ailleurs quelques extraits des lettres reçues. De M. FRÉCHET, professeur honoraire à la Sorbonne :

« Je vous autorise à déclarer que j'approuve rapport et vœu sous la condition que le vœu soit interprété conformément aux observations du rapport sur les points suivants :

Grâce à des travaux pratiques, les élèves devront voir « que les Mathématiques servent à quelque chose, qu'elles leur seront un outil efficace pour comprendre le monde ou même pour le transformer ». Il devra donc être sous-entendu que les travaux pratiques envisagés ne devront pas consister en la résolution de problèmes de Mathématiques pures, mais devront être posés en termes concrets, relevant de la Physique, de la Mécanique, de la Statistique, etc... et généralement (comme le dit plus haut le rapport), relevant « de la vie courante ».

Indépendamment de la question des travaux pratiques, je note que le rapport déclare que « les tâches écrites faites à la maison sont d'un rendement faible ». J'ai souvent déclaré que la faiblesse de ce rendement est due à ce que les devoirs proposés sont du niveau de très bons élèves. Le remède serait de conserver des problèmes de ce même niveau à titre facultatif seulement. Les problèmes obligatoires devraient consister en applications directes du cours n'exigeant aucun effort d'invention. Mais il faudrait être très exigeant et admettre que les élèves qui ne résolvent pas ces problèmes sont des paresseux qui n'ont pas étudié leur cours. »

De M. Jean LERAY, professeur au Collège de France :

« Je m'empresse d'apporter une approbation entière et chaleureuse au rapport de l'A.P.M... Chacun doit, pour les comprendre, redécouvrir les Mathématiques et ne le peut qu'en étudiant les problèmes qui furent leur origine. Qu'importe s'il le fait en postulant tout ce qui lui semble évident, sans se soucier, dès le premier pas, de n'utiliser qu'un système minimum de postulats ? »

De M. Georges DARMOIS, membre de l'Académie des Sciences, professeur à la Sorbonne :

« Je suis en complet accord avec vous. Il faut ajouter qu'il y aura un contrôle strict, car je sais qu'au lycée de X..., dans les classes littéraires, des heures de travaux pratiques n'ont servi qu'à dévider des cours... »

D'autre part, il y aurait lieu, sans doute, non d'imposer quoi que ce soit, mais de se tenir prêt à conseiller.

« Il n'y a pas plus d'incapacité totale pour les Mathématiques que pour la marche à pied. » Mais il y a, comme vous le dites, de bonnes et de moins bonnes techniques d'entraînement. En tout cas, il est essentiel que le professeur ait un contact personnel avec tous les élèves.

Comptez sur moi pour vous aider dans la mesure de mes moyens. »

De M. ZAMANSKY, professeur à la Sorbonne :

« J'approuve sans réserve et sans aucune critique ce rapport. Je souhaite que ce projet soit réalisé dans trois mois (lettre du 22 juin 1956).

J'ajoute que votre rapport rejoint entièrement les préoccupations de ceux qui songent aussi à améliorer les conditions de travail et de formation des étudiants déjà bacheliers, et, dès que ce sera possible, on le fera.

Il est important de faire comprendre à tous qu'il faut faire un effort pour l'enseignement des Mathématiques, parce que c'est l'échafaudage premier ; il doit être solide.

Je note avec approbation entière votre argument à opposer éventuellement à des parents : le projet entraînera une diminution de la fatigue des gosses.

Et puis, trêve de discussions. Ne discutez plus, forcez... »

Je ne manquerai pas de tenir les Collègues au courant des autres réponses qui nous parviendront. Le Comité, dès sa première réunion d'octobre, examinera les résultats de la campagne entreprise et décidera des suites à lui donner.

La Réforme de l'Enseignement.

Le comble, disait ALAIN, serait que la paix fonde sur le monde et qu'il ne soit pas prêt à la recevoir. En serait-il de même pour la Réforme de l'Enseignement, toujours annoncée par le Ministre, mais jamais réalisée par son successeur ?

Pour notre part, nous n'arrêterons pas de nous préparer à une réforme dont l'urgence, tant du point de vue social que du point de vue de la science et de la pédagogie, augmente tous les jours.

La Commission des programmes, organisée par le Comité, et dirigée par notre Collègue SIROS, a tenu une dizaine de réunions en 1955-56. Les résultats de ses travaux seront soumis au Comité d'octobre qui, sans aucun doute, recommandera à la Commission de poursuivre son effort afin que l'Assemblée générale de 1957 puisse donner son avis sur un projet d'ensemble.

Mais ceci concerne seulement la refonte des programmes de Mathématiques dans le cadre d'une réforme générale. Un projet, dit de loi-cadre, a été déposé par le Ministre. Dans la perspective de la discussion de ce projet, notre Collègue LE RÉVÉREND, Président de l'Union des Physiciens, a pris l'heureuse initiative d'un vœu commun aux trois Associations des Physiciens, des Naturalistes et des Mathématiciens, qui exprime les grandes lignes de nos communs espoirs :

Les Bureaux de l'A.P.M., de l'U. des P., de l'U. des N., considérant :

Que dans tous les pays la pénurie des ingénieurs et des techniciens nécessaires au développement de la civilisation moderne se fait vivement sentir ;

Que dans notre pays, en particulier, face au développement considérable des activités scientifiques, la formation scientifique de la jeunesse marque un retard patent ;

Que les disciplines scientifiques sont devenues, par l'ensemble des qualités intellectuelles qu'elles développent, de puissants moyens de formation de l'esprit, qu'elles sont nécessaires à la réalisation de l'homme du xx^e siècle ;

Qu'il est indispensable d'éveiller de bonne heure le goût des enfants pour les études scientifiques ;

Que l'Enseignement du Second Degré doit être aménagé de façon à assurer aux jeunes gens qui ont choisi les sciences pour leur dernière année de lycée une formation scientifique solide dans la classe terminale,

Emettent le vœu que la réforme de l'enseignement qui se prépare ne consiste pas en une reconduction des horaires et des programmes actuellement en vigueur, mais qu'elle envisage leur remaniement complet.

Ils considèrent que si les progrès des sciences exigent une révision du contenu des programmes, l'évolution de la population scolaire et les résultats de l'expérience pédagogique rendent également nécessaire de revoir la répartition des connaissances à faire acquérir au cours de la scolarité ainsi que les méthodes d'enseignement. Les effectifs surchargés obligent en particulier à constituer des fractions où la méthode active pourra recevoir son plein développement, notamment pour la résolution des applications numériques et les travaux de laboratoire.

Ils estiment que dans le premier cycle l'horaire des Mathématiques doit être augmenté dans toutes les sections et ramené au moins à ce qu'il était il y a un demi-siècle, qu'une imitation aux sciences physiques doit être donnée dès l'âge de quatorze ans sous forme de travaux pratiques.

Ils souhaitent, pour l'année terminale, option sciences, un enseignement débarrassé de cet équilibre apparent entre les sciences et les lettres qui lui a été imposé depuis la guerre de 1914 et qui n'a conduit qu'à un surmenage et à un abaissement du niveau des élèves dont il disperse les efforts, sans aucun profit.

Il leur paraît convenable que, dans cette dernière année de l'Enseignement du Second Degré, pour toutes les sections correspondant à des options scientifiques, l'ensemble des disciplines scientifiques dispose de 18 heures hebdomadaires. Ces différentes sections devraient permettre de donner :

— aux élèves se destinant aux études théoriques une solide culture mathématique et de sérieuses connaissances en Physique ;

— à ceux qui auraient plus de goût pour les sciences expérimentales, le bagage de connaissances mathématiques indispensables, ainsi qu'une connaissance assez approfondie des sciences physiques et biologiques ;

— à ceux qui seraient plus attirés par les sciences biologiques, un enseignement assez complet de Sciences Naturelles à côté des Mathématiques et des Sciences Physiques utiles.

Pour marquer la volonté d'adaptation de l'enseignement scientifique à la réalité vivante de la science, une clause de la réforme pourrait prévoir l'adaptation de ces sections scientifiques terminales aux progrès des diverses sciences.

En résumé, les trois Associations des professeurs des disciplines scientifiques formulent le vœu que la réforme de l'enseignement donne aux sciences la place qui leur revient dans la formation de la jeunesse de la seconde moitié du xx^e siècle.

Ce texte apporte notre contribution au concert pas toujours très harmonieux des opinions, avis, protestations et remarques suscités par l'annonce (je n'ose pas dire la lecture) du projet Billières. Nous avons adressé notre vœu aux Ministres intéressés, aux Directeurs des divers ordres d'enseignement, aux grands corps savants, aux Directeurs des Grandes Ecoles scientifiques, au Président de l'Association des Parents d'Elèves et à certains journaux.

S'il faut attendre la fin d'octobre pour apprécier l'accueil qui nous sera réservé, il est permis de commenter la curieuse attitude de certains milieux qui se prétendent — mais, je crois, bien à tort. — défenseurs de la culture classique. Alors que les

difficultés rencontrées par *tout* notre Enseignement Public ne datent pas de 1956, c'est le 12 juillet de cette année que l'Académie Française a jeté pour la première fois un cri d'alarme, mais pour s'opposer au projet ministériel d'écoles moyennes, considérant que « ce serait là un coup mortel porté à l'Enseignement Secondaire classique ». Cette docte assemblée, dont on sait avec quelle louable continuité elle travaille à la révision du dictionnaire et à l'établissement d'une grammaire française, ne s'est jamais inquiétée de savoir si le service public de l'enseignement était en mesure d'apprendre à lire, écrire et compter à tous les enfants (1), mais elle jette un cri d'alarme quand il est question de ne plus laisser le latin quasi-obligatoire pour tous les enfants de Sixième aux capacités normales. L'inquiétude académique peut être motivée également par des raisons sociales que nous n'avons pas à discuter ici ; mais il s'agit aussi du latin : voyez plutôt l'accord de ces quarante personnes (ou plutôt de leurs porte-parole) avec les dirigeants de l'Association Guillaume-Budé.

Que l'on me range, après cela, dans le camp des adversaires du latin, si on le désire. Je préférerais presque cette caricature, à toute complicité avec ceux qui, sous prétexte de défendre la culture classique, s'acharnent à en accélérer la perte en refusant de l'adapter aux conditions démographiques, sociales, économiques et scientifiques du xx^e siècle. Guillaume Budé aurait-il agi de la sorte ? (2).

Mais je ne suis pas un adversaire des études littéraires. À quelques nuances près, j'approuve les idées que M. Louis DE BROGLIE a développées dans son chapitre des « Nouvelles perspectives en microphysique », intitulé : « La culture scientifique suffit-elle à faire un homme ? » Je ne résiste pas au plaisir de citer la conclusion de ce chapitre :

« Au fond, l'objet essentiel d'une éducation digne de ce nom sera toujours l'étude complète de la personne humaine, placée naturellement dans son milieu et dans ses conditions d'existence. On peut soutenir presque sans paradoxe qu'il n'y a qu'un seul objet de connaissance : notre vie intérieure. Tout ce que nous connaissons passe en effet par elle et se réfracte en elle, pensées ou raisonnements, sentiments, sensations, sentiments ou désirs, décisions ou volontés d'action, et la science elle-même. C'est pourquoi, à mon sens, il ne saurait y avoir de culture véritable que celle qui envisage tous les aspects de la personne humaine. Une instruction purement scientifique qui, par sa nature même, fait abstraction des sources profondes du désir et de la volonté ne saurait donc suffire. Les études classiques pourront décliner encore, l'humanisme ancien pourra disparaître ; mais celui qui le remplacera devra toujours comporter l'étude de l'homme tout entier ; rien de ce qui est humain ne devra lui être étranger et pour cette raison, il ne devra jamais reposer sur une base trop étroitement scientifique et technique. »

Or il est évident que la situation présente est caractérisée par une base trop étroitement littéraire. Dans le premier cycle du Second Degré, les études littéraires comportent 53 heures hebdomadaires au minimum, contre 15 h. 1/2 au maximum pour les études scientifiques.

Je souhaite, quant à moi, que l'expression d'*humanisme moderne* cesse d'être un

(1) Et même à certains adultes. M. Jules ROMAINS n'a-t-il pas écrit *quelque part* que certaines règles de comptabilité publique conduisaient à des « équations mystérieuses » (il s'agissait d'équations du premier degré) et cet académicien crépusculaire y voyait une menace contre « la sagesse, le sens de la vie et de la mesure, et la liberté » (Cité d'après LICHNEROWICZ : *La condition humaine du savant*, dans *La Nef*, juin 1954).

(2) « *La chasse et l'équitation furent les occupations favorites de Guillaume Budé adolescent* », écrit Paul HAZARD, qui rappelle aussi que c'est à 23 ans que l'humaniste apprit le grec. Jusque-là, Budé avait-il donc été élève du tronc commun ?

simple motif à discussion philosophique et prene vie. Et je crois que nous pouvons aussi approuver ce que M. Louis DE BROGLIE disait à des ingénieurs :

« *La culture générale doit en effet désormais être entendue dans un sens large : elle ne doit plus être identifiée avec la connaissance des langues anciennes ou l'analyse approfondie des chefs-d'œuvre de la littérature. C'est là une forme de la culture générale qui garde sans doute sa valeur et doit avoir ses adeptes, mais qui ne saurait plus à l'heure actuelle être exigée de ceux qui formeront demain l'élite du pays.* »

Et par conséquent ne saurait être exigé non plus de tous ceux qui joueront modestement mais honnêtement leur rôle dans la société.

*

En m'excusant d'allonger ces remarques, je veux souligner la curieuse attitude du journal *Le Monde*. Sachant qu'une placé y est souvent réservée aux problèmes de l'enseignement, je lui avais envoyé notre rapport sur les travaux pratiques avec une lettre explicative. Plus tard, le vœu commun aux trois Associations scientifiques, cité plus haut, lui a été également adressé. Il est évident que la direction de ce journal est libre d'insérer, de citer ou de ne pas citer les informations ou lettres qu'elle reçoit. Personnellement je m'incline volontiers devant la supériorité littéraire de ses rédacteurs habituels. Mais l'absence de toute allusion, ne serait-ce qu'au vœu des trois Associations, alors que *Le Monde* publiait la déclaration de l'Académie Française, celle de l'Association Guillaume-Budé, celle de la Société des Agrégés, etc... ainsi que deux articles de M. BOYANCÉ, professeur à la Faculté des Lettres de Paris (tous ces textes étant défavorables au projet d'écoles moyennes), ce choix délibéré ne peut être l'effet d'un hasard.

Presse d'opinion, par conséquent, et non presse d'information. Il me semble qu'il vaut mieux qu'on le sache et qu'on le dise.

*

**

Ces remarques n'exigent aucune conclusion. Que nous ayons des obstacles à surmonter, bien sûr et sans doute tant mieux. Mais si nous nous efforçons d'améliorer notre enseignement, en fonction des progrès des Mathématiques et de l'expérience pédagogique, si nous faisons autrement dit de notre partie un élément bien vivant de l'humanisme moderne, nous pouvons être certains d'obtenir la meilleure des récompenses : d'autres problèmes, peut-être mieux posés, d'un degré plus élevé sans doute, à affronter. Pas de chômage en perspective pour l'A.P.M.

G. W.

Réunions du Bureau

1. Séance du vendredi 25 mai, consacrée à l'examen du projet d'arrêté et des annexes concernant les classes de Spéciales A1 et A2 (projet Châtelet), à la veille de la réunion du Conseil de l'Enseignement du Second Degré. Des Collègues des classes intéressées avaient été invités à cette réunion à titre consultatif.

Il a été décidé de recommander aux représentants du personnel de voter le projet, compte tenu des deux observations suivantes : 1° la réforme des propédeutiques (unification des programmes) reste à réaliser ; 2° en attendant qu'elle le soit, une solution équitable doit être recherchée pour les élèves de Spéciales A1 et A2 qui désirent passer le certificat de Mathématiques Générales.

2. Séance du vendredi 15 juin, consacrée à l'organisation du travail de l'A.P.M. en 1956-57 (36° année). Répartition des tâches :

— Correspondance générale, administration du *Bulletin* (expédition et publicité) : WALUSINSKI.

— Comptes rendus des réunions : ROSTOLLAND.

— Bibliothèque : ITARD et HUISMAN (un local sera organisé à la rentrée).

— Rédaction du *Bulletin* : HUISMAN et WALUSINSKI ; le Comité de rédaction reste composé comme il est indiqué sur la couverture.

— Commission des programmes : SIROS (les projets déjà étudiés seront soumis au Comité d'octobre).

— Commission de formation des maîtres : CHAZAL ; programme : constituer la Commission, option technique à l'agrégation de Mathématiques, réforme de la licence d'enseignement.

— Conférences de l'A.P.M. : Mlle FÉLIX et G. W. sont chargés de l'organisation ; le programme prévu pour 1956-57 sur la *Topologie*, sera mis au point avec les responsables de la Société Mathématique de France.

— Journées d'études de novembre : HUISMAN et SIROS sont adjoints au Comité d'organisation qui se réunira dès le début d'octobre.

Action en faveur des travaux pratiques : Le projet de rapport présenté par G. W. est complété et adopté, ainsi que la liste des personnalités à qui il sera transmis.

Réforme de l'enseignement : Le Bureau, prenant connaissance d'une lettre de M. LE RÉVÉREND, Président de l'Union des Physiciens, mandate le Président de l'A.P.M. pour le représenter à la réunion commune des trois Associations, le 23 juin, qui a pour but de mettre au point un vœu général commun sur l'enseignement scientifique.

Le bloc-notes de L'A.P.M.

AVIS TRÈS IMPORTANT

*** Rappelons que la cotisation annuelle doit être versée dès octobre et avant le 1^{er} décembre dernier délai.**

**Virement de 600 F au C.C.P. Paris 5 708-21
au nom de l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e.**

Faute d'avoir acquitté leurs cotisations à cette date, les retardataires risqueraient de ne plus recevoir TOUS les Bulletins auxquels ont droit les adhérents en règle (ceci vise en particulier les recueils d'énoncés).

**** Que les Collègues ayant changé d'établissement en profitent pour nous faire connaître leur nouvelle adresse.**

***** Tous les membres de l'A.P.M. sont invités à participer à l'action de propagande auprès des nouveaux Collègues. Rappelons que, pour les stagiaires des C.P.R. et les étudiants des centres préparant l'agrégation, il est accordé une réduction de 50 %. Cette même réduction est consentie pour la vente des anciens numéros du Bulletin aux nouveaux adhérents qui désireraient compléter leur collection (le numéro 100 F au lieu de 200).**

*** Correspondants.** — Dans chaque établissement, les Collègues sont priés de désigner l'un d'entre eux comme correspondant local de l'A.P.M. Le correspondant désigné voudra bien se faire connaître en écrivant à G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11^e, chargé de constituer ce fichier. Le correspondant pourra recevoir d'éventuelles communications urgentes (il pourra aussi réunir à temps les cotisations).

Dans la région parisienne, les correspondants seront directement avisés des réunions de l'A.P.M., ainsi que des conférences organisées avec la Société Mathématique de France, le Séminaire d'Histoire des Mathématiques et la Société Astronomique de France.

*** Les prochains Bulletins.** — N° 180 (1^{er} décembre) ; n°s 181 et 182, Recueils des énoncés de Baccalauréat et de B.E.P.C. (décembre et janvier) ; 183 (15 janvier) ; 184 (1^{er} mars) ; 185 (15 mai) ; 186 (15 septembre) recueil des énoncés des concours 1957.

*** Énoncés d'examens et caractères (d'imprimerie).** — Les sessions de cette année ont apporté leur lot de fautes ou de maladroites dans les énoncés ; les documents réunis sont transmis aux rapporteurs spécialisés ; merci à tous les correspondants qui ont assuré la surveillance de ce secteur toujours troublé.

La « grande » presse a fait beaucoup de bruit autour de l'énoncé de Mathématiques de Première C et M en juin dernier : un chiffre 1 aurait été lu l par des candidats que n'effrayait pas une équation du second degré en t avec trois paramètres, x , y et l , ce dernier n'étant plus désigné nulle part dans l'énoncé. Il est évident que la défense des « pauvres victimes des examinateurs » importe plus à cette presse que la vérification de son information.

L'Imprimerie Nationale a cependant le moyen d'éviter le retour de tels incidents. Dans l'énoncé de Calcul Différentiel et Intégral de l'agrégation masculine, cette imprimerie a en effet employé le caractère 1 qui ne prête pas à confusion. Un exemple à suivre.

JOURNÉES D'ÉTUDE DE SÈVRES (2-4 novembre 1956)

Voici quelques extraits de la circulaire adressée à tous les Collègues qui ont manifesté le désir de participer aux journées d'étude de Sèvres :

1° Pour les Collègues qui auront été désignés par MM. les Recteurs, du fait de cette désignation, ils auront une autorisation d'absence pour les classes du 3 novembre ; ils seront hébergés au Centre International d'Études Pédagogiques de Sèvres du 2 novembre à 12 heures au dimanche 4 novembre à 14 h. 30.

Les professeurs non désignés pourront participer librement aux journées à leurs

frais ; ils devront solliciter de leur chef d'établissement une autorisation d'absence pour les classes du 3 (sans doute l'obtiendront-ils d'autant plus facilement qu'ils s'engageront à rendre les heures de classe non faites). Ces Collègues doivent se préoccuper de leur logement ; les possibilités de prendre leurs repas au Centre International leur seront indiquées sur place.

2° Le *Bulletin* 176 a publié (p. 437 à 440) les questionnaires relatifs aux trois thèmes de discussion :

- la « vision » dans l'espace ;
- l'initiation à l'algèbre ;
- Mathématiques, langage et symboles.

Les débats seront introduits par trois conférences faites respectivement par M. BIGUENET, professeur à l'E.N.P. de St-Ouen ; M. J. ITARD, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Henri-IV, membre correspondant de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences ; M. Laurent SCHWARTZ, professeur à la Sorbonne.

Conférencier et participants sont invités à user de la plus complète liberté d'expression. **Pour faciliter l'organisation des débats, il leur est seulement recommandé d'envoyer au Président de l'A.P.M. un aperçu sommaire de ce qu'ils comptent dire.** A tous, merci.

3° **L'horaire** prévu est le suivant :

Vendredi 2 novembre, 14 h. 30 : ouverture des journées d'étude par M. BRUNOLD, Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré. M. Francis PERRIN, Haut-Commissaire à l'Energie Atomique, s'adressera aux professeurs de Mathématiques pour traiter du rôle de l'enseignement des Mathématiques dans la formation scientifique.

Vers 18 heures : présentation de films mathématiques et de matériel d'enseignement : discussion sur ce matériel.

Samedi 3 novembre, 9 h. 30 : conférence de M. BIGUENET ; discussion sur le thème : « La Vision dans l'espace ».

14 h. 30 : conférence de M. SCHWARTZ ; discussion sur le thème : « Mathématiques, langage et symboles ».

17 h. 30 : conférence de M. ITARD ; discussion sur l'initiation à l'algèbre.

Dimanche 4 novembre, 9 h. 30 : suite des discussions ; interventions spéciales des invités sur les problèmes relatifs à l'enseignement des Mathématiques dans leurs pays respectifs ; conclusion du Président de l'A.P.M. sur les perspectives de la réforme de l'enseignement ; conclusions générales.

N.-B. — Prière d'adresser toute correspondance relative à l'organisation pratique (logement, repas, remboursement des frais), à Mme la Directrice du Centre International, 1, rue Léon-Journault, à Sèvres.

Adresser toute correspondance relative à l'organisation pédagogique des débats à G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11^e (Tél. OBE. 56-95).

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 89.778. — Dépôt légal : IV-1956

GAUTHIER-VILLARS

Éditeur - Imprimeur - Libraire

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VI°



P. DUBREIL

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

ALGÈBRE, Tome I

Equivalences, Opérations, Groupes, Anneaux, Corps. In-8° (16-25),
VII-468 pages, 9 figures, 1954 3.900 F

M.-L. DUBREIL-JACOTIN, R. LESIEUR et R. CROISOT

LEÇONS SUR LA THEORIE DES TREILLIS

In-8° (16-25), VIII-385 pages, 88 figures, 1953 5.500 F

H. LEBESGUE

Professeur au Collège de France

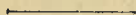
LES CONIQUES

In-8° (16-25), 187 pages. Nouveau tirage 1956 900 F

I. NEWTON

TRAITE D'OPTIQUE

In-16 (11-17), XXX-495 pages, 1955 2.000 F



Envoi gratuit de toutes documentations

et de son

Bulletin l'ACTIVITE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE EN FRANCE

NOUVEAUTÉ :

VIENT DE PARAÎTRE :

PRÉCIS
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROGRAMME A2

PAR

R. GOUYON

Ancien élève de l'École normale supérieure
Agrégré des sciences mathématiques
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse



**OUVRAGE CONFORME AUX NOUVEAUX PROGRAMMES
APPLICABLES AU 1^{er} OCTOBRE 1956**



PREMIER FASCICULE

Vol. 16/24 cm, de 356 pages, broché **3.000 F**



**LE DEUXIEME FASCICULE — D'ÉTENDUE SENSIBLEMENT ÉGALE — SOR-
TIRA DES PRESSES EN DÉCEMBRE 1956. LE « PRÉCIS » SERA ENSUITE
MIS EN VENTE EN UN SEUL VOLUME RELIÉ.**



LIBRAIRIE VUIBERT

63, boulevard Saint-Germain, PARIS, V°

MASSON & C^o, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^o

COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE

NOUVEAUTÉ :

NOUVEAUTÉ :

ARITHMÉTIQUE

Classe de Mathématiques

par

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Un fort volume (15,5 × 22) de 412 pages, avec figures, exercices
et problèmes, broché fort **2.400 F**

ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

NOUVEAUTÉ :

NOUVEAUTÉ :

MANUEL DE CALCUL PRATIQUE NUMÉRIQUE et GRAPHIQUE

par

A. DESFRETIERE

*Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud
Professeur honoraire de l'enseignement technique*

Classes de 2^o, 1^{re} et Terminales des E.N.P., des Collèges techniques,
des Sections techniques des Lycées et des Collèges modernes.

- 1. Calcul numérique** - Un volume, avec figures, exercices et tables numériques, broché : **620 F**
2. Calcul à la règle et par le graphique - Un volume avec figures et exercices, broché : **480 F**

MATHÉMATIQUES

Classes de PREMIÈRE :

Nouveautés :

- LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Première C.M. Br. : 545 F., cart. : 655 F.
 LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Première C.M. Br. : 600 F., cart. : 730 F.
 LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Première A.B. Br. : 585 F., cart. : 705 F.

SPECIMENS gratuits sur demande

- LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 1^{re} partie, séries C. et M. 285 F.

Classes de SECONDE :

- LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Seconde C.M. Br. : 400 F., cart. : 500 F.
 LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Seconde C.M. Br. : 575 F., cart. : 695 F.
 LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Seconde A.B. Br. : 535 F., cart. : 655 F.
 Algèbre et géométrie : 1 volume

COURS COMPLET DU 1^{er} CYCLE

- LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième, *Livre de Corrigés.*
 LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième, *Livre de Corrigés.*
Note importante. — Les livres de corrigés ne sont pas en vente dans le commerce ils sont réservés aux Professeurs de Mathématiques, à qui ils sont remis en spécimen.

- LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Troisième.
 Edition Lycées et Collèges Br. : 455 F., cart. : 560 F.
 Edition Cours Complémentaires cart. : 680 F.
 LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Quatrième.
 Edition Lycées et Collèges Br. : 425 F., cart. : 530 F.
 Edition Cours Complémentaires cart. : 635 F.
 LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième.
 Edition Lycées et Collèges Br. : 335 F., cart. : 435 F.
 Edition Cours Complémentaires cart. : 495 F.
 LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième.
 Edition Lycées et Collèges Br. : 270 F., cart. : 370 F.
 Edition Cours Complémentaires cart. : 355 F.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

- LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique et Cosmographie) Br. : 830 F., cart. : 930 F.

Classe de PHILOSOPHIE :

- LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE .. Br. : 420 F., cart. : 550 F.

Classe de MATHÉMATIQUES :

COURS COMPLET

- LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE Br. : 700 F., cart. : 805 F.
 » — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE Br. : 280 F.
 » — ARITHMÉTIQUE Br. : 290 F.
 » — MÉCANIQUE Br. : 250 F., cart. : 340 F.
 LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE, Br. : 390 F., cart. : 490 F.
 LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE Br. : 605 F., cart. : 705 F.
 » — TRIGONOMETRIE Br. : 380 F., cart. : 475 F.
 » — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 2^e partie, classe de Mathématiques 400 F.

Prix taxe locale incluse

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN

8, rue Férou - PARIS VI^e

LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES

par

M. MONGE

et

M. GUINCHAN

Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Professeur agrégé au Lycée Michelet

Licencié ès Sciences
Professeur de Cours Complémentaire

Arithmétique, Géométrie, Tracés géométriques. Classe de 6 ^e .	cartonné	350 F	broché	240 F
Arithmétique, Algèbre, Géométrie. Classe de 5 ^e .	cartonné	455 F	broché	335 F
Arithmétique, Algèbre, Géométrie. Classe de 4 ^e .				
Enseignement long	cartonné	500 F	broché	370 F
Enseignement court	cartonné	450 F	broché	335 F
Arithmétique, Algèbre, Géométrie. Classe de 3 ^e .				
Enseignement long	cartonné	570 F	broché	430 F
Enseignement court	cartonné	800 F	broché	650 F
Algèbre. Classe de 2 ^e A', C et M., par M. Monge.	cartonné	700 F	broché	560 F

NOUVEAUTÉ :

Géométrie. Classe de 2 ^e A', C et M., par M. Monge.	cartonné	850 F	broché	700 F
--	----------	-------	--------	-------

Corrigé des Exercices.

Classe de 6 ^e	143 F
Classe de 5 ^e	200 F
Classe de 4 ^e . Enseignement long	300 F
Classe de 3 ^e . Enseignement long	500 F
» Enseignement court	600 F

A paraître fin 1956 :

G. CASANOVA

Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Agrégé de Mathématiques
Professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale)
au Lycée Janson-de-Sailly

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

I. Nombres - Vecteurs - Algèbre linéaire

DELAGRAVE

COURS DE MATHÉMATIQUES
BRACHET-DUMARQUÉ-ROSTOLLAND

GÉOMÉTRIE

préparation aux E.N.I.A.M.

avec la collaboration de P. JEANGIRARD

Un vol. (14,5×20) Br. 1040», Cart. 1150»

GÉOMÉTRIE DESRIPTIVE

1^o Techn. Math. et Techn. et prép. A. et M.

avec la collaboration de J. GENESTINE

Un vol. (14,5×20) Br. 890», Cart. 990»

COURS DE MATHÉMATIQUES
SCHAEFFER-LEBAILE

ARITHMÉTIQUE, cl. de 6^e

Un vol. (14,5×20) Br. 255», Cart. 345»

MATHÉMATIQUES cl. de 5^e

Un vol. (14,5×20) Br. 390», Cart. 480»

MATHÉMATIQUES

Classe de Quatrième

Un volume (14,5×20) broché. 520»
cartonné. 620»

UNE NOUVELLE COLLECTION — UNE COLLECTION NOUVELLE

COLLECTION BREARD

La classe de sixième étant considérée comme une classe de mise au point et d'initiation, le manuel correspondant a mis l'accent sur le **développement du calcul mental, l'apprentissage de la géométrie** (utilisation de la règle, du rapporteur) et la révision systématique des notions déjà acquises.

En 5^e, 4^e, 3^e, l'auteur, par un **exposé original** de l'Arithmétique et de l'Algèbre, **basé sur les notions de segments et de vecteurs**, initie l'élève au mécanisme de l'Algèbre.

En géométrie, une place importante est laissée à la **réalisation des figures**. Le cours se caractérise par une **utilisation systématique des symétries**, des bandes, des notions vectorielles, comme le stipulent les programmes officiels.

Chaque ouvrage comprend de **nombreux exercices** gradués et progressifs (environ 2.000 dans chaque manuel).

Mathématiques , classe de sixième	390 F
Arithmétique-Algèbre , classes de 5 ^e , 4 ^e , 3 ^e	620 F
Géométrie , classes de 5 ^e , 4 ^e , 3 ^e	690 F

EDITIONS DE L'ÉCOLE. 11, Rue de Sèvres, PARIS

L'ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

fait appel à tous les professeurs qui n'ont pas encore rejoint ses rangs, et en particulier aux jeunes Collègues qui sont pour la première fois aux prises avec les difficultés de notre enseignement, pour qu'ils rejoignent les 2 250 professeurs qui la constituent.

PARTICIPEZ au travail de recherche pédagogique mené en commun par tous les membres de l'A.P.M.

PROFITEZ des avantages réservés aux membres de l'A.P.M.

*
**

L'A.P.M. est ouverte à tous les Collègues enseignant dans les Facultés, les Grandes Ecoles, les Lycées, les Collèges Classiques, Modernes ou Techniques, les Ecoles Nationales Professionnelles, les Cours Complémentaires ou les Centres d'Apprentissage.

L'adhésion, marquée par une cotisation de 600 F (valable pour une année scolaire et payable avant le 1^{er} décembre), permet de recevoir les publications de l'A.P.M., d'assister aux réunions régionales ou nationales de l'Association et en particulier de participer (directement ou par correspondance) aux votes de son Assemblée générale annuelle.

LE BULLETIN de l'A.P.M. paraît huit fois par an. La table des matières de sa 35^e année donne un bon aperçu de son contenu. Un effort continu d'enrichissement et d'une plus active participation aux travaux actuels de la pédagogie des Mathématiques doit encore l'améliorer. Trois numéros sont consacrés à la publication des énoncés des concours de recrutement (septembre), et des sujets de baccalauréat et de B.E.P.C. (décembre et janvier). Les cinq autres numéros, échelonnés au cours de l'année scolaire (15 octobre, 1^{er} décembre, 15 janvier, 1^{er} mars, 15 mai) publient des grandes études, des comptes rendus d'expérience pédagogique, des notes bibliographiques, des documents officiels (rapports des jurys de concours) et des nouvelles de l'Association.

*
**

L'ASSEMBLEE GENERALE DE 1956 a émis des votes importants sur la place des Mathématiques dans la Réforme de l'Enseignement et sur l'organisation urgente de travaux pratiques de Mathématiques (voir *Bulletin* 177). L'Assemblée générale élit le Comité responsable de l'activité de l'Association.

Peut-être n'est-il pas inutile de préciser que l'A.P.M. n'entre pas en concurrence avec les organisations syndicales vis-à-vis desquelles elle se maintient dans une stricte neutralité.

*
**

CONFÉRENCES. — Un important cycle de conférences sur l'Algèbre moderne a été organisé en 1955-56 sous le patronage commun de la Société Mathématique de France et de l'A.P.M. Le *Bulletin* de l'A.P.M. publie ces conférences qui seront prochainement réunies en volume par les soins de la revue genevoise *L'Enseignement Mathématique*.

Un second cycle de conférences, sur la topologie, sera organisé en 1956-57.

C'est encore l'A.P.M. qui, le 14 mai 1956, a permis à M. FREUDENTHAL, professeur à l'Université d'Utrecht, d'exposer les travaux des Collègues des Pays-Bas sur les *Méthodes d'initiation à la géométrie*.

*
**

COMMISSIONS. — Le Comité de l'A.P.M. organise le travail de Commissions permanentes ou extraordinaires : définitions de mots et notations, axiomatique et redécouverte, histoire des Mathématiques, cinéma et matériel d'enseignement, sujets

- Der Briefwechsel von Johann Bernoulli (J. ITARD).
 JAMMER : Concepts of space ; the history of theories of space in physics (J. ITARD).
 TATON : Causalités et accidents de la découverte scientifique (J. ITARD).
 P. DUBREIL : Algèbre (A. HERMÉ).
 DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR, CROISOT : Leçons sur la théorie des treillis (A. HERMÉ).
 BOLLIGAND : Initiation à l'analyse mathématique (L. FÉLIX).
 J. TEXEREAU : Notes pratiques pour les observateurs débutants (G. W.).

Bulletin 174

- CAHEN : Eléments de calcul matriciel (A. HUISMAN).
 GUEYSANNE et DELACHET : L'Algèbre moderne (A. HERMÉ).
 DEFRISE : Visage de la Mathématique (L. FÉLIX).
 BIRKHOFF et MAC LANE : A survey of modern Algebra (L. FÉLIX).
 DANJON, etc... : L'astronomie populaire Camille Flammarion (G. W.).
 DENIS-PAPIN : Conseils aux auteurs scientifiques et techniques (G. W.).
 Second colloque sur les équations aux dérivées partielles (1954).
 MERCIER : Principes de mécanique analytique.
 SALLES : Initiation au calcul opérationnel et à ses applications techniques.
 Cahiers Pédagogiques pour l'Enseignement du Second Degré, numéro spécial sur les Mathématiques.

Bulletin 175

- PIAGET, etc... : L'enseignement des Mathématiques (L. FÉLIX).
 L'enseignement des Mathématiques pour les élèves de 16 à 21 ans en Allemagne Occidentale (A. HUISMAN) ; voir la suite dans les *Bulletins* 176 et 177.
 DUGAS : Histoire de la mécanique (J. ITARD).
 The principal works of Simon Stevin (J. ITARD).
 DEQUOY : Mécanique à l'usage de la classe de Mathématiques Élémentaires (G. W.).
 COUDERC : L'Univers (G. W.).

Bulletin 176

- R. BRISAC : Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne (DUBOIS-VIOLETTE).
 Photographies astronomiques.

Bulletin 177

- LENTIN et RIVAUD : Eléments d'Algèbre moderne (G. W.).
 LEBESGUE : La mesure des grandeurs.
 « L'Enseignement mathématique », tome I (nouvelle série) (G. W.).
 MONJALLO : Initiation au calcul matriciel (G. W.).

IV. — Informations et documents officiels.

	N°	p.
J. DESFORGE : Rapport sur l'agrégation féminine de Mathématiques, session de 1955	177	453
R. DONTOT : Rapport sur l'agrégation de Mathématiques (hommes), session de 1955	176	335
P. ROBERT : Rapport sur le Concours général de Mathématiques, session de 1955, classe de Mathématiques	175	264
Textes des Concours 1955	171	
Annales du B.E.P.C. 1955	172	
Annales du Baccalauréat 1955	173	
Textes des Concours 1956	178	

V. — La vie de l'Association.

A. BIGUENET : L'agrégation dans l'Enseignement Technique	176	367
L. COLLOT : Régionale de Nancy	176	370
J. LE RÉVÉREND : Sciences physiques et réforme de l'Enseignement.....	174	138
M. MASSON : Projet d'enquête sur les classes de Sixième et de Cinquième.	174	140
G. WALUSINSKI : Un <i>Bulletin</i> vivant	170	1
G. WALUSINSKI : Les Mathématiques en Sciences Expérimentales	174	7
G. WALUSINSKI : Les Mathématiques et la Réforme de l'Enseignement....	174	129
Réunions du Comité : 20 octobre 1955	174	133
22 décembre 1955	175	271
2 février 1956	176	360
19 avril 1956	177	495
Pour l'Assemblée générale 1956	175	274
	176	363
Audiences des Directeurs Généraux	174	135
Assemblée générale 1956	177	484
Statuts de l'Association	170	4

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

35^e année (1955-1956)

TABLE DES MATIÈRES

(Le premier nombre renvoie au numéro du Bulletin, le second nombre renvoie à la page).

	N ^o	p.
I. — Etudes.		
A. BIGUENET : Retour de Belgique	175	222
G. BOSTEELS : Les transformations géométriques comme introduction intuitive aux Mathématiques supérieures	175	210
Coordination Mathématiques-Physique (Rapport collectif)	170	24
H. CARTAN : Structures algébriques	176	288
G. CHOQUET : Espaces vectoriels, formes et équations linéaires	177	388
J. DESFORGE : Sources concrètes et intuitives de la Mathématique	175	193
P. DUBREIL : Anneaux, congruences, corps	177	377
L. FÉLIX : L'enseignement de la statistique et de la probabilité	174	159
J. ITARD : Diophante et la tradition diophantienne	174	146
I. ITARD : Leçon inaugurale de Nicolo Tartaglia	176	281
L. JERONNEZ : Géométrie intuitive	175	206
R. NEUMEISTER : Définition axiomatique des espaces linéaires et leur orientation	177	400
J.-V. PONCELET : Souvenirs d'un prisonnier de guerre	175	236
P. RONSMANS : Physique, source concrète de la Mathématique	176	299
W. SERVAIS : Equations et lieux géométriques, synthèse logique	170	11
W. SERVAIS Modèles, objets concrets et symboles	175	195
G. WALUSINSKI : « Des exercices naturelles, vraies et non écrites » ..	175	231
II. — Essais divers.		
J. CHAUVINEAU : Sur les confusions pseudo-égalitaires	175	256
P. COUDERC et G. W. : Année des saisons et année tropique	176	319
P. DEDRON : Notations et tradition	176	322
C. DELAPIERRE : Quelques exemples de constructions géométriques inspirées par les problèmes de navigation	177	433
G. DELPLA : Construction d'un trièdre connaissant les trois faces	175	261
L. FÉLIX : Sur le signe = et la relation d'équivalence	170	46
L. FÉLIX : Sur le signe = et la relation d'équivalence	174	184
L. FÉLIX : Retour à l'expérience pédagogique	175	259
L. FÉLIX : Exemple d'utilisation d'un formalisme, théorèmes de Simson, de Clifford et de Miquel	176	313
L. FÉLIX : La racine carrée en classe de Troisième	177	428
A. FOUCHÉ : Valeur de la logique et puissance de l'exemple	176	324
C. GATTEGNO : Lettre sur les Mathématiques qu'il faut enseigner	176	327
C. GATTEGNO : Première contribution	177	440
F. HÉRAUT : Grandeurs inversement proportionnelles	174	179
J. ITARD : Un peu de biographie	177	418
J. LEGRAND : Remarques sur le théorème de Gauss	174	180
J. LEGRAND : La notion de « module d'entiers » et le théorème de Gauss ...	176	318
J. LELONG-FERRAND : Sur la réforme de la licence mathématique	175	254
MARCHAND : La racine carrée en classe de Troisième	177	428
H. MAS : Inégalités et inéquations	174	178
H. MIRABEL : Orientation scolaire et Mathématiques	170	51
P. SAMUEL : Réflexions sur nos problèmes de recrutement	176	323
J. SIROS : L'enseignement des Mathématiques et le langage	177	422
L. THIBERGE : A propos des fractions	174	178
G. THOVERT : Plaidoyer pour Menelaüs	170	43
G. THOVERT : Sur le théorème de Gauss	170	46
G. THOVERT : L'approximation dans le calcul logarithmique	174	181
J. WEIL : Projection cylindrique d'une surface plane	175	262
Pour le stage de Sèvres (novembre 1956)	177	437
Trois enquêtes de la C.I.E.M.	177	441
III. — Documentation et bibliographie.		

(Le premier nom, celui de l'auteur du livre, est suivi du titre du livre ; l'auteur du compte rendu est indiqué entre parenthèses).

Bulletin 170

d'OCAGNE : Histoire abrégée des Sciences mathématiques (J. ITARD).

d'examens et de concours, enseignement de l'Astronomie, *programmes* (révision dans la perspective d'une réforme, formation des maîtres (comment aider les étudiants et faire face à la crise du recrutement).

*
**

JOURNÉES D'ÉTUDE. — Les 1, 2 et 3 novembre 1956, l'A.P.M. organise des Journées d'Étude au Centre International d'Études Pédagogiques à Sèvres. Programme :

1. La vision dans l'espace, problème de l'enseignement de la géométrie.
2. Les problèmes posés par l'initiation à l'algèbre.
3. Mathématiques, langage et symbole.

Des conférences et exposés introductifs aux débats seront prononcés par M. BRUNOLD, Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré ; M. Francis PERRIN, Haut-Commissaire à l'Énergie Atomique ; M. Laurent SCHWARTZ, professeur à la Sorbonne ; M. BIGUENET, professeur E.N.P., Paris ; M. Jean ITARD, membre correspondant de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences.

Pour participer à ces journées, suivre les instructions données dans le *Bulletin* 178 (15 octobre 1956) ; pour tout renseignement complémentaire écrire au Président de l'A.P.M.

*
**

LIAISONS. — L'A.P.M. est en liaison :

— avec la Société Mathématique de France, l'Union des Professeurs de Spéciales, l'Union des Physiciens, l'Union des Naturalistes, la Société Astronomique de France, etc... :

— avec les organisations de professeurs de Mathématiques de Belgique, des Pays-Bas, d'Italie, de Grande-Bretagne, des U.S.A., de Yougoslavie, de Pologne, etc... ;

— avec la revue *l'Enseignement Mathématique*, organe officiel de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

*
**

L'A.P.M. EST UNE COOPERATIVE PEDAGOGIQUE au service de ses membres et de l'enseignement scientifique. En y adhérant :

— vous profiterez de l'expérience de tous ;

— vous participerez aux progrès de la pédagogie.

Adressez-vous sans tarder au correspondant de l'A.P.M. dans votre établissement ou écrivez au siège de l'Association.

**ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC**

29, rue d'Ulm, PARIS, 5°

Compte chèques postaux : Paris 5 708-21.

Cotisation annuelle ordinaire : 600 F.

Cotisation à tarif réduit pour les stagiaires des C.P.R., les élèves des E.N.S. et les étudiants agrégatifs : 300 F.

Pour les nouveaux adhérents, vente des numéros anciens du Bulletin : 100 F (au lieu de 200 F).

Pour tout renseignement complémentaire sur l'A.P.M. et ses activités, écrire à un membre du Bureau :

Président : G. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris, 11° (tél. OBE 56-95) ; Vice-Présidents : Mlle AFFRE ; MM. BIGUENET, EDDE, MONJALLON, THERON ; Secrétaires : Mlle FELIX ; MM. GIRARD, HUISMAN, ITARD, ROSTOLLAND, SIROS ; Trésorier : M. LEGRAND.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE
MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6° (<i>Jusqu'à épuisement</i>)	220 F
ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour	330 »
<i>Corrigé des exercices de 6°</i>	300 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5°	185 »
GÉOMÉTRIE 5° et 4°	400 »
ARITHMÉTIQUE 5°	350 »
<i>Corrigé des exercices de 5°</i>	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4°	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3°	350 »
GÉOMÉTRIE 3°	325 »
GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3°	800 »
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages cartonné).	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.	100 »
ALGÈBRE 2° A.B.C.M.	500 »
GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M.	465 »
ALGÈBRE 1 ^{re} A.B.	180 »
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1 ^{re} C.M.	550 »
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A.B.C.M.	500 »
POUR LES EXAMENS :	
QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	390 »
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	410 »

