

Les transformations géométriques comme introduction intuitive aux Mathématiques supérieures

1. — La géométrie intuitive prépare nos élèves de Sixième (12 ans) à la géométrie déductive.

Un des points du programme de la géométrie intuitive est l'étude de la symétrie, plane ou de l'espace, qui en tout état de cause fait naître chez nos élèves l'idée de transformation.

Si l'on veut préparer les élèves, dès la Sixième, on pourra leur donner une première idée des transformations géométriques.

2. — Les quelques réflexions qui vont suivre couvrent une grande période de notre enseignement secondaire. Nous croyons même pouvoir montrer que, en suivant systématiquement notre plan, il est possible de prendre un bel élan et de préparer l'accès à l'enseignement supérieur d'une façon prudente et de créer chez nos élèves l'enthousiasme nécessaire pour les Mathématiques.

Nous ne désirons nullement que les questions présentes soient inscrites aux programmes d'études et nous ne nous imaginons point que ce que nous allons vous présenter soit nouveau. Nous croyons toutefois que le sujet que nous vous soumettons est en mesure d'intéresser nos élèves et que ce matériel pourrait fort bien convenir comme étude de délassement intellectuel.

3. — Comment sommes-nous arrivés à étudier ce sujet ?

Ces idées ont pris naissance lors de Congrès. Une première occasion fut le matériel didactique très intéressant qu'il nous fut donné de voir à Sèvres, construit par M. BIGUENET. Ce matériel a été exposé également à Berchem-Anvers, lors de notre dernier Congrès de novembre 1955.

Une seconde occasion fut un autre Congrès, également à Sèvres, en février 1955, où d'éminents mathématiciens français ont plaidé la cause des Mathématiques modernes pour l'Enseignement secondaire.

C'est ainsi que m'est venue l'idée, en février de cette année, d'expérimenter dans notre école. Je ne suis pas le seul qui se soit mis à l'ouvrage ; je pense à mon ami le professeur SOENS qui a exposé son travail dans le n° 7 de la revue belge *Mathematica et Paedagogia*.

4. — Beaucoup de nos élèves connaissent à la fin de leurs humanités les trois transformations classiques : symétrie, translation et rotation. Mais combien d'entre eux ont une idée de ce qui se passe lorsque l'on exécute plusieurs de ces transformations consécutivement ? Combien de nos élèves ont entendu parler de produits de transformations ?

Nos élèves connaissent les opérations sur des nombres et connaissent la propriété commutative. Ils ont peur d'opérations non-commutatives !

Nos anciens élèves, entrés aux grandes écoles, ont beaucoup de difficultés avec des notions comme transformations, point double d'une transformation, pour ne pas parler d'opérateur !

5. — Quel sera notre plan d'action ?

En premier lieu, il nous semble qu'une coordination poussée avec le cours de dessin est nécessaire.

En sixième : Les élèves dessinent une figure simple — de préférence un pentagone non convexe — et la symétrique par rapport à un axe, puis par rapport à un centre. On découpe la figure tracée en papier bristol et vérifie si les figures obtenues sont directement ou inversement égales à la figure primitive. Comme seconde application, ils dessinent la figure symétrique de F_0 par rapport à un axe $x'x$, puis la figure symétrique de la figure obtenue par rapport à un second axe perpendiculaire au premier. On leur demande alors d'examiner comment on pourrait passer directement de la figure F_0 à la figure F_2 (en leur suggérant que le point d'intersection des deux axes pourrait jouer un rôle).

Si l'on sent que les élèves s'intéressent à ces dessins, on leur fera exécuter encore quelques transformations, en partant de préférence de figures asymétriques.

En Cinquième : Le programme esquissé pour la Sixième peut éventuellement être réservé à cette classe. On peut faire dessiner une translation et un produit de deux translations. On attirera leur attention sur l'analogie avec la composition des vecteurs représentant deux forces (cours de physique).

Les leçons de Cinquième pourront d'ailleurs être employées avec succès pour faire quelques petites synthèses de géométrie, par exemple une synthèse sur la théorie des quadrilatères. Très jolis sont d'ailleurs les exercices de dessin où l'on fait tracer des réseaux en partant progressivement du carré, du losange, du rectangle ou du parallélogramme. Combien jolis les dessins qu'on obtient lorsque l'on y introduit un peu de couleurs et que l'on part, par exemple, d'un quadrilatère cerf-volant pour construire le réseau.

En Quatrième, de nouvelles possibilités s'offrent d'elles-mêmes. L'homothétie, l'affinité, la rotation sont à la portée et l'on peut faire dessiner des produits de transformations.

Lorsqu'on constate que les élèves s'intéressent à ce genre d'exercices, on n'hésitera pas à leur montrer que certains produits de transformations ne sont pas commutatifs, comme par exemple rotation-translation et translation-rotation.

Les classes supérieures offrent de multiples occasions pour développer le dessin. Cela permettra de donner, en Première, une synthèse où l'on introduira les notions qu'ils connaissent déjà, comme les nombres complexes, ou bien de nouvelles notions comme celles d'éléments doubles, d'opérateur.

Opérateur désigne ici la matrice d'une transformation. Voici comment nous avons essayé d'introduire les nouvelles notions au début de cette année scolaire avec des élèves de 17 ans.

6. — Nous définissons une nouvelle notion : la matrice.

Définition. — Une matrice est un tableau de nombres ou de variables (appelés termes) comprenant c colonnes et l lignes. Ainsi :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. La matrice est dite rectangulaire si $c \neq l$, carrée lorsque $c = l$.

Dans cette étude élémentaire, nous nous bornerons aux matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

A quelles notions connues pouvons-nous rattacher les matrices ?

Exemple 1. — Les coordonnées (x_1, y_1) d'un point, par rapport à un système d'axes rectangulaires ou obliques, peuvent s'écrire sous forme

de matrice $\begin{vmatrix} y_1 \\ x_1 \end{vmatrix}$

Les deux projections coordonnées d'un vecteur peuvent s'écrire de cette manière.

Exemple 2. — Les coordonnées des trois sommets d'un triangle peuvent s'écrire dans une matrice sous l'une des formes :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Exemple 3. — Le système linéaire :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 \\ y_1 = cx_0 + dy_0 \end{cases}$$

donne lieu à une matrice carrée dont les éléments sont les 4 coefficients a, b, c, d :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Connaissant la matrice, on peut écrire le système (1).

L'emploi des indices doubles permet d'écrire le système sous la forme :

$$(1') \begin{cases} x_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 \\ y_1 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 \end{cases} \quad \text{avec la matrice correspondante } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

On convient que, dans le terme a_{lc} , le nombre l désigne le numéro d'ordre de l'équation, le nombre c le numéro d'ordre de l'inconnue.

a_{ii} sont les termes diagonaux, $a_{11} + a_{22}$ est la trace de la matrice.

Si tous les termes a_{lc} ($l \neq c$) sont nuls, la matrice s'appelle matrice diagonale.

Exemple : $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$ La matrice diagonale ayant $a_{kk} = 1$ s'appelle la matrice unité.

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ Elle est désignée par le symbole $\|1\|$.

Dans ce cas, le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Le système (2) définit la transformation identique, et sa matrice est donc la matrice unité.

D'une manière analogue, $\|0\|$ est la matrice dont tous les éléments sont nuls ; c'est la matrice nulle.

Une matrice diagonale dont tous les termes sont égaux s'appelle matrice scalaire.

Exemple : $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$; elle est égale au produit du terme a par la matrice unité.

Nous insistons dès à présent sur le fait qu'une matrice n'est pas un nombre, comme un déterminant.

Il est toutefois possible d'accoupler à chaque matrice un déterminant. Ainsi : à la matrice $\|a_{lc}\|$ correspond un déterminant $|a_{lc}|$. Si le déterminant $|a_{lc}|$ est nul, la matrice correspondante s'appelle une matrice singulière.

7. — Deux matrices sont égales lorsque leurs termes sont égaux chacun à chacun. Si, par exemple, les deux triangles de sommets (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) et (x'_1, y'_1) , (x'_2, y'_2) , (x'_3, y'_3) sont confondus les matrices :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix} \quad \text{sont évidemment égales.}$$

8. — *Opérations avec des matrices* : Addition. — On peut s'en former une idée intuitive en écrivant la somme de deux vecteurs sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{vmatrix}$$

On définit ensuite : la somme de deux matrices $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} p & q \\ v & w \end{vmatrix}$ est la nouvelle matrice $\begin{vmatrix} a + p & b + q \\ c + v & d + w \end{vmatrix}$

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$

On voit immédiatement que l'addition jouit de la propriété commutative. On peut contrôler aisément qu'elle est également associative.

Comme application, on peut montrer la translation qui s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Comme exercice de dessin, on fera une somme de deux translations, avec la démonstration de la commutativité, que l'on pourra écrire symboliquement :

$$t_1 + t_2 = t_2 + t_1$$

Comme seconde application, on peut faire la somme de deux matrices égales. De :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$$

et $M + M = 2M$, on conclut à la relation générale :

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

et réciproquement.

On peut rendre ceci encore plus explicite en pensant au produit d'un vecteur par un scalaire. Le vecteur $\vec{V} \parallel x$ donne, après multiplication par le scalaire a , le vecteur $a\vec{V}$ de projections coordonnées $\begin{vmatrix} ax \\ ay \end{vmatrix}$, et donc $\begin{vmatrix} ax \\ ay \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

Des exemples bien simples sont par exemple l'homothétie :

$$\begin{vmatrix} y \\ x \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

et la représentation paramétrique de la droite :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}.$$

9. — Quelles sont les liaisons avec ce que l'élève a vu précédemment ? Quelques exemples serviront d'illustration.

Exemple 1. — En prenant dans un système d'axes rectangulaires le point $A_0(x_0, y_0)$ et son symétrique $A_1(x_1, y_1)$ par rapport à l'axe des x , on a les formules de transformation : $\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases}$

$$(3). \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases}$$

L'opération géométrique (prendre le symétrique par rapport à Ox) donne donc lieu à la matrice $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} (M).$

Les formules (3) définissent complètement le passage de la figure F_0 à la figure symétrique F_1 par rapport à l'axe Ox ; on peut donc dire que la matrice (M) est une espèce d'opérateur permettant de déduire de la

figure F_0 la nouvelle figure F_1 . Géométriquement, on déduit de la figure F_0 la figure F_1 ; algébriquement, on écrira :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

et on lit : les coordonnées (x_1, y_1) se déduisent par la matrice diagonale $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ des coordonnées (x_0, y_0) .

Exemple 2. — En prenant le symétrique du point $A_0(x_0, y_0)$ par rapport à l'axe Oy , on emploiera les formules de passage $\begin{cases} x_1 = -x_0 \\ y_1 = y_0 \end{cases}$

et la matrice $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Algébriquement, la transformation est caractérisée par la relation :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Exemple 3. — En prenant le symétrique de $A_0(x_0, y_0)$ par rapport à l'origine O , on prendra les formules $\begin{cases} x_1 = -x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases}$ et la matrice

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Algébriquement, la transformation est caractérisée par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Ces exemples montrent déjà que la matrice doit être considérée comme un opérateur, non comme un nombre, ce qui la différencie donc essentiellement du déterminant.

10. — Comme seconde opération, nous définissons le produit de deux matrices.

Prenons les deux transformations linéaires :

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 \\ y_1 = cx_0 + dy_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 = mx_1 + ny_1 \\ y_2 = px_1 + qy_1 \end{cases}$$

L'élimination de x_1 et y_1 conduit au nouveau système :

$$\begin{cases} x_2 = (am + cn)x_0 + (bm + dn)y_0 \\ y_2 = (ap + cq)x_0 + (bp + dq)y_0 \end{cases}$$

Ces trois systèmes conduisent aux trois matrices :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} am + cn & bm + dn \\ ap + cq & bp + dq \end{vmatrix}$$

Ceci nous permet d'expliquer sans difficulté la définition :

Le produit de deux matrices, dans un ordre déterminé, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ et

$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$ est la nouvelle matrice $\begin{vmatrix} am + cn & bm + dn \\ ap + cq & bp + dq \end{vmatrix}$. On écrit :

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap + cq & bp + dq \\ am + cn & bm + dn \end{vmatrix}$$

Pour la formation des éléments du produit, on pourra penser au tableau :

$$\begin{array}{cc} l_1 c_1 & l_1 c_2 \\ l_2 c_1 & l_2 c_2 \end{array}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5+14 & 7+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 23 \\ 43 & 50 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ces exemples simples prouvent immédiatement que le produit n'est pas commutatif.

11. — *Application 1.* — La définition du produit de deux matrices nous permet de dire que le second membre de la relation de transformation

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

d'une transformation radiale peut effectivement être considérée comme un produit de deux matrices.

Application 2. — Une transformation quelconque peut maintenant être définie algébriquement par la relation :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

En reprenant la transformation identique sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

nous voyons que la translation sera définie algébriquement par la relation :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Application 3. — L'homothétie de centre O sera définie par :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

et celle de centre quelconque le sera par :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Application 4. — La figure symétrique de F_0 par rapport à l'axe des x conduit à la figure F_1 ; la transformation est régie par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} \quad (4).$$

En assujettissant F_1 à une nouvelle symétrie par rapport à l'axe Oy (p.e. perpendiculaire à Ox), on obtient la figure F_2 ; la seconde transformation est régie par :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} \quad (5).$$

De (4) et (5), on déduit que :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

ce qui signifie que F_2 est le symétrique de F_0 par rapport au point d'intersection O des deux axes rectangulaires.

Ce qui précède explique également pourquoi on emploie en géométrie le terme « produit » de deux symétries.

En prenant d'abord la symétrie par rapport à Oy , puis par rapport à Ox , on obtient la même figure finale ; l'ordre des symétries n'a donc pas d'influence sur le résultat.

12. — *Autres applications* : 1) *Symétrie par rapport à une droite*. — Prenons, dans le système d'axes xOy , une droite d menée par O , définie par son angle directeur u . Le symétrique du point $A_0(x_0, y_0)$ par rapport à cette droite aura des coordonnées x_1, y_1 données par le système :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos 2u + y_0 \sin 2u \\ y_1 = x_0 \sin 2u - y_0 \cos 2u \end{cases} \quad \text{de matrice} \quad \begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix}$$

La relation de transformation est donc :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Cas particulier. — Lorsqu'il s'agit d'une symétrie par rapport à la première bissectrice du système d'axes coordonnées, on aura $u = 45^\circ$, $2u = 90^\circ$, ce qui conduira à la relation :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

En appliquant deux fois consécutivement cette transformation, on retrouve la figure primitive. Dans ce cas :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

ce qui est bien la transformation d'identité.

2) *Rotation d'une figure autour d'un point, d'un angle u* . — Si O est l'origine du système d'axes coordonnées, $A_0(x_0, y_0)$ un point de la première figure, $A_1(x_1, y_1)$ le point correspondant de la figure transformée par rotation, on aura les formules de transformation :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos u - y_0 \sin u \\ y_1 = x_0 \sin u + y_0 \cos u \end{cases}$$

et la relation de transformation sera :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Si l'on soumet la figure F_1 à une seconde rotation autour du même point, mais d'angle v , on obtiendra une figure F_2 déduite directement de F_0 d'après les règles de la transformation :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(u+v) & -\sin(u+v) \\ \sin(u+v) & \cos(u+v) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Elle nous montre que l'on peut déduire F_2 de F_0 par une seule rotation, autour de O , d'angle $(v + u)$.

Pour $u + v = 90^\circ$, on trouve :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

cè qui montre que F_2 est le symétrique de F_0 par rapport au point O, résultat connu.

La relation de rotation est susceptible de deux interprétations :

1° lorsqu'on suppose que les formules d'addition trigonométriques sont connues, elle nous apprend que le produit de deux rotations (O, u) et (O, v) est une nouvelle rotation $(O, u + v)$;

2° lorsqu'on suppose connue la propriété que le produit de deux rotations est une rotation, elle fournit une démonstration pour les formules d'addition trigonométriques.

3) *Homothétie*. — Nous supposons que le centre soit à l'origine du système d'axes coordonnées, xOy . Après transformation, le point $A_0(x_0, y_0)$ devient $A_1(x_1, y_1)$ sur OA_0 . Si k est une constante ($\neq 1$), le point $A_1(kx_0, ky_0)$ sera l'homothétique de A_0 . La transformation est donc caractérisée par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

4) *Affinité*. — Prenons dans un système d'axes rectangulaires le point $A_0(x_0, y_0)$ et faisons-lui correspondre le point $A_1(x_0, ky_0)$. Cette affinité orthogonale sera définie par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

5) On pourra maintenant inscrire les relations de produits de transformations. Nous choisissons comme exemple une homothétie suivie d'une affinité orthogonale :

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & km \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Cette transformation est-elle commutative ?

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & km \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

et la réponse est affirmative, ce qui n'était pas certain *a priori* !

13. — *Epures*. — Nos élèves ont dessiné plusieurs transformations et des produits ; les dessins exposés comprennent : produit de deux translations ; translation suivie de symétrie axiale ; produit de deux symétries par rapport à deux axes perpendiculaires et par rapport à deux axes obliques ; produit de deux symétries centrales ; produit de deux rotations ; produit d'une translation et d'une rotation ; produit d'une symétrie axiale par une homothétie ; produit d'une rotation par une homothétie ; produit de deux homothéties de centres distincts ; une affinité générale ; un cisaillement ; un produit de deux affinités orthogonales ; un produit d'une affinité orthogonale par une rotation et un produit de deux cisaillements.

En conclusion, on a composé un tableau renfermant dans la première colonne le nom de la transformation, dans la seconde la matrice y afférente et dans la dernière le déterminant de cette matrice.

14. — *Tableau :*

<i>Transformation</i>	<i>Matrice</i>	<i>Déterminant</i>
identité	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1
symétrie p.r. à Ox	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	—1
symétrie p.r. à Oy	$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	—1
symétrie p.r. à O	$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	+1
symétrie p.r. à une droite par O .	$\begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix}$	—1
rotation autour de O	$\begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix}$	1
symétrie p.r. 1 ^{re} bissectrice	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	—1
homothétie de centre O	$\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$	k^2
affinité orthogonale d'axe Ox	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$	k

15. — Nous avons trouvé une matrice jouant le rôle de l'unité positive ; examinons maintenant s'il n'existe pas une matrice jouant le rôle du nombre —1.

Pour y arriver, nous pensons à la forme trigonométrique du nombre complexe et à l'interprétation géométrique d'un nombre complexe, et nous rappelons la propriété particulière que l'on peut déduire du point-image d'un nombre réel, le point-image d'un nombre purement imaginaire par une rotation de 90°.

La matrice de rotation $\begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix}$ peut s'écrire comme une somme de deux matrices :

$$\begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & \cos u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & -\sin u \end{vmatrix}$$

ou encore :

$$\cos u \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \sin u \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

La première matrice est la matrice unité. Comment interpréter la seconde ?

En la multipliant par elle-même, on trouve comme produit :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ ou } - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elle semble donc jouer le rôle du nombre i des nombres complexes. Le carré de la seconde matrice est en effet égal à la matrice unité changée de signe. La matrice de rotation peut donc s'écrire :

$$\|1\| \cos u + \|i\| \sin u$$

et cette forme nous rappelle la forme trigonométrique du nombre complexe.

16. — Lors des définitions, nous avons adjoint à chaque matrice un déterminant. Ce déterminant a-t-il une signification particulière ?

Nous examinons encore une fois les dessins et nous calculons les déterminants des différentes transformations (notés dans le tableau du n° 14).

Conclusions : les transformations 1 à 7 donnent toujours des figures égales ; 1, 4 et 7 donnent des figures directement égales, tandis que 2, 3, 4, 5 donnent des figures inversement égales.

Des figures homothétiques sont semblables (facteur k) et le rapport des aires est k^2 .

Des figures affines ont des aires qui sont entre elles comme les nombres 1 et k . Cette première remarque nous incite à croire que la valeur du déterminant afférent à la transformation est le nombre par lequel il faut multiplier l'aire de la figure primitive pour obtenir celle de la figure transformée.

Qu'il en soit réellement ainsi se montre de la façon suivante :

Nous prenons la matrice $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ et la transformation définie par :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Les points $A_0(1,0)$, $B_0(2,0)$, $C_0(3,0)$... de l'axe des x deviennent $A_1(a, c)$, $B_1(2a, 2c)$, $C_1(3a, 3c)$... et sont colinéaires avec O .

Les points $L_0(0,1)$, $M_0(0,2)$, $N_0(0,3)$... de l'axe des y deviennent $L_1(b, d)$, $M_1(2b, 2d)$, $N_1(3b, 3d)$... et sont également alignés sur O .

Le point $E_0(1,1)$ devient $E_1(a+b, c+d)$.

Au carré $OA_0E_0L_0$ correspond le quadrilatère $OA_1E_1L_1$ de sommets (O, O) , (a, c) , $(a+b, c+d)$, (b, d) . Les coefficients angulaires des droites OA_1 et E_1L_1 , ainsi que ceux de OL_1 et A_1E_1 sont égaux et la figure transformée est donc un parallélogramme.

Connaissant la matrice M , on pourra construire immédiatement le parallélogramme $OA_1E_1L_1$ et donc toute la figure transformée.

Si, réciproquement, on connaît la figure transformée correspondant au carré $OA_0E_0L_0$, on pourra écrire la matrice de la transformation et en déduire les coordonnées des points A_1 et L_1 . En projetant E_1 en E'_1 sur Ox et en E''_1 sur Oy , on obtient :

$$\text{aire } OE'_1E_1E''_1 = (a+b)(c+d)$$

$$\text{aire } OA_1E_1L_1 = ad - bc$$

et donc :

$$\frac{\text{aire } OA_1E_1L_1}{\text{aire } OA_0E_0L_0} = \frac{ad - bc}{1} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{1} = \text{déterminant de la matrice de transformation.}$$

Conclusion : L'aire de la figure transformée est égale à l'aire de la figure primitive multipliée par le déterminant de la matrice de transformation ; en d'autres mots, un déterminant est un nombre qui indique dans quelle mesure une matrice change une aire par transformation.

Lors des définitions, nous avons parlé également de matrice singulière, matrice dont le déterminant était nul.

Qu'advient-il dans une telle transformation de l'aire de la figure transformée ? Considérons p.e. la transformation définie par la relation :

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Les points $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$ deviennent $O'(0,0)$, $A'(1,1)$, $B'(2,2)$, $C'(1,1)$ et sont alignés sur la droite d'équation $y = x$. Toutes les aires deviennent donc nulles.

17. — Comme première conclusion, nous croyons qu'il nous est permis de dire : Le dessin d'épure de transformations simples et de produits de transformations avec les relations algébriques (matricielles) afférentes peut constituer une bonne préparation au calcul matriciel en particulier et à l'algèbre abstraite en général.

Un second point de contact avec l'enseignement supérieur est facile à réaliser pour le professeur qui veut introduire la théorie des groupes.

Il est en effet très simple de faire voir que les transformations donnent lieu à : 1° des groupes congruents ; 2° des groupes de similitude ; 3° des groupes affins (et, éventuellement à : 4° des groupes projectifs).

Nous commencerions par exemple par signaler les conditions requises pour que des transformations fassent des groupes :

1° le produit de deux transformations doit donner une nouvelle transformation de ce groupe : $T_1 T_2 = T$;

2° le produit doit être associatif : $T_1(T_2 T_3) = (T_1 T_2) T_3$;

3° le groupe doit contenir la transformation identique ;

4° la transformation inverse doit exister.

On pourra même ajouter que, lorsque le produit est commutatif, le groupe s'appelle abélien.

18. — Pour finir, nous croyons qu'il peut être recommandable d'insister sur les invariants qui caractérisent les différentes transformations. On pourra montrer p.e. : l'invariance du rapport de section, du parallélisme et du rapport des aires pour la transformation affine ; l'invariance des angles et du rapport des segments homologues dans les transformations de similitude ; l'invariance de la longueur des segments et de l'aire dans les transformations congruës.

Nous espérons que cet exposé aura pu vous convaincre qu'il est possible d'approcher les Mathématiques supérieures modernes avec un minimum de moyens.

G. BOSTEELS,

Préfet des Etudes (Athénée Royal, Berchem-Anvers).