FORMES QUADRATIQUES ET HERMITIENNES *

1. — Introduction

Une forme quadratique des n variables réelles $x_1, x_2, ..., x_n$ est un polynôme homogène du second degré de ces variables, à coefficients réels, soit :

$$(1) \qquad F = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

Dans la notation (1), la sommation est faite par rapport aux indices i et j variant indépendamment l'un de l'autre de 1 à n ; la multiplication $x_i x_j = x_j x_i$ étant commutative, on supposera $a_{ij} = a_{ji}$, c'est-à-dire la matrice $n \times n$, $A = (a_{ij})$, *symétrique*. On écrit encore :

$$(2) \qquad F = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

L'étude des formes quadratiques figure indirectement au programme de Mathématiques Spéciales ; l'équation d'une surface du second degré s'écrit en effet $F = 0$ en coordonnées homogènes $x_1 = X$, $x_2 = Y$, $x_3 = Z$, $x_4 = T$, ou encore :

$$F = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + ... + 2CT + ... + DT^2 = 0.$$

A la réduction de la forme (1) dans le groupe orthogonal est attachée « l'équation en s ». L'introduction explicite des formes quadratiques au programme de certaines Ecoles est susceptible de modifier le point de vue de l'exposé. On fera appel plus nettement aux notions essentielles (transformations linéaires, groupe orthogonal, symétrie $\vec{y} . A\vec{x} = A\vec{y} . \vec{x}$ de la forme polaire, $A\vec{x}$ étant le transformé d'un vecteur $\vec{x}$ par une matrice symétrique, etc...), notions qu'on retrouve dans d'autres chapitres ; on obtiendra ainsi les démonstrations les plus élémentaires, avec cet avantage qu'elles seront valables pour un nombre quelconque de variables. Il existe une autre raison de modifier un enseignement tourné jusqu'ici uniquement vers l'étude des quadriques : c'est de le rapprocher des applications que le plus grand nombre des élèves rencontreront en Physique et en Mécanique. Tout en conservant une place aux applications aux surfaces du second degré, qui interviennent commodément pour représenter et matérialiser une forme quadratique (exemple : l'ellipsoïde d'inertie d'un solide), on insistera sur l'étude de la transformation linéaire :

$$(3) \qquad y_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

où $\vec{y} = A\vec{x}$ [$A = (a_{ij})$ matrice symétrique], sur les notions de vecteurs et valeurs propres de la transformation (3), celle-ci intervenant dans de nombreuses applications (exemple : la correspondance entre la rotation et le moment cinétique d'un solide, entre le couple de flexion d'une poutre et la ligne neutre, etc...), à tous les niveaux de la science.

On a traité ici, en même temps que les formes (1), les formes dites *hermitiennes :*

$$(4) \qquad \Phi = \sum_{p,q} c_{pq} \bar{x}_p x_q$$

(*) Conférence prononcée le 17 mai 1956, à l'Institut Henri-Poincaré, sixième conférence du cycle sur l'Algèbre organisé par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

à coefficients c_{pq} complexes. On note a et $\bar{a}$ deux nombres complexes conjugués. La forme Φ est *bilinéaire* en les deux groupes de variables x_p, $\bar{x}_p$. Elle sera dite ***hermitienne*** si sa valeur est réelle, quelle que soient les valeurs conjugués x_p, $\bar{x}_p$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(5) \qquad c_{pq} = \overline{c_{qp}}$$

comme on le voit aisément (on annulera les variables, sauf celles d'indices i et j). Les formes hermitiennes jouent un rôle essentiel, en Mécanique quantique, notamment.

L'étude des formes hermitiennes, leur réduction dans le groupe unitaire, se fait en mettant à profit leur caractère bilinéaire. Celle des formes quadratiques n'en est qu'un cas particulier. En effet, si dans (4) c_{pq} est réel, (5) donne $c_{pq} = c_{qp}$; *une forme quadratique* (1) *est donc une forme hermitienne à coefficients réels, que l'on étudie pour les valeurs réelles des variables.* On fera ici l'étude des formes hermitiennes en indiquant au passage les quelques simplifications à faire dans le cas de formes quadratiques : elles consistent essentiellement à confondre une quantité réelle avec sa conjuguée. Au prix de cette modification d'écriture, qui sera signalée dans chaque cas particulier, on disposera ici d'un exposé indépendant des formes quadratiques dans l'espace E_n à coordonnées réelles.

2. — Espace C_n et espace E_n normés

On désignera par C_n l'espace vectoriel de dimension n sur le corps des nombres complexes. Il existe un ensemble de n éléments (ou vecteurs) $\vec{e}_i$ de C_n formant une base R_0 de C_n, c'est-à-dire permettant d'exprimer un élément quelconque $\vec{x}$ de C_n sous la forme :

$$\vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i.$$

Les x_i sont n nombres complexes appelés les coordonnées de $\vec{x}$ par rapport à la base R_0. Un endomorphisme de C_n est une transformation $\vec{x}' = g(\vec{x})$ de C_n dans lui-même, qui conserve la structure d'espace vectoriel (1) ; il est déterminé quand on connaît :

$$(6) \qquad \vec{e'}_i = g(\vec{e}_i) = \sum_j a_{ji} \vec{e}_j.$$

On aura alors $\vec{x}' = \Sigma_i x_i g(\vec{e}_i) = \sum_{i,j} x_i a_{ji} \vec{e}_j$. Dans la base R_0, la transformation $\vec{x}' = g(\vec{x})$ s'exprime par :

$$(7) \qquad x'_i = \sum_j a_{ij} x_j.$$

On dira alors que l'endomorphisme $\vec{x}' = g(\vec{x})$, soit (6), est représenté par la matrice $A = (a_{ij})$ dans la base R_0 ; celle-ci permet en effet d'ex-

(1) On se reportera à la conférence de M. G. Choquet : Espaces vectoriels (*Bulletin* de mai 1956).

primer les coordonnées de $\vec{x}'$ en fonction de celles de $\vec{x}$ dans la base R_0 par les formules (7). On écrira encore celles-ci sous la forme condensée :

$$(8) \qquad \vec{x}' = A\vec{x},$$

en interprétant dans (7) un vecteur $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ comme une matrice $(n \times 1)$.

Deux endomorphismes $\vec{x}'' = B\vec{x}'$, $\vec{x}' = A\vec{x}$ opérés successivement donnent l'endomorphisme $\vec{x}'' = BA\vec{x} = C\vec{x}$ où $C = BA$ est la matrice produit :

$$c_{ij} = \sum_s b_{is} a_{sj}$$

Si A désigne la matrice (a_{ij}), on appellera *transposée* de A la matrice A′ d'élément :

$$a'_{ji} = a_{ij}.$$

On a : $(A')' = A$ et $(BA)' = A'B'$

Produit scalaire et norme dans C_n. On appellera *produit scalaire hermitien* de deux vecteurs, $\vec{a}$, $\vec{b}$, le nombre *complexe* noté $\vec{a}.\vec{b}$, défini comme une fonction des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, avec les propriétés :

a) $\quad \vec{a}.\vec{b} = \overline{\vec{b}.\vec{a}}.$

b) $\quad \vec{a}(\lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2) = \lambda\vec{a}.\vec{b}_1 + \mu\vec{a}.\vec{b}_2,$

λ et μ étant des nombres complexes quelconques.

c) $\vec{a}.\vec{a}$ est un nombre positif, et est nul seulement si $\vec{a}$ est le vecteur nul. On appellera *norme* de $\vec{a}$ le nombre positif $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont rapportés à une base $R_0(\vec{e}_j)$, on a :

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(\sum_i a_i\vec{e}_i\right).\left(\sum_j b_j\vec{e}_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j (\vec{e}_i\vec{e}_j)$$

et le produit scalaire sera complètement défini si l'on fixe la valeur des produits $\vec{e}_i.\vec{e}_j$.

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont dits *orthogonaux* si $\vec{a}.\vec{b} = 0$. Un vecteur de norme $\|\vec{a}\| = 1$ sera dit *unitaire*. Un ensemble de vecteurs est dit *orthonormé* s'il est formé de vecteurs unitaires, orthogonaux deux à deux. Une base R_0 est dite orthonormée si elle est formée de vecteurs orthonormés.

THÉORÈME 1 : *Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ sont m vecteurs linéairement indépendants, il existe un ensemble de vecteurs orthonormés $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$ tels que pour chaque entier k $(1 \leqslant k \leqslant m)$, les vecteurs $(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k)$ et $(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k)$ forment une base du même espace vectoriel.*

Pour $m = 1$, l'énoncé est évident, car l'hypothèse entraîne $\|\vec{a}_1\| \neq 0$, et il suffit de prendre $\vec{b}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}$.

On procède alors par récurrence sur m, en supposant l'énoncé établi pour $m - 1$: on dispose donc de $m - 1$ vecteurs $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_{m-1}}$ tels que $(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_k})$ et $(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_k})$ sous-tendent le même espace vectoriel pour $k \leqslant m - 1$, et en particulier pour $k = m - 1$.

Posons :

$$\vec{c} = \vec{a_m} - \sum_i \vec{b_i}(\vec{b_i}.\vec{a_m}),$$

$\vec{c}$ n'appartient visiblement pas à l'espace vectoriel déterminé par $(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_{m-1}})$, sinon il en serait de même de $\vec{a_m}$, contrairement à l'hypothèse.

Définissons :

$$\vec{b_m} = \vec{c}(\|\vec{c}\|^{-1}).$$

On a alors :

$\|\vec{b_m}\| = 1$ et $\vec{b_m}.\vec{b_k} = \|c\|^{-1} [\vec{a_m}.\vec{b_k} - \overline{(\vec{b_k}.\vec{a_m})}] = 0.$

Ainsi, $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_m}$ sous-tendent le même espace vectoriel que $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}$ et sont orthonormés.

Remarques : 1) Le produit hermitien $\vec{a}.\vec{b}$ n'est pas commutatif, mais satisfait à a).

2) p vecteurs $\vec{c_1}, \ldots, \vec{c_p}$ orthogonaux deux à deux et non nuls sont linéairement indépendants : de $\sum_1^p \lambda_i \vec{c_i} = 0$, on déduit en effet :

$\vec{c_i}. \Sigma\lambda_i\vec{c_i} = \lambda_i\|\vec{c_i}\|^2 = 0, \ \lambda_i = 0.$

La démonstration précédente donne un procédé pour construire de proche en proche les vecteurs $\vec{b_i}$. On commencera d'abord par *orthogonaliser* le système des $\vec{a_i}$, c'est-à-dire par construire les vecteurs $\vec{c_i}$:

$$\begin{aligned}
\vec{c_1} &= \vec{a_1} \\
\vec{c_2} &= a_2 + \lambda_2^1 \vec{c_1} \\
\vec{c_3} &= a_3 + \lambda_3^1 \vec{c_1} + \lambda_3^2 \vec{c_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{c_n} &= \vec{a_n} + \lambda_n^1 \vec{c_1} + \ldots + \lambda_n^{n-1} \vec{c_{n-1}}
\end{aligned}$$

Quels que soient les λ_p^q, aucun de ces vecteurs $\vec{c_i}$ ne peut être nul. On détermine les $\lambda_2^1, \ldots, \lambda_m^q$ en écrivant successivement $\vec{c_2}.\vec{c_1} = 0, \ldots,$ $\vec{c_m}.\vec{c_q} = 0$, soit : $\lambda_2^1 \|c_1\|^2 + \vec{a_2}.\vec{c_1} = 0$, qui détermine λ_2^1, puis :

$$\lambda_3^2 \|\vec{c_1}\|^2 + \vec{a_3}.\vec{c_1} = 0 \text{ et } \lambda_3^1 \|c_2\|^2 + \vec{a_3}.\vec{c_2} = 0$$

qui déterminent λ_3^1 et λ_3^2, etc... On *normera* ensuite le système des $\vec{c_1}$, en posant $\vec{b_i} = \dfrac{\vec{c_i}}{\|\vec{c_i}\|}$; les $\vec{b_i}$ sont alors le système orthonormé cherché.

Produit scalaire réel dans E_n. On désignera par E_n l'espace vectoriel de dimension n sur le corps des nombres réels. Un élément $\vec{a}$, ou vecteur de E_n, est déterminé par ses coordonnées réelles (a_i), par rapport à un système de n vecteurs indépendants ou base R_0 dans E_n. La seule modification à apporter à ce qui précède concerne la définition du produit scalaire, qu'on notera toujours $\vec{a}.\vec{b}$, et qu'on définit comme une fonction réelle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ satisfaisant à :

a) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$,

b) $\vec{a}(\lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2) = \lambda\vec{a}.\vec{b}_1 + \mu\vec{a}.\vec{b}_2$,

λ, μ étant des nombres réels quelconques.

c) $\vec{a}.\vec{a}$ est positif et n'est nul que si a est le vecteur nul.

On dira encore que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux si $\vec{a}.\vec{b} = 0$, que $\vec{a}$ est un vecteur unitaire si $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = 1$; on définira comme plus haut un repère orthonormé et l'on établira le théorème 1 par la même démonstration, à ceci près qu'on peut écrire indifféremment $\vec{b}_m.\vec{b}_k$ ou $\vec{b}_k.\vec{b}_m$, le produit scalaire étant réel et commutatif.

Propriétés du produit scalaire hermitien (dans C_n*) et du produit scalaire réel (dans* E_n*) :*

a) Rapportons $\vec{a}$ et $\vec{b}$ à une base orthonormée R_0, de vecteurs $\vec{e}_i$:

$$\vec{a}.\vec{b} = \sum_{i,j} a_i b_j (\vec{e}_i \vec{e}_j) = \sum_i \bar{a}_i b_i \quad \text{et} \quad \|\vec{a}\|^2 = \sum_i \|a_i\|^2$$

on a

$$|\vec{a}.\vec{b}| = |\sum_i \bar{a}_i b_i| \leqslant \sum_i a_i||b_i|$$

et

$$(\sum_i |\bar{a}_i||b_i|)^2 \leqslant \sum_i |a_i|^2 . \sum |b_i|^2$$

la dernière inégalité résultant du fait que dans le trinôme en λ :

$$M(\lambda) = \sum_i (|a_i| + \lambda|b_i|)^2 \geqslant 0$$

le discriminant est positif ou nul. On a donc :

$$(9) \qquad |\vec{a}.\vec{b}| \leqslant \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.$$

b) Il en résulte :

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}\ \vec{a}$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|.\|b\| = (\|a\| + \|b\|)^2$$

$$(10) \qquad \|\vec{a}+\vec{b}\| \leqslant \|a\| + \|b\|$$

dite inégalité triangulaire : la démonstration s'applique au produit scalaire hermitien défini dans C_n et au produit scalaire réel dans E_n ; dans ce cas, on interprétera (10) en rappelant le théorème de géométrie euclidienne : dans un triangle, un côté est inférieur ou égal à la somme des deux autres.

Opérateur adjoint : Soit T un opérateur du type déjà considéré au début de ce paragraphe, c'est-à-dire un endomorphisme représenté par la matrice (t_{ij}). On associera à T un opérateur T* qui sera dit *opérateur adjoint* de T. On définira T* par :

$$(11) \qquad T^*\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{a}\,.\,T\vec{b}.$$

Il est facile de voir que $T^*\vec{a}$ est un endomorphisme de C_n. Si la matrice associée à T* est (t^*_{ij}), on obtient, en explicitant (11) par rapport à une base R_0 orthonormée :

$$\sum_{i,j} \overline{t^*_{ij}}\,\overline{a}_j b_i = \sum_{i,j} \overline{a}_j t_{ji} b_i.$$

Donc, par rapport à R_0, T* est déterminé par la matrice :

$$(12) \qquad t^*_{ij} = \overline{t_{ji}}.$$

On appellera alors *adjointe* d'une matrice (t_{ij}) la matrice (t^*_{ij}) définie par (12) ; elle s'obtient en prenant la conjuguée de la transposée T' de $T = (t_{ij})$, les deux opérations, transposition et conjugaison, étant d'ailleurs commutatives. La définition de l'opérateur T* adjoint de T peut être présentée élémentairement, en définissant d'abord la matrice adjointe par (12) et constatant ensuite l'égalité (11). Toutefois, la définition directe de T* à partir de (11) est générale et s'étend à l'adjoint d'un opérateur quelconque dans un espace où est défini un produit scalaire hermitien.

On établit soit à partir de (11), soit à partir de (12) les propriétés suivantes de la matrice adjointe :

a) $\qquad (A^*)^* = A.$

b) $\qquad (BA)^* = A^*B^*.$

c) Si A est une matrice $(n \times n)$ régulière, c'est-à-dire ayant un inverse (ou encore de déterminant non nul), on aura $AA^{-1} = 1$, ou, en appliquant *b*) : $(A^{-1})^*A^* = 1$; d'où : $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Opérateur hermitien. On est conduit alors à distinguer les opérateurs qui sont leurs propres adjoints. Un opérateur T sera dit *hermitien* (dans l'espace C_n) si l'on a :

$$\vec{y}\,.\,T\vec{x} = T\vec{y}\,.\,\vec{x}$$

ou encore $T = T^*$. Les opérateurs de la mécanique quantique sont de ce type en général. Cherchons à quelles conditions l'endomorphisme $T\vec{x} = A\vec{x}$, déterminé par la matrice $A = (a_{ij})$, possède cette propriété ; on aura :

$$(13) \qquad \vec{y}\,.\,A\vec{x} = A\vec{y}\,.\,\vec{x}$$

ou d'après (12) : $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Pour que $A = (a_{ij})$ soit hermitien, il faut et il suffit que la forme :

$$\Phi(\vec{x}) = \vec{x}\,.\,A\,\vec{x} = \sum_i \overline{x}_i \sum_j a_j x_j = \sum_{i,j} a_{ij}\overline{x}_i x_j$$

soit hermitienne, au sens précisé dans l'Introduction.

Opérateur symétrique dans E_n. Dans l'espace E_n, à coordonnées réelles, muni du produit scalaire réel et commutatif, on dira que l'opérateur T' est *transposé* de l'opérateur T si l'on a :

(11)' $\quad T'\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.T\vec{b}.$

Si T est un endomorphisme de E_n, il en est de même de T'. La matrice (t'_{ij}) associée à T' est donnée par :

(12)' $\quad t'_{ij} = t_{ji}$

c'est la matrice *transposée* de $(t_{ij}) = A$. On a d'ailleurs ici $A' = A^*$; l'adjointe d'une matrice se confond avec sa transposée, les éléments étant réels. On dira que l'opérateur T est *symétrique* s'il coïncide avec son transposé. Pour que l'opérateur $T\vec{x}$, représenté dans la base orthonormée R_0 par $\vec{y} = A\vec{x}$, $A = (a_{ij})$, soit symétrique, il faut et il suffit que $a_{ij} = a_{ji}$, donc que la matrice A soit symétrique. La forme :

$$F(\vec{x}) = \vec{x}.A\vec{x} = \Sigma a_{ij}x_ix_j$$

est dite *associée à l'opérateur dans* R_0 et l'on appellera *forme polaire* la fonction des deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$: $F_1(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}.A\vec{x} = A\vec{y}.\vec{x}$, qui s'écrit encore $\vec{x}.A\vec{y}$, le produit scalaire réel étant commutatif.

Vecteurs propres et valeurs propres (1). Soit T un opérateur hermitien (dans C_n) ou symétrique (dans E_n). On appelle vecteur propre de l'opérateur T un vecteur x non nul tel que l'on ait :

(14) $\quad T\vec{x} = s\vec{x},$

le nombre s est dit *valeur propre* de l'opérateur et $\vec{x}$ *vecteur propre* associé à s. On désignera par A la matrice associée à T dans R_0.

Propriétés des vecteurs et des valeurs propres :

1) Il existe n valeurs propres (réelles ou distinctes). En effet, I étant la matrice unité, (14) s'écrit $(A - sI)\vec{x} = 0$. En annulant les n coordonnées du premier membre, on obtient n équations linéaires ; elles n'admettent une solution $\vec{x} \neq 0$, que si l'on a :

$$D_A(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$

où $D_A(s) = (-1)^n s^n + \dots$; il existe donc au plus n valeurs propres distinctes ou confondues. Réciproquement, si s est racine de $D_A(s) = 0$, il existe un vecteur $\vec{x} \neq 0$ satisfaisant à $A\vec{x} = s\vec{x}$, donc vecteur propre associé à s.

2) Les vecteurs propres et les valeurs propres, par définition, ne dépendent que de la correspondance :

(15) $\quad \vec{y} = T\vec{x}$

et non de la matrice A qui représente l'opérateur dans la base R_0. On montrera plus loin la propriété plus précise : si l'on représente T par $A = (a_{ij})$ dans R_0 et par $B = (b_{ij})$ dans une autre base R_1 également orthonormée, on a : $D_A(s) \equiv D_B(s)$.

(1) Voir la conférence de M. A. Lichnerowicz : Applications linéaires et matrices.

3) *Toute valeur propre est réelle.* En effet, de (14) on déduit :

$$\vec{x}.A\vec{x} = s\vec{x}.\vec{x} = s\|x\|^2 \qquad \text{d'où } s = \frac{\vec{x}.A\vec{x}}{\|x\|^2} = \frac{\Phi(\vec{x})}{\|x\|^2}$$

Si $\vec{x}$ est vecteur propre, $\dfrac{\vec{x}}{\|x\|}$ l'est aussi. Donc, on obtient : *la valeur propre s est la valeur de la forme hermitienne $\Phi(\vec{x})$ pour un vecteur propre $\vec{x}$ associé à s, et unitaire.*

4) *Deux vecteurs propres $\vec{x}$, $\vec{y}$, associés à deux valeurs propres s_1, s_2 distinctes sont orthogonaux.*

En effet, de $A\vec{x} = s_1\vec{x}$ et de $A\vec{y} = s_2\vec{y}$, on déduit en considérant la forme polaire : $\vec{y}.A\vec{x} = s_1\vec{y}.\vec{x}$ et $A\vec{y}.\vec{x} = s_2\vec{y}.\vec{x}$. On a donc :

$$(s_1 - s_2)\vec{y}.\vec{x} = 0, \quad \text{ou} \quad \vec{y}.\vec{x} = 0.$$

Cas de E_n. Les énoncés subsistent. On modifiera la démonstration de 3) comme suit : Soit s une racine de $D_A(s) = 0$. Que s soit réel ou complexe, il lui correspond des nombres x_i (éventuellement complexes) non tous nuls, solutions des n équations homogènes ; $sx_i = \sum_j a_{ij}x_j$.

On a alors :

$$\sum_{i,j} \bar{x}_i a_{ij} x_j = s \sum_i \bar{x}_i x_i = s \sum_i |x_i|^2$$

D'où :

$$s = \frac{\sum a_{ij}\bar{x}_i x_j}{\sum |x_i|^2}$$

Le numérateur est réel d'après $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$; donc s est réel ; les valeurs propres d'une matrice symétrique sont donc réelles.

3. — Réduction des formes quadratiques et hermitiennes

On dira qu'un opérateur $\vec{y} = f(\vec{x})$ est *unitaire* si l'on a $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. Une matrice $A = (a_{ij})$ sera dite unitaire si l'endomorphisme de C_n défini par $\vec{y} = A\vec{x}$ par rapport à une base orthonormée est unitaire, c'est-à-dire si l'on a $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

Théorème 2 : *Pour que la matrice* A *soit unitaire, il faut et il suffit qu'on ait* $A^*A = I$, I *étant la matrice unité.*

En effet, si A vérifie :

$$A^*A = I, \tag{18}$$

on a, d'après la définition même de l'adjointe A^* :

$$\|A\vec{a}\|^2 = A\vec{a}.A\vec{a} = \vec{a}.A^*A\vec{a} = \vec{a}.\vec{a} = \|a\|^2.$$

Réciproquement, si $\|Aa\|^2 = \|a\|^2$, pour tout vecteur $\vec{a}$, on a :

$$\|A(\vec{a}+\vec{b})\|^2 = (A\vec{a}+A\vec{b}).(A\vec{a}+A\vec{b}) = \|Aa\|^2+\|Ab\|^2+A\vec{a}.A\vec{b}+A\vec{b}.A\vec{a}$$
$$= \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|a\|^2+\|b\|^2+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}$$

D'où :

$$A\vec{a}.A\vec{b}+A\vec{b}.A\vec{a} = \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}. \tag{19}$$

Remplaçons dans (19) $\vec{b}$ par $\vec{b}' = i\vec{b}$:

$$A\vec{a}.A\vec{b} - A\vec{b}.A\vec{a} = \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a}.$$

On obtient par addition des deux égalités :

$$A\vec{a}.A\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}. \tag{20}$$

Ainsi : *la conservation de la norme entraîne plus généralement celle du produit scalaire.* On obtient alors :

$$A\vec{a}.A\vec{b} = \vec{a}.A^*A\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}$$

ou $\vec{a}[A^*A\vec{b} - \vec{b}] = 0$, quel que soit $\vec{a}$. Si l'on prend pour $\vec{a}$ le vecteur qui figure dans le crochet, on obtient $A^*A\vec{b} - \vec{b} = 0$, pour tout $\vec{b}$, donc (18).

Une matrice unitaire est donc régulière, c'est-à-dire de déterminant δ non nul, car on a :

$$\delta\bar{\delta} = 1, \qquad |\delta| = 1.$$

Cas de E_n. Les endomorphismes unitaires, si l'on interprète E_n comme un ensemble de vecteurs issus d'un point O, sont les rotations autour de O. Une matrice A qui définit un tel endomorphisme par rapport à une base orthonormée est dite *orthogonale*. Le théorème 3 (même démonstration) s'énonce : *Pour que* A *soit orthogonale, il faut et il suffit qu'on ait :* $A'A = 1$ ou $A' = A^{-1}$.

La démonstration est simplifiée : à partir de (19), on déduit, le produit scalaire réel étant commutatif : $A\vec{a}.A\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}$, soit (20), et on achève comme plus haut.

REMARQUES :

1) Les transformations unitaires de C_n forment un groupe dit *groupe unitaire ;* de même, les transformations orthogonales de E_n forment le *groupe orthogonal.* De tels groupes sont d'une espèce particulière : chaque opération du groupe est déterminée par la connaissance de n^2 paramètres (à savoir les éléments a_{ij} de la matrice A), complexes dans le premier cas, réels dans le second, et les paramètres qui correspondent à l'opération $O = O_1O_2$, produit des opérations O_1, O_2 du groupe, s'obtiennent analytiquement en fonction des paramètres de O_1 et de O_2 (il suffit de calculer les termes de la matrice produit) : de tels groupes sont appelés *groupes de Lie.*

2) Les n^2 éléments (a_{ij}) d'une matrice unitaire sont liés par des relations qu'on obtient à partir de (18) ; notons δ_{ij} les éléments de la matrice unité I : ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$).

On aura :

$$\sum_s \bar{a}_{si} a_{sj} = \delta_{ij} \tag{21}$$

en exprimant (18). Réciproquement, (21) entraîne $BA = I$ avec $B = A^*$, d'où :

$$(22) \qquad A^*A = I = AA^*.$$

La seconde égalité (22) équivaut à :

$$(23) \qquad \sum_s a_{is}\bar{a}_{js} = \delta_{ij}$$

Ainsi, les systèmes d'équations (21) et (23) sont équivalents. Dans le cas orthogonal (a_{ij} réels), on retrouve pour $n = 3$ une condition classique pour que 9 nombres soient les éléments d'une matrice orthogonale.

3) Etant données deux bases R_0 et R_1 orthonormées de vecteurs $\vec{e}_i$, $\vec{e'}_i$ respectivement, il existe une matrice S *unitaire* telle que :

$$\vec{e'}_i = S\vec{e}_i.$$

En effet, on a d'après (6), si $S = (s_{ij})$ est telle que :

$$\vec{e'}_i = S\vec{e}_i = \sum_j s_{ji}\vec{e}_j, \text{ d'où :}$$

$$\vec{e'}_i.\vec{e'}_k = S\vec{e}_i.S\vec{e}_k = \sum_j \bar{a}_{ji}a_{jk} = \delta_{ik},$$

qui d'après (21) exprime que S est unitaire.

On peut déterminer (théorème 1) une base orthonormée en prenant comme vecteur $\vec{e}_i$ un vecteur unitaire arbitraire. On peut donc déterminer une matrice unitaire S telle que : $S\vec{e}_1 = \vec{a}_1$, $\vec{a}_1$ étant un vecteur unitaire donné.

L'énoncé (en remplaçant unitaire par orthogonal) subsiste dans E_n et s'interprète géométriquement.

Théorème 3 : *Si* A *est une matrice hermitienne et* S *une matrice unitaire,* $B = SAS^{-1}$ *est une matrice hermitienne.*

Par rapport à une base R_0 orthonormée, interprétons $\vec{y} = A\vec{x}$ comme un opérateur hermitien, et montrons que $\vec{y} = B\vec{x}$ est aussi hermitien, c'est-à-dire qu'on a :

$$B\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.B\vec{y}$$

ou :

$$SAS^{-1}\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.SAS^{-1}\vec{y}.$$

Or, on a :

$$A\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.A\vec{v}, \quad \text{etc...}$$

où en posant $\vec{u} = S^{-1}\vec{x}$, $\vec{v} = S^{-1}\vec{y}$,

$$AS^{-1}\vec{x}.S^{-1}\vec{y} = S^{-1}\vec{x}.AS^{-1}\vec{y},$$

ou encore, d'après (20) appliqué aux matrices unitaires S et S^{-1} :

$$SAS^{-1}\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.SAS^{-1}\vec{y}.$$

De même : *si* A *est une matrice symétrique, et* S *une matrice orthogonale,* $B = SAS^{-1}$ *est une matrice symétrique.*

REMARQUE : Si l'opérateur (15) est représenté par une matrice hermitienne A par rapport à une base orthonormée R_0 et par une matrice B dans la base R_1, $D_A(s) \equiv D_B(s)$.

En effet, S étant la matrice unitaire qui fait passer de R_0 à R_1, $B = (S^*)^{-1}AS^{-1} = SAS^{-1}$, d'où : $D_B =$ déterminant de $[B - sI] =$ déterminant de $[SAS^{-1} - sI] =$ déterminant $S.[A - sI]S^{-1} = D_A$.

Réduction d'une forme hermitienne. Soit $\Phi = \sum_{i,j} a_{ij}\bar{x}_i x_j$ une forme que nous interprétons : $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}.A\vec{x}$; $A = (a_{ij})$ étant la matrice associée à l'opérateur hermitien $\vec{y} = A\vec{x} = T\vec{x}$ dans une base R_0 orthonormée, x_i les coordonnées de $\vec{x}$ dans R_0, $\Phi(\vec{x})$ étant la forme hermitienne associée à T dans R_0.

THÉORÈME A : *Il existe dans* C_n *au moins une base orthonormée* R, *telle que si* ξ_i *sont les coordonnées de* $\vec{x}$ *dans* R, $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}.T\vec{x}$ *soit ramenée à l'expression :*

$$\Phi = \sum_{i=1}^{p} s_i \bar{\xi}_i \xi_i \qquad p \leqslant n. \tag{24}$$

les s_i *étant réels.*

Soit $\vec{x}_i = \sum_j s_{ij}\xi_j$; la matrice $S = (s_{ij})$ est unitaire, et l'on a $\Phi = \sum_{s\,t} b_{st}\bar{\xi}_s\xi_t$ avec $B = (b_{st}) = S^*AS = S^{-1}AS$.

L'énoncé précédent équivaut donc encore à :

THÉORÈME B : *A une matrice hermitienne* A, *on peut associer au moins une matrice unitaire* S *telle que* $B = S^{-1}AS$ *ait la forme diagonale :*

$$B = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

les s_i *étant réels.*

On établira l'énoncé A à partir de la propriété :

LEMME : *Si* $\vec{a}_1$ *est un vecteur propre unitaire de l'opérateur hermitien* T, *et si l'on pose* $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \vec{u}$, *avec* $\vec{a}_1.\vec{u} = 0$, $\vec{y} = T\vec{x}$ *se décompose sous la forme :*

$$\vec{y} = T\vec{x} = s_1 x_1 \vec{a}_1 + \vec{v}$$

s_1 est la valeur propre associée à $\vec{a}_1$; de plus, on a les propriétés :

1) $\vec{v} = T\vec{u}$, 2) $\vec{v}$ est ainsi que $\vec{u}$, dans le sous-espace $C_{n-1}(\vec{a}_1)$ orthogonal à $\vec{a}_1$, 3) $\Phi = \vec{x}.T\vec{x} = s_1\bar{x}_1x_1 + \vec{u}.T\vec{u}$ où $\vec{u}.T\vec{u}$ est une forme hermitienne de l'espace $C_{n-1}(\vec{a}_1)$.

En effet : $T(\vec{x}) = T(x_1\vec{a}_1 + \vec{u}) = x_1T(\vec{a}_1) + T(\vec{u}) = s_1x_1\vec{a}_1 + T(\vec{u})$.

De plus : $\vec{a}_1 . T(\vec{u}) = T(\vec{a}_1) . \vec{u} = s_1\vec{a}_1 . \vec{u} = 0$. Par suite : $\vec{x} . T\vec{x} = (x_1\vec{a}_1 + \vec{u}) . (s_1x_1\vec{a}_1 + T\vec{u}) = s_1\bar{x}_1x_1 + \vec{u} . T\vec{u}$.

Corollaire : *Si on rapporte* $\vec{x}$ *à une base orthonormée de* C_n, *soit* $R_1 = (\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$, *pour laquelle* $\vec{a}_1$ *est un vecteur propre de* $T\vec{x}$ *associé à* s_1, *la forme hermitienne* $\Phi(\vec{x}) = \vec{x} . T\bar{\vec{x}}$ *se décompose :*

$$(25) \qquad \Phi = s_1\bar{x}_1x_1 + \Phi_1$$

où $\Phi_1 = \vec{u} . T\vec{u}$ *est une forme hermitienne d'au plus* $n - 1$ *variables, associée à la trace de l'opérateur* T *dans* $C_{n-1}(\vec{a}_1)$.

En effet, si $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ dans R_1, on a $\Phi_1 = \vec{u} . T\vec{u}$, où $\vec{u}$ et $T\vec{u}$ sont dans l'espace $C_{n-1}(\vec{a}_1)$ des coordonnées $x_2, ..., x_n$.

Discussion : L'existence de $\vec{a}_1$ et de s_1 (qui peut éventuellement être nulle) étant assurée, on est ramené à étudier Φ_1.

a) Si $\Phi_1 \equiv 0$, ce théorème A est établi avec $p \leqslant 1$ et

$$R = (\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n),$$

$\vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ étant une base orthonormée quelconque de $C_{n-1}(\vec{a}_1)$ définie par $\vec{a}_1 . \vec{x} = 0$. On a $T\vec{b}_k = 0$, pour $k \geqslant 2$; les vecteurs $\vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ sont $n - 1$ vecteurs propres de T associés à la valeur propre $s = 0$. Par rapport à R, on a $\Phi(\vec{x}) = \vec{x} . T\vec{x} = s_1\bar{\xi}_1\xi_1$, avec $x_1 = \xi_1$, et

$$D_R(s) = (-1)^{n-1}(s_1 - s)s^{n-1}.$$

b) Si $\Phi_1 \not\equiv 0$, on poursuit en choisissant $\vec{b}_2$ unitaire, vecteur propre de $v = T\vec{u}$, T agissant comme opérateur hermitien dans $C_{n-1}(\vec{a}_1)$; $\vec{b}_2$ est un vecteur propre de T dans C_n, orthogonal à $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$. On obtient :

$$\Phi = s_1\bar{x}_1x_1 + s_2\bar{x}_2x_2 + \Phi_2$$

dans $R_2(\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \vec{b}_2 = \vec{a}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$; Φ_2 est une forme hermitienne à $n - 2$ variables au plus : $\Phi_2 = \vec{\omega} . T\vec{\omega}$, $\vec{\omega}$ étant dans le sous-espace $C_{n-1}(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ défini par $\vec{b}_1 . \vec{x} = 0$, $\vec{b}_2 . \vec{x} = 0$.

Si $\Phi_2 \equiv 0$, A est établi avec $p \leqslant 2$, $R = (\vec{a}_1 = \vec{b}_1, \vec{b}_2, b_3, ..., \vec{b}_n)$, $\vec{b}_3, ..., \vec{b}_n$ étant une base orthonormée quelconque de $C_{n-2}(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Si $\Phi_2 \equiv 0$, on poursuit par application répétée du lemme et du corollaire précédents ; on obtiendra la forme canonique (24) après $p \leqslant n$ opérations.

Remarques : Indiquons quelques variantes :

1) On peut procéder sur les matrices en utilisant le théorème 3 ; on aboutit aisément à la forme (B) de l'énoncé ; $\vec{a}_1$ étant toujours un vecteur propre unitaire de $y = T\vec{x}$, R_1 une base orthonormée $(\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n)$, S la transformation unitaire qui fait passer de R_0 à R_1, on a :

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j} a_{ij}\bar{x}_i x_j = \vec{x}.A\vec{x} \quad \text{(dans } R_0) \qquad A = (a_{ij})$$

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j} b_{ij}\bar{x}'_i x'_j = \vec{x}.B\vec{x} \quad \text{(dans } R_1) \qquad B = (b_{ij})$$

avec $B = S^{-1}AS$.

On sait (théorème 3) que B est hermitienne ; $B\vec{a}_1 = s_1\vec{a}_1$ entraîne donc $b_{11} = s_1$, $b_{1j} = b_{j1} = 0$, $(j \geqslant 2)$, et $b_{11} = \bar{b}_{11}$; on établit ainsi directement que la valeur propre s_1 est réelle ; B est constituée d'une matrice $B' = (b'_{ij})$ hermitienne, $b'_{ij} = b_{ij}$ $(2 \leqslant i \leqslant n,\ 2 \leqslant j \leqslant n)$ de type $(n-1) \times (n-1)$, complétée en haut et à gauche par s_{11} et par des zéros; si donc l'énoncé est supposé vrai pour $n-1$, il existe une matrice unitaire θ, de type $(n-1) \times (n-1)$, telle que $\theta^{-1}B'\theta$ soit une matrice diagonale d'éléments $s_2, ..., s_n$ réels ; la matrice T de type $(n \times n)$, obtenue en complétant θ en haut et à gauche par 1 sur la diagonale, par zéro ailleurs, est une matrice unitaire de C_n ; il en est de même de $S_1 = TS$; $B'_1 = S_1{}^{-1}AS$ est alors hermitienne, diagonale, ce qui établit l'énoncé B. Soit $S_1 = (s_{ij}{}^{(1)})$; la substitution $x_i = \sum_1^n s_{ij}{}^{(1)}\xi_j$ donne alors $\Phi = \sum_1^n s_i\bar{\xi}_i\xi_i$. Au prix d'un changement dans l'ordre des indices (ce qui effectue une transformation unitaire), on peut écrire d'abord les termes non nuls, d'où la forme (A) de l'énoncé.

2) Soient $\vec{\beta}_k$ les vecteurs de la base R obtenue par le théorème précédent ; ce sont des vecteurs propres de T : $T\vec{\beta}_k = s_k\vec{\beta}_k$. Supposons-les rangés de manière qu'on ait $s_1 \geqslant s_2 \geqslant ... \geqslant s_p$, $s_{p+1}, ..., s_n$ étant nuls si l'on a $p < n$ dans l'énoncé (A). On a alors, à partir de (24) :

$$s_1 = \max.\ \Phi(\vec{x}) \text{ pour } \|\vec{x}\| = 1, \qquad \text{ou } s_1 = \max.\ \frac{\Phi(\vec{x})}{\|x\|}$$

$$s_2 = \max.\ \Phi(\vec{x}) \text{ pour } \|\vec{x}\| = 1, \qquad \text{et } \vec{x}.\beta_1 = 0$$

$$s_k = \max.\ \Phi(\vec{x}) \text{ pour } \|\vec{x}\| = 1, \qquad \text{et } \vec{x}.\beta_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1. \tag{26}$$

Un procédé de calcul du vecteur propre $\vec{\beta}_k$ consiste donc à chercher le vecteur $\vec{\beta}_k$ qui réalise le maximum (26) et à calculer $s_k = \Phi(\vec{\beta}_k)$.

On peut en déduire une démonstration du théorème A en admettant l'énoncé suivant : une fonction de plusieurs variables, définie et continue dans un espace compact, atteint effectivement dans ce domaine sa borne supérieure et sa borne inférieure.

On a en effet l'énoncé suivant :

THÉORÈME : *Soit* $\vec{\beta}_1$ *un vecteur unitaire pour lequel* $\Phi(\vec{x})$ *atteint son maximum sous la condition* $\|x\| = 1$; *soit* $\vec{\beta}_2$ *un vecteur unitaire pour lequel* $\Phi(\vec{x})$ *atteint son maximum sous les conditions* $\|\vec{x}\| = 1$, $\vec{x}.\beta_1 = 0$ ... ; *soit de proche en proche* $\vec{\beta}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *un vecteur unitaire pour lequel* $\Phi(\vec{x})$ *atteint son maximum sous les conditions* $\|\vec{x}\| = 1$,

$\vec{x}.\vec{\beta}_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. *Alors si on exprime* $\vec{x} = (\xi_j)$ *dans la base orthonormée* R $(\vec{\beta}_1, ..., \vec{\beta}_n)$, *on obtient la forme canonique* (24), s_k *étant donné par* (26).

Soit en effet $\Phi(\vec{x}) = \sum_{i,j} b_{ij}\bar{\xi}_i\xi_j$ dans R : (b_{ij}) est hermitienne d'après le théorème 3. On a $\Phi(\vec{\beta}_1) = s_1 = b_{11}$; de plus, on a $\Phi(\vec{x}) \leqslant s_1$ pour $\|\vec{x}\| = 1$, ce qui entraîne, quel que soit $\vec{x}$:

$$h(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}) - s_1\|x\|^2 \leqslant 0$$

$h(\vec{x})$ est évidemment une forme hermitienne. Annulons les ξ_j, d'indices $j \geqslant 3$; $h(\vec{x}) \leqslant 0$ s'écrit alors :

$$h(\vec{x}) = b_{12}\bar{\xi}_1\xi_2 + b_{21}\bar{\xi}_2\xi_1 + b_{22}\bar{\xi}_2\xi_2 \leqslant 0,$$

inégalité réalisée quels que soient ξ_1, ξ_2. Pour $\xi_2 = \lambda\xi_1$, λ réel, on obtient $|\xi_1|^2[(b_{12} + b_{21})\lambda + b_{22}\lambda^2] \leqslant 0$, quel que soit λ réel, ce qui exige $b_{12} + b_{21} = 0$, $b_{22} \leqslant 0$. Pour $\xi_2 = i\lambda\xi_1$, λ réel, on obtient de même $b_{12} - b_{21} = 0$. Finalement, on a nécessairement $b_{12} = b_{21} = 0$, et, de même, $b_{1j} = b_{j1} = 0$ pour $j > 1$. La forme s'écrit donc dans R :

$$\Phi(\vec{x}) = s_1\bar{\xi}_1\xi_1 + \Phi_1(\vec{x})$$

où $\Phi_1(\vec{x})$ est hermitienne et ne contient que les variables $\xi_2, ..., \xi_n$. Sous la condition $\xi_1 = 0$, Φ se réduit à Φ_1 et le procédé s'applique maintenant à Φ_1. Ainsi, *dans la base* R *des vecteurs* $\vec{\beta}_k$ *déterminés comme éléments maximaux successifs,* T *a nécessairement l'expression canonique* (24).

3) Le calcul qui ramène $\Phi = \Sigma a_{ij}\bar{x}_i x_j$ à la forme canonique (24) n'est pas modifié si l'on substitue à la multiplication commutative $\bar{x}_i x_j$ toute opération distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition. Ainsi, en considérant la multiplication extérieure $(\bar{x}_i\Lambda x_j = x_j\Lambda\bar{x}_i)$, on énoncera : la substitution $x_i = \sum_j s_{ij}\xi_j$ qui ramène la forme hermitienne Φ à la forme canonique (24) ramène simultanément la forme $\Psi = \Sigma a_{ij}\bar{x}_i\Lambda x_j$ à la forme canonique $\Psi = \Sigma s_i\bar{\xi}_i\Lambda\xi_i$.

Cas de E_n. Les résultats et les démonstrations qui précèdent se transcrivent sans autre modification que celles qui proviennent du fait qu'on peut identifier x_i et $\bar{x}_i$. On obtient alors :

THÉORÈMES : A) *Il existe dans* E_n *au moins une base* R *orthonormée telle que si l'on exprime* $\vec{x} = (\xi_i)$ *dans* R, *la forme quadratique symétrique :*

$$F = a_{ij}x_i x_j = \vec{x}.A\vec{x} \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

s'écrive :

$$F = \sum_1^p s_i\xi_i^2, \qquad p \leqslant n.$$

les s_i sont réels, les vecteurs $\vec{\beta}_k$ de R sont des vecteurs propres de l'opérateur symétrique $\vec{y} = A\vec{x}$. La transformation $x_i = \Sigma s_{ij}\xi_j$ est faite par une matrice $S = (s_{ij})$ orthogonale.

B) *A une matrice symétrique* $A = (a_{ij})$, *on peut associer une matrice* $S = (s_{ij})$ *orthogonale telle que* $B = S^{-1}AS$ *ait la forme diagonale.*

DÉFINITIONS : 1) On dira qu'une forme quadratique F (ou une forme hermitienne Φ) est *définie positive* si l'on a $F > 0$ (ou $\Phi > 0$) pour tout vecteur $\vec{x} = (x_i)$ non nul.

2) On dira qu'elle est *semi-définie positive* si l'on a $F \geqslant 0$ (ou $\Phi \geqslant 0$).

THÉORÈME : *Pour que* F (*ou* Φ) *soit définie positive, il faut et il suffit qu'elle soit de rang maximum* $p = n$ *et que l'on ait* $s_k > 0$ *pour toutes les valeurs propres* $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

On appliquera les résultats qui précèdent à la réduction en axes rectangulaires de l'équation des coniques et des quadriques ; leur classification s'appuie sur les notions de rang et de signature de la forme. Des remarques du genre de celle-ci : les racines s_k de l'équation en s sont les valeurs du paramètre s pour lesquelles la conique à l'infini du faisceau, définie en coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4, par :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) + s \sum_1^3 x_i^2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

est décomposée, peuvent être d'abord présentées sous la forme suivante : les valeurs propres s_k de la transformation symétrique $\vec{y} = A\vec{x}$ associée à la forme quadratique F sont celles et seulement celles pour lesquelles le rang de la forme

$$F_s = F(x_1, x_2, ..., x_n) + s \sum_1^n x_i^2$$

est inférieur à n ; on utilisera ensuite cet énoncé en faisant remarquer qu'une forme de rang $p \leqslant 2$ est visiblement le produit de deux formes linéaires réelles ou conjuguées.

Pierre LELONG,
Professeur à la Sorbonne.

BIBLIOGRAPHIE

(1) H. WEYL. — *Gruppentheorie und Quantenmechanike*, Leipzig, 1931 (Edition américaine chez Dover).
(2) G. JULIA. — *Introduction mathématique aux théories quantiques*. Gauthier-Villars, 1936.
(3) A. LICHNEROWICZ. — *Algèbre et analyse linéaires*, Masson.
(4) C. CHEVALLEY. — *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, 1946.
(5) R. FORTET. — *Espaces vectoriels*. Cours de M.M.P. édité par le Centre de documentation universitaire, Paris.
