

ESPACES VECTORIELS. FORMES ET ÉQUATIONS LINÉAIRES *

La notion de vecteur se rencontre à diverses occasions dans l'enseignement secondaire : composition de translations, de vitesses, de forces ; produit scalaire, produit vectoriel, moment d'un vecteur par rapport à un point, puis plus tard sous des formes algébriques plus cachées à propos des polynômes, des formes linéaires. Le mot vecteur n'est pas alors toujours utilisé avec le même sens : c'est tantôt un vecteur lié, tantôt un vecteur glissant, tantôt un vecteur libre.

Il ne s'agira ici que de vecteurs libres.

Bien que l'image géométrique couramment utilisée : un segment de droite muni d'une flèche à une de ses extrémités, puisse laisser croire que l'on peut parler d'un vecteur isolé, indépendamment de la considération d'autres vecteurs, nous verrons bientôt qu'un être mathématique ne peut s'appeler vecteur que s'il appartient à un ensemble d'êtres analogues sur lesquels on peut effectuer certaines opérations que nous préciserons.

C'est la nature de ces opérations et non pas le caractère individuel de chacun de ces êtres qui leur donne la qualité de vecteur. C'est ainsi qu'un polynôme, une fonction continue, un carré peuvent être dotés de la qualité de vecteur.

De façon vague, on peut dire qu'un ensemble d'êtres mathématiques est un ensemble de vecteurs si l'on peut y ajouter deux vecteurs et si l'on peut multiplier tout vecteur par un nombre arbitraire.

De façon plus précise, nous donnerons la définition suivante :

DEFINITION : On appelle *espace vectoriel* sur le corps R des nombres réels, tout ensemble E muni :

1) d'une loi de composition interne (1) appelée *addition*, et pour laquelle E est un groupe commutatif ;

2) d'une loi de composition externe qui, à tout nombre $\lambda \in R$ et à tout $x \in E$, associe un élément de E noté λx , et telle que :

- a) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$,
- b) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$,
- c) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$,
- d) $1 \cdot x = x$.

Les éléments de E sont dits *des vecteurs* ; les éléments de R sont dits *des scalaires*.

On dénote par 0 à la fois le 0 de R et le zéro du groupe E , bien qu'il ne s'agisse pas des mêmes éléments.

Des relations a, b, c, d , on déduit aisément les relations suivantes :

$$0x = 0 ; \quad \lambda 0 = 0 ; \quad (-\lambda)x = \lambda(-x) = -\lambda x$$

Les relations a, b, c, d font intervenir simplement l'existence d'une

(*) Conférence prononcée à l'Institut Henri-Poincaré, le 8 mars 1956.

(1) Voir exposé de Henri Cartan dans le Bulletin n° 176. Le groupe E étant commutatif, on notera $(x + y)$ le composé de x et y , et $-x$ le symétrique de x .

addition et d'une multiplication sur R ; il semble donc que l'on pourrait définir de même des espaces vectoriels sur un anneau A qui jouerait le rôle que joue R dans la définition précédente. En fait, ce n'est que lorsque cet anneau est un corps que l'on obtient une théorie analogue à celle des espaces vectoriels sur R . Ceci tient en grande partie à ce que la relation $\lambda x = 0$ entraîne $\lambda = 0$ ou $x = 0$, si A est un corps, mais ne l'entraîne pas nécessairement si A est seulement un anneau.

Les corps les plus utilisés sont R et le corps C des nombres complexes.

Le fait que le corps R est muni d'une structure d'ordre n'est pas intervenu dans la définition précédente. Il n'intervient que si l'on veut définir dans l'espace vectoriel (sur R) une notion de demi-droite, d'intervalle ; on peut alors parler d'ensemble convexe dans E . C'est ce fait qui donne aux espaces vectoriels sur R un rôle privilégié. Je ne parlerai pas ici des notions de demi-droite et de convexité.

Exemples d'espaces vectoriels :

1) L'ensemble des suites de n nombres réels : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, est un espace vectoriel sur R si l'on pose :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Cet espace est l'espace euclidien R^n .

Le cas particulier $n=1$ montre que R peut être lui-même considéré comme un espace vectoriel.

2) L'ensemble des fonctions numériques définies sur $[0,1]$ est un espace vectoriel sur R si l'on définit $h=f+g$ et $k=\lambda f$ par les relations :

$$\left. \begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) \\ k(x) &= \lambda f(x) \end{aligned} \right\} \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Il en est de même des sous-ensembles suivants de cet espace :

L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.

L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $[0,1]$.

L'ensemble des polynômes (resp. des polynômes de degré n).

L'ensemble des polynômes trigonométriques, etc...

3) L'ensemble des fonctions analytiques régulières dans le plan complexe C est un espace vectoriel sur le corps C .

Il n'est pas toujours aussi facile de reconnaître si un ensemble est un espace vectoriel. Considérons par exemple l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, dont la courbe représentative a une longueur finie ; il n'est pas immédiat que la somme de deux telles fonctions possède la même propriété. De même, soit E l'ensemble des suites infinies $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de nombres réels, telles que :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \dots < +\infty ;$$

il n'est pas immédiat que la somme $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$ de deux telles suites soit une suite de même nature.

Notion d'isomorphisme :

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré $< n$ à coefficients réels. Si $p = (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n)$ est un tel polynôme, on voit

qu'il est caractérisé par la suite $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de ses coefficients, d'où une correspondance biunivoque entre E et R^n , définie par :

$$p \longleftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Cette correspondance conserve l'addition et la multiplication par les scalaires. On peut donc considérer que E et R^n sont deux réalisations différentes d'une même structure algébrique ; on traduit ce fait en disant que ces espaces sont isomorphes. Plus généralement :

DEFINITION : Soient E et E' deux espaces vectoriels sur un même corps. On appelle isomorphisme de E sur E' toute application biunivoque f de E sur E' telle que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

quel que soient x, y, λ .

Il est immédiat que l'application réciproque f^{-1} de E' sur E possède les mêmes propriétés.

Si un tel isomorphisme f existe, on dit que E et E' sont isomorphes.

Notons que de la condition $f(x + y) = f(x) + f(y)$, on peut déduire que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout nombre λ rationnel ; mais on ne saurait en déduire la même relation pour tout scalaire λ . Aussi la seconde relation est-elle essentielle.

Exemples d'isomorphismes :

1) Soit E un espace vectoriel et soit λ un scalaire $\neq 0$. L'application $x \rightarrow \lambda x$ de E sur lui-même est un isomorphisme. On l'appelle *homothétie* de centre O et de rapport λ .

2) Soit E_1 l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ et soit E_2 l'espace vectoriel des fonctions numériques continûment dérivables sur $[0, 1]$ et nulles pour $x = 0$. Il résulte d'un théorème d'analyse élémentaire que ces deux espaces sont isomorphes.

3) Toute fonction linéaire définie sur R^2 est de la forme $(a_1 x_1 + a_2 x_2)$. Il est donc immédiat que l'ensemble de ces fonctions est un espace vectoriel isomorphe à R^2 .

4) L'espace des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ est isomorphe à l'espace des fonctions numériques f continues sur $]-\infty, +\infty[$ telles que $f(x)$ tende vers une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

5) L'espace des fonctions numériques continues et périodiques de période 1 sur R est isomorphe à l'espace des fonctions numériques continues définies sur une circonférence.

Produit d'espaces vectoriels :

Le procédé qui nous a permis de définir R^n à partir de R peut se généraliser et permet de construire de nouveaux espaces à partir d'espaces connus.

Par exemple, soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur R . Désignons par $E_1 \times E_2$ l'ensemble des couples $x = (x_1, x_2)$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, on pose :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) ; \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

L'espace $E_1 \times E_2$ muni de ces opérations devient un espace vectoriel sur R , qu'on appelle le produit de X_1 et X_2 .

On définirait de même le produit d'une famille finie quelconque d'espaces vectoriels, et même le produit d'une famille infinie de tels espaces.

Exemples : 1) L'espace vectoriel des fonctions numériques $h(x_1, x_2)$ définies sur R^2 et de la forme $h(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$, avec de plus $h(0,0) = 0$, est isomorphe au carré de l'espace des fonctions numériques f définies sur R et telles que $f(0) = 0$.

2) L'espace des fonctions numériques continûment dérivables sur $[0,1]$ est isomorphe au produit de R par l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$.

Sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie :

Dans R^3 , les sous-espaces vectoriels non réduits à 0 sont les droites et les plans passant par l'origine.

Dans l'espace des polynômes à une variable, l'ensemble des polynômes de degré n , l'ensemble des polynômes divisibles par un polynôme donné, l'ensemble des polynômes à termes de degré pair, sont des sous-espaces vectoriels. De façon plus générale :

DEFINITION : Soit E un espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble A de E tel que, si x et $y \in A$, on ait aussi $x + y \in A$ et $\lambda x \in A$ pour tout scalaire λ .

Il est immédiat que tout sous-espace vectoriel de E est un sous-groupe additif de E .

D'autre part, si (A_i) désigne une famille de sous-espaces vectoriels de E , l'ensemble des éléments communs à tous les A_i , c'est-à-dire leur intersection, est encore un sous-espace vectoriel de E .

En particulier, soit X une partie quelconque de E . Il existe des sous-espaces vectoriels de E contenant X ; ne serait-ce que E lui-même ; leur intersection $A(X)$ contient X et c'est évidemment le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X . On dit que $A(X)$ est l'espace vectoriel engendré par X .

Nous allons préciser la nature des éléments de X en introduisant une notion nouvelle :

DEFINITION : Soit X une partie d'un espace vectoriel E . On appelle combinaison linéaire d'éléments de X tout élément de E de la forme

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \text{ où } (x_i)_{i \in I} \text{ est une famille finie d'éléments de } X \text{ et où les } \lambda_i \text{ sont des scalaires.}$$

Toute combinaison linéaire d'éléments de X appartient à tout sous-espace vectoriel contenant X , donc en particulier à $A(X)$; d'autre part, les combinaisons linéaires constituent évidemment un sous-espace vectoriel de X ; ce sous-espace contient X , donc aussi $A(X)$; comme d'autre part il est contenu dans $A(X)$, il lui est identique. Autrement dit :

Le sous-espace $A(X)$ engendré par une partie X de E est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

Exemple : Soit E l'espace des fonctions numériques définies sur R . Soit X le sous-ensemble de E constitué par les monômes $1, x, \dots, x^n, \dots$. L'espace $A(X)$ engendré par X est l'ensemble des polynômes quelconques.

Sous-espaces supplémentaires :

Dans R^3 , un plan et une droite issus de O et ne se rencontrant qu'en O sont un exemple de sous-espaces supplémentaires.

DEFINITION : On dit que deux sous-espaces X_1 et X_2 d'un espace E sont supplémentaires si tout point x de E peut s'écrire d'une façon et d'une seule sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{où} \quad x_1 \in X_1 \quad \text{et} \quad x_2 \in X_2.$$

Ces conditions reviennent à dire que $(X_1 \cup X_2)$ engendre E et que $X_1 \cap X_2$ se réduit au point O ; la vérification en est immédiate.

On dit que x_1 est la composante de x dans E ou encore que x_1 est la projection de x sur E_1 parallèlement à E_2 .

Si l'on note $x_1 = pr_1.x$, on vérifie que l'on a :

$$pr_1(x + y) = pr_1.x + pr_1.y \quad \text{et} \quad pr_1(\lambda x) = \lambda pr_1.x$$

Exemples : 1) E est l'ensemble des polynômes en x à coefficients réels ; X_1 est l'ensemble des polynômes divisibles par $(x^2 + 1)$; X_2 est l'ensemble des polynômes de degré 1 au plus.

2) E est l'espace des fonctions numériques sur R ; X_1 est le sous-espace des fonctions paires ($f(-x) = f(x)$) ; X_2 est le sous-espace des fonctions impaires ($f(-x) = -f(x)$).

Dans l'espace R^3 , les sous-espaces supplémentaires d'un plan sont tous des droites, c'est-à-dire des sous-espaces tous isomorphes ; c'est là un cas particulier de la proposition générale suivante :

PROPOSITION : Si dans un espace vectoriel E , X_2 et X'_2 désignent deux sous-espaces supplémentaires d'un même sous-espace X_1 , la projection faite parallèlement à X_1 définit un isomorphisme de X_2 et X'_2 .

En effet, pour tout $x'_2 \in X'_2$, on a : $x'_2 = x_2 + x_1$, où x_2 est la projection de x'_2 sur X_2 parallèlement à X_1 . Mais cette égalité s'écrit aussi $x_2 = x'_2 + (-x_1)$, donc x'_2 est la projection de x_2 sur X'_2 parallèlement à X_1 .

Cette application $x_2 \rightarrow x'_2$ est donc une application biunivoque de X_2 sur X'_2 ; comme c'est une projection, on a aussi :

$$(x_2 + y_2)' = x'_2 + y'_2 \quad \text{et} \quad (\lambda x_2)' = \lambda . x'_2.$$

Donc c'est bien un isomorphisme.

INDÉPENDANCE LINÉAIRE. BASES

La notion d'indépendance linéaire se rencontre en géométrie dès que l'on cherche à décomposer un vecteur de R^3 suivant trois vecteurs proportionnels à des vecteurs donnés, ou en algèbre lorsqu'on cherche les conditions de résolubilité d'un système linéaire. Nous allons montrer

comment on peut en faire une étude indépendante de la nature des vecteurs étudiés, et sans faire appel à un système de coordonnées privilégié.

DEFINITION : On dit qu'une famille finie $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un

espace vectoriel E est libre si toute relation $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0$ entraîne

$\lambda_i = 0$ quel que soit i .

On dit qu'une famille quelconque est libre si chacune de ses sous-familles finies est libre.

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Si une famille est liée, il existe une relation de la forme :

$$\sum_{i \in J} \lambda_i a_i = 0, \text{ où l'un des } \lambda_i, \text{ disons } \lambda_0, \text{ est } \neq 0; \text{ on en déduit : } a_0 = \sum_{i \in J-0} \mu_i a_i$$

Inversement, une telle relation entraîne que la famille soit liée. Donc :

Dire qu'une famille est liée équivaut à dire qu'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres éléments.

Les éléments d'une famille libre sont dits *linéairement indépendants* ; ceux d'une famille liée sont dits *linéairement dépendants*.

On définirait de même la notion de *partie* libre ou liée d'un espace vectoriel.

Exemples : Dans l'espace des fonctions numériques sur R , la suite des monômes $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ est libre ; il en est de même de la suite : $\sin x, \dots, \sin nx, \dots$

DEFINITION D'UNE BASE : On appelle base d'un espace vectoriel E toute partie libre de E qui engendre E .

Si $B = (a_i)_{i \in I}$ est une base de E , tout $x \in E$ s'écrit d'une façon et

d'une seule $x = \sum_{i \in I} x_i a_i$, où tous les scalaires x_i sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux ; x_i s'appelle la *coordonnée* de x d'indice i , et $x_i a_i$ la *composante* de x d'indice i .

Par exemple, dans R^n , l'ensemble des n éléments a_i de la forme $x = (x_i)$, où l'un des x_i vaut 1 et les autres 0, est une base. Dans l'espace des polynômes, l'ensemble des monômes $1, x, \dots, x^n, \dots$ constitue une base.

On peut démontrer que tout espace vectoriel possède au moins une base ; nous ne le ferons ici que pour les espaces de dimension finie.

Bases des espaces de dimension finie :

Nous dirons qu'un espace E est de dimension finie s'il contient un sous-ensemble fini qui l'engendre, autrement dit un système fini de générateurs.

L'étude de ces espaces est dominée par les théorèmes suivants :

THEOREME 1 : Si G est un système fini de générateurs d'un espace vectoriel E et si L est une partie libre de G , il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.

Posons $L = L_0$ et supposons définie la partie libre L_p de G . Si L_p n'engendre pas E , il existe un élément x_{p+1} de G qui n'est pas combinaison linéaire d'éléments de L_p . La partie $L_p \cup \{x_{p+1}\}$ de G est évidemment libre ; nous la désignerons par L_{p+1} .

Nous avons $L_0 \subset L_1 \dots \subset L_p \subset L_{p+1}$, et cette suite est strictement croissante ; comme $L_p \subset G$ et que G est fini, cette suite est finie. Il existe donc un L_n qui n'a pas de successeur L_{n+1} ; autrement dit, L_n engendre E ; donc, L_n est la base cherchée B .

THEOREME 2 : Si G est un système fini de générateurs de E , et L une partie libre de E (pas nécessairement contenue dans G), il existe une base B de E contenant L et contenue dans $G \cup L$.

C'est une application immédiate du théorème précédent à la partie libre L et au système de générateurs $(G \cup L)$. En particulier, tout système fini de générateurs de E contient une base.

Donc, tout espace de dimension finie possède une base finie. Il n'est d'ailleurs pas évident qu'un tel espace ne peut pas posséder une base infinie ; toutefois, ce résultat est exact. Plus précisément, on démontre par récurrence, en utilisant le théorème 2, que, dans un espace de dimension finie, toutes les bases sont finies et ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre commun s'appelle la dimension de l'espace. Remarquons que ce résultat est valable pour les espaces vectoriels E sur un corps quelconque K . Mais il est important de préciser ce corps : en effet, soit E un espace de dimension n sur le corps C ; cet espace E peut aussi être considéré comme un espace vectoriel sur le corps R , mais sur le corps R sa dimension n'est plus n , mais $2n$; par exemple, C est de dimension 1 sur C lui-même, mais de dimension 2 sur R .

Ces résultats sont riches de conséquences immédiates dont nous énumérerons les plus importantes :

1) Pour que deux espaces vectoriels E et E' de dimension finie sur R soient isomorphes, il faut et il suffit que leurs dimensions soient égales. En particulier, tout espace de dimension n est isomorphe à R^n .

2) Soit E un espace vectoriel de dimension n .

- a) Tout système de générateurs de E a au moins n éléments ; s'il a exactement n éléments, c'est une base.
- b) Toute partie libre de E a au plus n éléments ; si elle a exactement n éléments, c'est une base.
- c) Tout sous-espace vectoriel V de E a au plus n dimensions ; s'il a n dimensions, il est identique à E .
- d) Tout sous-espace de E distinct de E admet un sous-espace supplémentaire ; la somme des dimensions de deux sous-espaces supplémentaires est égale à n .

APPLICATIONS LINÉAIRES

La notion de fonction linéaire est une de celles qui dominent l'analyse, aussi bien l'analyse classique que l'analyse moderne. Elle ne prend tout son sens que dans le cadre des espaces vectoriels.

DEFINITION : Si E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps K , on appelle application linéaire de E dans F toute application f de E dans F telle que :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

quels que soient x et $y \in E$, et $\lambda \in K$.

Par exemple, un isomorphisme de E sur F n'est autre qu'une application linéaire biunivoque de E sur F .

Exemples d'applications linéaires :

1) E est le produit des espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_n$. Pour tout $x = (x_i)$ de E , l'application $x \rightarrow x_i$ de E sur E_i est linéaire.

2) Si X_1 et X_2 sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace E , l'application $x \rightarrow pr_1 \cdot x$ de E sur X_1 est linéaire.

3) Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes $p(x)$ de degré n à une variable. Si $f(p)$ désigne le terme de degré n de p , l'application f de P_n dans P_n est linéaire.

4) Soit E l'espace des fonctions numériques réelles $x(t)$ dérivables sur $[0,1]$; désignons par x' la dérivée de la fonction x :

a) L'application $x \rightarrow x'(0)$ de E dans R est linéaire.

b) L'application $x \rightarrow x'$ de E dans l'espace des fonctions numériques sur $[0,1]$ est linéaire.

5) Soit E l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$:

a) L'application $x \rightarrow X$ de E dans E qui à x fait correspondre X défini par $X(t) = \int_0^t x(u)du$ est linéaire.

b) L'application $x \rightarrow \int_0^1 x(u)du$ de E dans R est linéaire.

6) Soit E l'espace des fonctions numériques continues sur le disque plan $x^2 + y^2 \leq 1$; soit F l'espace des fonctions numériques continues sur la circonférence du même disque.

L'application de E dans F qui à un élément φ de E fait correspondre la restriction de φ à la circonférence est linéaire.

Propriétés immédiates : Signalons les plus importantes de ces propriétés :

1) *Transitivité :* Si f applique E dans F ; si g applique F dans G , l'application $h = g \circ f$ définie par $h(x) = g(f(x))$ est linéaire si f et g le sont.

2) Si f est une application linéaire de E dans F , l'image $f(E)$ de E est un sous-espace vectoriel de F , et l'image réciproque $f^{-1}(V)$ d'un sous-espace vectoriel quelconque de F est un sous-espace vectoriel de E .

Rang d'une application linéaire :

On appelle *rang* d'une application linéaire de E dans F la dimension de l'image $f(E)$ de E . On peut déterminer souvent ce rang grâce à la proposition suivante :

Le rang de f est égal à la dimension des sous-espaces de E supplémentaires de $f^{-1}(0)$.

En effet, soit G un sous-espace supplémentaire de $f^{-1}(0)$ (qui n'est autre que l'ensemble des racines de $f(x) = 0$).

Pour tout $x \in E$, on a une décomposition unique $x = x_0 + x_1$ où $x_0 \in f^{-1}(0)$ et $x_1 \in G$.

On a $f(x) = f(x_0) + f(x_1) = f(x_1)$; donc $f(G) = f(E)$.

Or, pour tout $x \in G$ on a $f(x) \neq 0$, sauf si $x = 0$. Donc, la restriction de f à G est une application biunivoque de G sur $f(E)$; cette restriction est donc un isomorphisme de G et $f(E)$, d'où la proposition.

COROLLAIRE : Une application linéaire n'accroît jamais la dimension : lorsque E est de dimension finie, pour que $f(E)$ ait même dimension que E , il faut et il suffit que f soit biunivoque.

Ce corollaire souligne une propriété importante des applications linéaires que ne possèdent pas toutes les applications continues, puisque certaines applications continues augmentent la dimension.

Image d'un système de générateurs :

Soit f une application linéaire de E dans F , et soit X une partie de E .

Il est immédiat que $f(X)$ engendre l'image $f(A(X))$ de l'espace $A(X)$ engendré par X ; et que lorsque X engendre E , f est entièrement caractérisée par sa restriction à E . En particulier, si X est une base de E , f est connue dès que l'on connaît $f(x)$ pour tout élément x de cette base.

FORMES LINÉAIRES. ESPACE DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL

On appelle *forme linéaire* sur un espace vectoriel E (sur un corps K) toute application linéaire de E dans K .

L'ensemble des formes linéaires sur E peut être muni d'une façon naturelle d'une structure d'espace vectoriel (sur K) grâce aux définitions suivantes :

Soient f et g deux telles formes ; on définit les formes $h = f + g$ et $k = \lambda f$ (où $\lambda \in K$) par les relations :

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad k(x) = \lambda f(x)$$

pour tout $x \in E$.

On appelle cet espace vectoriel l'espace *dual* de E et on le note E^* .

Pour tout $x' \in E^*$, $x'(x)$ est un scalaire que l'on note en général par $\langle x, x' \rangle$.

Pour tout x' fixe, $\langle x, x' \rangle$ est une forme linéaire sur E . Pour tout x fixe, $\langle x, x' \rangle$ est une forme linéaire sur E^* . Aussi dit-on que $\langle x, x' \rangle$ est la forme *bilinéaire canonique* définie sur $E \times E^*$.

Formes coordonnées. Base duale :

Nous allons nous restreindre maintenant à l'étude des espaces de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et soit $(a_i)_{i \in I}$ une base de E . Tout x de E s'écrit d'une façon unique $x = \sum \xi_i a_i$.

L'application $x \rightarrow \xi_i$ de E dans K est linéaire ; c'est donc une forme linéaire qu'on note a'_i et qu'on appelle *forme coordonnée d'indice i relative à la base choisie*.

Les $(a'_i)_{i \in I}$ constituent une base de E^* , dite duale de la base de E . En effet, pour tout $x' \in E^*$, on a :

$$(1) \quad x'(x) = \sum x'(\xi_i a_i) = \sum \xi_i x'(a_i) = \sum a'_i(x) x'(a_i) \quad \text{ou encore :}$$

$$x' = \sum x'(a_i) a'_i.$$

Ceci exprime que les a'_i engendrent E^* ; d'autre part, elles sont bien indépendantes, car une relation $\sum \lambda_i a'_i = 0$ équivaut à $\sum \lambda_i \xi_i = 0$ pour toutes les familles $(\xi_i)_{i \in I}$, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i .

Si l'on pose $x'(a_i) = \xi'_i$, c'est-à-dire $x' = \sum \xi'_i a'_i$, les formules (1) montrent que :

$$(2) \quad \langle x, x' \rangle = \sum \xi_i \xi'_i.$$

C'est la forme canonique de $\langle x, x' \rangle$ lorsqu'on prend dans E et E^* deux bases duales. Ce n'est pas là autre chose que la forme bien connue des fonctions linéaires sur un espace euclidien. Ex. : $f = ax + by$. Nous pouvons donc énoncer :

Si E est de dimension n , il en est de même de E^* et si l'on choisit dans E et E^* deux bases duales, on a $\langle x, x' \rangle = \sum \xi_i \xi'_i$.

EQUATIONS LINÉAIRES

Le formalisme très général que nous avons construit permet de ramener à un type simple de nombreux problèmes d'algèbre et d'analyse.

DEFINITION : Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K . On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme $f(x) = y_0$, où f est une application linéaire de E dans F , et y_0 un élément connu de F .

Tout élément x de E tel que $f(x) = y_0$ est appelé *solution de cette équation*.

L'équation $f(x) = 0$ est dite *l'équation homogène associée à l'équation donnée* ; et y_0 est le *second membre de l'équation donnée*.

Toute équation linéaire dont le second membre est 0 s'appelle *équation linéaire homogène*.

Exemples : 1) E est l'espace des fonctions numériques définies dans le disque ouvert plan $u^2 + v^2 \leq 1$ et possédant des dérivées partielles de tous les ordres. L'espace F est identique à E . L'application f est un opérateur différentiel ; par exemple, f est le laplacien $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$. L'équation $f(x) = y_0$ n'est autre ici qu'une équation linéaire aux dérivées partielles avec second membre.

2) E est l'espace des fonctions numériques continues sur le disque fermé $u^2 + v^2 \leq 1$, et qui sont harmoniques à l'intérieur du disque. L'espace F est l'espace des fonctions continues sur la circonférence de ce disque.

Et l'application f est celle qui associe à toute $\varphi \in E$ sa restriction à la circonférence du disque.

Rechercher les fonctions φ telles que $f(\varphi) = y_0$ où $y_0 \in F$, c'est résoudre le problème de Dirichlet pour la fonction y_0 .

3) L'espace E est l'espace des fonctions numériques $x(t)$ continues sur $[0, 1]$ et $F = E$. Si $\Phi(u, v)$ désigne une fonction numérique continue sur le carré $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$, soit f l'application de E dans E définie par :

$$f(x)(t) = \int_0^1 \Phi(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

L'équation $f(x) = b$ où $b \in F$ n'est autre que l'équation intégrale :

$$\int_0^1 \Phi(t, \tau) x(\tau) d\tau = b(t).$$

Forme des solutions d'une équation linéaire :

THEOREME : Soit $f(x) = y_0$ une équation linéaire. Si x_0 est une solution quelconque de cette équation, on obtient toutes les solutions en ajoutant à x_0 une solution quelconque de l'équation homogène associée. L'ensemble des solutions est donc la variété affine $x_0 + f^{-1}(0)$ déduite par la translation x_0 du sous-espace vectoriel $f^{-1}(0)$ de E .

Pour que l'équation ait au plus une solution, il faut et il suffit que $f^{-1}(0) = \{0\}$, donc que f soit un isomorphisme de E sur $f(E)$.

La démonstration de cet énoncé est immédiate.

Système d'équations : Une équation linéaire se présente souvent sous la forme d'un système d'équations linéaires :

Soit E un espace vectoriel, $(F_i)_{i \in I}$ une famille, finie ou infinie, d'espaces vectoriels, et, pour tout $i \in I$, soit f_i une application linéaire de E dans F_i .

Toute famille d'équations $(f_i(x) = b_i)_{i \in I}$ où $b_i \in F_i$, s'appelle un système d'équations linéaires. Une solution de ce système est une solution commune à toutes les équations du système.

Un tel système équivaut à une seule équation linéaire. En effet, soit F le produit des F_i ; soit $b = (b_i)$ et soit f l'application de E dans F dont les composantes sont les f_i . L'équation $f(x) = b$ équivaut au système donné.

Inversement, il peut être commode de remplacer une équation linéaire par un système. Par exemple, supposons F de dimension q et soit $(b_j)_{j \in J}$ une base de F ; pour tout $y \in F$, on a $y = \sum \beta_j b_j$.

Se donner une application linéaire d'un espace E dans F équivaut alors à se donner les n formes linéaires f_j telles que :

$$f(x) = \sum f_j(x) b_j \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Toute équation $f(x) = y$ équivaut donc au système des q équations $f_j(x) = \beta_j$ qui peuvent encore s'écrire $\langle x, x'_j \rangle = \beta_j$.

Un tel système s'appelle un *système scalaire*.

Nous allons supposer de plus maintenant que E est aussi de dimension finie.

Systèmes scalaires sur un espace de dimension finie :

THEOREME : Soit E un espace vectoriel de dimension n ; soit $(x'_i)_{i \in I}$ une famille libre de r éléments de E^* (c'est-à-dire de r formes linéaires sur E).

Quels que soient les scalaires η_i , le système scalaire

$$\langle x, x'_i \rangle = \eta_i \quad (i \in I)$$

possède une solution.

L'ensemble des solutions est de la forme $x_0 + V$, où V est un sous-espace vectoriel de E , de dimension $(n - r)$.

En effet, les x'_i appartiennent à une base B^* de E^* , qui est la duale d'une base B de E .

Par rapport à B^* , chaque x'_i a toutes ses coordonnées nulles, sauf une ; donc $\langle x, x'_i \rangle$ repéré par rapport aux bases duales B et B^* se réduit à ξ_i . Le système s'écrit donc :

$$\xi_i = \eta_i \quad (i \in I).$$

Il a pour solutions $\xi_i = \eta_i$ pour $i \in I$ et ξ_i quelconque pour $i \in I$. L'espace V du théorème est donc le sous-espace de E dont les coordonnées $(\xi_i)_{i \in I}$ sont nulles ; sa dimension est bien $(n - r)$.

Pour étudier les systèmes scalaires quelconques, introduisons une définition :

On appelle **rang du système scalaire** $\langle x, x'_i \rangle = \eta_i \quad (i \in I)$ la dimension du sous-espace de E^* engendré par la famille $(x'_i)_{i \in I}$ (c'est-à-dire encore le nombre maximum des x'_i linéairement indépendants).

En utilisant le théorème précédent, on démontre alors :

THEOREME : Soit $\langle x, x'_i \rangle = \eta_i \quad (i \in I)$ un système scalaire de rang r sur un espace vectoriel E de dimension n . Pour que ce système ait au moins une solution, il faut et il suffit que pour toute combinaison linéaire

$$\text{nulle } \sum \lambda_i a'_i = 0, \text{ on ait aussi } \sum \lambda_i \eta_i = 0.$$

Lorsque ce système a une solution x_0 , l'ensemble des solutions est de la forme $x_0 + V$, où V est un sous-espace de E de dimension $(n - r)$.

COROLLAIRES : 1) Pour qu'un système scalaire homogène sur un espace E de dimension n admette des solutions non nulles, il faut et il suffit que son rang r soit $< n$.

2) Pour qu'un système scalaire de n équations sur un espace de dimension n ait une solution et une seule (système de Cramer), il faut et il suffit que le système homogène associé n'ait que la solution nulle.

Pour aller plus loin dans l'étude des systèmes scalaires, et pour donner en particulier des critères commodes permettant de déterminer leur rang, il faut utiliser la théorie des déterminants, ce que nous ne ferons pas ici.

G. CHOQUET,

Professeur à la Sorbonne.