ESPACES PROJECTIFS *

Un bon taupin sait utiliser correctement les espaces projectifs réels, et même les espaces projectifs complexes. Cependant, son premier contact avec eux s'est presque toujours fait dans le malaise, malaise qui, si j'en crois mon expérience personnelle, peut persister longtemps. Mon propos sera ici moins de m'étendre sur la technique des espaces projectifs que d'essayer de les situer correctement par rapport aux espaces d'où ils dérivent et par là de rendre compte de l'origine du malaise et de contribuer à le dissiper.

L'introduction d'éléments à l'infini rencontre des difficultés que ne présente aucune des extensions successives de la notion de nombre, depuis le nombre entier naturel jusqu'au nombre complexe. La première est que chacune de ces extensions permettait d'obtenir de nouvelles propriétés des éléments créés, sans rien perdre de celles que possédaient les éléments déjà existants (sauf la structure de corps ordonné pour le passage des réels aux complexes). L'introduction d'un (ou deux)

(*) Conférence prononcée le 31 mai 1956 à l'Institut Henri-Poincaré, septième conférence du cycle sur l'Algèbre organisé par la Société Mathématique de France en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

élément à l'infini ruine au contraire presque totalement la structure algébrique de la droite réelle. C'est ce qu'on exprime parfois de façon trop elliptique dans les classes élémentaires en proclamant : « L'infini n'est pas un nombre ! » La seconde est relative à l'unicité de l'extension, qui était assurée pour les extensions de la notion de nombre [de façon précise, on a par exemple : Tout groupe abélien minimal contenant les entiers naturels (pour l'addition) est isomorphe au groupe des entiers relatifs], et qui ne l'est plus pour les éléments à l'infini. L'absence de fondement rigoureux laisse l'élève désarçonné devant de faux problèmes tels que le suivant : Comment se fait-il que le plan de la variable complexe et le plan de la géométrie analytique qui coïncident à distance finie aient l'un un point à l'infini, l'autre une droite à l'infini ?

1. Définition des espaces projectifs.

a) Introduction par la perspective d'un plan sur un plan : Soient P et P′ deux plans non parallèles et un point de vue O. On se heurte à des exceptions désagréables : il existe une droite de P dont les points M n'ont pas d'images et il existe une droite de P′ dont les points ne sont pas images de points de P. Or, pour les autres points, il y a correspondance entre un point M de P, une droite OMM′ et un point M′ de P′, un seul de ces éléments déterminant univoquement les deux autres. Mais, dans les deux cas d'exception signalés, l'un des deux points M ou M′ subsiste et la droite issue de O est toujours déterminée. On peut donc écarter les cas exceptionnels en travaillant non plus sur les points de P ou P′, mais sur les droites issues de O dans R^3. Et l'on donnera la définition : *L'espace projectif à deux dimensions* P_2 *est l'ensemble des droites issues d'un point* O *dans l'espace euclidien à trois dimensions* R^3. *Une droite projective de* P_2 *est un plan issu de* O *dans* R^3.

Généralisation : Etant donné un corps quelconque, commutatif ou non, K, et l'espace vectoriel à gauche K^{n+1}, produit de $n+1$ facteurs égaux à K, auquel tout espace vectoriel à gauche (1) sur K de dimension $n+1$ est isomorphe, nous désignerons par espace projectif à gauche à n dimensions sur K, $P_n(K)$, l'ensemble des droites homogènes de K^{n+1}, c'est-à-dire l'ensemble de ses sous-espaces à une dimension.

b) Introduction par les coordonnées homogènes : Plaçons-nous cette fois à un point de vue plus analytique. Soit K^*_{n+1} l'espace obtenu en privant K^{n+1} de son origine (la position de l'indice, placé en bas, rappellera que K^*_{n+1} n'est pas le produit d'espaces analogues de dimensions inférieures). Dans K^*_{n+1}, introduisons la relation d'équivalence Δ_n suivante : x et y, vecteurs non nuls de K^*_{n+1}, sont équivalents si et seulement s'il existe $t \in K$ non nul tel que $y = tx$.

Les classes d'équivalence sont les droites homogènes de K^{n+1} privées de l'origine ; il y a donc correspondance biunivoque entre $P_n(K)$ et l'espace quotient K^*_{n+1}/Δ_n avec lequel on peut l'identifier.

Un élément de K^*_{n+1} étant donné par ses coordonnées $x_0, x_1, ..., x_n$,

(1) Ou à droite.

un élément de P_n est donné par les $n+1$ éléments $x_0, x_1, ..., x_n$ définis à un facteur près et qui en sont un système de « coordonnées homogènes ».

2. Structure d'un espace projectif.

Que reste-t-il après ces opérations de la structure de l'espace vectoriel de départ ? Si l'on part d'un groupe et que l'on considère son quotient par une relation d'équivalence régulière par rapport à la loi du groupe, on aboutit encore à un groupe : le groupe quotient. Mais ici, outre que nous sommes partis d'un espace vectoriel privé de l'élément neutre de son opération de groupe, la relation d'équivalence n'est pas régulière par rapport à cette opération (x équivalent à x', y équivalent à y', n'entraîne pas $x + y$ équivalent à $x' + y'$). Quant à la multiplication par un scalaire, elle laisse l'élément dans sa classe d'équivalence et ne fournit pas d'opération dans l'espace projectif.

Que demeure-t-il donc ? Pensons à l'origine de nos considérations et à la perspective d'un plan sur un autre. Ce qui demeure alors, c'est l'alignement des points. Dans les espaces plus généraux, on constate que si p éléments de K^*_{n+1} sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$, il en est évidemment de même de p éléments $x'_1, ..., x'_p$ respectivements équivalents aux précédents. Les classes d'équivalence correspondantes seront alors dites des points projectivement indépendants de P_n.

Variétés linéaires projectives. Soit φ l'application canonique de K^*_{n+1} sur P_n, qui à chaque élément x de K^*_{n+1} fait correspondre sa classe modulo Δ_n. On définira systématiquement les « êtres projectifs » comme images par φ des « êtres linéaires » de K^*_{n+1}. Ainsi, une variété linéaire projective à p dimensions est l'image canonique $\varphi(V_p)$ d'un sous-espace à p dimensions V_p de K^*_{n+1}. Il en résulte que si p points de P_n sont projectivement indépendants, la plus petite variété linéaire projective les contenant est de dimension $p - 1$.

Autre axiomatisation des espaces projectifs. La notion d'indépendance projective est si bien la seule qui subsiste dans les espaces projectifs que leur théorie peut se faire à partir d'elle seule. Un excellent exposé en a été donné par Lesieur (2), qui définit d'ailleurs l'indépendance dans le langage des structures ordonnées.

La remarque initiale porte sur le fait que l'ensemble des variétés linéaires projectives de $P_3(R)$, par exemple, y compris l'ensemble vide et $P_3(R)$ tout entier, ordonné par inclusion, est un treillis : ce qui veut dire que deux variétés A et B étant données, il existe, parmi celles qui sont contenues dans A et dans B, une plus grande variété, qu'on notera inf A, B ou $A \cap B$, et qu'on appellera leur intersection (3), et, parmi celles

(2) M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot : *Théorie des Treillis*, Paris, 1953, pp. 249-371.

(3) L'intersection est, en principe, celle des treillis, mais elle coïncide ici avec celle de la théorie des ensembles, si on considère les variétés comme ensembles des points qu'elles contiennent ; l'union est au contraire une opération de la théorie des treillis, dont le résultat est ici distinct de la réunion de la théorie des ensembles.

qui contiennent A et B, il existe une plus petite variété, qui en sera dite l'union et qu'on notera sup A, B ou $A \cup B$ (3). Le treillis a un plus petit élément : l'ensemble vide, et un plus grand élément : l'espace entier.

Lesieur part alors des axiomes suivants :

I. Les variétés linéaires d'un espace projectif sont les éléments d'un treillis avec plus petit élément 0 et plus grand élément 1. La relation d'ordre notée $A \leqslant B$ pourra se lire : A est dans B ou B passe par A. On appelle points les éléments couvrant O (4).

II. Si le point P n'est pas dans la variété B, $B \cup P$ couvre B.

III. L'ensemble des points situés dans toute variété $A \neq 0$ n'est pas vide et A est l'union d'un nombre fini d'entre eux.

La notion d'indépendance s'exprime alors ainsi : $n + 1$ points sont dépendants si l'un d'eux au moins est contenu dans l'union des n autres. Ils sont indépendants dans le cas contraire.

On démontre alors que le nombre de points indépendants dont une variété est l'union ne dépend que de la variété et non des points indépendants choisis, s'il y a plusieurs choix possibles. La dimension de la variété est ce nombre diminué d'une unité.

Si n est la dimension de l'espace (plus grand élément du treillis), on appellera hyperplan les variétés de dimension $n - 1$.

Un quatrième axiome est alors :

IV. Si A n'est pas contenue dans l'hyperplan H, A couvre $A \cap H$. C'est l'axiome dual de II (son expression est celle de II, si on inverse l'ordre du treillis).

Une conséquence remarquable de ces quatre axiomes est l'identité satisfaite par la dimension des variétés :

$$d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B).$$

C'est à partir de ces notions très simples qu'en enrichissant progressivement la théorie par de nouveaux axiomes, on reconstitue la géométrie projective classique et, au-delà, la géométrie affine.

Nous quitterons ici ce point de vue que nous n'avons signalé que pour souligner ce qui fait l'essence de la théorie des espaces projectifs et à cause de l'élégance de la théorie qu'il permet d'élaborer.

3. Applications projectives (5).

Soient deux espaces projectifs sur un même corps K, de dimensions respectives m et n. Nous les nommons P_m et P_n. Ils sont définis à partir des espaces vectoriels épointés K^*_{m+1} et K^*_{n+1}. Soient φ et ψ les applications canoniques respectives de K^*_{m+1} sur P_m et de K^*_{n+1} sur P_n. A toute application linéaire biunivoque de K^{m+1} dans K^{n+1} $(m \leqslant n)$, f,

(4) Un élément a en couvre un autre b, si a est strictement plus grand que b et s'il n'existe aucun élément entre a et b.

(5) On désigne souvent par application linéaire projective ce que nous appelons ici simplement application projective ; comme ce sont les seules que nous considérerons, aucune confusion n'est à craindre.

nous faisons correspondre « par passage au quotient » une application projective g de P_m dans P_n par l'égalité :

$$g \circ \varphi = \psi \circ f.$$

Les applications obéissent au schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} K^*_{m+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K^*_{n+1} \arrow[d, "\varphi"] \\ P_m \arrow[r, "g"] & P_n \end{tikzcd}$$

x étant un point de P_m est l'image par φ d'une « droite » de K^*_{m+1} dont l'image par f est une droite de K^*_{n+1}, dont ψ donne enfin pour image un point de P_n qui est par définition l'image de x par g. Une variété projective de dimension p de P_m étant l'image par φ d'un sous-espace vectoriel (privé de O) de dimension p de K^*_{m+1}, il en résulte que *l'image par une application projective d'une variété projective est une variété projective de même dimension.*

Généralisation : *Applications semi-linéaires :* On peut généraliser ce qui précède au cas où les espaces projectifs seraient définis sur des corps différents, mais isomorphes, K et K'. Soit σ l'isomorphisme entre K et K' et λ^σ l'image dans K' de l'élément λ de K. f est une application semi-linéaire d'un espace vectoriel à droite E sur K dans un espace vectoriel à droite E' sur K', associée à l'isomorphisme, si l'on a, quels que soient x et y de E et λ de K :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(x\lambda) = f(x)\lambda^\sigma.$$

L'application déduite de f par le même passage au quotient que ci-dessus s'appellera une application projective pour les espaces projectifs correspondants, si f est biunivoque.

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer sous sa forme la plus générale le *théorème fondamental de la géométrie projective :*

Théorème : Soient E et E' deux espaces vectoriels à droite de même dimension n, sur deux corps K et K' respectivement ; P et P' les espaces projectifs correspondants. S'il existe une application *biunivoque* g de P *sur* P' telle que *trois points alignés quelconques de* P *aient pour images trois points alignés de* P', on peut en déduire, *si* $n \geqslant 3$:

1) que K et K' sont isomorphes (on désignera par σ l'isomorphisme) ;

2) que g est une application projective, déduite par passage au quotient d'une application semi-linéaire biunivoque f de E sur E' associée à σ.

Remarquons que cet énoncé apporte une confirmation décisive au point de vue exposé plus haut : l'essentiel de la théorie des espaces projectifs est contenu dans la notion d'indépendance des points.

Démonstration (6). Nous désignerons par xK le point de P image canonique du point x de E (même convention pour E', P', K').

---

(6) Nous suivons, pour cette démonstration, l'exposé de J. Dieudonné : *La Géométrie des Groupes Classiques,* Berlin, 1955.

1° *L'image $g(V)$ d'une variété V de dimension p est une variété de dimension p.* Soient $a_i K$ $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$ des points projectivement indépendants engendrant V ; des points alignés ayant pour images des points alignés, $g(V)$ est contenue dans la variété V' engendrée par les $g(a_i K)$. Mais, d'autre part, il résulte de $g(P) = P'$ que des points indépendants ont pour images des points indépendants ; supposons, en effet, que les $g(a_i K)$ ne le soient pas. En complétant les a_i $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$ en une base de E : $a_1, \ldots, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n$, on obtient des images $g(a_i K)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sous-tendant une variété de dimension $< n-1$ qui devrait contenir P', puisque $g(P) = P'$, ce qui est absurde, puisque $d(P') = n-1$. Mais alors $g(V) = V'$, sans quoi V' contiendrait un élément de la forme $g(aK)$, aK étant projectivement indépendant des $a_i K$ $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$. La variété V_1 engendrée par V et aK serait de dimension $p+1$, alors que son image est contenue dans V' de dimension p.

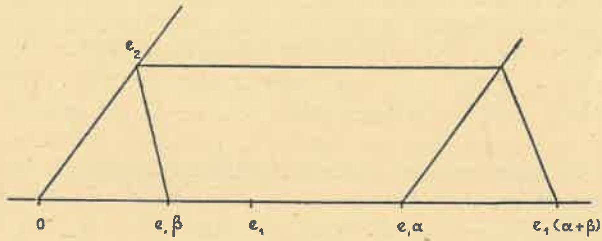
2° *K et K' sont isomorphes.* Soit une base (e_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de E, les points $e_1 K$, $e_2 K$ et $e_n K$ de P, $e'_1 K'$, $e'_2 K'$ et $e'_n K'$ leurs images par g. Il résulte de 1° que e'_1, e'_2 et e'_n sont linéairement indépendants dans E'. Soit D la droite projective engendrée par $e_1 K$ et $e_2 K$, D' son image ; F le plan projectif engendré par D et $e_n K$, F' son image. Tout point de F non sur D s'écrit d'une seule manière $(e_1 \alpha_1 + e_2 \alpha_2 + e_n)K$. On peut donc identifier le complémentaire de D dans F avec l'espace vectoriel à droite sur K engendré par e_1 et e_2 (D est prise pour droite à l'infini !). Toute droite projective de F distincte de D correspond à une droite de L et deux droites de F se coupant sur D en deux droites déduites l'une de l'autre par translation (nous les dirons parallèles, et remarquerons qu'on peut aussi passer de l'une à l'autre par une « homothétie »). On peut alors faire une identification analogue entre le complémentaire de D dans F' et l'espace vectoriel L' engendré par e'_1 et e'_2. A l'application g correspond alors une application u biunivoque de L sur L' transformant toute droite en droite et deux droites parallèles en deux droites parallèles, avec $u(O) = O$, $u(e_1) = e'_1$ et $u(e_2) = e'_2$. Il est alors aisé, par des constructions de droites parallèles dans L, d'obtenir, à partir de deux éléments α et β de K, les éléments $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ comme abscisses de points sur la droite engendrée par e_1 (fig. 1 et 2). Le parallélisme étant conservé par u, on voit immédiatement qu'en posant $u(e_1 \xi) = e'_1 \xi^\sigma$, l'application $\xi \rightarrow \xi^\sigma$ est biunivoque de K sur K' et conserve la somme et le produit, c'est l'isomorphisme annoncé.

3° *g est une application projective.* La droite joignant $e_1 \xi$ à $e_2 \xi$ est dans L parallèle à la droite joignant e_1 à e_2. On a donc $u(e_2 \xi) = e'_2 \xi^\sigma$. D'autre part, le point $e_1 \alpha + e_2 \beta$ de L s'y obtient en menant par $e_1 \alpha$ et $e_2 \beta$ les parallèles respectives à e_2 et e_1 ; on a donc aussi :

$$u(e_1 \xi + e_2 \eta) = e'_1 \xi^\sigma + e'_2 \eta^\sigma,$$

c'est-à-dire que u est une application semi-linéaire biunivoque, associée à σ de L sur L'.

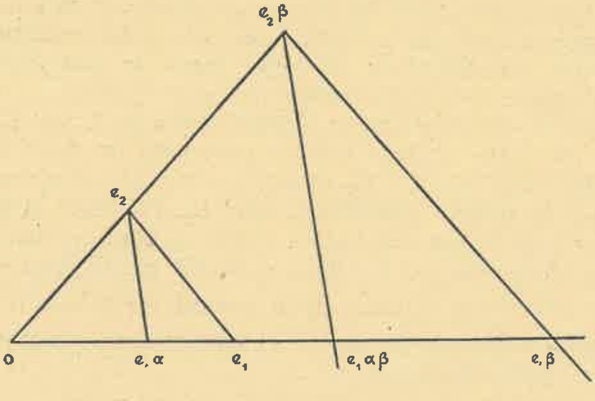
Le raisonnement précédent est valable pour tout couple de points $e_i K$, $e_j K$ de P. Si l'on désigne par v l'application semi-linéaire biunivoque associée à σ et qui vérifie $v(e_i) = e'_i$ et h l'application projective correspondante de P sur P', on voit que $h^{-1}\circ g$ est une application de P sur lui-même, transformant toute droite en droite et laissant invariants tous les points des droites joignant deux des points e_iK, e_jK. C'est la transformation identique. On a bien $g = h$.



Remarque : Le théorème est faux pour $n = 2$. Dans le cas K = K' = R, on sait que les transformations projectives sont caractérisées par la conservation du birapport.

4. Topologie des espaces projectifs.

Si l'espace vectoriel E est pourvu d'une topologie, on en déduit immédiatement une par passage au quotient pour l'espace projectif correspondant. C'est le cas pour les espaces projectifs réels ou complexes (c'est-à-dire définis sur le corps des réels ou le corps des complexes).



Nous nous contenterons ici de citer les importants résultats suivants : $P_n(R)$ est homéomorphe à la sphère S_n après identification de ses points diamétralement opposés ; $P_n(R)$ est homéomorphe à la boule B_n après identification des points diamétralement opposés de sa frontière S_{n-1} ; $P_n(R)$ est compact et connexe.

André Revuz,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.