

II. BIBLIOGRAPHIE

Pour servir au progrès de l'enseignement des mathématiques

L'Enseignement des Mathématiques, par J. PIAGET, E.-W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHNEROWICZ, G. CHOQUET, C. GATTEGNO, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, Suisse ; Paris, 32, rue de Grenelle, 173 pages, 980 francs.

L'action de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques se manifeste par l'organisation de Congrès et par l'action concertée de ses membres. Elle a entrepris en outre de publier des ouvrages destinés chacun plus particulièrement à chaque pays, écrits dans sa langue et adaptés à ses traditions et à ses besoins. L'ouvrage que nous présentons est le premier de cette collection ; il est destiné surtout aux lecteurs français.

Préface. — Le Bureau de la Commission expose le travail et les projets de celle-ci, travail d'unification, non seulement par son caractère international, mais surtout parce qu'il se poursuit à tous les niveaux : des classes maternelles aux cours de l'Enseignement Supérieur ; l'enfant, l'étudiant, est en action devant le monde physique d'où se dégagent les structures mathématiques et l'étude de celles-ci ne commence pas avec le cours de tel ou tel maître !

L'introduction explique et justifie la composition du livre en exposés séparés, choisis par chaque auteur, membres les plus éminents de la Commission, suivant leurs expériences et préoccupations propres de psychologues, logiciens, mathématiciens, pédagogues.

CHAPITRE I. — *Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence*, J. PIAGET, professeur aux Universités de Genève et de Paris.

Dans de nombreux ouvrages bien connus en France, le grand psychologue a exposé ses études de la pensée enfantine dans sa conquête de la connaissance du monde extérieur et de sa structure. Ce chapitre précise et résume pour un lecteur mathématicien l'essentiel des conclusions de l'auteur.

Les structures mathématiques ont été dégagées et étudiées pour elles-mêmes à une époque récente, alors que la création des Mathématiques est bien vieille, mais il ne faut pas s'en étonner : « l'ordre de la prise de conscience renverse l'ordre de la genèse ». Après avoir mis en évidence « les remaniements qu'entraîne l'idée de structure dans le jeu des définitions et des démonstrations », puis dans « l'architecture des Mathématiques », l'auteur indique le grand intérêt, « pour la psychologie de la pensée mathématique, du mode de découverte des structures ». Les trois structures fondamentales sur lesquelles reposent les Mathématiques, structure algébrique, structure d'ordre, structure topologique, se retrouvent si le psychologue « cherche à retracer jusqu'en ses racines, le développement psychologique des opérations arithmétiques et géométriques spontanées de l'enfant et surtout des opérations logiques qui en constituent les conditions nécessaires ». J. PIAGET étudie donc successivement ces trois structures pour « préciser en quel sens elles correspondent à des structures élémentaires de l'intelligence dont elles constituent le prolongement formalisé ».

Deux sortes de conclusions sont dégagées : du point de vue de l'attitude philosophique, une position laisse la possibilité des contacts nécessaires, « si l'on convient de laisser à la psychologie le soin d'étudier les faits et à la logique celui d'analyser les fondements ». « Du point de vue pratique, il ne saurait être question, pour l'éducateur, d'un choix entre les méthodes formalistes fondées sur la logique et les méthodes actives fondées sur la psychologie : le but de l'enseignement des Mathématiques reste toujours d'atteindre la rigueur logique ainsi que la compréhension d'un formalisme suffisant, mais seule la psychologie est en état de fournir aux pédagogues les données sur la manière dont cette rigueur et ce formalisme seront obtenus le plus sûrement. »

CHAPITRE II. — *Réflexions sur l'organisation et la méthode de l'enseignement mathématique*, par E.-W. BETH, professeur de logique et de philosophie des sciences à l'Université d'Amsterdam.

L'éminent logicien, auteur du livre bien connu, « Les fondements logiques des Mathématiques », expose d'abord avec force l'opposition entre l'Enseignement Secondaire et l'Enseignement Supérieur quant aux buts, aux moyens, aux programmes, aux tendances.

Sur l'exemple du passage de la structure d'ordre du système des nombres rationnels à cette structure dans le système des nombres réels, l'auteur utilise les méthodes de la logique symbolique et conclut à l'impossibilité de décrire la différence des structures tant qu'on reste dans le domaine de la logique élémentaire (qui n'introduit que des variables d'individus), sans faire appel aux notions de la théorie des ensembles (variables d'ensembles), ceci indépendamment du niveau de rigueur ou de précision dans les moyens d'expression dont on dispose : c'est dire que le problème est d'ordre logique et non psychologique.

Faut-il « chercher au-delà des frontières des sciences formelles et recourir aux sciences du réel pour trouver un fondement sûr, et pour la logique, et pour les mathématiques » ? La psychologie donne-t-elle une réponse à cette question ? M. BETH répond négativement et pense que « la contribution de la psychologie restera toujours fort modeste » dans la recherche des fondements, de sorte que l'auteur met en garde contre « la tendance d'exagérer la compétence de la psychologie à l'égard des problèmes de la pédagogie des Mathématiques ».

CHAPITRE III. — *L'abstraction en Mathématiques et l'évolution de l'algèbre*, par J. DIEUDONNÉ, professeur à la Northwestern University, Evanston (Illinois, U.S.A.).

Tous ceux qui ont lu les admirables introductions historiques qui suivent les divers chapitres des « Eléments », de BOURBAKI, ne seront pas étonnés que, pour dégager l'essence de la Mathématique, J. DIEUDONNÉ expose « l'histoire de l'algèbre, depuis ses premiers balbutiements jusqu'à notre algèbre moderne ». Les premières notions, telles que le nombre, l'espace, le temps, bien qu'issues de la pratique, sont déjà fort abstraites ; le progrès, au cours de longs siècles, a conduit à la notation algébrique : numération de position, signes d'opérations, création d'une « sténographie » évitant l'emploi de la langue ordinaire. L'histoire des *notations* conduit au seuil du XIX^e siècle, où GALOIS traite de problèmes si « vastes qu'ils ne pouvaient même pas être formulés correctement... avant que les notions qui y figurent ne fussent devenues assez abstraites pour se prêter à des raisonnements dégagés de toutes les contingences, obscurcissant les cas particuliers connus auparavant ». La rencontre des *équations impossibles* conduisit, après « deux siècles de réflexions et de tâtonnements », ce qui nous amène aussi au début du XIX^e siècle, à « calculer sur certaines choses qui ne sont pas des nombres comme si c'étaient des nombres ». Et l'auteur expose en détail ce pas, « peut-être le plus difficile dans la montée vers l'abstraction ».

Dans une troisième partie est étudiée l'*algèbre moderne*. Le mathématicien prend conscience de son *pouvoir créateur de nouveaux calculs sur de nouveaux objets*, puis, « deuxième acte de libération », de son pouvoir de modifier les règles fondamentales du calcul algébrique et ainsi se trouve conçue une « algèbre plus vaste où seraient englobés, avec la vieille algèbre classique, tous les « calculs » qui apparaissent peu à peu dans de multiples domaines des Mathématiques au fur et à mesure de leurs progrès ». « A cette ultime étape de l'abstraction... l'algébriste, dans ses calculs, ne veut connaître des objets du calcul qu'une seule chose, à savoir qu'ils obéissent aux lois qu'il étudie. C'est ce que l'on appelle la *méthode axiomatique en algèbre*. »

Cette étude détaillée ne peut manquer d'intéresser le professeur pour lui-même, mais aussi de lui faire repenser bien des parties de son enseignement : « au fur et à mesure que se dessinent chez l'adolescent les structures de la pensée, il importe que la

Mathématique se dévoile à lui sous son vrai jour » pour lui « enseigner à ordonner et enchaîner sa pensée selon la méthode dont se servent les mathématiciens ».

CHAPITRE IV. — *Introduction de l'esprit de l'algèbre moderne dans l'algèbre et la géométrie élémentaires*, par A. LICHNEROWICZ, professeur au Collège de France.

Comme une note l'indique, « le texte de ce chapitre a été préparé pour une conférence faite au Musée pédagogique à Paris, le 26 mars 1953 ». Les auditeurs seront heureux de retrouver, sous une forme plus développée, les idées alors esquissées. M. LICHNEROWICZ s'adresse directement aux professeurs du Second Degré et les invite à étudier un problème essentiel et urgent : « Dans quelle mesure est-il possible d'imbiber de l'esprit des Mathématiques contemporaines notre Enseignement du Second Degré ? » « L'enseignement classique de nos lycées conditionne dans une large mesure nos élèves à une certaine conception des Mathématiques, une conception qui est bien souvent, tel le jeu d'oie, renouvelée des Grecs et qui, d'autre part, procède de l'expérience des mathématiciens du milieu de XIX^e siècle. Or, dans ces cent dernières années, beaucoup d'expériences mathématiques ont été faites, beaucoup de choses se sont passées... Je pense que cette expérience ne concerne pas seulement celui qui se destine aux Mathématiques ; elle concerne aussi l'ingénieur, le technicien ou physicien... »

Sur des exemples précis, arithmétique, algèbre, géométrie élémentaire, l'auteur met en évidence les lois diverses, les relations les plus essentielles (comme la relation d'équivalence) dont il est aisé de dégager en pleine lumière la structure. Il traite en exemples les notions de groupe, d'isomorphisme, d'anneaux, de corps, etc.... indique « des types d'exemples que l'on pourrait systématiquement rechercher » et il conclut : « Je pense que si le professeur a bien présentes à l'esprit les différentes notions, les différentes exigences fondamentales, quelque chose d'essentiel risque tout de même de passer à travers le cerveau des élèves — sans en sortir — quelque chose qui lui épargnera bien des difficultés dans l'avenir, car c'est tout de même un but de notre enseignement que de le faire participer à ce que sont la science et la technique de notre temps. »

CHAPITRE V. — *Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire*, par G. CHOQUET, professeur à la Sorbonne.

Dans une première partie, un examen critique des manuels de géométrie élémentaire fait apparaître l'insuffisance des exposés qui prétendent ne pas se contenter d'une base intuitive, mais justifier les premiers pas dans le domaine de la géométrie au moyen d'axiomes ou postulats explicitement énoncés. Même par la suite, le début de nombreux chapitres « fournit aux définitions équivoques et aux pseudo-théorèmes de brillantes occasions de se manifester ».

La partie constructive de l'exposé commence avec une étude de divers systèmes d'axiomes : axiomatique de Hilbert, conception analytique de la géométrie. Mais un autre point de vue peut nous guider : « Si nous voulons donner à la géométrie une base, non seulement logiquement correcte, ce qui serait insuffisant, mais assez proche de l'expérience sensible de chacun de nous », nous serons amenés à nous souvenir que « nous sommes en possession de certains instruments » qui vont nous permettre « d'explorer le plan » ou l'espace. Et des exemples de telles axiomatiques sont indiqués et critiqués.

Dans les troisième et quatrième parties, M. CHOQUET propose une construction axiomatique de la droite et du plan. C'est, contrairement aux autres chapitres de ce livre, une construction nouvelle, une œuvre originale de mathématicien, qui a sa valeur théorique indépendante de toute préoccupation pédagogique. L'auteur écrit formellement : « Ce qui suit est écrit à l'usage des professeurs, et n'a donc aucune prétention à être un début de manuel. Que cet exposé puisse être effectivement enseigné, je le crois. Encore faudrait-il commencer par en faire une adaptation pour chaque âge mental. »

Nous n'en donnerons pas ici l'analyse, car l'esquisse en a été faite dans les deux conférences que M. CHOQUET a bien voulu faire à notre Association en 1953. La douzaine de pages de notre *Bulletin* d'octobre 1953 est développée en une rédaction définitive de quarante pages très denses, dont l'étude s'impose. Ce texte sera particulièrement apprécié de ceux de nos collègues qui ont déjà médité sur l'exposé des conférences et qui ont cherché à les adapter à leur enseignement. Pour tous, ce sera une occasion d'approfondir leur connaissance de la géométrie, et peut-être sera atteint le but réel de l'exposé de M. CHOQUET : « En fait, je ne considérerai mon but comme atteint que si mon lecteur, non satisfait par mon choix des axiomes de base, essaie d'en imaginer un autre. Il découvrira... (que) la création et l'examen critique de nouvelles règles... lui permettent, lorsqu'il revient aux règles classiques, de comprendre désormais l'édification de la géométrie avec un esprit plus lucide. D'utilisateur, il sera devenu constructeur. »

CHAPITRE VI. — *La pédagogie des Mathématiques*, par C. GATTEGNO, professeur à l'Institut d'Education de l'Université de Londres.

« Dans ce chapitre, nous traiterons de la pédagogie comme d'une science... Les facteurs sont de trois catégories : les *esprits*, qui interviennent dans la pensée mathématique et l'acte d'apprendre ; les *structures mathématiques* et leur propre dynamisme ; les relations de ces structures avec celles de la *réalité*, en particulier dans le domaine des applications. » « Au lieu de concevoir l'étude des Mathématiques comme l'étude d'une série déterminée de chapitres... nous allons proposer de prospecter à l'aide des structures mentales existant dans l'esprit des élèves des structures mathématiques qui leur soient proches... et de faire en sorte que les élèves créent les structures mentales correspondant à la prise de conscience suscitée par l'action du maître. »

Ce beau programme est indiqué en détail sur de nombreux exemples : les structures mentales « combinées sous le signe $-|$ », depuis l'addition des entiers, et des fractions jusqu'à l'algèbre, sont indiquées et conduisent à une compréhension de ce que c'est que l'algèbre. Cette introduction permet alors de comprendre ce que peut être un programme. Un exemple est donné d'un programme d'algèbre qui peut être poursuivi de 11 ans à 17 ans : il ne s'agit pas de choisir des chapitres d'après des idées préconçues, mais de permettre à l'enfant de structurer peu à peu sa pensée, de percevoir des relations de plus en plus complexes, d'acquiescer « la liberté que donne à la pensée l'abstraction et de s'équiper en mathématicien ».

Il est impossible de résumer cette étude sans lui faire perdre son principal intérêt : « Il s'agit d'expériences vécues au contact des enfants, exposées en détail, et qui pourraient être étendues aux classes suivantes. L'exposé pourrait inclure des développements qui conduiraient, à 17 ans, à une reconnaissance des structures algébriques fondamentales et de la façon dont les algèbres se constituent... Si cette expérience rejoint l'expérience géométrique, elle peut servir de base à une libération plus grande de l'esprit qui atteint par abstraction des relations plus fondamentales, donc plus profondément enracinées dans l'inconscient. L'éducation mathématique servira alors à l'éducation totale de l'individu. »

L'acquisition de l'expérience géométrique est considérée ensuite. Alors que l'expérience sensible du jeune enfant le libère par rapport au milieu en lui donnant des possibilités d'action, l'expérience géométrique est la prise de conscience de relations et ne peut apparaître que « durant l'adolescence, lorsque l'activité est suspendue et que l'esprit reprend l'expérience pour la juger et la comprendre ».

Sur des exemples précis, M. GATTEGNO montre comment organiser le travail de la classe pour que « la géométrie se développe, non plus en propositions plus ou moins compliquées, mais par la prise de conscience d'exigences de plus en plus précises... Nous ne partons pas de l'espace mathématique et des êtres mathématiques, mais

nous les construisons l'un et les autres par le processus même de dégagement, dans les situations proposées, de ce qui est relationnel ».

Plusieurs de telles situations sont analysées, à titre d'exemples, et exploitées pour aboutir à des raisonnements sur les relations et non sur les figures. Quant à obtenir une construction d'ensemble de la géométrie par voie déductive, « c'est un luxe que la science ne se permet que lorsqu'elle a accumulé assez de faits ». « La méthode axiomatique ne peut être que le résultat d'une longue expérience, mais un principe d'économie naturel dans l'activité intellectuelle peut servir à encourager une certaine axiomatisation de l'expérience des élèves par eux-mêmes. » « Notre enseignement progresse donc sur le front de l'expérience, sur le front de la communication et sur le front de l'organisation mentale de la personnalité de l'élève. »

Tel est ce livre, si divers par la personnalité de ses auteurs, si riche par le nombre des questions étudiées, qui s'adresse aux professeurs en tant que spécialistes des Mathématiques comme en tant qu'éducateurs. A travers cette diversité, une unité de tendances se fait jour : celle qui résulte de la connaissance de la nature des Mathématiques actuelles, « matière qui sert de substance au dialogue » entre le maître et l'élève.

L. FÉLIX.