

II. ESSAIS ET VARIÉTÉS

Exemple d'utilisation d'un formalisme : Théorèmes de Simson, de Miquel et de Clifford

Lorsque l'on regarde les mathématiques toutes faites, pour ainsi dire du dehors, on est amené parfois à voir dans le formalisme uniquement un procédé d'exposition sans lien psychologique avec la recherche et la découverte. Le seul avantage qu'on lui attribue alors est d'éviter de noyer la pensée sous un flot verbal et de mettre en évidence la structure de cette pensée, ce qui justifie le formalisme comme une langue bien adaptée à l'exposé mathématique dans ce qu'il a de logique. Pourtant les chercheurs, les découvreurs, nous assurent y trouver un procédé de découverte : l'analogie de formalisation dans deux domaines de recherches permet de considérer ces domaines comme deux *modèles* d'une même structure, de sorte que l'expérience acquise dans l'un de ces domaines, sert à l'exploration de l'autre.

Chaque modèle comporte, non seulement la structure que l'on étudie, commune aux deux modèles, mais encore d'autres qui lui sont propres ; ainsi toute propriété du modèle n'est pas utilisable pour l'étude (cf. les modèles des molécules organiques ou de l'atome de Bohr : ils donneraient une image dangereusement erronée si on les prenait pour un agrandissement de la réalité physique !).

Je me propose d'essayer de faire sentir ce rôle du modèle et du formalisme sur un exercice élémentaire. On m'excusera j'espère de ne pas donner (et pour cause !) un exemple de découverte. Je souhaite pourtant faire pressentir que la méthode peut devenir une marche vers l'inexploré lorsqu'elle est conduite par des mathématiciens dignes d'elle.

*
**

i. *Point de départ.* — Soit une figure (F_i) constituée par un ensemble de quatre points A, B, C, D. Nommons a, b, c , les trois côtés issus d'un point (par exemple $A = a \cap b \cap c$) et a', b', c' les côtés qui leur sont respectivement opposés. L'ins-

criptibilité de A, B, C, D se traduit, suivant les couples de côtés que l'on introduit, par l'une ou l'autre des égalités (ou plutôt congruences) d'angles

$$(1) \quad (a, b) + (a', b') = 0 \pmod{\pi},$$

$$(2) \quad (b, c) + (b', c') = 0 \pmod{\pi}.$$

Le théorème de Chasles permet d'en déduire les quatre autres égalités à π près :

$$(3) \quad (a, c) + (a', c') = 0,$$

$$(4) \quad (a, b') + (a', b) = 0,$$

$$(5) \quad (a, c') + (a', c) = 0,$$

$$(6) \quad (b, c') + (b', c) = 0.$$

Si les égalités précédentes sont vérifiées pour trois couples de droites non trois à trois concourantes (fig. F_1), elles expriment l'inscriptibilité de trois ensembles de quatre points :

$$\begin{array}{llll} a \cap b, & a' \cap b', & a \cap b', & a' \cap b; \\ b \cap c, & b' \cap c', & b \cap c', & b' \cap c; \\ c \cap a, & c' \cap a', & c \cap a', & c' \cap a; \end{array}$$

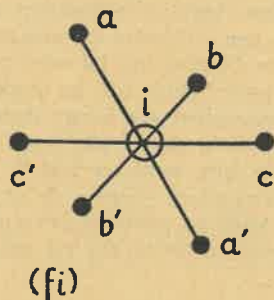
On sait que l'on exprime ceci en disant que les trois couples de droites sont anti-parallèles deux à deux.

Nous voulons construire un modèle différent de la structure qui vient d'apparaître dans le but de rendre intuitif, évident sur une figure, ce qui n'apparaît pas aussi bien sur les figures (F) et (F') et leurs circonférences.

La relation $(a, b) + (a', b') = 0 \pmod{\pi}$, qui exprime l'inscriptibilité, fait penser à la relation $\vec{ab} + \vec{a'b'} = \vec{0}$ entre vecteurs qui exprime l'équipollence de $\vec{ab}$ et $\vec{b'a'}$. Or la seule opération que nous utilisons sur les angles mod π est celle qu'exprime la formule de Chasles, formule qui a la même forme pour les vecteurs. Une nouvelle figure f sera formée de points, images de a, b, a', b' , etc... Mais il nous reste à trouver une configuration telle que le système des égalités que nous écrirons maintenant d'une façon ambiguë

$$(1) \quad ab + a'b' = 0 \quad \text{et} \quad (2) \quad bc + b'c' = 0$$

entraîne les égalités (3), (4), (5), (6). C'est une symétrie par rapport à un point, par exemple dans un plan. D'où la figure fondamentale (f_1) d'inscriptibilité (i). Si nous supposons par exemple en outre $a \cap b \cap c = A$, nous aurons un cercle (i). Sinon, si toutes les intersections telles que $a \cap b \cap c$, $a \cap b \cap c'$, etc... sont vides, nous aurons trois cercles (i).



On voit que la figure (f_1) est déterminée si l'on a choisi, par exemple a, b, c, a' . Comme le centre de symétrie i est défini par $ai = ia'$, ce point doit être considéré comme image dans (f) de l'ensemble des deux directions bissectrices des couples opposés a, a' ; b, b' ; c, c' de (F). On voit déjà combien les deux modèles ont des structures propres différentes en plus de la structure commune que nous voulons

utiliser. En particulier, nous ne pouvons pas traduire, par exemple, la relation de perpendicularité dans (F), à moins de doter (f) d'une relation d'équivalence entre certains points pour avoir $2ab = 0$, a et b distincts. Nous n'en ferons rien, de sorte que nous ne pourrions atteindre dans (F) que des figures générales.

APILICATIONS.

Théorème I. — Juxtaposons deux figures f_i , soit le schéma (f_i) . Les égalités vectorielles sont en évidence :

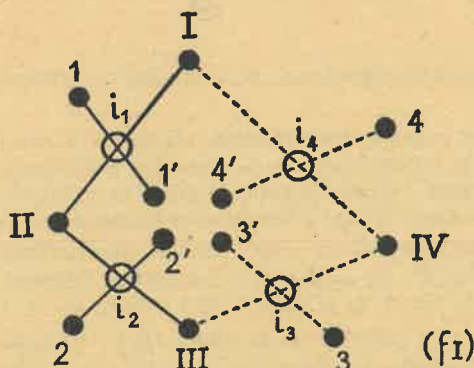
$$i_2 + i'2' = 2 \times i_1 i_2 = I, \text{ III.}$$

Si donc nous complétons la figure par les inscriptibilités (i_3) , (i_4) , nous aurons

$$i_2 + i'2' = 43 + 4'3',$$

donc

$$i_2 = 43 \Leftrightarrow i'2' = 4'3'.$$



Interprétation dans (F) : Quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 , pris en ordre cyclique, se coupent en $A, A'; B, B'; C, C'; D, D'$ (l'axe radical AA' de C_1 et C_2 est représenté par I et la corde AB par I, etc...). La condition d'inscriptibilité de A, B, C, D équivaut à celle de A', B', C', D' .

Théorème II, de Simson (généralisé pour un angle quelconque). *Description dans F :* Trois points non alignés A, B, C , forment un triangle de côtés a, b, c . Un point M est joint aux précédents par les droites α, β, γ , et à trois points A', B', C' respectivement pris sur a, b, c par des droites α', β', γ' . On nomme a' la droite $B'C'$, et de même b' et c' .

Noter que $(a', b') = 0 \pmod{\pi}$ entraîne $(b', c') = 0 \pmod{\pi}$. Nous étudions la figure dans le cas où l'on a

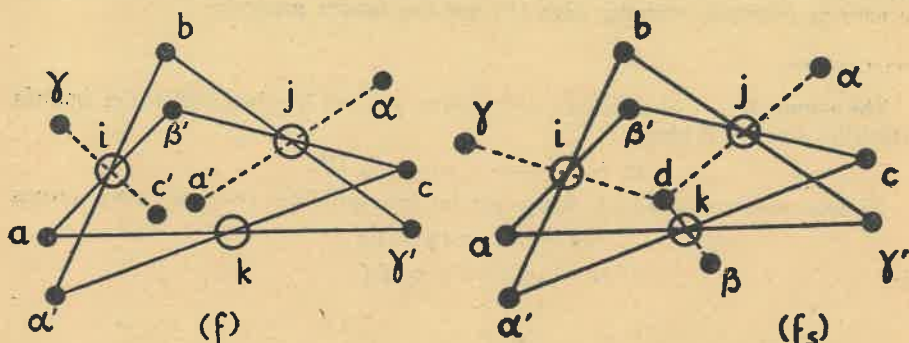
$$(H) \quad (a, \alpha') = (b, \beta') = (c, \gamma') \pmod{\pi}.$$

Traduction dans (f) : Quatre points arbitraires a, b, c, α' . Les trois points a', b, c' , sont deux à deux distincts ou tous les trois confondus. Hypothèse (H) : $a\alpha' = b\beta' = c\gamma'$ (égalités vectorielles comme nous l'avons dit).

Nous voyons les trois inscriptibilités $(i), (j), (k)$ et nous complétons la figure par le couple c', γ pour (i) et a', α pour (j) d'après le schéma (f_i) . On voit immédiatement sur la figure que $a'c' = 0$ est équivalent à $\gamma\alpha = ac$, comme égaux à $2ij$. Or $ac + \alpha\gamma = 0$ exprime l'inscriptibilité de

$$M = \alpha \cap \gamma, B = a \cap c, A = a \cap \alpha, C = c \cap \gamma.$$

D'où l'énoncé habituel sur la figure (F) : La condition d'alignement de $A'B'C'$ équivaut à l'inscriptibilité de A, B, C, M .



Nommons d les points confondus a', b', c' (droite de Simson). Nous obtenons la figure (f_s).

1) Retrouvons par exemple deux résultats classiques. Laissons fixes a, b, c, a' , donc i, k, γ', B', j , mais faisons varier α de sorte que α devienne α_1 ; d devient d_1 et $\alpha\alpha_1 = -dd_1$. D'où l'énoncé : Quand le point M décrit la circonférence ABC , sa droite de Simson tourne d'un angle opposé à l'angle dont tournent les cordes AM, BM, CM .

Interprétons maintenant $db = -\alpha\gamma'$ comme inscriptibilité de $A = d \cap b$, $C = b \cap \gamma'$, $M = \gamma' \cap \alpha$, $A_1 = d \cap \alpha$; on obtient l'énoncé : La parallèle à la droite de Simson menée par A , la projetante MA' , coupe sur le cercle circonscrit.

2) Interprétation plus générale de la figure (f_s) : Utilisons la figure du type (F_i) et non (F_l), c'est-à-dire ne supposons plus les six droites $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, concourantes en M . Prenons a, b, c, a' quelconques, puis β' et γ' satisfaisant à (H) et considérons $M_c = \alpha' \cap \beta'$, $M_a = \beta' \cap \gamma'$, $M_b = \gamma' \cap \alpha'$, d'où trois cercles $(AB'C'M_a)$, $(BC'A'M_b)$, $(CA'B'M_c)$.

Les droites a', b', c' , sont toujours $B'C', C'A', A'B'$, mais les droites α, β, γ , c'est-à-dire AM_a, BM_b, CM_c déterminent des points $N_a = \beta \cap \gamma$, N_b et N_c .

La condition d'alignement de $A'B'C'$ équivaut toujours à $\gamma\alpha = ac$; elle exprime ici que N_b est sur la circonférence (ABC) . De même N_c est sur cette circonférence. Donc ces points sont confondus au point N autre que A ou α coupe (ABC) . Et N_a est aussi en N . D'où l'énoncé : Si une droite d coupe les côtés a, b, c d'un triangle ABC en A', B', C' , les trois droites α', β', γ' menées respectivement par A', B', C' et satisfaisant à (H) déterminent un triangle $M_aM_bM_c$ tel que AM_a, BM_b, CM_c concourent en un point N du cercle (ABC) . Les deux triangles sont directement semblables, homologues, et jouent le même rôle, de sorte que N est aussi sur le cercle circonscrit au deuxième triangle.

Théorèmes de Miquel et de Clifford, relatifs à n droites : Revenons à l'interprétation de (f_s) par le théorème de Simson. Nous pouvons donner l'énoncé sous une forme telle que les quatre droites jouent le même rôle :

(E₄) Etant données quatre droites, les quatre cercles circonscrits aux triangles formés-concourent en un point.

Notation préparant la généralisation :

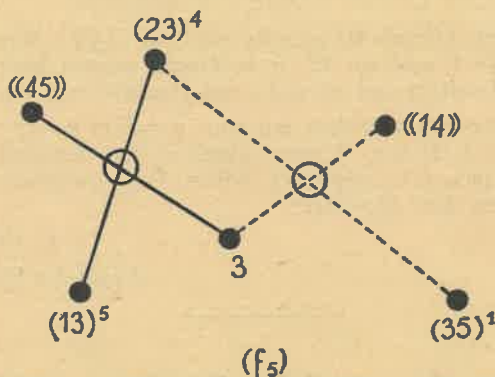
Chaque droite : notée par un nombre 1, 2, 3, 4.

Chaque point d'ordre 2 : $1 \cap 2$ est noté $M(12)$.

Chaque cercle d'ordre 3 : par exemple $C(123)$

Le point de concours, d'ordre 4 : $M(1234)$.

$n = 5$ Nommons $(12)^5$ la droite $M(12)M(1234)$ et
 $((45))$ la droite $M(1235)M(1234)$.



Considérant les deux cercles $C(123)$ et $C(235)$ nous obtenons le schéma (f_5) où l'on voit $((45)) ((14)) = (13)^5(35)^1$.

Or, dans la définition du deuxième membre de cette égalité, 2 et 4 jouent le même rôle donc $((45)) ((14)) = ((25)) ((24))$ ce qui exprime l'inscriptibilité de $M(1234) M(1235) M(2345) M(1335)$. De même, $M(1245)$ est sur ce cercle. Donc

(E_5) Etant données cinq droites, les cinq points de l'énoncé (E_4) sont sur une même circonférence (Théorème de Miquel). Cette circonférence d'ordre 5 sera notée $C(12345)$.

Théorème général de Clifford (1) : A tout ensemble de $n = 2k$ droites, on peut associer un point $M(1, 2, \dots, 2k)$ et à tout ensemble de $n = 2k + 1$ droites, on peut associer un cercle $C(1, 2, \dots, 2k + 1)$ tels que tout point M d'ordre n soit situé sur tout cercle d'ordre $n - 1$, dont l'ensemble d'indices est inclus dans celui du point, et sur tout cercle d'ordre $n + 1$ dont l'ensemble d'indices contient celui du point.

Ceci est bien vérifié pour $n = 5$. L'étude va se poursuivre par un simple examen d'indices : c'est le symbolisme adopté pour les notations qui fournit la démonstration :

$n = 6$ Considérons les quatre cercles avec leur intersection :

$$C(23456) \cap C(256) = M(2456) \cup M(2356)$$

$$C(256) \cap C(156) = M(56) \cup M(1256)$$

$$C(156) \cap C(13456) = M(1456) \cup M(1356)$$

$$C(13456) \cap C(23456) = M(3456) \cup Q.$$

Or les quatre points nommés les premiers sont sur $C(456)$, donc (th. I), les trois points d'ordre 4 nommés les seconds sont sur un cercle passant par Q ; mais ce cercle est $C(12356)$. Donc les trois cercles d'ordre 5 introduits sont concourants en Q . Permutant par exemple 3 et 4, on voit que Q est aussi sur $C(12456)$ et de même les autres cercles d'ordre 5, donc tous les cercles d'ordre 5 concourent en un point d'ordre 6 nommé $M(123456)$.

(1) L'idée d'utiliser le théorème I pour la démonstration fut indiquée par H. LERESGUE, dans un devoir à l'E.N.S. de Sèvres.

$n = 7$ Etudions quatre points d'ordre 6 :

$$C(34567) \cap C(14567) = M(4567) \cup M(134567)$$

$$C(14567) \cap C(12567) = M(1567) \cup M(124567)$$

$$C(12567) \cap C(23567) = M(2567) \cup M(123567)$$

$$C(23567) \cap C(34567) = M(3567) \cup M(234567).$$

Or les quatre points nommés les premiers sont sur $C(567)$, donc (th. I) les quatre points nommés d'ordre 6 sont sur la circonférence passant par trois d'entre eux. Donc *tous les points d'ordre 6* sont sur une même circonférence d'ordre 7, $C(1234567)$.

$n \geq 8$ Le raisonnement précédent fait pour $n = 6$ et $n = 7$ n'utilise en somme que les quatre indices 1, 2, 3, 4. Il reste valable si nous écrivons à droite de l'ensemble des indices 2, puis 4, ..., nouveaux indices. Par raisonnement par récurrence, le théorème général est donc démontré.

L. FÉLIX,
Lycée La Fontaine, Paris.
