

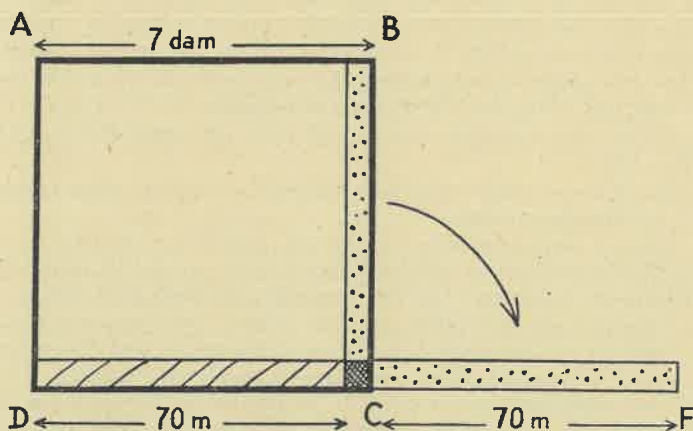
LA RACINE CARRÉE EN CLASSE DE TROISIÈME

Dans le *Bulletin* 175, la question suivante avait été posée : *Peut-on démontrer la règle de la racine carrée en classe de Troisième ?*

Nous avons reçu les deux réponses suivantes :

A. Une solution « géométrique ».

Calculer la racine carrée de 5 437 à une unité près revient pratiquement à déterminer à 1 m près le côté d'un terrain carré ayant une superficie de 5 437 m², soit 54 dam² 37 m² (d'où le partage en tranches de deux chiffres à partir des unités, ou de la virgule).



1° 54 étant compris entre les carrés 49 et 64, le côté du carré est de 7 dam par défaut.

2° Du terrain carré ABCD retranchons le carré de 7 dam de côté ; il reste une superficie de :

$$54 \text{ dam}^2 37 \text{ m}^2 - 49 \text{ dam}^2 = 5 \text{ dam}^2 37 \text{ m}^2 \quad \text{ou} \quad 537 \text{ m}^2.$$

Ce reste peut être partagé en deux rectangles égaux et un petit carré qui, mis bout à bout, forment un rectangle dont la longueur DCF est comprise entre

$$2 \times 70 = 140 \text{ m et } 150 \text{ m,}$$

et dont la largeur est inférieure à 10 m.

On obtiendra une valeur approchée de cette largeur en divisant 537 par 140, ou 53 par 14 (2 fois 7, d'où la règle). Le quotient 3 ne tenant pas compte du petit carré pourra être trop fort ; l'essai se fera par le calcul de l'aire du rectangle DCF, de largeur 3 et de longueur $140 + 3 = 143$,

$$143 \times 3 = 429 < 537 \text{ (d'où la règle d'essai).}$$

Le chiffre 3 convient ; la racine à 1 près par défaut est 73 ; le reste est :

$$537 - 429 = 108.$$

Le même raisonnement permet d'obtenir le chiffre suivant de la racine en prenant pour nouvelles unités dm^2 et dm, etc...

MARCHAND (professeur honoraire).

B. Découverte de la règle.

Il faut d'abord noter qu'il ne s'agit pas de démonstration. Il s'agit de faire découvrir et de justifier un procédé pratique d'extraction de la racine carrée d'un nombre écrit en système décimal. Comme aucun théorème préalable n'est utile et qu'un appel au concret est, non seulement possible, mais encore nécessaire par la définition intuitive et non axiomatique des nombres entiers, nous pouvons présenter la question d'une façon abordable, non seulement pour des élèves de Troisième, mais même pour des élèves de Cinquième ; du reste, c'est aussi la méthode que j'emploie, mais plus rapidement et sans manipulations concrètes, dans les classes de Philosophie et même de Mathématiques !

Les idées directrices sont : l'opération est l'inverse de l'opération de formation des carrés (comme la division par rapport à la multiplication). On fera des opérations provisoires (comme pour la division). La première opération provisoire doit se poursuivre par des opérations complémentaires, mais celles-ci sont d'un type nouveau (tandis que dans la division, elles sont encore des divisions). Enfin, il faut s'adapter à la numération décimale.

Je m'excuse d'être un peu longue, mais, dans ces questions, c'est le détail de la méthode qui importe et la rend ou non assimilable aux élèves (1). Notons qu'en Troisième, les deux premières parties peuvent être faites parfois en une leçon, la seconde partie étant reprise à la seconde leçon. Mais toute partie commencée doit être conduite à sa conclusion.

1^{re} partie. — Chaque élève est muni d'un assez grand nombre de jetons, boutons, confetti... Les lentilles sont très appréciées.

Le carré d'un nombre, par exemple $5^2 = 25$, est le nombre d'objets disposés en carré de cinq objets de côté. Nous remarquons que le même mot est pris dans deux sens différents. C'est compréhensible, mais gênant pour les explications.

a) Formation des carrés des entiers consécutifs.

Le carré de cinq objets de côté étant formé, nous plaçons un nouveau rang de cinq objets en bas, puis un rang de cinq objets à droite, puis un objet pour le coin. Les élèves recommencent jusqu'à ce que tous aient compris que nous voulons former des carrés, non des rectangles, qu'ils aient remarqué cet objet du coin que nous posons en dernier et qu'ils aient accepté de poser les objets en ordre et des deux côtés choisis, par exemple en bas et à droite.

Passage à l'abstrait : 1° Je suppose avoir formé 32^2 , que faut-il ajouter pour

(1) Je reproduis ici un article paru dans la « Revue de l'Enseignement Secondaire des Jeunes Filles », 15 février 1932.

avoir 33^2 ? — 2° J'ai formé 45^2 et il me reste 50 objets ; puis-je faire le carré suivant ? — 3° J'ai formé 38^2 et il me reste 76 objets ; puis-je faire le carré suivant ?



fig. 1

Conclusion.

b) *Formation des carrés non consécutifs.*

Nous faisons former un carré, par exemple de huit objets de côté, et cherchons à le compléter pour former le carré de $8 + 3 = 11$ objets de côté. Il nous faut une *bande* de huit objets de long sur trois de large pour le bas, puis une *deuxième bande* égale pour la droite, puis le *petit carré du coin* de 3 sur 3.

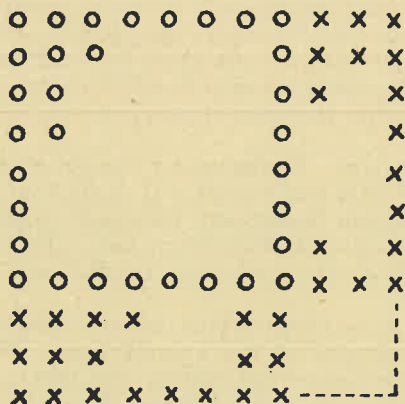


fig. 2

Après quelques exemples analogues, laissant les objets, les élèves répondent par calcul mental aux questions :

1° Combien faut-il ajouter d'objets au carré de 125 objets de côté pour obtenir le carré de 128 de côté ? — 2° J'ai formé 32^2 et il me reste 250 objets ; puis-je former 34^2 ? 35^2 ? 36^2 ?

Conclusion provisoire.

Exercice : J'ai disposé des objets en rectangle ; il y a $n + 5$ lignes de n objets. Quel plus grand carré puis-je faire avec ces mêmes objets ?

1^{re} *remarque importante* : au lieu de compter successivement les deux bandes, nous pouvons considérer la *double-bande*, de même largeur, mais de longueur double. Nouveaux calculs avec cette manière de compter. Nouvelle conclusion.

Mais nous refusons, si nos élèves le proposent, de faire entrer le petit carré du coin dans la double bande, car cela nous éloignerait du but.

2^e *remarque essentielle* : si le carré primitif est assez grand, le nombre d'objets de la double-bande est beaucoup plus petit que celui du carré primitif ; le nombre

d'objets du petit carré du coin est encore beaucoup plus petit que celui de la double-bande.

2^e partie. — EXTRACTION DES RACINES CARRÉES.

a) *Recherche concrète.* — Avec une poignée d'objets former le plus grand carré possible. Etude du reste.

b) *Recherche par le calcul.* — En essayant des nombres de plus en plus grands, nombreux exemples quand le nombre donné ne dépasse pas 200. Compréhension du but de l'étude : abréger ces calculs par tâtonnement quand le nombre proposé est grand ; nous cherchons donc une *règle pratique*.

— *Première recherche* : soit 5134. Ce nombre est supérieur à 10^2 , à 50^2 , inférieur à 100^2 , etc... On trouve bien vite $70^2 < 5134 < 80^2$.

Notion de racine carrée approchée à une dizaine près par défaut et par excès.

Pour préciser la réponse, nous cherchons le chiffre des unités. (Ici, nous faisons appel au concret, mais sans utiliser les objets ; nous esquissons les gestes et précisons par un schéma au tableau).

Le carré de 70 de côté contient :

$$70^2 = 4900 \text{ objets. Le reste provisoire est } 5134 - 4900 = 234.$$

Nous pouvons former le carré consécutif, ce qui nécessite :

$$(70 \times 2) + 1 = 141 \text{ objets. Il reste 93 objets.}$$

Ce reste est insuffisant pour former le carré suivant : c'est le *reste définitif*. Nous concluons et écrivons :

$$5134 = 71^2 + 93, \quad \text{et} \quad 71^2 < 5134 < 72^2.$$

— *Deuxième exemple* : soit 6245. Nous trouvons :

$$70^2 < 6245 < 80^2, \quad 70^2 = 4900, \quad 6245 - 4900 = 1345.$$

Ce reste provisoire est grand : quelle largeur de bande pouvons-nous obtenir ? La longueur de la double-bande est $70 \times 2 = 140$. Sa largeur sera donc le quotient de la division de 1345 par 140, c'est-à-dire 9.

« Mais nous avons oublié le petit carré du coin ! » — « C'est vrai, mais c'est peu de chose ! » — « Pourtant il demande 81 objets. » — « Eh bien, nous allons essayer ce chiffre 9. La double-bande contiendra $140 \times 9 = 1260$ objets, le carré du coin exige $9 \times 9 = 81$ objets ; il nous faut donc $1260 + 81 = 1341$ objets. Nous pouvons les mettre puisque nous en avons les 1345 objets du reste provisoire à notre disposition ; il nous restera 4 objets. Nous avons de la chance ! »

Nous donnons la réponse et traitons d'autres exemples en nous aidant toujours du schéma dessiné.

Conclusion : nous savons extraire la racine carrée des nombres jusqu'à 10 000. Les élèves (heureusement en grande majorité) qui n'ont jamais appris la règle sont satisfaits et font les calculs avec plaisir.

3^e partie. — L'ADAPTATION DE LA RÈGLE A LA NUMÉRATION DÉCIMALE.

Les élèves se sont exercés seuls. A ce stade, certains élèves font, par exemple, l'opération comme suit :

Nombre donné 830. J'utilise $25^2 = 625$. Reste provisoire 205. Longueur de double-bande 50. J'essaye 4. Non, j'essaye 3

$$50 \times 3 = 150$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$\text{Total } 159$$

{ Reste définitif 46.

{ La racine cherchée est $25 + 3 = 28$.

Il s'agit d'utiliser au mieux la numération décimale. Nous refaisons un exemple au tableau (en précisant une disposition déjà plus ou moins proposée à la leçon précédente). Je reprends ici l'exemple de la deuxième partie.

a) Règle pour obtenir le chiffre des dizaines. Énoncé habituel.

b) Règle pour obtenir la largeur de la double-bande : observation des zéros. On les dessine en pointillé et l'on remplace :

$$70 \times 2 = 140$$

quotient de division de 1345 par 140

$$7 \times 2 = 14$$

par quotient de la division de 134 par 14.

c) Remarque par laquelle on remplace les opérations

$$140 \times 9 = 1260$$

$$9 \times 9 = 81$$

$$1341$$

$$\text{par } 149 \times 9 = 1341$$

Le zéro en pointillé est ainsi remplacé par le chiffre 9 essayé.

Les élèves trouvent ceci peu facile à inventer ! Nous leur montrons combien c'est naturel d'après nos schémas en faisant, pour l'essai, entrer le petit carré du coin dans la bande périphérique ; mais le concret est déjà loin ; les élèves adoptent avec plaisir la règle sous la forme « remplir » le zéro pointillé.

Justifier les trois règles a) b) c) en retrouvant les zéros pointillés sur tous les exemples. Bien disposer l'opération.

d) Complément facultatif : on peut faire la multiplication 149×9 et la soustraction qui donne le reste en une seule opération, comme dans la division, puisque le multiplicateur n'a qu'un chiffre, comme dans la division. Nouveaux calculs.

En majorité, les élèves ont encore besoin, pendant un certain temps, d'écrire les zéros pointillés et même d'esquisser le schéma.

4^e partie. — (L'attention est un peu lassée. Nous devons accélérer et donner peu d'explications).

Nombres supérieurs à 10 000.

En extrayant la racine carrée de 5597, par exemple, nous avons trouvé

$$74^2 < 5597 < 75^2, 5597 = 74^2 + 121$$

Or

$$(740)^2 = 74^2 \times 100, (750)^2 = 75^2 \times 100$$

donc

$$(740)^2 < 559700 < (750)^2,$$

740 est donc la valeur approchée à une dizaine près par défaut de la racine carrée de 559700, le reste provisoire étant 12100. Si le nombre donné est 559748, ces 48 unités ne peuvent combler la différence entre 559700 et $(750)^2$, donc 740 est encore la valeur approchée à une dizaine près par défaut de 559748, le reste provisoire étant cette fois 12148.

Conclusion : a) obtenir 740 et le reste provisoire 12148 ; b) poursuivre l'opération, ce que nous savons faire. On peut continuer l'opération posée (en mettant des zéros pointillés si l'on veut).

Calculs sur des nombres de 6 chiffres, puis de 7 et 8 chiffres.

Racine carrée des nombres décimaux ; racines carrées approchées à 0,1, 0,01, etc. près.

Nous partons de l'examen de la place de la virgule dans les carrés des nombres décimaux. D'autre part, nous calculons la longueur évaluée en m , dm , cm du côté d'un même carré dont la surface est évaluée en m^2 , dm^2 , cm^2 . Nous examinons, dans l'opération posée à la manière habituelle, quels sont les nombres qui correspondent à des longueurs ou à des surfaces, et précisons le reste.

L'étude achevée, si la classe est bonne et si un élève, comme cela m'est arrivé, dit que « cela se démontre d'habitude avec des u », on pourra reprendre le raisonnement avec des lettres en s'aidant du schéma. Ce sera maintenant compréhensible, et il sera intéressant pour le professeur de distinguer ceux de ses élèves qui éprouvent une réelle satisfaction à ce complément.

Pensera-t-on que la méthode que je viens de présenter prend bien du temps ? On fait cette même critique à tout procédé de « redécouverte » dans l'enseignement. Mais il me semble que l'expérience prouve au contraire que c'est du temps gagné ; le rabâchage d'une règle compliquée, imposée sans justification, est long aussi et il est stérile. L'effort fait en commun a entraîné nos élèves, développé leur attention, attiré aussi leur sympathie, et la classe sera prête à aborder avec plus d'entrain le reste du programme.

P.-S. — Ajoutons que si le reste $a - x^2$ est négligeable dans les conditions de l'étude, de sorte que l'on puisse pratiquement écrire $x^2 = a$, on conviendra d'écrire $x = \sqrt{a}$, ou, mieux, $x \simeq \sqrt{a}$.

L. FÉLIX.
