Anneaux où zéro a des diviseurs

Voici quelques exemples susceptibles d'illustrer un aspect délicat de la conférence de M. H. CARTAN, *publiée dans le* Bulletin *176*.

1er EXEMPLE. — Dans l'ensemble des entiers positifs ou nuls, considérons comme *équivalents* ceux qui donnent le même reste dans leur division par 6. L'ensemble constitué par les classes d'équivalence, c'est-à-dire l'ensemble-quotient, possède six éléments, que nous allons noter $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$. Cet ensemble constitue un anneau commutatif pour les opérations d'addition (par exemple, $\bar{2}+\bar{3}=\bar{5}$, $\bar{2}+\bar{5}=\bar{1}$, etc.) et de multiplication (par exemple, $\bar{2}.\bar{4}=\bar{2}$). On vérifie bien la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et les autres conditions exigées par la définition. Or, $\bar{2}.\bar{3}=\bar{0}$, donc l'anneau n'est pas domaine d'intégrité.

Plus généralement, l'anneau des classes d'équivalences modulo p n'est anneau d'intégrité que si p est premier, d'où l'importance de ce cas.

2e EXEMPLE. — Soit E l'ensemble des fonctions d'une variable x continues sur (0,1). Considérant les deux opérations suivantes :

$$u = f + g \quad \text{signifiant} \quad u(x) = f(x) + g(x),$$
$$v = f.g \quad \text{signifiant} \quad v(x) = f(x).g(x).$$

L'ensemble a bien structure d'anneau commutatif. Or, considérons les deux fonctions continues :

$f(x)$ valant 0 sur (0, 1/2) et valant $x - 1/2$ sur (1/2, 1) ;
$g(x)$ valant $x - 1/2$ sur (0, 1/2) et valant 0 sur (1/2, 1).

Leur produit est l'élément neutre de l'addition, c'est-à-dire la fonction constamment nulle. L'ensemble n'est pas un domaine d'intégrité.

3e EXEMPLE. — Considérons l'ensemble C des couples d'entiers modulo 2 : il y a quatre éléments que nous noterons (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Nous définissons la somme de deux couples comme le couple constitué par la somme de ses constituants (modulo 2 naturellement) : ainsi, $(0,1) + (1,1) = (1,0)$.

L'élément neutre de cette addition est $(0,0)$.

Ceci posé, considérons l'ensemble des lois de correspondance transformant un couple en un couple de façon à respecter l'addition : si le transformé du couple c par l'opération t est noté ct, on exige donc $(c + c')t = ct + c't, \ \forall c$

On peut aisément former toutes ces correspondances : on se rend compte qu'il faut toujours $(0,0)\,t = (0,0)$. On distinguera des lois qui donnent comme images les quatre couples de C, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l}(0,0)f = (0,0)\\(0,1)f = (0,1)\\(1,0)f = (1,1)\\(1,1)f = (1,0)\end{array}\right. \qquad \text{et en particulier} \qquad \left\{\begin{array}{l}(0,0)u = (0,0)\\(0,1)u = (0,1)\\(1,0)u = (1,0)\\(1,1)u = (1,1)\end{array}\right.$$

(ce sont les *automorphismes* de C) ; d'autres lois ne donnent pas comme images tous les couples : par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l}(0,0)i = (0,0)\\(0,1)i = (0,1)\\(1,0)i = (0,0)\\(1,1)i = (0,1)\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}(0,0)j = (0,0)\\(0,1)j = (0,0)\\(1,0)j = (0,1)\\(1,1)j = (0,1)\end{array}\right. \qquad \text{et en particulier} \qquad \left\{\begin{array}{l}(0,0)z = (0,0)\\(0,1)z = (0,0)\\(1,0)z = (0,0)\\(1,1)z = (0,0)\end{array}\right.$$

L'ensemble E de toutes ces transformations se nomme l'ensemble des *endomorphismes* de C.

Pour faire de E un anneau, il faut le munir de deux opérations convenant à la définition d'un anneau.

La multiplication est celle qui convient à des transformations : à partir de $ct = c'$ et $c't_1 = c''$, on posera $f = t.t_1$, si $cf = c''$ pour tout c.

La transformation notée plus haut u est l'élément neutre (unité).

L'addition sera définie par $c\,(t + t_1) = ct + ct_1, \ \forall c$, l'addition indiquée au second membre étant celle que nous connaissons dans l'ensemble C des couples.

La transformation notée plus haut z est l'élément neutre (zéro). Il faut vérifier que pour l'addition ainsi définie, E forme bien un groupe et que la multiplication est bien distributive par rapport à cette addition. (On pourra le faire sur les exemples ou plus généralement pour les endomorphismes d'un groupe abélien quelconque. Comme le produit n'est pas commutatif, il faut vérifier la double distributivité à gauche et à droite).

Or l'on contate que $i.j = z$.

L'anneau E n'est donc pas un anneau d'intégrité pour la double raison qu'il n'est pas commutatif et que zéro a des diviseurs.

L. FÉLIX.