

## Sur le théorème de Gauss

Dans son article du *Bulletin* n° 154 (juin 1953). M. LENTIN donne une très intéressante démonstration du théorème sur l'unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

Il remarque au début que la méthode classique exige, par l'intermédiaire du « théorème de Gauss », la théorie du P.G.C.D. Ce n'est, je crois, qu'une apparence. En effet, il suffit de connaître le théorème en question pour un *diviseur premier* seulement. Or ce théorème a une démonstration directe que NIEWENGLOWSKI signale, sous le nom de « raisonnement de Gauss », dans son arithmétique pour la classe de Mathématiques Élémentaires.

Voici cette démonstration, qui a une structure très analogue à celle donnée par M. LENTIN, du moins au départ.

Supposons qu'un nombre *premier*  $p$  divise un produit  $ab$  et plaçons-nous d'abord dans le cas où  $b < p$ .

Soit  $am$  le *plus petit* multiple de  $a$  qui soit divisible par  $p$ . On aura donc :

$$am \leq ab \text{ d'où } m \leq b \text{ et par suite } m < p.$$

Divisons  $p$  par  $m$  :

$$p = mq + m' \text{ avec } 0 \leq m' < m.$$

Multiplions par  $a$  :

$$ap = amq + am' \text{ avec } 0 \leq am' < am.$$

Le nombre  $ap$  est divisible par  $p$  ; le nombre  $amq$  aussi (hypothèse sur  $am$ ) ; donc  $am'$  est aussi divisible par  $p$ . Or la dernière inégalité est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle  $am$  est le plus petit multiple de  $a$  divisible par  $p$ . Donc seule l'égalité limite est valable ; on a donc  $m' = 0$  d'où  $p = mq$ . Mais  $p$  est un nombre premier et il est supérieur à  $m$  ; cette égalité entraîne donc  $m = 1$ .

Il en résulte que le plus petit multiple de  $a$  divisible par  $p$  est  $a \times 1 = a$ .

Si maintenant on suppose  $b > p$ , il suffit de diviser  $b$  par  $p$  :

$$b = pc + b' \text{ avec } b' < p$$

et l'on est ramené facilement au cas précédent.

On a donc finalement le théorème : *Si un produit de deux facteurs est divisible par un nombre premier, ce dernier divise au moins l'un des deux facteurs.*

G. THOVERT (Lycée Ampère, Lyon).