

V. ESSAIS ET VARIÉTÉS

Plaidoyer pour Ménélaüs

1. — Le théorème de Ménélaüs semble l'objet d'un ostracisme incompréhensible dans les programmes de l'Enseignement Secondaire. Les manuels le relèguent dans les applications du produit de deux homothéties, où il vient, qu'on me pardonne l'expression, comme un cheveu sur la soupe.

Personnellement, je considère ce théorème comme un *théorème de base du 3^e Livre*. Il dérive directement du théorème fondamental sur les parallèles coupées par des sécantes (conservation du rapport).

On peut d'abord en montrer la nécessité logique. Etant donné un triangle ABC, un point M sur la droite BC est bien déterminé par le rapport $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, même s'il s'agit du point à l'infini (rapport $+1$). Si donc il existe une relation de position entre trois points M, P, Q, placés respectivement sur les droites BC, CA, AB, il doit exister une relation correspondante entre les trois rapports qui déterminent ces points.

Si les trois points sont colinéaires, on obtient facilement cette relation en projetant la figure sur une sécante quelconque à la droite MPQ, parallèlement à cette droite. On obtient trois nouveaux rapports, formés avec quatre termes distincts seulement, placés alternativement au numérateur et au dénominateur (en écrivant convenablement ces rapports). Il en résulte que leur produit est égal à $+1$:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = +1$$

La relation de Ménélaüs est réciproque ; la démonstration, d'un type classique dans le 3^e Livre, consiste à identifier par exemple le troisième point Q avec le point Q' de rencontre de AB avec la droite MP, en appliquant le théorème direct. Ces démonstrations sont valables pour le point conventionnel à l'infini.

Il est quelquefois intéressant de présenter la relation sous une forme résolue relativement à l'un des rapports ; par exemple :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$$

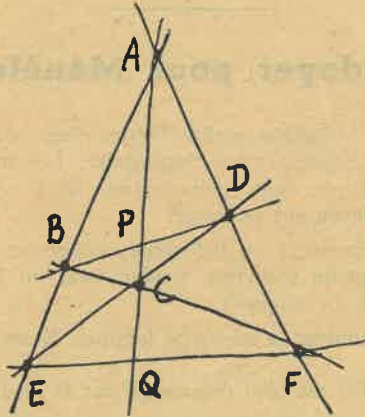
2. — *Théorème de Jean Ceva*. — La même nécessité logique exposée plus haut conduit au théorème de Jean Ceva, lorsque les points M, P, Q sont tels que les droites AM, BP, CQ, soient concourantes. La démonstration peut se faire en appliquant le théorème de Ménélaüs aux triangles ABM et ACM, coupés respectivement par les transversales CQ et BP et en éliminant le rapport contenant le point de concours. On obtient :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = - \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$$

Le théorème de Jean Ceva est réciproque. Les relations sont valables pour les points à l'infini.

3. — Il est inutile de souligner ici l'utilisation de ces théorèmes dans la géométrie du triangle. Mon but est de montrer leur emploi dans certaines questions classiques du cours de Mathématiques Élémentaires.

4. — Ils donnent d'abord immédiatement la *propriété fondamentale du quadrilatère complet*. Soit ABCDEF, un tel quadrilatère, où la diagonale AC coupe en P



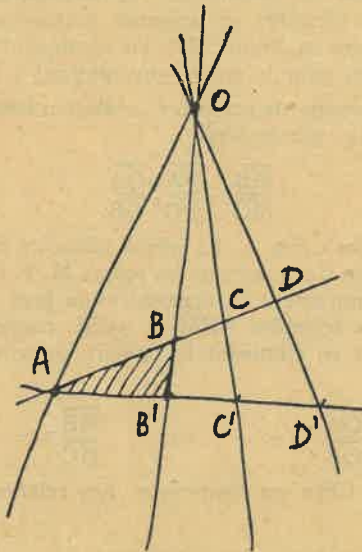
et Q les diagonales BD et EF. La démonstration utilise un triangle ayant la diagonale AC pour côté, par exemple ABC. On a :

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} : \frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} \text{ (Ménélaüs, transversale QFE),}$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = -\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} : \frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} \text{ (Jean Ceva, Ceviennes DB, DC et DA).}$$

D'où la division harmonique (PQ, AC).

5. — La *propriété fondamentale du faisceau de quatre droites* (harmonique ou non) dérive aussi directement du théorème de Ménélaüs.



On constate d'abord que des sécantes parallèles déterminent des divisions ayant même birapport (théorème de Thalès). On choisira alors deux sécantes ABCD et

AB'C'D' ayant un point commun A sur l'un des rayons du faisceau. Soit O le sommet du faisceau ; il suffit d'appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle ABB', coupé par les transversales OCC' et ODD'. Il vient :

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} : \frac{\overline{D'A}}{\overline{D'B}},$$

d'où l'égalité des birapports :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} : \frac{\overline{D'A}}{\overline{D'B}}.$$

(Si l'un des birapports est égal à -1 , il en est de même de tous les autres, et l'on a le faisceau harmonique).

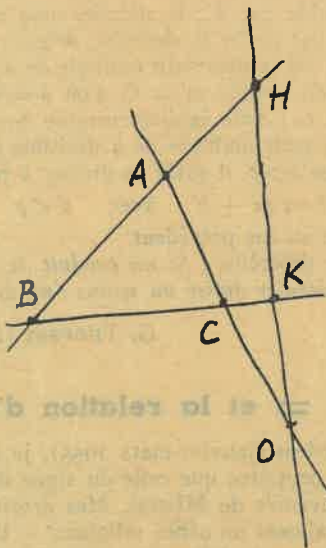
6. — Enfin, le produit de deux homothéties s'étudie aussi avec le théorème de Ménélaüs, et il est intéressant de noter que cette étude est *purement ponctuelle*. De plus, elle peut d'abord se développer sans calculs.

Soit A un point ; l'homothétie de centre H et de rapport h lui fait correspondre un point B ; l'homothétie de centre K et de rapport k , fait correspondre au point B le point C. La droite AC coupe la droite HK au point O ; tous ces points sont coplanaires.

Lorsque A varie, les mesures algébriques $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{AB}$ restent dans des rapports constants ne dépendant que de h ; les mesures algébriques $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, $\overline{BC}$ restent dans des rapports constants ne dépendant que de k .

Le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle HBK coupé par la transversale AC, montre que O partage HK dans un rapport bien déterminé ; donc AC passe par un point fixe.

Le même théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle ABC, coupé par la transversale HKO, montre que le rapport $\frac{\overline{OC}}{\overline{AO}}$ est constant (si O est à distance finie). Donc le produit des deux homothéties est une homothétie. Si O est à l'infini, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ reste parallèle au vecteur $\overrightarrow{HK}$ et dans un rapport constant avec lui ; le produit est une translation.



On termine l'étude en calculant effectivement, par la relation de Ménélaüs, le rapport qui fixe le point O sur la droite HK et le rapport de l'homothétie-produit :

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CK}} : \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{k-1}{k} : \frac{1-h}{1}$$

et $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} : \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = h : \frac{1}{k} = hk$

G. THOVERT (*Lycée Ampère, Lyon*).