

III. ETUDES

Equations et Lieux géométriques Synthèse logique (*)

La résolution des équations et la recherche des lieux géométriques font intervenir un fondement logique commun de notions relatives aux propriétés et aux ensembles.

L'objet de cet exposé est de présenter, d'une manière élémentaire, cette structure sous-jacente et de montrer par des exemples le parti que l'on peut en tirer dans l'enseignement moyen.

I. — PROPOSITIONS, PROPRIETES, RELATIONS ET PROPOSITIONNELLES

a) Considérons les trois phrases :

Le triangle ABC est isocèle,
7 est multiple de 2,
 $3 + 8 = 11$.

Ce sont des *propositions* logiques, c'est-à-dire des énoncés de jugements vrais ou faux.

L'égalité $3 + 8 = 11$
est exacte ;
l'énoncé 7 est multiple de 2
est faux.

Quant à l'énoncé

Le triangle ABC est isocèle,
il est vrai ou faux suivant le triangle désigné par ABC.

Les trois propositions sont, de plus, *singulières* parce qu'il n'y est question que d'*objets individuels déterminés*.

b) A la place d'un individu déterminé, substituons dans ces énoncés un *élément indéterminé* représenté par la lettre x , par exemple. Nous obtenons :

Le triangle x est isocèle,
 x est multiple de 2, (1)
 $x + 8 = 11$.

Nous pouvons aussi introduire plusieurs arguments indéterminés x, y, z :

x est multiple de y ,
 $x + y = 11$, (2)
 $x + y = z$.

* Article reproduit de « Mathematica et Paedagogia », revue trimestrielle de la Société Belge des Prof. de Math., avec l'aimable permission de l'auteur, Président de la Société.

Profitons de cette note pour souligner la façon sympathique et efficace dont M. Servais a toujours offert de coopérer avec l'A.P.M.

Les expressions que nous obtenons de la sorte ne sont plus des énoncés vrais ou faux. Ce ne sont plus des propositions logiques, mais des formes qui donneront de telles propositions lorsqu'on remplacera x, y, z par des éléments individuels déterminés. Les logiciens modernes nomment de telles expressions des *fonctions propositionnelles* dont les lettres x, y, z désignent les *termes ou arguments*. Nous les appellerons brièvement des *propositionnelles*.

c) Les propositionnelles (1) qui ne renferment qu'un argument expriment une *propriété de celui-ci* :

être isocèle,
être multiple de 2,
être différence entre 11 et 8.

Nous désignerons les propriétés par P, Q et les propositionnelles correspondantes par $P(x)$ et $Q(x)$.

Les propositionnelles (2) qui comprennent plusieurs arguments expriment une *relation entre ceux-ci* :

être multiple de,
avoir une somme égale à 11,
avoir une somme égale à z .

Nous désignerons les relations par $R, S, \dots$ et les propositionnelles correspondantes par $R(x, y), S(x, y, z)$.

Si nous considérons une relation entre x et y comme une propriété du couple ordonné (x, y) , nous pourrions employer le concept de propriété dans tous les cas.

Souvent, d'ailleurs, une propriété d'un être est une relation entre des parties de cet être.

Par exemple, la propriété :

un quadrilatère est un parallélogramme
équivalent à la relation :

les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles.

Une propriété ou une relation est encore désignée sous le nom de *condition*.

Nous pourrions donc conclure :

Une propositionnelle exprime une condition portant sur un ou plusieurs arguments indéterminés.

Nous désignerons une propositionnelle par la notation :

$P(x, \dots)$.

II. — REFERENTIEL

Lorsque l'on considère une propositionnelle, une question se pose tout de suite : par quels éléments peut-on éventuellement remplacer les arguments indéterminés pour obtenir un énoncé vrai ? Ou, encore, quels sont les éléments qui vérifient la propriété ou la condition ?

Avant de répondre à cette question, il faut d'abord, pour que le problème soit bien posé, savoir dans quel ensemble il est loisible de prendre les éléments individuels à substituer aux arguments de la proposition-

nelle pour que la proposition obtenue ait un sens, c'est-à-dire puisse être soit vraie, soit fausse.

L'ensemble des éléments où l'on pourra prélever des valeurs des arguments de la propositionnelle doit être donné. Nous l'appellerons *l'ensemble de référence ou le référentiel*.

Les énoncés peuvent suggérer eux-mêmes les ensembles de référence.

Dans « Le triangle x est isocèle », il s'agit des triangles, mais encore faut-il spécifier s'ils sont plans ou sphériques.

Pour « x est multiple de 2 », nous penserons qu'il est question de nombres entiers ; mais sont-ils naturels ? Doit-on y adjoindre le zéro et les nombres entiers négatifs ?

Quant à l'équation $x + y = 11$, doit-on prendre pour x et y des nombres entiers, des nombres réels ou des nombres complexes ?

Ce sont là des précisions sur lesquelles il serait superflu d'insister, si elles étaient toujours présentes à l'esprit des élèves et des mathématiciens. Ne trouve-t-on pas sous la plume de M. Emile BOREL, dans la préface de « Algèbre et Géométrie du second degré », l'opinion suivante :

« Au cours de cette étude, nous introduisons la notion fondamentale de racines imaginaires. C'est, en effet, une grave erreur pédagogique que d'enseigner, comme le prescrivent certains programmes officiels, que les équations du second degré dont les racines sont imaginaires n'ont pas de racines. On tient ainsi comme non avenue l'une des plus belles et des plus fécondes découvertes de l'esprit humain ; on habitue les élèves à répéter des énoncés inexacts, qu'ils devront plus tard apprendre à contredire. »

A coup sûr, c'est commettre une faute de logique que d'affirmer, sans plus, qu'une équation du second degré dont le réalisant est négatif n'a pas de racines, parce qu'on ne dit pas quelle est la nature des racines en cause. Comment s'exprimer alors dans un premier enseignement ? Tout simplement en explicitant le référentiel : Une équation du second degré, dont les coefficients sont des nombres relatifs (ou réels) et dont le réalisant est négatif, n'a pas de racine qui soit un nombre positif, nul ou négatif. Un tel énoncé est clair et ne risque pas d'être contredit par l'introduction des nombres imaginaires.

Lorsque, après avoir défini : des droites parallèles sont des droites situées dans le même plan et n'ayant aucun point commun, on en vient ensuite à considérer que deux droites parallèles se rencontrent à l'infini, il convient de dire que, en passant du premier énoncé au second, on a adjoint aux points à distance finie, considérés jusque-là, les points propres.

En géométrie analytique, il importe aussi de préciser, le cas échéant, si les axes coordonnés, les points et les coefficients des équations considérées sont réels ou imaginaires.

Dans le même ordre d'idées, dire que la quadrature du cercle est impossible n'a de sens que si on précise la nature des lignes que l'on peut employer dans les tracés.

Si nous mettons tant d'insistance, c'est que, faute d'être assez explicite, on risque d'être obscur pour les élèves.

Revenons à la préface de M. Emile BOREL. L'auteur poursuit avec conviction :

« Il faut bien comprendre que les imaginaires existent au même titre que tous les autres êtres mathématiques qui ont été imaginés par les mathématiciens : le cercle, la sphère, l'ellipse, l'hyperbole, le sinus, le cosinus, les logarithmes, etc..., existent parce que les mathématiciens les ont créés ; on n'est pas obligé, bien entendu, de les étudier dans toutes les classes, mais on ne doit jamais en nier l'existence... »

Evidemment, peu de mathématiciens adultes nieront aujourd'hui l'existence des nombres imaginaires. Mais l'histoire est là pour nous rappeler combien il a fallu de temps, et quelles résistances les inventeurs ont dû vaincre, pour faire reconnaître l'existence du zéro, des nombres irrationnels, des nombres négatifs, des nombres imaginaires, des points impropres et des points imaginaires, pour ne parler que des exemples les plus connus.

Cette lente gestation historique a sans doute fait descendre les êtres et relations mathématiques de l'Olympe des vérités platoniciennes pour les faire considérer comme des produits merveilleux de l'invention humaine. Mais, de la création millénaire, nous avons la tendance de ne proposer à nos élèves que les aboutissements. Les aidons-nous assez à élaborer leurs mathématiques, leur proposons-nous des situations qui les poussent, eux aussi, à créer les abstractions ? Le plus souvent, ne nous contentons-nous pas de transmettre dogmatiquement les mathématiques toutes faites ? Pensez aux extensions successives de la notion de nombre où, au lieu d'amener génétiquement les amplifications successives du référentiel numérique, on se borne à poser conventionnellement les définitions des nombres nouveaux. Combien de moments créateurs sont ainsi escamotés et remplacés par des décrets qui n'offrent rien que de sec aux jeunes intelligences ?

Lorsque nous prétendons élaborer une notion à partir du concret, le faisons-nous toujours avec bonheur ? Vous connaissez ces phrases, nous les transcrivons d'un ouvrage de géométrie : « La plus simple de toutes les lignes est la ligne droite. Un fil tendu nous en donne une image... ».

Puis, plus loin : « Dorénavant, quand nous parlerons de droites, il s'agira toujours de droites illimitées, bien qu'en réalité, elles soient limitées par le format du papier. »

Quelle équivoque où sont confondus les êtres physiques concrets perçus par notre expérience et les êtres abstraits conçus par notre imagination ! Que peut-il exister dans un cerveau adolescent si nous pensons si peu ce que nous lui proposons ? Mais, me direz-vous, on parle si peu de tout cela et on ne le demande pas aux examens. D'ailleurs, ces notions se précisent dans la suite.

Encore s'agit-il d'avoir une idée de ce que pensent vos élèves lorsque vous prononcez les mots droite, segment, circonférence, espace. Interrogez-les donc et comptez combien d'entre eux savent que, sur un segment, il y a d'autres points que les extrémités ; qu'une circonférence abstraite

comprend une infinité de points ; que l'espace dont vous parlez au cours est autre chose que l'intérieur de la classe. Questionnez, observez, vous serez déconcertés par la diversité des réponses. Vous verrez alors la nécessité d'aider, par tout moyen, nos élèves à créer les mathématiques qu'ils doivent savoir.

Nous voilà loin des lieux géométriques et des équations, me direz-vous. Au contraire, nous sommes à la fondation même de notre sujet puisqu'il s'agit de connaître ce que savent nos élèves des nombres, des points, des lignes et des relations qui les lient.

III. — EXTENSION D'UNE PROPRIÉTÉ — EXISTENCE, UNICITE, IDENTITE

a) Une fois précisé le domaine de référence où existent les êtres que nous pouvons substituer aux arguments d'une propositionnelle $P(x, \dots)$ pour lui donner un sens, la question se pose s'il y a, dans ce référentiel, au moins un être, soit $x_1, \dots$, pour lequel l'énoncé $P(x_1, \dots)$ soit vrai. On dit alors que $x_1, \dots$ satisfait ou vérifie la propositionnelle $P(x, \dots)$ ou la propriété P , ou, encore, que $x_1, \dots$ est solution de $P(x, \dots)$. En pareil cas, la proposition :

Il existe au moins un x tel que $P(x, \dots)$

est vraie.

Une telle proposition est appelée proposition d'existence. On peut la désigner par :

$$(Ex) P(x, \dots),$$

« il existe un x , au moins, tel que $P(x, \dots)$ ».

b) Nous pouvons aussi considérer l'ensemble ayant pour élément tout x satisfaisant à $P(x, \dots)$. Ainsi, à chaque propriété P , ou propositionnelle $P(x, \dots)$, nous ferons correspondre l'ensemble $E(P)$ des éléments qui la satisfont au sein du référentiel considéré.

L'ensemble $E(P)$ associé à la propriété P est appelé l'*extension* de la propriété P , tandis que toute propriété, telle que P , qui est vérifiée par tout élément de $E(P)$ appartient à la *compréhension* de cet ensemble.

A l'ensemble $E(P)$ est associé le concept de l'*élément courant ou générique* qui satisfait à $P(x, \dots)$, c'est-à-dire de l'*élément quelconque* de $E(P)$. C'est là une notion qu'il faut veiller à faire acquérir à nos élèves, qui pensent au début surtout aux êtres individuels singuliers.

Lorsque $E(P)$ ne contient qu'un nombre fini déterminé d'éléments, nous dirons que les solutions de $P(x, \dots)$ sont déterminées.

En particulier, quand $E(P)$ ne contient qu'un seul être, il y a *existence et unicité* de la solution de $P(x)$.

Enfin, si $P(x)$ n'a aucune solution dans le référentiel, $E(P)$ sera un *ensemble vide*, ne comprenant aucun élément, et la propriété P sera dite *impossible*. Faut-il souligner que l'ensemble $E(P)$ dépend du domaine de référence dans lequel sont pris les éléments qui, portés dans $P(x)$, lui donnent un sens ? Par exemple, sur la sphère, il existe des triangles bi- et trirectangles, tandis qu'il n'y en a pas dans le plan.

Dans l'élaboration de la pensée mathématique des élèves, comme dans l'évolution historique des mathématiques, les référentiels subissent

des extensions successives. De la sorte, une propriété impossible dans un référentiel pourra trouver une solution dans le référentiel élargi.

Ainsi que nous l'avons déjà conseillé, à propos des solutions d'une équation, lorsqu'une même condition sera considérée successivement dans deux référentiels, il conviendra, pour éviter des erreurs, de noter explicitement le référentiel qui est, d'ordinaire, sous-entendu.

Par exemple, puisque l'on considère le lieu des points équidistants des extrémités d'un segment, dans le plan, puis dans l'espace, il sera utile de dire successivement :

Dans le plan, le lieu des points équidistants des extrémités d'un segment est la médiatrice de ce segment.

Dans l'espace, le lieu... est le plan médiateur du segment.

c) D'ordinaire, l'ensemble $E(P)$ des éléments satisfaisant à une propositionnelle $P(x)$ n'est qu'une partie du référentiel.

Un cas remarquable sera celui où $P(x)$ est satisfaite pour tout élément du référentiel ; dans ce cas, l'ensemble $E(P)$ est le référentiel lui-même. Nous dirons alors que $P(x)$ est une *identité*. Nous écrirons :

$$(Tx) P(x)$$

« pour tout x , $P(x)$ ».

La proposition ainsi obtenue est dite *universelle* parce qu'elle s'applique à tout élément du référentiel.

Par exemple, si nous représentons par :

$$x = y,$$

l'énoncé :

« x et y désignent le même élément », nous aurons, dans tout référentiel, l'identité :

$$x = x,$$

étant entendu qu'une même lettre désigne le même élément partout où elle figure dans une relation donnée.

Nous savons que, pour tous les nombres considérés dans l'algèbre élémentaire, la propositionnelle :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

est satisfaite. Elle est donc une identité de ce référentiel.

d) Les notions que nous avons introduites permettent de faire saisir la nature logique des trois types d'égalités rencontrées en algèbre élémentaire.

1) Une égalité numérique :

$$3 + 5 = 8,$$

est une proposition singulière ;

2) Une identité littérale :

$$x + y = y + x,$$

donne une proposition universelle toujours vraie :

$$(Tx, y) (x + y = y + x) ;$$

3) Une équation :

$$x + y = z,$$

est une propositionnelle ; elle n'est ni vraie, ni fausse tant que x, y, z ne sont pas donnés.

IV. — IMPLICATION DE PROPRIÉTÉS, INCLUSION D'ENSEMBLES

La structure de théorème la plus fréquente est l'*implication* entre propriétés, ou propositionnelles.

On sait que, si dans chaque cas où une propriété P est satisfaite, une propriété Q l'est aussi, nécessairement, on dit que P *implique* ou *entraîne* Q .

On écrit

$$P \rightarrow Q$$

« si P alors Q ».

Pour établir la vérité d'une telle implication, il faut démontrer que si un x , quelconque, satisfait à $P(x)$, il vérifie nécessairement $Q(x)$.

Lorsque l'implication

$$P \rightarrow Q$$

est vraie, il suffit que la propriété P soit satisfaite pour que la propriété Q soit *nécessairement* vérifiée. De sorte que :

la propriété P est *condition suffisante* de la propriété Q , et que

la propriété Q est *condition nécessaire* de la propriété P .

Cette double manière d'exprimer une même relation d'implication se montre particulièrement suggestive. Pour peu que les élèves s'exercent à exprimer quelques implications sous cette double forme, elle leur devient familière.

Aux propriétés P et Q correspondent les ensembles $E(P)$ et $E(Q)$ comprenant les éléments qui satisfont respectivement à P et à Q .

Lorsque l'on a

$$P \rightarrow Q,$$

tout élément qui satisfait à P satisfait aussi à Q . Par suite, tout élément de $E(P)$ appartient à $E(Q)$. On dit que $E(P)$ est *contenu* ou *inclus* dans $E(Q)$, ce qui s'écrit :

$$E(P) \subset E(Q)$$

« $E(P)$ inclus dans $E(Q)$ ».

A l'implication entre propriétés

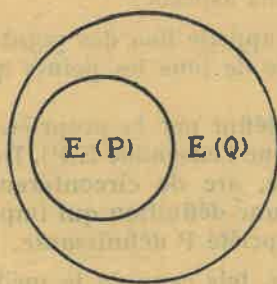
$$P \rightarrow Q$$

correspond l'inclusion entre leurs extensions

$$E(P) \subset E(Q).$$

Si on représente $E(P)$ et $E(Q)$ par les intérieurs de deux cercles, comme le faisait déjà EULER, on a le schéma :

$$P \rightarrow Q$$



(fig. 1)

$$E(P) \subset E(Q)$$

Exemples :

1) Dire : si un quadrilatère est rectangle, il a ses diagonales égales, revient à affirmer : l'ensemble des rectangles est contenu dans l'ensemble des quadrilatères à diagonales égales.

2) Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une équation :

$$A(x, \dots) = B(x, \dots) \quad (1)$$

par une expression $C(x, \dots)$, définie pour toute solution de cette équation, mais pouvant être nulle, on obtient l'équation :

$$A(x, \dots) C(x, \dots) = B(x, \dots) C(x, \dots) \quad (2)$$

qui est vérifiée par toute solution de la première.

La première équation implique donc la seconde et l'ensemble des solutions de (1) est contenu dans l'ensemble des solutions de (2).

V. — EQUIVALENCE DE PROPRIÉTÉS, IDENTITÉ D'ENSEMBLES

a) Lorsque l'on a, à la fois, les deux implications réciproques :

$$P \rightarrow Q \\ \text{et } Q \rightarrow P,$$

chacune des propriétés P ou Q est *condition nécessaire et suffisante* de l'autre. Elles sont donc satisfaites dans les mêmes cas. On dit qu'elles sont *logiquement équivalentes* et on écrit :

$$P \rightleftharpoons Q ;$$

alors, on a, entre les ensembles $E(P)$ et $E(Q)$, les deux inclusions réciproques :

$$E(P) \subset E(Q), \\ E(Q) \subset E(P).$$

Par suite, l'ensemble $E(P)$ et l'ensemble $E(Q)$ ont les mêmes éléments ; ils sont *confondus* en un seul et même ensemble :

$$E(Q) = E(P).$$

A l'équivalence de deux propriétés P et Q correspond l'identité de leurs extensions $E(P)$ et $E(Q)$.

b) Du point de vue logique, la question des lieux géométriques de points se présente sous trois aspects :

1) *Par définition*, on appelle lieu des points satisfaisant à une propriété P donnée l'ensemble de tous les points qui satisfont à cette propriété.

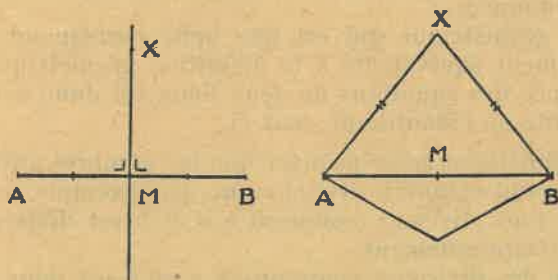
Le lieu géométrique défini par la propriété P de l'élément courant (point, droite, etc...) est donc l'ensemble $E(P)$. De nombreux lieux : demi-plan, circonférence, cercle, arc de circonférence, segment circulaire, etc..., sont introduits par une définition qui impose un nom à l'ensemble $E(P)$ déterminé par la propriété P définissante.

2) Certains *théorèmes*, tels ceux de la médiatrice d'un segment ou de la bissectrice d'un angle, affirment l'identité de deux lieux déterminés par des propriétés P et Q dont on établit l'équivalence.

Pour reprendre l'exemple banal de la médiatrice d'un segment AB, on peut représenter, comme suit, les propriétés P et Q et les ensembles correspondants :

P : $MX \perp AB$
et $AM = MB$.

Q : $AX = BX$.



(fig. 2)

$E(P)$: ensemble des points de la perpendiculaire élevée au segment AB en son milieu (définition de la médiatrice).

$E(Q)$: ensemble des points du plan équidistants des points A et B.

On prouve les deux implications réciproques :

$$P \rightarrow Q \quad \text{et} \quad Q \rightarrow P,$$

ce qui équivaut à :

$$E(P) \subset E(Q) \quad \text{et} \quad E(Q) \subset E(P).$$

On conclut :

$$P \Leftrightarrow Q,$$

ou encore :

$$E(P) = E(Q).$$

3) Dans la *recherche* d'un lieu, on donne la propriété P qui définit le lieu et on demande de trouver une propriété Q équivalente à P.

Lorsqu'on établit, par l'analyse, la proposition directe :

$$P \rightarrow Q,$$

$$\text{ou } E(P) \subset E(Q),$$

certains auteurs appellent « lieu » non pas $E(P)$, mais $E(Q)$, ce qui n'est pas conforme à la définition, ou est prématuré, puisqu'on ne sait pas encore si, réciproquement, $E(Q) \subset E(P)$.

De même, dans la réciproque, ils parleront de « parties utiles de lieu » en désignant des parties utiles de $E(Q)$. Parler de parties utiles de lieu $E(P)$ n'a aucun sens puisque, par définition, $E(P)$ est le lieu déterminé par la propriété P.

Pour éviter ces difficultés, il peut être judicieux d'appeler $E(Q)$ l'ensemble trouvé (par la directe) et de parler, éventuellement, de partie utile de cet ensemble.

c) Deux équations équivalentes sont deux propositionnelles logiquement équivalentes.

Pour établir cette équivalence, on démontre que les ensembles correspondants sont identiques en prouvant que toute solution de l'une des équations est solution de l'autre, et réciproquement.

d) En géométrie analytique, grâce à l'usage d'un système de coordonnées, les points du plan, par exemple, sont mis en correspondance avec leurs coordonnées.

A un lieu géométrique qui est une ligne correspond une équation qui est logiquement équivalente à la définition géométrique de la ligne.

L'équivalence des équations de deux lieux est donc condition nécessaire et suffisante de l'identité de ceux-ci.

e) En arithmétique, pour prouver que les nombres entiers a et b ont le même plus grand commun diviseur que, par exemple, a et $a + b$, on démontre que tout diviseur commun à a et b est diviseur commun à a et $a + b$, et réciproquement.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est donc le même que celui des diviseurs communs à a et $a + b$. D'où :

$$D(a, b) = D(a, a + b).$$

VI. — CONJONCTION DE PROPRIETES,

• INTERSECTION D'ENSEMBLES

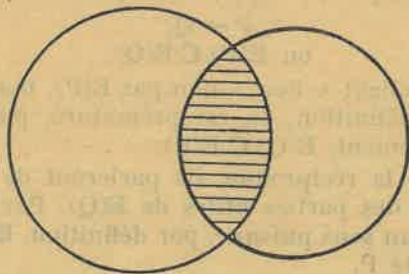
a) Pour terminer, disons quelques mots de deux opérations logiques qui permettent de composer les propriétés et les propositionnelles.

L'une consiste à considérer simultanément deux (ou plusieurs) propriétés P et Q . On obtient ainsi leur *conjonction* :

P et Q ,

qui est satisfaite seulement lorsque les propriétés sont vérifiées à la fois.

A la conjonction des propositions P et Q correspond l'*intersection* des ensembles $E(P)$ et $E(Q)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments communs appartenant, à la fois, à $E(P)$ et $E(Q)$. L'intersection des ensembles figurés par les cercles est donc représenté par la partie hachurée.



(fig. 3)

Lorsque les propriétés P , Q sont *compatibles*, il existe au moins un élément qui vérifie leur conjonction P et Q . L'intersection de $E(P)$ et $E(Q)$ n'est donc pas vide. $E(P)$ et $E(Q)$ *empiètent* l'un sur l'autre (fig. 3).

Lorsque les propriétés P et Q sont *incompatibles* ou *contraires*, l'intersection des ensembles $E(P)$ et $E(Q)$ est vide. On dit que ces ensembles sont *disjoints*.

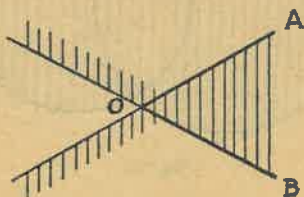
Par exemple, deux droites, ou deux plans parallèles, sont des ensembles disjoints.

On peut figurer des ensembles disjoints par des cercles extérieurs.

b) La méthode de construction géométrique par intersection de lieux est la plus puissante.

Les intersections interviennent aussi dans la définition et la recherche de lieux nouveaux à partir de lieux connus.

Par exemple, un angle saillant AOB (fig. 4) est l'intersection de deux demi-plans.



(fig. 4)

Lorsque nous recherchons le lieu des milieux des cordes interceptées par une circonférence (O, R) sur les sécantes passant par un point fixe A , il convient de faire remarquer que le milieu M d'une corde est intérieur au cercle (O, R) et qu'il appartient à la circonférence de diamètre OA . L'étudiant est alors conduit, dès l'analyse de la question, à prendre l'intersection de ces deux lieux.

c) Le système formé par plusieurs équations (ou inéquations) simultanées est tout simplement la conjonction des propositionnelles que sont ces équations. La notion de compatibilité de plusieurs propositionnelles s'applique immédiatement aux systèmes d'équations.

d) La résolution graphique de systèmes d'équations ramène la détermination des solutions communes à l'intersection des lieux représentant les équations dans un système de coordonnées.

On peut en dire autant de la résolution graphique des inéquations.

e) Pour donner un exemple plus général, remarquons que, puisque être un carré équivaut à être à la fois un losange et un rectangle, l'ensemble des carrés est l'intersection de l'ensemble des losanges et de l'ensemble des rectangles.

VII. — DISJONCTION DE PROPRIÉTÉS, REUNION D'ENSEMBLES

a) Une seconde opération sur des propriétés $P, Q, \dots$ consiste à considérer la *disjonction* de ces propriétés, c'est-à-dire la propriété

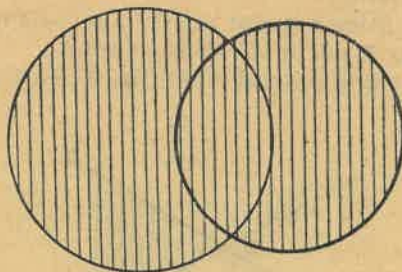
P ou Q

qui est satisfaite lorsque l'une au moins des propriétés P, Q est satisfaite, sans exclure les cas où elles sont simultanément vérifiées ⁽¹⁾.

A la disjonction

P ou Q

correspond la *réunion* des ensembles E(P), E(Q), qui est l'ensemble de tous les éléments appartenant tant à E(P) qu'à E(Q) (fig. 5).



(fig. 5)

b) 1) La disjonction de plusieurs équations intervient dans le cas d'une équation qui se scinde.

En effet, lorsque les expressions A(x,...) et B(x,...) sont définies pour les solutions de l'équation :

$$A(x,...) \cdot B(x,...) = 0,$$

cette équation a pour solutions toutes celles des équations.

$$A(x,...) = 0,$$

$$B(x,...) = 0.$$

Il s'ensuit que si les expressions A et B sont définies pour les solutions de l'équation :

$$A^2 = B^2,$$

celle-ci se scinde en :

$$A = B,$$

ou :

$$A = -B,$$

les deux dernières équations pouvant d'ailleurs être simultanément vérifiées si A = 0 et B = 0.

L'ensemble des solutions de :

$$A^2 = B^2$$

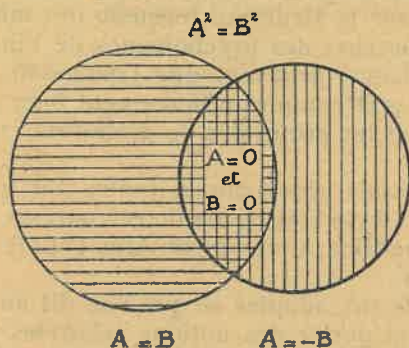
est donc la réunion des solutions de :

$$A = B, \quad A = -B.$$

La conjonction de ces dernières équations est vérifiée par les solutions de A = 0 et B = 0.

⁽¹⁾ Il y a une seconde espèce de disjonction, dite exclusive, qui exclut la conjonction des propriétés P et Q.

On a ainsi le schéma :

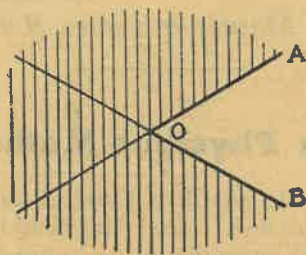


(fig. 6)

2) Dans le même ordre d'idées, en géométrie analytique, l'équation quadratique de deux droites est l'équation de la réunion de ces droites.

c) De nombreux lieux géométriques sont obtenus par la réunion de lieux connus.

Par exemple, un angle rentrant AOB est la réunion de deux demi-plans.



(fig. 7)

Comme nos élèves se contentent souvent d'un seul arc capable lorsqu'il s'agit, dans le plan, du lieu des points d'où un segment donné est vu sous un angle donné, apprenons-leur donc à dire que le lieu est la réunion de deux arcs capables.

d) Il nous suffira de rappeler que la formation du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres et celle de leur plus petit multiple commun font intervenir respectivement l'intersection et la réunion des facteurs premiers des nombres donnés pour montrer combien les intersections et les réunions d'ensembles jouent un rôle important en mathématiques élémentaires.

CONCLUSION

Pourquoi, direz-vous, faut-il expliciter ces notions élémentaires qui sont connues pratiquement de tous ?

C'est d'abord parce que ces notions élémentaires sont fondamentales. Elles font partie de la base sur laquelle s'édifient toutes les discipli-

nes mathématiques, ainsi que le montrent encore les travaux récents de l'école des Bourbaki sur la structure formelle des mathématiques.

De plus, les recherches des psychologues de l'intelligence, en particulier celles de J. PIAGET, prouvent que l'inclusion, l'intersection et la réunion d'ensembles sont connues efficacement bien avant les propriétés des nombres entiers et les propriétés de géométrie euclidienne que nous croyons élémentaires.

Enfin, tous les essais pédagogiques tentés par quelques-uns d'entre nous pour rendre les élèves conscients de ces notions ont suscité l'intérêt et facilité la compréhension, notamment dans l'étude des lieux géométriques et des équations.

Il faut, cela va de soi, adapter ce que l'on dit au niveau des classes. Pour montrer toute la portée des notions éclaircies et être accessible à tous, il convient de prendre des exemples dans la langue maternelle et dans la vie pratique.

Les élèves qui dégagent ainsi des structures foncières de leur intelligence ont le contentement que donnent une meilleure compréhension des choses et une plus profonde conscience de soi. Et nous avons senti plus d'une fois le poids de leur reproche lorsqu'ils ont demandé : « Pourquoi ne nous a-t-on pas parlé ainsi plus tôt ? »

W. SERVAIS,

Athénée du Centre, Morlanwelz (Belgique).
