

Sur les théorèmes qui permettent de déduire le sens de variation d'une fonction du signe de la dérivée

Notation.

Nous noterons : $]a, b[$ l'ensemble des valeurs x telles que : $a < x < b$,
 $[a, b]$ l'ensemble des valeurs x telles que : $a \leq x \leq b$,
 $]a, b]$ l'ensemble des valeurs x telles que : $a < x \leq b$,
 $[a, b[$ l'ensemble des valeurs x telles que : $a \leq x < b$.

Les théorèmes en question sont les suivants :

- I. Si une fonction $f(x)$ est définie et continue dans $[a, b]$, si elle est dérivable dans $]a, b[$ et si sa dérivée $f'(x)$ y est nulle, la fonction est constante dans $[a, b]$.
- II. Si une fonction $f(x)$ est définie et continue dans $[a, b]$, si elle est dérivable dans $]a, b[$ et si sa dérivée $f'(x)$ est positive, ou nulle pour des valeurs isolées de la variable, dans $]a, b[$, la fonction $f(x)$ est croissante dans $[a, b]$.
- III. Si une fonction $f(x)$ est définie et continue dans $[a, b]$, si elle est dérivable dans $]a, b[$ et si sa dérivée $f'(x)$ est négative, ou nulle pour des valeurs isolées de la variable, dans $]a, b[$, la fonction $f(x)$ est décroissante dans $[a, b]$.

Ces trois théorèmes sont d'un usage courant dès la classe de « Mathématiques Élémentaires » où leur démonstration n'est pas au programme. Celle-ci est donnée dans les classes supérieures ; elle est basée habituellement sur la « formule des accroissements finis », qui découle du théorème de Rolle ; en ce qui concerne ce dernier, il y a lieu de remarquer que sa démonstration n'est donnée dans la classe de Spéciales qu'en admettant le théorème suivant : « Une fonction $f(x)$, définie et continue dans $[a, b]$, y admet une borne supérieure et une borne inférieure précises, atteintes respectivement pour une valeur au moins de $[a, b]$. »

Sans prétendre à un exposé original (1) nous voudrions signaler qu'on arrive au but par une méthode plus directe et plus près de la définition de la dérivée. La voici :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — « Si une fonction $f(x)$ est définie, continue et dérivable dans un intervalle contenant $[\alpha, \beta]$ et si sa dérivée $f'(x)$ est positive ou nulle dans $[\alpha, \beta]$, on a : $f(\beta) \geq f(\alpha)$; si, en outre, il existe au moins une valeur γ de $] \alpha, \beta [$ pour laquelle $f'(\gamma) > 0$ on a $f(\beta) > f(\alpha)$.

(1) Voir H. LEBESGUE : « Leçons sur l'intégration », 2^e édition, chapitre V, page 84 et note pages 336-337, et N. BOUREAKI : « Fonctions d'une variable réelle », chapitre I, § 2, n° 2.

Démonstration. — Etant donné $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit, on peut, puisque par hypothèse $f'(a) \geq 0$, trouver u dans $]a, \beta]$, tel que : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq -\varepsilon$ pour tout x de $]a, u]$, c'est-à-dire tel que :

$$f(x) - f(a) \geq -\varepsilon(x - a), \quad \text{pour tout } x \text{ de }]a, u].$$

Comme cette condition a lieu également pour $x = a$, on peut trouver u dans $]a, \beta]$, tel que :

$$(1) \quad f(x) - f(a) \geq -\varepsilon(x - a) \quad \text{pour tout } x \text{ de } [a, u].$$

Soit ξ la plus grande valeur possible de u ; nous allons démontrer qu'on a nécessairement $\xi = \beta$.

Supposons en effet $\xi < \beta$; cela signifie que (1) a lieu pour tout x dans $[a, \xi]$, mais ne peut pas avoir lieu pour tout x dans $[\xi, \xi']$ avec $\xi < \xi' < \beta$.

Or, $f'(\xi) \geq 0$; on peut donc trouver ξ' dans $[\xi, \beta]$ tel que :

$$(2) \quad f(x) - f(\xi) \geq -\varepsilon(x - \xi) \quad \text{pour tout } x \text{ de } [\xi, \xi'].$$

En tenant compte de (2) et de (1) lorsque $x = \xi$, à savoir :

$$f(\xi) - f(a) \geq -\varepsilon(\xi - a),$$

il vient :

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(\xi) + f(\xi) - f(a) \geq -\varepsilon(x - \xi) - \varepsilon(\xi - a) = -\varepsilon(x - a) \quad \text{pour tout } x \text{ de } [\xi, \xi'] ;$$

d'où contradiction, et, par suite $\xi = \beta$. On a donc (1) pour $x = \beta$, c'est-à-dire : $f(\beta) - f(a) \geq -\varepsilon(\beta - a)$, et comme ε est arbitrairement petit $f(\beta) - f(a) \geq 0$.

Si $f(\beta) = f(a)$ prenons u tel que $a < u < \beta$; le résultat précédent s'applique dans $[a, u]$ et $[u, \beta]$, d'où :

$$f(a) \leq f(u) \quad \text{et} \quad f(u) \leq f(\beta),$$

et par suite $f(a) = f(\beta) = f(u)$; $f(x)$ est donc constante dans $]a, \beta]$, d'où $f'(x) = 0$ dans $]a, \beta]$; il en résulte qu'on a nécessairement $f(\beta) > f(a)$ si $f'(\gamma) > 0$ avec $a < \gamma < \beta$ (2).

Les démonstrations des théorèmes I, II, III, résultent immédiatement du théorème fondamental.

Théorème I. — Soient a et β tels que : $a < \alpha < \beta < b$. Le théorème fondamental appliqué à $f(x)$ et à $-f(x)$ permet d'écrire :

$$f(\beta) \geq f(a) \quad \text{et} \quad -f(\beta) \geq -f(a),$$

d'où $f(a) = f(\beta)$.

$f(x)$ est donc constante dans $]a, b[$ et par suite dans $[a, b]$, car elle est continue dans $[a, b]$.

Théorème II. — Soient a et β tels que : $a < \alpha < \beta < b$; il écrit γ dans $]a, \beta]$ tel que $f'(\gamma) > 0$, d'où, d'après le théorème fondamental $f(\beta) > f(a)$; $f(x)$ est donc croissante dans $]a, b[$ et par suite dans $[a, b]$, car elle est continue dans $[a, b]$.

Théorème III. — On remarque que le théorème II s'applique à $-f(x)$ (3).

Jacques LEGRAND, professeur agrégé au Lycée de Biarritz.

(2) Cette démonstration du théorème fondamental a beaucoup d'analogie avec une certaine démonstration du « lemme de Borel-Lebesgue ». Cf. H. LEBESGUE, ouvrage cité, chapitre VII, page 112 ; dans ce livre l'auteur montre également que le raisonnement par l'absurde de la démonstration peut être remplacé par celui de récurrence transfinie : « Note sur les nombres transfinis », pages 335, 336, 337, 338.

(3) Dans l'énoncé des théorèmes I et II on peut remplacer : « ou nulle pour des valeurs isolées de la variable », par l'hypothèse plus générale : « ou nulle pour des valeurs de la variable non denses (Il faut entendre par là que l'ensemble des points où $f'(x) \neq 0$ est dense dans $]a, b[$) dans $]a, b[$ ». D'ailleurs dans les ouvrages cités (1), le théorème fondamental est démontré avec des hypothèses plus fortes, ce qui permet des énoncés encore plus généraux pour les théorèmes I et II.