

A propos de l'orientation dans l'espace

Divers articles parus dans de récents *Bulletins* (M. MIRABEL, dans les n^{os} 160 et 167, M. WEBER, dans le n^o 165) ont attiré l'attention sur la question de l'orientation spatiale. Je me propose de montrer comment la méthode de M. CHOQUET, exposée dans le *Bulletin* n^o 158, qui introduit si élégamment l'orientation dans le plan, peut s'étendre à l'espace.

DÉCOMPOSITION D'UNE ISOMÉTRIE DANS L'ESPACE EN UN PRODUIT DE SYMÉTRIES PLANAIRES. — On établit d'abord que *toute isométrie dans l'espace est équivalente au*

produit de quatre symétries planaires au plus (cf. Bulletin n° 158, p. 24 : extension immédiate). Cette propriété nous invite à étudier les produits de symétries planaires.

RÉDUCTION D'UN PRODUIT DE SYMÉTRIES PLANAIRES. — Considérons (dans l'espace complété) un produit de cinq symétries planaires, soit $P_1P_2P_3P_4P_5$ (en notant simplement chacune de ces symétries par son plan invariant). Les trois plans $P_1P_2P_3$ ont au moins un point commun A, à distance finie ou à l'infini, et les deux plans P_4P_5 ont au moins une droite commune D, à distance finie ou à l'infini.

1) Supposons que le plan AD, étant bien déterminé, ne soit pas le plan de l'infini. On pourra alors remplacer le produit P_4P_5 par un produit équivalent $P'_4P'_5$ de même arête, en prenant pour plan P'_4 le plan AD, c'est-à-dire un plan situé à distance finie et passant par A. Dans le nouveau produit $P_1P_2P_3P'_4P'_5$ ainsi obtenu, le produit partiel $(P_1P_2)(P_3P'_4)$ conserve le point A. Si A est à distance finie, ce sera le produit de deux rotations d'axes concourants (ou confondus) — donc ce sera une rotation. Si A est à l'infini, ce sera, soit le produit de deux rotations d'axes parallèles (ou confondus), soit le produit d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à l'axe, soit le produit de deux translations — donc ce sera, soit une rotation, soit une translation. Dans tous les cas $(P_1P_2)(P_3P'_4)$ pourra être remplacé par le produit de deux symétries Q_1Q_2 dont les plans situés à distance finie passent par A, et le produit $P_1P_2P_3P_4P_5$ sera finalement équivalent au produit de trois symétries planaires $Q_1Q_2P'_5$.

2) Cette méthode ne s'applique plus lorsque le plan AD, étant bien déterminé, est le plan de l'infini. Mais alors la réduction de $P_1P_2P_3P_4P_5$ à un produit de trois symétries planaires reste possible : remarquons, en effet, que dans ce cas P_4 et P_5 sont parallèles (puisque D est à l'infini), tandis que P_3 et P_4 sont sécants (sinon le point A à l'infini serait sur D), et l'on sortira de la conjoncture d'exception en remplaçant d'abord le produit P_3P_4 par un produit équivalent $P''_3P''_4$ de même arête dans lequel P''_4 ne sera pas parallèle à P_5 .

En résumé, le produit de cinq symétries planaires est équivalent au produit de trois symétries planaires.

Il en résulte qu'un produit de n symétries planaires, où $n \geq 5$, peut être réduit de proche en proche à un produit de trois symétries planaires si n est impair, ou de quatre symétries planaires si n est pair.

CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DANS L'ESPACE. — Une isométrie dans l'espace T ne peut être équivalente à la fois au produit d'un nombre pair de symétries planaires et au produit d'un nombre impair de symétries planaires. En effet, s'il en était ainsi, TT^{-1} , c'est-à-dire la transformation identique de l'espace, soit I, serait équivalente au produit d'un nombre impair de symétries planaires, donc, d'après le résultat précédent, serait équivalente, soit à une symétrie P_1 , soit au produit de trois symétries $P_1P_2P_3$. Or :

1) on ne saurait avoir $I = P_1$, car I admet un espace de points doubles, tandis que P_1 admet un plan de points doubles ;

2) on ne saurait avoir $I = P_1P_2P_3$, c'est-à-dire $P_1 = P_2P_3$, car P_1 admet un plan de points doubles, tandis que P_2P_3 , ou bien admet un espace de points doubles (plans confondus), ou bien n'admet aucun point double (plans parallèles), ou bien admet une droite de points doubles (plans sécants).

Ainsi, les isométries dans l'espace se répartissent en deux classes exclusives l'une de l'autre, ce qui justifie la définition suivante :

1) *isométrie directe* ou *positive* : toute isométrie qui équivaut au produit d'un nombre pair de symétries planaires ;

2) *isométrie inverse* ou *négative* : toute isométrie qui équivaut au produit d'un nombre impair de symétries planaires.

ORIENTATION RELATIVE DE DEUX TRIÈDRES ORIENTÉS. — On définit d'abord l'orientation relative de deux trièdres trirectangles orientés par la classe de l'isométrie bien définie dans laquelle ils se correspondent, puis l'orientation relative de deux trièdres orientés quelconques au moyen de deux trièdres trirectangles orientés qu'on leur associe respectivement (cf. *Bulletin* n° 158, p. 25 : Extension immédiate).

Enfin, *les isométries dans l'espace, qui appartiennent à une famille continue, sont toutes de même sens* : c'est l'énoncé dans l'espace du théorème de M. CHOQUET, qui dote le « bonhomme d'Ampère » de son statut logique.

En tout état de cause, l'outil le plus puissant dans le domaine de l'orientation reste peut-être le calcul vectoriel, qui définit le sens relatif de deux n -vecteurs $(\vec{U}_1 \vec{U}_2 \dots \vec{U}_n)$ et $(\vec{V}_1 \vec{V}_2 \dots \vec{V}_n)$ dans l'espace euclidien à n dimensions par le signe du déterminant d'ordre n dont l'élément général (à deux indices i, k) est le produit scalaire $\vec{U}_i \vec{V}_k$.

Jean CHAUVINEAU, professeur au Lycée Henri-IV.