A propos des différentielles des fonctions de plus d'une variable

Il existe deux types de définition de la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables.

Les uns la définissent comme une combinaison linéaire des dérivées partielles du premier ordre dont les coefficients constituent de nouvelles variables indépendantes. La différentielle, calculée en un point particulier, apparaît ainsi comme une forme linéaire par rapport aux nouvelles variables.

On montre immédiatement, en prenant comme fonctions particulières chacune des variables x, y, z, que les coefficients ne sont autres que dx, dy, dz.

On montre ensuite que la dérivation des fonctions composées équivaut à l'invariance de *la forme* de la différentielle totale dans tous les changements de variables.

La dérivation des fonctions implicites s'exprime par la différentiation des relations qui relient des variables non indépendantes.

Une autre méthode, qui paraît avoir les faveurs d'éminents mathématiciens, considère l'accroissement de la fonction correspondant à des accroissements infiniment petits des variables et définit la différentielle comme la partie linéaire de cet accroissement. Cette seconde façon de faire me paraît présenter des inconvénients à la fois d'ordre logique et d'ordre psychologique.

Inconvénients d'ordre logique : La différentielle apparaît ainsi uniquement comme un infiniment petit. Ceci paraît en contradiction avec le rôle que jouent les différentielles quand on définit la multiplicité linéaire tangente à une multiplicité donnée, car alors les différentielles des variables indépendantes ne sont nullement des infiniment petits, mais des scalaires arbitraires pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$. Vouloir considérer les différentielles des variables comme des accroissements, conduit à limiter arbitrairement leurs variations lorsque le domaine de continuité de la fonction et de ses dérivées du premier ordre ne s'étend pas à l'infini dans toutes les directions.

Inconvénients d'ordre psychologique : En écrivant que Δf est la somme de df et de termes résiduels, que l'on qualifie assez naturellement « d'ordre supérieur », on conduit le lecteur presque invinciblement à croire que Δf et df sont deux infiniment petits équivalents, c'est-à-dire que leur rapport tend vers 1 quelle que soit la façon dont les accroissements des variables tendent vers 0.

Or, très peu d'ouvrages, je crois (et peut-être même pas un seul), mettent le lecteur en garde contre cette erreur, et, au surplus, les plus grands auteurs s'y sont eux-mêmes laissés prendre. C'est ainsi que l'on trouve énoncé sans restriction l'équivalence de Δf et de df dans les *Leçons de calcul différentiel et intégral*, de Cauchy, publiées par l'abbé Moigno en 1840. Une affirmation analogue, bien qu'un peu plus

obscure, se trouve dans le *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, de Sturm. On la trouve également dans plusieurs ouvrages de Mathématiques Spéciales et de Mathématiques Générales publiés depuis une quarantaine d'années.

Or, il y a là une erreur manifeste : *le théorème de l'équivalence de Δf et de df n'est valable que sous certaines restrictions.*

Il ne peut pas être exact lorsque le point M $(x, y, z, ..)$ tend vers M_0 $(x_0, y_0, z_0, ..)$ par des chemins en spirale ayant M_0 pour point asymptote. Car de tels chemins rencontrent une infinité de fois la multiplicité $f(M) = f(M_0)$ pour laquelle on a $\Delta f = 0$ et $df \neq 0$, tandis que, aux points où ils rencontrent la multiplicité linéaire tangente, on a $df = 0$ et $\Delta f \neq 0$; de sorte que le rapport $\frac{\Delta f}{df}$ oscille indéfiniment entre $-\infty$ et $+\infty$. Le fait que ce rapport prend des valeurs négatives est immédiat, par exemple dans le cas de deux variables, car dans la région du plan comprise entre la courbe $f(M) = f(M_0)$ et sa tangente en M_0, Δf et df sont de signes contraires.

Il est d'ailleurs d'autres chemins que nul ne saurait récuser, pour lesquels le théorème est faux : il s'agit des chemins tangents en M_0 à la multiplicité considérée. Une analyse très simple montre alors qu'on peut trouver pour $\frac{\Delta f}{df}$ des limites absolument quelconques. Le lecteur que cette question intéresse pourra se reporter à une note publiée dans la *Revue de Mathématiques Spéciales* de février 1955, où, après l'examen de plusieurs exemples, deux théorèmes précis sur le sujet sont énoncés et démontrés. Ils sont d'ailleurs fort simples et l'on ne peut que s'étonner de voir que depuis plus de cent ans, ils ne semblent pas avoir été aperçus.

Cette curieuse histoire me paraît mériter quelques réflexions concernant, les unes la fameuse « intuition » et les autres le principe d'autorité en Mathématiques. Je ne me permettrai pas de dire du mal de l'intuition, qui est une méthode de recherche et de découverte irremplaçable. Mais, ainsi que l'a montré Henri Poincaré, dans sa célèbre conférence sur l'invention mathématique, ses résultats doivent toujours être repris par le raisonnement le plus rigoureux.

Mais cette méthode de découverte me paraît devoir être proscrite de l'Enseignement Secondaire, où elle ne peut qu'encourager la tendance naturelle des élèves à des vues superficielles et sommaires.

D'autre part, si l'erreur, dont nous parlons, s'est maintenue durant de longues années, c'est très probablement qu'elle s'autorisait de très grands noms et que le respect de ces grands noms empêchait de regarder de trop près leurs affirmations. C'est là une attitude qui me paraît tout à fait regrettable. Pour ma part, je n'ai jamais accepté qu'un principe directeur, celui de Descartes : « Ne jamais recevoir aucune chose comme vraie, qui ne me paraisse évidemment telle. » .

M. Weber,
professeur honoraire de Mathématiques Spéciales au Lycée Condorcet.