VI. Documents officiels

Agrégation de Mathématiques (Hommes)

(Session de 1954)

Rapport de M. l'Inspecteur général DONTOT, Président du jury

Le jury était composé de M. Dontot, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. Milloux, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, vice-président ; M. Gauthier, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy ; M. Théron, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Saint-Louis (annexe Stanislas) ; M. Pougnand, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Janson-de-Sailly.

EPREUVES ECRITES

Elles ont eu lieu les 31 mai, 1er, 3, 5 juin.

Sur 187 candidats inscrits, 157 ont composé le premier jour, 154 le deuxième, 147 le troisième, 143 le quatrième et dernier jour.

Parmi ces 143 candidats figurent sept adjoints d'enseignement, douze élèves des Centres pédagogiques régionaux et vingt et un étudiants non élèves des Ecoles Normales Supérieures.

Le nombre des candidats ayant effectivement remis les quatre compositions est pour la première fois supérieur à celui de l'année précédente ; 143 contre 136 en 1953, mais il reste inférieur aux nombre de 51 (167) et de 50 (170). Nous espérions que cette augmentation du nombre des candidats permettrait d'augmenter celui des admissibles, ce qui paraissait particulièrement souhaitable une année où 62 postes (au lieu de 36) étaient mis au concours. Cet espoir a été déçu ; les épreuves écrites ont été faibles ; les sujets ne comportaient cependant aucune difficulté particulière et les barèmes de correction ont été généreux ; malgré ces conditions favorables, neuf candidats seulement ont obtenu, pour l'ensemble des quatre compositions écrites, une moyenne égale ou supérieure à 10. Le jury, qui s'est réuni au Lycée Saint-Louis, le 30 juin, n'a pu proposer, pour l'admissibilité, les candidats totalisant moins de 28 sur 80, c'est-à-dire ceux dont la moyenne était inférieure à 7 sur 20 ; 47 candidats seulement (contre 49 en 1953) ont, dans ces conditions, été déclarés admissibles. Le pourcentage des admissibles, par rapport aux candidats ayant subi la totalité des épreuves écrites, est, en 1954, de 32 % ; elle était en 1950, qui passe pour une année aux moyennes anormalement basses, de 18 %.

La liste des admissibles en 1954 a compris onze professeurs des lycées, six des collèges, quatre de l'enseignement technique, trois assistants des Facultés, deux stagiaires d'enseignement, un adjoint d'enseignement, soit au total vingt-sept candidats participant déjà à des tâches d'enseignement ou de surveillance (contre vingt-neuf en 1953). Du côté des étudiants, nous dénombrons sept élèves de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, six de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud, et sept étudiants, soit, au total, vingt candidats non encore dans les cadres de l'un des trois ordres d'enseignement (contre vingt en 1953).

Parmi les 47 admissibles figuraient neuf admissibles des sessions antérieures.

***

Les compositions écrites ont donné lieu aux observations suivantes :

Composition de Mathématiques Elémentaires

Correcteur : M. Pougnand

La transformation $\mathcal{C}$ étudiée dans le problème a été suggérée par une construction classique en Mathématiques Elémentaires. Conservons les notations de l'énoncé : si Δ est la polaire de P par rapport au cercle (C), lieu de m, le point M décrit la conique de foyer P, directrice Δ, cercle principal (C), la droite Mm étant la tangente en M. L'étude générale de ($\mathcal{C}$) conduit à établir une correspondance entre les droites et cercles du plan d'une part, une famille de coniques d'autre part, dégénérées ou véritables, passant par les points J et J' d'intersection de Δ et des droites isotropes issues du point P. Signalons de suite que cette transformation quadratique apparaît simplement comme le produit non commutatif d'une inversion de pôle H et d'une homologie harmonique.

Soit m un point donné, M son homologue. Il existe (voir deuxième question de la II^e partie du texte) un cercle (Γ) du faisceau d'axe radical Δ et de points de Poncelet P et P_1 passant par m et M. Hm recoupe (Γ) en μ : $\overline{Hm} \times \overline{H\mu} = \overline{HP^2}$.

L'inversion H ($\overline{HP^2}$) transforme la droite Pμ suivant le cercle circonscrit au quadrilatère HPMK dont le diamètre est PK ; ce cercle est tangent en P à PM.

Donc PM et Pμ sont symétriques par rapport à la droite Pz, perpendiculaire à PH. La corde Mμ de (Γ) est ainsi conjuguée de la corde AA′ ; elle passe par P_1 et la division MμTP$_1$ est harmonique.

Ainsi on passe de m à M par

— l'inversion H ($\overline{HP^2}$) ;

— l'homologie harmonique de point double P_1 et d'axe Pz.

Des résultats intéressants sont aussi obtenus par l'introduction des éléments imaginaires du plan. Tous les points des droites isotropes du point H ont leurs transformés aux points J et J′ cités précédemment, tandis que les points cycliques ont des homologues indéterminés sur les parallèles à PH menées de J et J′. Ces considérations, évidemment hors du programme de Mathématiques Élémentaires, justifient certaines propriétés des transformées des courbes algébriques étudiées dans le problème.

Nous ne pensons pas que le texte était susceptible de surprendre outre mesure un candidat à l'agrégation. Les résultats demandés pouvaient être facilement prévus ; il s'agissait surtout de les retrouver par des procédés strictement élémentaires. Que de maladresses et de fautes ont été relevées que le climat du concours n'arrive pas à justifier complètement !

Analyse du problème. — *1re Partie :* Elle peut être considérée comme une question de cours ; l'unicité et la construction d'une conique, dont on connaît deux sommets, A, B, d'un même axe, et un point C, est du domaine classique. Il semble que cette partie ait gêné la majeure partie des candidats.

La relation classique $\overline{m\mathrm{M}^2} = k\,\overline{m\mathrm{A}}\,\overline{m\mathrm{B}}$ est utilisée généralement pour établir l'existence et l'unicité de la conique. Encore ne faut-il pas prendre systématiquement $k = e^2 - 1$, ce qui choisit *a priori* AB pour axe focal ; si m est entre A et B et si M est extérieur au cercle de diamètre AB, la conique est une ellipse admettant AB pour petit axe. La construction est souvent correcte, soit par affinité orthogonale, soit par détermination des foyers, soit par les asymptotes dans le cas d'une hyperbole... mais la discussion est, dans bien des cas, incomplète.

La définition du cercle comme lieu du sommet M d'un faisceau harmonique (M.ABCD) nécessitait une réciproque ; un tiers des candidats environ l'a abordée et certains ont fait à ce sujet des raisonnements étonnants :

a) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un faisceau MABCD soit harmonique est que deux rayons conjugués soient rectangulaires.

b) Tout point M du cercle de diamètre AB est tel que le faisceau M.ABCD est harmonique ; comme M peut décrire tout le cercle, le lieu de M est le cercle.

c) M étant sur le cercle circonscrit à ABCD, on a : $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$ angle de vecteurs à $2k\pi$ près.

Le passage au cas d'une conique de sommets A et B a été souvent traité bien lourdement. L'emploi d'une projection conique et du théorème de Dandelin semble naturel et séduisant. Mais il importe de vérifier si cette projection conserve la disposition des points A, B, C, D avec A et B portés par la médiatrice de CD. Trop de candidats ne l'ont pas mentionné et n'ont pu remarquer que la méthode n'est pas acceptable si AB n'est pas l'axe focal ; dans ce cas, la conique est une ellipse et on peut utiliser une affinité orthogonale pour revenir au cercle de diamètre AB.

2e Partie : Peu de candidats l'ont traitée correctement, de façon intéressante. Les fautes et les longueurs sont nombreuses, peut-être à cause d'un emploi abusif des quadrilatères inscriptibles. Nous signalons qu'une solution simple des questions 3 et 4 est donnée par la similitude ; par exemple, la similitude de centre m dans laquelle P est l'homologue de K, transforme P en M et toute droite rectangulaire en une autre droite rectangulaire. On en déduit facilement que :

— Δ passant par K a pour homologue HP passant par P ;

— $m\mu$, issue de m, a pour homologue $m\lambda$ qui lui est perpendiculaire ;

— μ sur Δ et $m\mu$ a pour homologue λ sur $m\lambda$ et HP ;

— μP a pour homologue Mλ (joignant les deux points homologues de μ et de P).

Donc λM et Pμ sont orthogonales. La réciproque se démontre aisément par le même procédé. Dans la quatrième question, des similitudes de centre P conduisent rapidement au résultat et permettent de placer facilement la transformée (l).

Faisons, au sujet de cette 2e partie les remarques suivantes :

a) 35 candidats ont montré correctement que tout cercle (O_1) du faisceau défini par le point de Poncelet P et l'axe radical Δ se transforme globalement en lui-même. Il ne suffit pas de constater que l'homologue M de m se trouve sur le cercle (O_1) ; ce point M peut-il décrire tout le cercle ? Certains trouvent trop facilement que c'est « évident », d'autres plus inquiets se justifient en affirmant que la droite Mm enveloppant une conique « balaie tout le plan ».

Une dizaine de candidats enfin écrivent que Δ est la polaire de P par rapport à (O_1).

b) Le birapport de quatre tangentes d'une conique est celui des quatre points de contact ; est-ce celui des quatre points du cercle principal, projections orthogonales d'un foyer sur les tangentes considérées ?

c) Le passage des quatre points Q, R, U, V, en division harmonique sur une droite (L), à leurs homologues dans ($\mathcal{C}$), q, r, u, v, se faisait simplement en utilisant le faisceau des quatre droites perpendiculaires à Δ issues de Q, R, U et V. Ces quatre droites se transforment en un faisceau harmonique de quatre droites issues de H, qui coupent le cercle transformé de L aux quatre sommets d'un quadrangle harmonique.

d) Plusieurs candidats oublient de définir avec précision leurs hypothèses au début d'une démonstration ; leur étude devient vite incohérente et parfois ils en arrivent à utiliser leur conclusion au cours de la recherche.

3e et 4e Parties : Bien peu de candidats ont effectué correctement et avec précision la transformation par inversion. Elle conduit en somme à la figure formée par un cercle, un point de Δ, sa polaire par rapport au cercle et une corde conjuguée de cette polaire. La même figure se retrouve dans la 4e partie et constitue en somme un lien entre l'étude de la 3e partie et la recherche demandée dans la 4e ; elle situe les points a, b, c, d. Ceci fait, la transformation ($\mathcal{C}$) s'effectue assez facilement en utilisant le travail préparatoire des 1re et 2e parties.

5e Partie : La transformation par polaires réciproques d'une conique donne lieu à une remarque intéressante. Soit F le foyer de la conique, (C) son cercle principal, T une tangente quelconque. On transforme par polaires réciproques par rapport à un cercle (Ω) de centre P, rayon R. M est le pôle de T par rapport à (Ω), Mm la polaire de φ et K le pôle de Fφ ; m décrit le cercle (C') inverse de (C) dans l'inversion P(R^2) et K la polaire Δ de F. Le lieu (Γ) de M apparaît comme la conique homologue de (C') dans la transformation ($\mathcal{C}$) définie à partir de P et Δ.

On remarque à ce sujet que la polaire de F' est une droite Δ' telle que la transformation ($\mathcal{C}'$) de centre P, axe Δ', transforme le même cercle (C') — lieu de l'inverse de φ' — en (Γ). Ainsi, étant donnés une conique (Γ) et un point P, il existe deux droites Δ et Δ' définissant deux transformations ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}'$), inverses de ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$), transformant (Γ) en un même cercle (C') ; ces deux droites, également inclinées sur les directions principales de la conique, joignent les deux couples de points imaginaires conjugués communs à (Γ) et aux isotropes de P.

Résultats : 158 copies ont été corrigées ; la moyenne des notes obtenues, grâce à un barème très généreux, est 6. La meilleure note est 16,5 ; viennent ensuite 15,5 ; 15, 14, 14, 13, 13, 11, 10,5 ; 10,5 ; 10 ; puis viennent vingt-sept notes comprises entre 8 et 10, et trente entre 6 et 8. Sept copies seulement contiennent une étude intéressante des trois dernières parties du problème ; dans l'ensemble, les résultats de cette première composition sont très faibles.

Composition de Mathématiques Spéciales

Correcteur : M. Théron

La section I était destinée à attirer l'attention des candidats sur la conique décomposée (Γ). Pour qui connaît l'équation tangentielle de l'ombilicale dans le plan de l'infini, les calculs nécessaires pour obtenir le système demandé se réduisent exactement à trois lignes : écrire, sous forme de déterminant, l'équation de la trace sur le plan de l'infini du plan contenant (D) et un point M (x, y, o) du plan $z = 0$; écrire la consition nécessaire et suffisante pour que cette trace soit tangente à l'ombilicale : développer et ordonner en x, y, pour avoir l'équation d'un ensemble de deux droites issues de O. Le système s'obtient en écrivant que cet ensemble est confondu avec (Γ).

Cependant, on compte exactement la moitié moins une des copies dans lesquelles le système demandé est absent ou incorrect. Dix candidats, pour exprimer que l'ensemble des deux droites ci-dessus est confondu avec (Γ), ont écrit que les coefficients correspondants dans leurs équations étaient égaux ; d'autres ont donné des réponses comportant de grossières fautes d'homogénéité. Presque tous les candidats ont rempli de nombreuses pages pour cette simple question, l'un d'eux, qui a étudié des cas particuliers nombreux et inutiles et a tenté de faire un dénombrement, d'ailleurs incorrect, des droites (D) associées à une conique (Γ) donnée, a réussi à consacrer huit pages à cet ensemble ; il n'est d'ailleurs pas allé plus loin.

Le dénombrement, dont il vient d'être question, n'était pas demandé, une quarantaine de candidats, voyant qu'il préparait la fin de la deuxième section, l'ont étudié, il faut les en féliciter.

***

La section II n'a guère été traitée de façon simple et générale, bien que 80 % des candidats l'aient abordée. Presque tous ont supposé, dans leurs calculs, que (D) et (D′) perçaient (Γ), ou encore que (Γ) rencontrait (C) en quatre points distincts. Une douzaine d'entre eux ont commis une grave faute, car leurs raisonnements supposaient implicitement l'existence d'un couple de droites (D) et (D′) associées, ce qui n'est nullement évident. Un moyen commode, qui a été peu employé, consistait à définir chaque droite (D) par l'intersection de ses plans asymptotes d'équations $P = 0$ et $P^* = 0$ et à remarquer que pour tout point M l'expression PP^* est proportionnelle au carré de la distance de M à (D). Un seul candidat a songé à étudier le cas où (Γ) et (Γ′) sont confondus.

Le dénombrement des droites (D′) associées à (D) n'a été fait corectement que dans onze copies, on a omis en général de discuter la réalité des coniques décomposées du faisceau défini par (C) et (Γ) et obtenu ainsi cinq associées au lieu de trois.

***

La section III débute par une question enfantine relative à la direction de la projection de (D′) ; cette question était destinée à orienter les recherches vers une étude géométrique du triangle PQR dans le cas particulier où (D) est perpendiculaire à (Γ) : on peut voir rapidement que, Q étant donné, le point P correspondant,

s'il existe, est nécessairement le pied de la projection de Q sur sa polaire par rapport à (C). Personne n'a formulé cette remarque, utile pour la suite.

Les parties 1 et 2 exigeaient toutes deux des calculs, la condition nécessaire et suffisante à exprimer étant que le faisceau défini par (C) et (Γ') contient un cercle point et que son centre P est, selon le cas, sur Ox ou sur une droite fixe passant par le foyer. Il était commode de définir (D') par son pied et par les angles φ et θ de l'énoncé.

Le fait que PQ et PR sont les bissectrices des droites joignant P au foyer a été très élégamment établi par un candidat ; une vingtaine d'autres ont terminé la question par des calculs souvent pénibles.

Une fois faites les remarques géométriques indiquées plus haut, la décomposition et la nature des lieux demandés se prévoyaient sans peine ; des calculs bien conduits devaient évidemment conduire aux mêmes résultats. On voyait alors que le cas 1 se décompose en trois, selon que (D') est dans le plan xOz, rencontre orthogonalement l'axe $x'x$, ou est parallèle à l'axe $y'y$. La première de ces hypothèses conduisait, pour limiter le lieu, à chercher l'enveloppe des droites (D'), aucune copie n'est parfaite sur ce point, deux ou trois sont acceptables ; la seconde hypothèse conduisait à un conoïde, la troisième à un cylindre, à déterminer chacun par le calcul. Un seul concurrent a reconnu et traité assez correctement les trois cas, huit ont traité bien ou assez bien deux cas en effleurant l'autre ou en l'oubliant, vingt-quatre en ont traité un seul, en négligeant ou à peu près les deux autres. De même, le cas 2 conduisait à deux hypothèses selon la direction de la projection de (D') ; un raisonnement analytique ou géométrique prouvait que, dans les deux cas, le pied de (D') était nécessairement situé sur l'une ou l'autre de deux parallèles à l'axe de la parabole, et perçant celle-ci en l'un des points S ou S' en lesquels le lieu de P la rencontre. Selon l'hypothèse on était conduit à des droites (D') dans l'un ou l'autre de deux plans fixes, dont il fallait chercher l'enveloppe, ou à des droites engendrant l'un ou l'autre de deux conoïdes qui se révélaient être de Plücker. La voie analytique a seule été employée, quatre concurrents ont compris la question dans son ensemble sans trop la détailler, un seul en a donné une solution presque correcte.

La valeur du rapport que l'on demandait d'évaluer n'a été recherchée que par ce dernier ; il semble pourtant assez naturel de songer que ce rapport est par définition constant lorsque M décrit la parabole, et d'évaluer ce rapport en plaçant M convenablement. Le point à l'infini si la projection de (D') est parallèle à $x'x$, le point S ou S' dans l'autre hypothèse donnaient presque immédiatement les valeurs demandées.

***

La section IV, bien que plus simple que la précédente, n'a inspiré qu'un seul candidat, celui dont la copie a obtenu la meilleure note globale. Une droite (D) est ici une droite focale de la parabole. Définissant (D) par son pied P, et les angles de l'énoncé, il suffit d'écrire, d'une part, que P décrit une corde focale, d'autre part, que (Γ) est bitangente à la parabole. On trouve immédiatement que φ est nécessairement constant et peut prendre deux valeurs différant de $\frac{\pi}{2}$, résultat prévisible géométriquement. Le lieu est formé de deux conoïdes ; on obtient après changement d'axes l'équation de chacun en éliminant θ, qui n'intervient que par $\operatorname{tg}\theta$. L'énoncé ne fait décrire à P qu'une corde focale, et non la droite tout entière, il est nécessaire donc de remarquer que les points de la droite extérieure à la parabole correspondent nécessairement à des droites (D) imaginaires.

***

Enfin la dernière section, que l'on peut traiter par la géométrie pure ou par un emploi judicieux de coordonnées trilinéaires, a été abordée par vingt-huit candidats. Un seul l'a épuisée de façon élégante, un autre s'est limité au problème auxiliaire correctement traité, et quatre ont obtenu des résultats partiels ; les autres, faute de temps ou d'inspiration, n'ont pas dépassé le stade des remarques évidentes ou ont commis de grosses fautes.

*
**

Voici quelques renseignements statistiques.

Les 154 copies corrigées sont notées de 17,5 à zéro.

Cinquante copies, soit plus de 30 %, ont des notes inférieures ou égales à 2 ; pour obtenir la note 2, il suffisait pourtant d'obtenir, par une voie, même maladroite, le système demandé au début de la section I. Parmi ces cinquante copies, trente-deux, soit plus de 20 %, n'obtiennent que 0 ou 0,5 ; elles sont blanches ou pratiquement nulles, leurs auteurs, ou bien ignorent ce qu'est un plan isotrope, ou bien en tout cas sont incapables, en sept heures, d'écrire les équations des plans isotropes passant par D.

Quarante-cinq copies, soit 30 %, ont une note supérieure ou égale à 7.

Quatorze, soit moins de 10 %, atteignent ou dépassent la moyenne.

La note médiane est 4, c'est-à-dire qu'il y a un nombre égal de copies notées en deçà et au-delà.

La note moyenne ne signifie rien, eu égard au nombre considérable de copies notées 0 ou 0,5.

La courbe de répartition des notes, que je regrette de ne pouvoir reproduire, ne ressemble, bien entendu, en rien à la courbe de Gauss ; elle accuse un creux très marqué pour la note 6,5, séparant deux bosses correspondant respectivement aux notes 3 et 8, enfin une pointe correspond à la note 0,5 attribuée 25 fois.

*
**

Ces résultats obligent à conclure que les candidats, mal préparés à subir l'épreuve de Mathématiques Spéciales, sont trop nombreux. Beaucoup manquent de connaissances ; beaucoup manquent davantage encore de maturité d'esprit ; ils manient, avec une inconcevable maladresse, des méthodes générales qu'ils n'ont pas assimilées et se perdent dans des calculs qu'ils ne dirigent pas. L'un d'eux, par exemple, a utilisé neuf lignes d'explications et dix équations pour obtenir l'équation de l'ensemble des isotropes du point $M_0\,(x_0, y_0)$, le tout à grand renfort de formules générales. Un autre consacre deux pages de calculs pour obtenir la relation $x_1 = \dfrac{a^2}{x_0}$ liant l'abscisse d'un point de l'axe à celle du pied de sa polaire par rapport à l'ellipse. Nous conseillons à ces candidats de s'exercer longuement à résoudre des problèmes simples et de rechercher systématiquement les solutions directes de ces problèmes. Nous leur conseillons aussi d'éviter d'énoncer pompeusement les évidences ou les banalités.

Les meilleures copies se sont révélées d'un niveau extrêmement satisfaisant (une copie notée 17,5, deux notées 15,5) ; par contre, les suivantes [avec les notes 13, 12 (deux fois), 11,5, 10,5 (deux fois), 10 (quatre fois), etc...], sont malheureusement nettement inférieures.

La rédaction des bonnes copies est presque toujours satisfaisante ; à mesure que l'on descend l'échelle des valeurs on oscille de plus en plus entre la prolixité et l'absence, parfois totale, d'explications.

Composition de Calcul différentiel et intégral

Correcteur : M. Milloux

Le problème traite de diverses questions relatives surtout à des moyennes de modules de fonctions holomorphes, moyennes prises sur des cercles de centre O. Les cinq paragraphes sont de difficulté graduée, de façon à permettre à tout candidat d'avancer dans les limites de ses moyens. Les difficultés sérieuses ne commencent qu'avec la question *b* du quatrième paragraphe. Tout ce qui précède cette partie est de nature élémentaire ; l'énoncé contient même le charitable rappel d'une inégalité classique, celle de Schwarz, laquelle trouve son application dans le troisième et le quatrième paragraphes.

L'auteur de l'énoncé escomptait une large réussite de la presque totalité des candidats dans les trois premières parties au moins. Le résultat ne correspond pas à un tel espoir. Il apparaît que les candidats à l'agrégation en 1954 sont inférieurs en Analyse à ceux de l'an dernier. Le premier paragraphe même, si classique qu'il soit, a été en majorité mal traité. La première question de ce paragraphe, malgré sa modestie, aurait pu servir de test ; beaucoup de candidats sont incapables de démontrer, soit correctement, soit complètement, qu'une série entière en u, dont les coefficients ont tous pour module l'unité, a pour rayon de convergence 1 ! Quarante candidats sur 147 commettent des fautes grossières sur les séries entières : ou bien ils considèrent que la règle de d'Alembert est une condition nécessaire de convergence, ou bien de la convergence d'une série, ils déduisent d'absurdes règles auxquelles ils contraignent les coefficients, ou bien ils appliquent une formule de Cauchy, estropiée, dont on peut déduire que la série exponentielle n'est pas convergente dans le plan, mais dans le cercle unité seulement. Quelques-uns vont jusqu'à affirmer qu'une série dont le terme général ne tend pas vers zéro peut cependant converger.

La suite de cette modeste question du début du premier paragraphe n'a guère plus de succès auprès de ces candidats : les notions si importantes, et cependant simples, d'absolue ou d'uniforme convergence, sont confondues l'une avec l'autre.

Cependant, du fait de son automatisme, le résultat final exact du premier paragraphe se trouve dans presque toutes les copies, souvent mal ou pas du tout justifié. Ainsi, pour beaucoup trop de candidats, du cours de Calcul différentiel et intégral, il ne reste plus au maximum que le côté purement formel.

Le deuxième paragraphe, très facile, aurait dû être bien traité par tous. En fait, beaucoup d'entre eux renouvellent ici leur dédain pour ce qui n'est pas formel et pour une justification même sommaire de leurs opérations : pourvu que deux séries convergent (n'importe comment, cela va sans dire), on peut former la série-produit : on est sûr de sa convergence ! Ces candidats n'ont-ils donc jamais rencontré de série convergente, dont le carré formé par la règle de la série-produit, est une série divergente ?

On retrouve tous ces défauts dans le troisième paragraphe. Un piège inattendu s'est glissé dans la formule (6) de ce paragraphe : une faute matérielle a fait disparaître un exposant, de sorte que le candidat était invité à comparer — question dont le caractère quelque peu saugrenu aurait dû sauter aux yeux — une série entière en r et une série entière en r^2. Disons tout de suite que l'énoncé conduisait, comme par la main, le candidat à la formule exacte, et que cette dernière était répétée plus bas sous la forme un peu plus générale (7), où il suffisait de faire $v = r^2$.

Pour l'honneur de l'agrégation, il est heureux que cette faute évidente ait été vue par 32 candidats, mais c'est trop peu. Quatre candidats, en outre, ont montré que la formule (6) du texte n'était pas vérifiée sur un exemple simple de leur choix, et deux autres ont fait encore mieux, en démontrant qu'elle n'est jamais réalisée.

Le quatrième paragraphe contenait d'abord une application très simple de l'inégalité de Schwarz, conduisant à la formule (7). Puis commencent les difficultés, qui n'ont été vraiment résolues que par une infime minorité, pour ne pas dire par un seul

candidat. Au cinquième paragraphe, tous les candidats, sauf un, étaient hors d'haleine, et incapables d'aborder avec succès l'étude de la partie *c*, la plus importante, et de beaucoup, de ce paragraphe.

Les résultats suivants résument les observations précédentes et ajoutent quelques précisions :

147 candidats ont composé en Analyse. Il y a une excellente copie et une seule. Le candidat distance nettement tous les autres. Il lui a été attribué la note 20, bien méritée. Tout le problème est traité, même la fin du cinquième paragraphe, où des résultats fort honorables sont obtenus. L'exposition est également excellente.

Pour ne pas écraser la masse des candidats par des notes trop faibles et par suite trop peu distancées, il a été nécessaire d'utiliser comme élément de mesure, non pas le premier candidat, trop fort par rapport aux autres, mais le second, dont la note a été quelque peu artificiellement haussée jusque 17. En d'autres termes, la note du premier devrait dépasser 20 si l'on voulait respecter les valeurs relatives, et mettre suffisamment en vedette les questions difficiles du problème. Quoi qu'il en soit, il serait injuste de ne pas reconnaître que le second a fourni cependant une très bonne copie.

Puis on trouve une note 14,5 ; une note 13 ; une note 12,5 ; deux notes 12 ; une note 11,5 ; une note 10,5 ; trois notes 10. Au total, 12 candidats ont la moyenne ou plus. En-dessous de la moyenne, la masse vient étaler sa médiocrité, depuis les environs de 7 jusque 3. Les notes qui ont été le plus données sont 5,5 (16 fois) et 3,5 (15 fois). En classant les candidats par notes décroissantes, on constate que le 10e a 10 ; le 20e 8,5 ; le 30e 7,5 ; le 40e 6,5 ; le 50e 6 ; le 60e et le 70e 5,5, etc... La moyenne des notes est d'environ 5,6.

En résumé, l'impression est peu favorable ; l'élite n'est pas nombreuse, et, à part une exception, elle n'est pas remarquable. Quant à la masse, elle a le souffle court, manque de solidité, et ne sait pas exposer.

Composition de Mécanique rationnelle
Correcteur : M. L. Gauthier

Le sujet proposé était l'étude de certaines équivalences dynamiques entre des mouvements à deux paramètres. Il se décomposait en trois parties.

La première étudiait le mouvement d'une barre rectiligne s'appuyant sur un ellipsoïde de révolution et sur son axe. Cette question, tout à fait élémentaire, aurait dû n'arrêter que les candidats notoirement incapables. En réalité, elle a presque suffi, à elle seule, à classer les copies. Certains candidats ignorent l'intégrale de la force vive ; d'autres utilisent des équations de Lagrange relatives à des paramètres surabondants sans se soucier des relations entre ces paramètres. Plus de 30 % des candidats étudient les mouvements stationnaires, $\theta = C^{te}$ en annulant θ' dans l'intégrale de la force vive, et concluent que l'annulation de la vitesse initiale suffit à assurer au mouvement le caractère stationnaire. Comment de tels candidats ont-ils pu être admis au Certificat de Mécanique rationnelle ?

La détermination des réactions aux appuis A, B, sans frottement a donné beaucoup de peine à certains candidats. Pourquoi la plupart d'entre eux sont-ils incapables de trouver la direction de la normale en un point B à un ellipsoïde de révolution ? D'autres, qui ont sans doute mal compris les lois du frottement, croient que la réaction en A est normale, à la fois à l'axe Oz et à la barre. Il y a seulement 21 copies dans lesquelles on utilise, plus ou moins élégamment, le théorème du moment cinétique par rapport à Oz, c'est-à-dire, le fait que l'accélération du centre de gravité G est dans le plan méridien, pour en conclure qu'il en est de même de la réaction en A.

Une petite lacune s'était glissée dans l'énoncé, et le paragraphe concernant le mouvement du point B devait commencer par : « On suppose en outre la disposition

de AB telle que θ soit aigu. Dans ces conditions, étudier les trajectoires de B, etc... ». En raison du trouble que cette lacune a pu laisser chez certains candidats, le correcteur a cru devoir minimiser l'importance de ce paragraphe : il y avait, en effet, 45 candidats qui avaient mis leur problème en équations avec un soin suffisant pour avoir traité, simultanément ou consécutivement, les deux cas de figure où θ reste, soit aigu, soit obtus.

Ce premier exemple d'équivalence dynamique entre le mouvement de la barre AB et celui d'un point matériel fictif situé en B a été bien exposé dans dix-sept copies. On peut identifier les équations différentielles des deux mouvements, ou bien, comme le suggérait l'énoncé, étudier directement le mouvement du point géométrique B. Certains candidats, après avoir montré que le plan osculateur contient la normale à l'ellipsoïde, concluent trop hâtivement à l'équivalence : les trajectoires sont bien les géodésiques, mais il faut encore étudier la loi du mouvement. Son aspect uniforme résultait d'ailleurs immédiatement du théorème de la force vive.

Beaucoup de candidats ont formé l'équation différentielle des trajectoires. Aucun d'entre eux n'a remarqué que ces trajectoires dépendent de deux paramètres et non pas de trois, chacune étant le siège d'une infinité de mouvements uniformes.

Certains candidats, qui tiennent à manifester leur compétence sur l'équation de Clairaut, n'arrivent pas à la rétablir géométriquement ; avec un peu de réflexion, ils auraient pu s'apercevoir qu'elle était déjà obtenue par eux, avec une signification différente : c'est le théorème du moment cinétique par rapport à Oz.

La seconde partie du problème définissait l'équivalence dynamique et proposait la comparaison des mouvements de barres s'appuyant sur une surface de révolution et sur son axe. Un tiers seulement des candidats a abordé cette seconde partie, toujours d'une manière très fragmentaire. Les fautes sont nombreuses : certains candidats pensent que pour que les équations différentielles de deux mouvements soient identiques, l'identification des forces vives suffit ; on oublie les fonctions de forces. Dans beaucoup de copies, on trouve une équation différentielle de la forme $\varphi'^2 = \ldots$ dont on omet d'étudier le signe du second membre, alors que les variables manipulées sont spécifiquement réelles. Quelques fautes sottes consistent à noter avec un accent des dérivées prises par rapport à des variables différentes : $f' =$ au choix $f'r, f'\theta, f't$, et à ne pas manquer de les confondre.

Il y a aussi des fautes inexcusables autant que fréquentes : on dérive ou intègre des égalités numériques. De nombreux candidats croient que l'obtention d'une équation différentielle pour la fonction $\theta(t)$, ne contenant pas les autres paramètres du mouvement, ramène le problème aux quadratures : que leur a-t-on appris dans le cours d'analyse sur l'intégration des équations différentielles ?

La troisième partie, qui posait le problème de l'équivalence de deux formes quadratiques différentielles à deux variables par un changement de ces variables, n'a été abordée efficacement que par cinq candidats. Un seul a su se servir du théorème de Gauss pour éviter un calcul qui n'était d'ailleurs pas très pénible : l'identification, effectuée dans beaucoup de copies, conduisait à un système de la forme :

$$x^2 + y^2 = A^2,$$
$$xx' + yy' = 0,$$
$$x'^2 + y'^2 = B^2.$$

On demeure étonné qu'aucun candidat n'ait su le résoudre, l'interprétation au moyen de deux vecteurs rectangulaires est-elle si difficile à concevoir ?

143 copies ont été soumises à la correction. Les meilleures notes sont 16 (2 fois) et 15 (3 fois). Les plus basses sont (à part une copie blanche) : 1 1/2 (5 fois) et 2 (4 fois).

Il y a 32 notes qui atteignent ou dépassent dix ; 35 notes entre 7 1/2 inclus et 10 exclus ; 36 notes entre 5 inclus et 7 inclus ; 40 notes au-dessous de 5.

La moyenne est de : 7,29.

Mais il importe de ne pas se leurrer : ces notes ont été mises pour donner à

l'épreuve une valeur de classement significative ; car il est nécessaire que les candidats qui, sans commettre de fautes graves, ont obtenu clairement quelques résultats corrects et effectifs, aient un avantage sur ceux qui soumettent à la correction un long fouillis de calculs et de pseudo-raisonnements où les sottises se présentent d'une manière partout dense.

La lecture de l'ensemble des copies laisse une impression déprimante. Les candidats connaissent mal leur cours de mécanique rationnelle, mal leur cours d'analyse ; par surcroît, la méconnaissance générale des propriétés les plus fondamentales de la géométrie infinitésimale montre la complète indigence de notre Enseignement Supérieur en ce qui concerne les disciplines géométriques.

La comparaison de cet énoncé avec celui qui a été proposé par le même examinateur à l'agrégation féminine de 1948 justifiera sans doute un essai de comparaison entre ces deux concours. Il nous semble très net qu'actuellement le niveau de l'agrégation masculine est devenu inférieur à celui de l'agrégation féminine. L'appel de l'Industrie, peu sensible dans la clientèle féminine, se fait de plus en plus sentir chez les hommes et peu à peu l'examinateur de l'agrégation masculine en vient à avoir l'impression qu'il n'a plus à choisir les meilleurs parmi les bons ou les très bons, mais qu'il lui faut extraire ce qu'il peut y avoir de moins mauvais dans une masse assez informe.

EPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au Lycée Saint-Louis. Comme l'an dernier les quarante-sept admissibles ont été répartis en deux séries pour réduire au minimum la durée du séjour à Paris de chaque candidat ; l'appel de la première série a eu lieu le dimanche 4 juillet, celui de la seconde série le mercredi 14 dans la matinée. Les épreuves pratiques communes aux deux séries ont été subies le mercredi 14 dans l'après-midi (calcul) et le jeudi 15 dans la matinée (épure).

Le tirage au sort des leçons jumelées a eu lieu après l'appel des candidats pour chacune des deux séries. En voici la liste :

Textes des leçons exposées en 1954

Leçons de Mathématiques Elémentaires

1. *Mathématiques Supérieures*

Géométrie

1. Intersection de deux cônes ou cylindres circonscrits à une même phère. (Les sections planes des cônes et cylindres ont été étudiées précédemment).
2. La similitude plane ayant été étudiée précédemment, traiter un ou plusieurs exemples d'application.
3. Normales à une parabole. Famille de cercles bitangents. Application à des problèmes simples d'intersection d'une parabole et d'une circonférence ayant son centre sur l'axe, ou à la détermination d'une parabole à partir d'un ou deux cercles bitangents.
4. Hyperbole définie par les asymptotes et un point.
5. Une tangente variable à une parabole détermine sur deux tangentes fixes des divisions semblables. Réciproque et applications.
6. Polaire d'un point par rapport à un cercle. Droites conjuguées. Applications et exercices. (L'étude du cercle et des faisceaux de cercles a déjà été faite. La transformation par polaires réciproques n'est pas demandée).
7. Transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle. Applications. (Les notions de pôles et polaires par rapport au cercle sont supposées connues).

8. Figures égales dans l'espace. Déplacements dans l'espace, dans le cas où il existe un point invariant et dans le cas où il n'en existe pas. (L'étude des translations, des rotations et au besoin des symétries est supposée faite).
9. Générations tangentielles d'une conique considérée comme enveloppe de droites. Applications et exercices.
10. Etude des familles de cercles tangents, soit à une droite et un cercle, soit à deux cercles.
11. Axe radical de deux cercles. Faisceau de cercles, Faisceaux orthogonaux.

2. *Mathématiques Elémentaires*

Géométrie

12. Rotation dans l'espace considéré comme transformation ponctuelle. Symétrie par rapport à une droite (demi-tour ou transposition). Produit de deux transpositions. (L'ordre choisi pour l'exposé est laissé à l'appréciation du candidat).
13. Exemples de détermination de coniques par la donnée d'éléments réels tels que point, tangente, foyer, directrice, etc...
14. Lieu (L) des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant et égal à $e \neq 1$. Equivalence de cette définition avec celle du lieu du centre d'un cercle passant par un point fixe et tangent à un cercle fixe. Exemples de problèmes traités à partir de la définition comme lieu (L).
15. La théorie de l'inversion dans le plan et dans l'espace ayant été exposée dans les leçons précédentes, indiquer et traiter des applications.
16. Division harmonique de points et faisceau harmonique de droites. Polaire d'un point par rapport à deux droites et applications.
17 Trièdres. Inégalités entre les bases. Trièdres supplémentaires. Inégalités entre les dièdres. Sens d'un trièdre orienté.

Arithmétique

18. Première leçon sur les nombres positifs et négatifs.
19. Notion de fraction. Egalité de deux fractions. Inégalité. Multiplication et division.
20. Diviseurs communs à 2 ou plusieurs nombres. Propriétés du P.G.C.D. Exemples de calcul du P.G.C.D. Nombres premiers entre eux. (La théorie des nombres premiers sera faite ultérieurement).

Algèbre

21. Exemples de fonctions de la forme : $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c}$ à coefficients numériques. ($a' \neq 0$).
22. Les log. et l'usage des tables ont été exposés. Donner des exemples numériques d'application du calcul logarithmique à la résolution de problèmes classiques d'algèbre et de trigonométrie tirés du programme de la classe.

Trigonométrie

23. Formules de transformation en produit de la somme ou de la différence de 2 sin ou cos. Problème inverse. Applications.
24. Problèmes conduisant à la résolution et à la discussion d'équations trigonométriques à une seule inconnue, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ou $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.
25. Résolution d'un triangle dans un cas non classique : *a*) dans le cas où on utilise un des systèmes fondamentaux ; *b*) dans le cas où on n'utilise pas un de ces systèmes.

Descriptive 26. Rabattement d'un plan sur un plan. Applications.

Des. et cotée 27. Les changements de plan, rotations et rabattements ayant été étudiés, appliquer ces théories à des exemples où interviennent des déterminations d'angles et de distances.

Cosmographie 28. Eclipses de Lune et de Soleil. Le saros.

Cinématique 29. Etude des mouvements suivants : mouvement circulaire uniforme, mouvement vibratoire simple, $x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta)$.

3. *Sciences Expérimentales*

30. Combinaisons. Probabilités simples.

31. Fonction : $y = \sqrt[n]{x}$. Log d'une puissance, d'une $\sqrt[n]{\ }$. Exercices.

4. *Première C. et M.*

Géométrie 32. Angles dièdres. Plans perpendiculaires. (La mesure des dièdres ne fait pas partie de la leçon).

33. Définition de l'homothétie. Figures homothétiques d'un plan, d'une droite, d'une demi-droite, d'un angle dièdre, d'un cercle. Deux cercles sont-ils homothétiques ?

34. Surface conique à directrice circulaire ; définition ; section par un plan parallèle au plan de la directrice. Plan tangent ; exercices.

35. Sphère. Intersection avec une droite. Tangente. Section plane. Plan tangent. Exercices comportant la recherche, soit de plans tangents, soit de sphères.

Algèbre 36. Fonction : $y = ax^2 + bx + c$. On étudiera s'il existe des valeurs de x pour lesquelles y est nulle, le signe de $f(x)$ et le sens de variation de la fonction.

37. Variation de la fonction $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Représentation graphique.

(On suppose étudiée la fonction $y = \dfrac{a}{x}$).

38. Problèmes dont la résolution conduit à une équation du second degré.

Trigonométrie 39. Somme géométrique de deux vecteurs. Projection sur un axe. Formules donnant le cos. ou le sin. de la somme ou de la différence de deux arcs en fonction des lignes trigonométriques des deux arcs.

Géom. cotée 40. Rabattement d'un plan sur un plan horizontal. Angle de deux droites. Distance d'un point à une droite.

5. *Seconde C. et M.*

Géométrie 41. Positions relatives de deux cercles.

42. Inégalités dans le triangle. Perpendiculaires et obliques menées d'un point à une droite.

43. Somme et différence des carrés des distances d'un point à deux points fixes. Applications à des problèmes de lieux géométriques.

44. Exemples de recherche de lieux géométriques.

45. Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

46. Première leçon sur l'équation du second degré à une inconnue. Existence et calcul des racines.

47. Fonction d'une variable : fonction définie, fonction croissante ou décroissante. Les exemples seront empruntés aux fonctions $y = x^2$, ax^2, $\frac{1}{x}$ ou $\frac{a}{x}$ (au choix).

Mathématiques Spéciales

1. *Spéc.* Première leçon sur les déterminants.
2. *Spéc.* Formes linéaires, rang, notion d'indépendance. La théorie des équations linéaires pourra être supposée acquise ou non.
3. *Spéc.* Etude du système le plus général d'équations linéaires, le cas du système dit de Cramer étant supposé connu.
4. *Sup.* Division de deux polynômes ordonnés selon les puissances croissantes de la variable. Développement limité à un ordre donné d'une fraction rationnelle au voisinage de zéro.
5. *Spéc.* Division des polynômes ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable. Plus grand commun diviseur de deux polynômes.
6. *Spéc.* Recherche des diviseurs communs à deux polynômes. Plus grand commun diviseur de polynômes premiers entre eux deux à deux.
7. *Spéc.* Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples de la forme $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, A et a étant complexes et α entier. Usage de cette décomposition.
8. *Sup.* Première leçon sur les nombres complexes. Le candidat limitera à son gré la leçon ; il adoptera la méthode d'exposition de son choix.
9. *Spéc.* Théorème de Rolle. Formule des accroissements finis. Interprétation graphique. Emploi de la dérivée pour l'étude de la variation d'une fonction. On se bornera, pour l'emploi de la dérivée, à établir le théorème général. On se limitera au cas de fonctions dérivables en excluant le cas où $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$ augmente indéfiniment lorsque Δx tend vers zéro.
10. *Spéc.* Fonction inverse d'une fonction monotone et continue. Continuité, dérivation. Exemples.
11. *Spéc.* Différentielle première d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, définie par $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$. Transformation quand on remplace x, y, z par des fonctions d'autres variables indépendantes. Applications.
12. *Spéc.* Fonction logarithmique ou exponentielle. Le candidat étudiera une seule de ces fonctions avec la méthode de son choix, en supposant seulement que l'autre fonction n'est pas connue.
13. *Spéc.* Application des développements limités à la recherche des limites et à l'étude de fonctions infiniment petites ou infiniment grandes. Application à la recherche des asymptotes et à l'étude des branches infinies des courbes d'équation $y = f(x)$.
14. *Spéc.* Intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ étant définie et continue dans l'intervalle fermé ab.
15. *Spéc.* Symbole $\int_a^\infty f(x)dx$. Théorie, exemples. Application aux séries.

16. *Spéc.* Symbole $\int_a^b f(x)dx$, si $f(x)$, défini et continu dans l'intervalle ouvert ab, tend vers $+\infty$, lorsque x tend, soit vers a, soit vers b.

17. *Spéc.* Changement de variable dans une intégrale définie ou indéfinie. Etude théorique, exemples.

18. *Spéc.* Exemples d'intégration de fractions rationnelles. La décomposition en éléments simples est supposée acquise.

19. *Sup.* Intégration d'une fraction rationnelle de x et de y lorsque y est défini par $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ou $y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ a, b, c, d étant des constantes. Exemples.

20. *Spéc.* Séries à termes positifs. Méthodes d'étude de la convergence ou de la divergence. Exemples.

21. *Spéc.* Série entière à coefficients réels d'une variable réelle. Intervalle de convergence, continuité, dérivation ou intégration à l'intérieur de cet intervalle ouvert. On se bornera à étudier, soit la dérivation, soit l'intégration.

22. *Spéc.* Exemples simples de développement en série entière d'une fonction à l'aide d'une équation différentielle.

23. *Spéc.* Donner deux ou trois exemples de détermination du développement en série entière d'une fonction donnée. L'étude théorique des diverses méthodes est supposée faite.

24. *Spéc.* Première leçon sur les équations différentielles du premier ordre. Application à l'étude des équations à variables séparées. Exemples.

25. *Spéc.* Equations différentielles du premier ordre homogènes. Exemples.

26. *Spéc.* Exemples d'intégration d'équations différentielles du second ordre linéaires, à coefficients constants, dont le second nombre est un monôme en $\cos x$, $\sin x$, e^x, ou une combinaison linéaire de tels éléments.

27. *Spéc.* Séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante. Exemples.

28. *Spéc.* Coordonnées homogènes, notions sur les points à l'infini dans le plan et dans l'espace.

29. *Spéc.* Courbe plane dont l'équation est résolue par rapport à une coordonnée. Tangente, normale, concavité, inflexions, asymptotes. Illustrer chaque définition et démonstration par un exemple.

30. *Sup.* Construction des courbes planes définies par les expressions des coordonnées cartésiennes d'un de leur point en fonction d'un paramètre, exemples numériques. Les théories relatives à la tangente, aux branches infinies, aux points multiples, sont supposées acquises.

31. *Spéc.* Construction des courbes définies en coordonnées polaires par leur équation $\rho = f(\theta)$. Les théories relatives à l'étude en un point à distance finie ou infinie sont supposées acquises.

32. *Spéc.* Courbure d'une courbe plane. Développée. Exemples.

33. *Sup.* Enveloppe définie paramétriquement d'une droite dont l'équation dépend d'un seul paramètre. Point caractéristique. Exemples.

34. *Spéc.* Enveloppe de la famille des courbes représentées par l'équation $f(x, y, \lambda) = 0$, continue, dérivable une fois en x et y et deux fois en λ, ces dérivées étant continues dans un certain champ.

35. *Spéc.* Lieux géométriques dans l'espace.

36. *Spéc.* Surfaces, plan tangent. Cas où l'équation s'écrit $z = f(x, y)$, cas de représentation paramétrique par trois fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

37. *Spéc.* Exemples de surfaces définies par un mode de génération simple. Cylindre, cône, surface de révolution.

38. *Spéc.* Surfaces de révolution, plan tangent, normale, équation générale, détermination de la méridienne. Exemples.

39. *Spéc.* Birapport de quatre points, de quatre tangentes à une conique. Divisions homographiques et involutives sur une conique.

40. *Spéc.* Foyers et directrices dans les coniques.

41. *Spéc.* Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.

42. *Spéc.* Directions principales des surfaces du second ordre.

43. *Sup.* Système de vecteurs glissants. Moment résultant. Axe central.

44. *Spéc.* La statique des systèmes ayant été étudiée, donner des exemples d'étude de l'équilibre d'un corps solide ou d'un assemblage de corps solides non libres.

45. *Spéc.* Etude du mouvement rectiligne d'un point matériel sous l'action d'une force dépendant seulement de la distance de ce point à un point fixe de sa trajectoire. Choisir un exemple où on peut achever, par des quadratures, le calcul de l'abscisse en fonction du temps et un exemple où l'intégrale des forces vives permet d'obtenir l'allure du mouvement.

46. *Spéc.* Recherche des points doubles apparents dans l'intersection de deux surfaces du second ordre.

***

La note suivante a été lue aux candidats de chacune des deux séries avant les épreuves orales.

Le surveillant des épreuves orales remet au candidat, en l'introduisant dans la salle qui lui est réservée, une enveloppe contenant le sujet de la leçon et l'indication de la classe à laquelle elle est destinée.

Il est accordé au candidat trois heures pour la préparation de la leçon dite d'Elémentaires et quatre heures pour la préparation de la leçon dite de Spéciales. La durée de l'exposé devant le jury est strictement limitée à 45 minutes ; il est recommandé de ne prévoir qu'un exposé de 30 minutes afin d'avoir, en 45 minutes, la possibilité de le présenter sans hâte. Il est important, en effet, de parler à un rythme normal, ni trop lent, ni trop vif, en réfléchissant au sens des phrases que l'on prononce.

Les limites du sujet sont, en général, fixées par le texte même. Si cette indication paraît insuffisante, si le sujet semble trop vaste, il appartient au candidat de le limiter. Enseigner, c'est essentiellement choisir et, en particulier, le sujet étant donné, choisir ce qui, étant essentiel, doit faire l'objet de l'enseignement magistral. Le candidat a la liberté d'informer le jury de ce qu'il suppose avoir été enseigné dans une leçon précédente et de ce qu'il réserve pour une leçon ultérieure.

La leçon d'agrégation est, non un exercice de virtuosité devant un jury de spécialistes, mais une leçon faite par un professeur à des élèves d'une classe bien déterminée. Leçon de professeur, c'est-à-dire un exposé comportant un enseignement dont l'essentiel est dégagé sous la forme de conclusions précises ; leçon à l'usage d'élèves d'une classe déterminée, c'est-à-dire adaptée aux connaissances de ces élèves qui, même en Spéciales, ne sont pas des étudiants de l'Enseignement Supérieur.

Les qualités d'ordre : plan clair et raisonnable, d'exposition : rythme qui n'essouffle et n'ennuie pas ; de soin : écritures lisibles, figures claires, utilisation convenable du tableau, jouent un rôle important dans l'appréciation d'une leçon d'agrégation.

(Les programmes des classes de l'Enseignement du Second Degré, de Mathématiques Supérieures et de Spéciales, sont tenues par le surveillant des épreuves orales à la disposition des candidats).

***

La moyenne des notes de leçons (sur 20) est 10,5 en Elémentaires, 9 en Spéciales. Ces moyennes sont faibles ; les épreuves orales ont malheureusement confirmé l'impression produite par la correction des épreuves écrites ; le concours d'agrégation de 1955 est placé sous le signe de la médiocrité. Certes, quelques candidats se sont distingués ; ils sont peu nombreux ; bien que le jury ait apprécié les leçons avec libéralité, jugeant les candidats plus sur leurs intentions que sur les réalisations, deux seulement des leçons d'Elémentaires ont pu être cotées 17 et deux autres 16. Ces quatre leçons, solidement construites, ont été présentées de façon excellente et l'auteur de l'une d'elles a fait preuve de qualités pédagogiques brillantes, dont il a été tenu le plus grand compte. Une seule leçon de Spéciales a pu être cotée 16.

Fait sans précédent, à notre connaissance du moins, un candidat admissible, élève d'une Ecole Normale Supérieure, qui n'était ni malade, ni particulièrement ému, a refusé de se présenter devant le jury ; il avait à traiter une leçon classique : sections circulaires dans les quadriques, et nous a déclaré qu'il ignorait complètement le sujet. Deux autres candidats admissibles ne se sont présentés devant le jury que par déférence ; l'un d'eux (Elém. 3) ignorait les propriétés des cercles bitangents à une conique, en l'espèce, une parabole et aussi d'ailleurs le problème des normales à cette parabole issues d'un point de l'axe ; le second (Spéc. 44) ignorait la statique des corps solides gênés.

Il n'est pas possible, dans ce rapport, d'examiner une à une les 94 leçons entendues par le jury en 1954. Nous devons donc nous borner à présenter des observations d'ordre général, puis à signaler *in fine* les erreurs commises les plus caractéristiques. Les candidats se reporteront aux rapports d'agrégation des années précédentes pour compléter leurs informations et aux articles si précis et si judicieux de M. l'Inspecteur général Robert, publiés, l'un dans les *Cahiers Pédagogiques* pour l'Enseignement du Second Degré, l'autre dans le numéro du 5 février 1953 de l'*Education Nationale*.

Les leçons d'agrégation sont supposées faites à des élèves d'une classe bien déterminée : Spéciales, Mathématiques Supérieures, Mathématiques Elémentaires, Sciences Expérimentales, Seconde ou Première : l'indication de la classe est portée sur le texte du sujet remis au candidat. Or, un même sujet peut figurer au programme de classes différentes ; les matières enseignées en Troisième, Quatrième et Cinquième, font l'objet d'une mise au point au début de la classe de Seconde ; certaines théories géométriques ne peuvent être approfondies qu'en classe de Mathématiques Supérieures et font cependant l'objet d'un premier exposé en Mathématiques Elémentaires ; les programmes de Spéciales et de Mathématiques Supérieures ont des parties communes et certaines parties du programme de la classe de Spéciales sont reprises dans les cours de préparation à la licence. C'est une des tâches essentielles du professeur de choisir ce qui doit être enseigné, soit au cours d'une initiation, soit dans le cas d'une synthèse et c'est la valeur de ce choix que le jury a la charge de déterminer.

La plupart des candidats l'a parfaitement compris ; nous citerons, par exemple, une très bonne leçon sur les problèmes dont la résolution conduit à une équation du second degré, une autre sur les inégalités dans le triangle (2e), une troisième enfin, lourde dans l'exposition, mais solidement construite, sur les positions relatives de deux cercles, avec un souci marqué d'éviter le raisonnement classique, mais difficile, par l'absurde. Nous attendions d'un candidat, dont l'écrit était brillant, une meilleure leçon sur l'étude des pôles et polaires par rapport à un cercle, en Mathématiques Supérieures ; l'idée maîtresse, non explicitement exprimée, est de marquer le caractère projectif de ces propriétés ; il est nécessaire, pour le faire, d'introduire la notion de point à l'infini, mais encore faut-il le faire correctement ; il n'est peut-être pas indispensable d'introduire aussi la notion de points imaginaires. Etant donnés un cercle (O) et un point A, non situé sur ce cercle, soient ABC, A'B'C' deux sécantes au cercle (O) et (D) la droite qui joint les conjugués harmoniques de A par rapport aux couples de points B et C, B' et C', le fait que (D) est un élément fixe de

la figure formée par (O) et A, indépendant du choix des sécantes, permet une étude satisfaisante de géométrie projective.

Quelques erreurs d'interprétation ont naturellement été commises. La leçon sur les faisceaux de cercles (géométrie, Mathématiques Supérieures) a été traitée comme une leçon, très mauvaise d'ailleurs, d'initation ; un faisceau linéaire de cercles peut être défini comme l'ensemble des cercles lieux des points dont le rapport des distances à deux points fixes (ou des puissances à deux cercles fixes) a une valeur donnée, et il n'est pas interdit, en Mathématiques Supérieures, de comparer cette définition à la définition analytique. Signalons aussi la transformation de la leçon sur le changement de variables dans la différentielle totale $f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$ en une leçon sur les fonctions différentiables, directement extraite de l'ouvrage de M. VALIRON, et celle de l'étude de la concavité des courbes $y = f(x)$ en une leçon sur la concavité des fonctions non pourvues de dérivées. Il est bien connu que, pour enseigner avec simplicité et clairement, il est nécessaire de dominer son enseignement et, partant, d'avoir des connaissances qui en débordent la matière ; mais nous ne nous lasserons pas de répéter que l'art d'enseigner est essentiellement celui de choisir et ce n'est pas choisir que de substituer à l'étude d'un cas particulier une théorie générale sans même prendre soin d'indiquer comment se déduit du cas général le cas particulier. Les leçons, hors programme, sur les fonctions différentiables et sur la concavité des fonctions, ont été péniblement reconstituées par leurs auteurs à partir, pour la première, d'une définition imprécise, et, pour la seconde, d'une définition manifestement dépourvue de sens, mais ces accidents sont des incidents techniques ; ce qui nous paraît grave, c'est, pour un candidat professeur, de prendre résolument la position d'élève récitant une leçon, avec plus ou moins d'aisance, sans faire d'autre effort qu'un effort de mémoire, sans illustrer cette leçon d'un exemple, sans tirer une conclusion.

Nous avons été frappés de la fréquence des fautes de logique, en particulier dans les leçons d'Elémentaires. La quasi-totalité des problèmes qui sont étudiés dans les classes qui vont de la Seconde aux Mathématiques inclus, sont spéculatifs. Nous appelons spéculatif tout problème dont l'inconnue est un être dont l'existence n'est par certaine, par exemple la recherche d'une solution d'un système d'équations ou d'inéquations ; les constructions géométriques, la recherche de lieux ou d'enveloppes, la résolution des triangles dans les cas non classiques, sont des problèmes spéculatifs. Pour résoudre de tels problèmes on utilise en général, avec les débutants tout au moins, la méthode analyse-synthèse. L'analyse est une étude faite en *supposant* que le problème a une solution ; elle ne peut donc servir à *démontrer* l'existence d'une solution.

C'est elle, par contre, et elle seule, qui permet de conclure à la *non existence* de solutions ou à l'*unicité* des solutions possibles. La synthèse est la démonstration de l'existence de ces solutions.

Aucun candidat ne doit ignorer ces vérités élémentaires ; il est alors difficile de comprendre pourquoi l'existence d'une solution est affirmée dans plus d'un cas sur deux sur le seul examen des résultats d'une analyse, généralement soignée, mais que ne suit aucune synthèse. Il est plus fréquent encore que la non existence de solutions soit présentée comme résultant de l'impossibilité de réaliser certaines constructions ; on devrait logiquement en conclure que la méthode choisie ne permet pas de trouver les solutions ; pour affirmer que ces solutions n'existent pas, il faut établir qu'aucune méthode ne fournira de solutions. Le raisonnement logique, qui constitue la démonstration, traduit un des résultats essentiels d'une analyse bien faite.

On est également surpris de l'imprudence des candidats ; on utilise, en général, pour appliquer la méthode de recherche analyse-synthèse à un problème de géométrie deux figures : celle de l'analyse sur laquelle sont dessinés les données, les éléments qui s'en déduisent, et *l'être géométrique que l'on recherche* et la figure de la synthèse sur laquelle ne sont dessinés que les seuls éléments fixes (données et éléments qui

s'en déduisent). Il est clair que la figure sur laquelle est dessiné l'être géométrique que l'on recherche ne peut être exécutée que dans le seul cas où cet être existe, par conséquent dans le cas de l'analyse et de l'analyse seulement ; il est imprudent de se servir de cette figure pour une synthèse ou pour un raisonnement par conditions nécessaires et suffisantes. Cette imprudence est, en général, fatale aux candidats, et cependant c'est dans la presque totalité des cas que la figure de l'analyse est utilisée pour la synthèse ou, ce qui est pis, pour raisonner par conditions nécessaires et suffisantes. Le candidat chargé (Elém. 44) d'exposer, en Seconde, quelques exemples de recherche de lieux géométriques, après avoir très fermement annoncé qu'il raisonnerait par conditions nécessaires et suffisantes, s'est placé, trois fois de suite, dans les conditions de l'analyse ; l'exposé est alors celui d'une analyse à coup de conditions nécessaires et suffisantes, donc indigeste, et ses conclusions sont incertaines ou fausses.

Leçons d'Élémentaires

2. La similitude plane est une transformation ponctuelle *du plan* faisant correspondre à un point M *quelconque* un point M'. Ne pas omettre d'orienter le plan.

Il faudrait préciser ce qu'on entend par « second côté d'un angle » : il s'agit, dans l'exemple classique : enveloppe du second côté d'un angle..., etc. d'une droite Δ définie quand on connaît une droite D par la donnée de l'angle *orienté* de ces deux droites.

Signalons, une fois pour toutes, que dans les exposés (similitude, rotation) où interviennent en même temps des angles de droites et des angles de vecteurs, le passage des uns aux autres exige du soin et de la précision.

7. Si l'on définit la transformation par polaires réciproques comme transformant un point en une droite et une droite en un point, il est nécessaire de vérifier que cette définition n'entraîne pas de contradictions.

9. Il est aussi nécessaire de préciser le sens du mot : enveloppe que celui du mot lieu. Dire qu'une courbe (C) est l'enveloppe d'une droite (D) traduit, en langage conventionnel, deux propriétés : toute droite (D) est tangente à (C) d'une part, et toute tangente à (C) est une droite (D).

En matière d'enveloppes, et aussi de lieux, il conviendrait également de donner un nom à la propriété (P), par exemple, de définition de la droite (D) ou du point M et même de la noter dans le haut du tableau ; il arrive, en effet, qu'on soit amené à utiliser avec des sens divers le mot : propriété et à confondre, entre eux, ces différents sens.

10. L'objet de cette leçon est de montrer l'existence de deux familles de cercles tangents à une droite et à un cercle, par exemple, et de deux seulement et en outre de trouver une propriété *caractérisant* chacune de ces familles.

12. Un professeur ne donne pas son enseignement en lisant des notes préparées à l'avance ; nous ne saurions trop conseiller aux candidats de n'utiliser leurs notes qu'avec discrétion et d'éviter de donner l'impression de réciter une leçon. L'étude du produit de deux transpositions d'axes concourants amène à définir une rotation : son angle est un angle de vecteurs ; il est nécessaire d'expliquer clairement la transformation d'un angle de droites en angle de vecteurs.

16. Rapport anharmonique de points alignés. Il est indispensable d'étudier d'abord le problème de l'existence d'un point D, conjugué harmonique d'un point C quelconque de AB par rapport à A et B distincts et son unicité ; le résultat de la construction classique de D connaissant C, semble en effet dépendre d'un paramètre arbitraire. La définition du faisceau harmonique se déduit de cette étude sans nouveaux calculs.

L'étude a été faite une première fois en Seconde ; on peut, dans cette classe, se borner au cas où les points A, B, C, D sont distincts, mais en Mathématiques Elémentaires, cette hypothèse doit être abandonnée.

18 et 19. La leçon 18 n'a pas été traitée, le candidat ayant renoncé à subir les épreuves orales. La leçon 19 est une tentative hésitante d'exposé axiomatique. On y relève, comme toujours, des omissions ou des lacunes, mais ces défauts sont moins graves que celui de présentation ; les candidats devraient s'efforcer d'être clairs, de dire avec simplicité les choses simples et les autres aussi et d'éclairer d'exemples leur exposé.

20. Il n'est, bien entendu, pas possible, en Mathématiques Elémentaires, de décomposer $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c}$ en éléments simples $A + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{C}{x-\beta}$, mais il n'est pas interdit à un professeur de choisir un exemple ou deux à partir d'une décomposition donnée, de manière à n'avoir à faire que des calculs qui, comme disent les élèves, s'arrangent bien. Une étude sommaire de la représentation graphique — recherche des asymptotes — peut conduire à des formes simplifiées de y qui aideraient au calcul de la dérivée.

24. Cette leçon, lourdement exposée, a été rachetée parce que l'idée que la résolution de $f(u) = 0$ et de $f(\sin x) = 0$ sont deux problèmes qui ne sont pas équivalents. Il ne faut pas oublier que c'est le premier exemple d'équations déduites l'une de l'autre par un changement de variable $u = \sin x$ effectué sur la fonction $f(u)$.

26 et 27. Deux leçons sur le rabattement, l'une assez bonne, l'autre à peine moyenne. Dans l'une et l'autre, avec des gravités différentes, se relèvent les mêmes omissions ; on finit toujours par oublier, soit qu'étant donnés deux plans (P) et (H), il existe deux opérations appelées : rabattement de (P) sur (H), soit qu'étant donné un plan (H) et un point M, il n'existe pas d'opération appelée : rabattement de M sur (H).

Ne pourrait-on réserver le mot : rabattement ou relèvement à la transformation ponctuelle, et appeler : rabattu ou relevé les transformés ? Est-il négligeable d'indiquer que cette transformation est une symétrie droite ?

46. La résolution d'un système de deux équations à deux inconnues est signalée dans tous les rapports d'agrégation. Le candidat qui a exposé la question l'avait déjà tirée au sort l'année dernière ; il ne l'a pas mieux traitée. Il faudrait poser avec netteté le problème de l'existence d'une part, celui du calcul d'autre part, et les examiner séparément. Décider *a priori* qu'on examinera d'abord le cas où un des coefficients a, b, a', b', est nul, puis le cas où deux sont nuls, puis le cas où trois sont nuls est inutile et arbitraire. A quels calculs conduirait cette méthode pour un système de trois équations à trois inconnues ?

Leçon de Spéciales

Elles ont été appréciées avec libéralité. Le jury n'ignore pas que de nombreux candidats n'ont pu, pour des raisons légitimes, consacrer une ou deux années à suivre les cours d'une classe de Spéciales ; il juge donc naturel qu'ils manquent d'aisance pour donner un enseignement adapté aux connaissances d'élèves de classes qu'ils n'ont pu fréquenter. On doit cependant s'étonner que toutes les leçons de Spéciales entendues en 1955, à l'exception d'une demi-douzaine, ou bien soient dépourvues d'exemples ou d'exercices, ou bien, lorsque le texte impose d'en traiter, que le choix de ces exemples soit pauvre, les méthodes de recherche lourdes et souvent poussiéreuses, le ton des candidats sans conviction. L'enseignement d'une théorie générale, qui n'est illustré d'aucun exemple et d'aucun exercice, est incomplet et risque d'être inefficace.

7. Une des méthodes les plus simples pour démontrer l'unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples de la forme $\frac{A}{(z-a)^\alpha}$ est l'analyse. La méthode de recherche par analyse-synthèse s'applique aussi bien en analyse qu'en géométrie et ne devrait être écartée que quand on peut lui en substituer une

meilleure. Celle du candidat, lourde, a pris beaucoup de temps et n'a permis à celui-ci d'exposer qu'un seul exemple : intégration de $\frac{x^4}{(x^2+1)^2}$.

13. Les opérations sur les développements limités supposent la connaissance de l'ordre auquel on opère.

Pour trouver un équivalent à arc $\sin \frac{2(x-1)}{5-2x+x^2}$ pour $x = 1$, il n'est pas recommandé de poser $x = 1+h$ et de développer à l'ordre deux ; la théorie des équivalents s'applique ici trop évidemment.

15. Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, l'hypothèse $F(x)$ tend vers une limite, n'entraîne pas la conclusion : $f(x)$ tend vers o lorsque x tend vers a. On peut l'ignorer ; il est moins excusable de démontrer le contraire.

17. Le texte de la leçon impose l'étude du changement de variable dans une intégrale définie ou indéfinie ; cette rédaction souligne la nécessité de déterminer avec soin les nouvelles limites. Le candidat qui a traité la leçon se borne au changement de variable $x = \varphi(t)$ [en ne disant rien de $\psi(x) = t$] et au cas où $\varphi(t)$ est une fonction croissante de t. Il serait souhaitable que dans un exemple au moins soit examiné le cas où $\varphi(t)$ n'est pas monotone dans l'intervalle considéré.

L'efficacité de la leçon est compromise par le choix des exemples qui sont tous, ou à peu près, de la forme $\int f'(x)dx$.

22 et 23. Les développements de e^x, $\sin x$, $\cos x$, s'obtiennent simplement en appliquant la formule de Mac Laurin ; il est donc inutile de les retrouver par la méthode de l'équation différentielle et de s'attarder par surcroît à des développements hors sujet comme la démonstration de $e^x e^y = e^{x+y}$. Il ne reste plus alors de temps pour exposer cette dernière méthode avec soin en variant les exemples ; les deux candidats ont naturellement choisi $(1+x)^m$; l'un des deux a bien indiqué qu'on pourrait appliquer la méthode générale à $(\arcsin x)^2$, $[L(1+x)]^2$, mais a paru satisfait de constater qu'elle s'applique à ces exemples en laissant à l'auditeur le soin de faire le calcul effectif des coefficients et l'étude de la convergence.

26. Nous avons entendu sur ce sujet : intégration de $y'' + py' + qy = f(x)$, $f(x)$ étant une combinaison linéaire de monômes en $\cos x$, $\sin x$, e^x, une leçon pas très bien composée, mais correctement et fermement pensée. Il ne paraît pas utile de supposer p et q complexes. Il est des cas, assez rares, où il est avantageux de commencer une étude par le cas général ; celui-ci en est un. On gagne du temps et l'exposé est plus clair en intégrant d'abord $y'' + py' + qy = Ae^{rx}$, et en indiquant, en conclusion de cette étude, l'expression, dans les différents cas, de la solution générale. La détermination effective de cette solution peut, en général, se faire alors par identification.

27. Le candidat, cherchant à séparer les racines de $x - L(1+3x^2) = 0$, néglige le fait que cette équation admet o pour racine et ne peut, par conséquent, conclure, car, dit-il, nous n'avons pas de table de logarithmes.

33. La leçon : enveloppe d'une droite (D) $ux + vy + w = 0$, u, v, w fonctions banales de t, aurait sans doute été moins mauvaise si le candidat avait raisonné par analyse et synthèse, très vieille méthode, certes, injustement méprisée, et qui s'applique dans la majorité des cas. Il est parti, *a priori*, de la recherche du point commun à (D) et à (Δ) correspondant à $t + \Delta t$; en démontrant, même correctement, que ce point M a une position-limite I et que la courbe (C), lieu de I, si elle existe et sous certaines réserves, est l'enveloppe de (D), on n'a pas résolu, de façon entièrement satisfaisante, la question de l'enveloppe. Le choix de la méthode étant imposé

a priori, si l'on conclut à l'existence ou à la non existence de l'enveloppe, il restera à examiner si le choix d'une autre méthode conduirait aux mêmes conclusions, et dans le cas de l'existence, à la même enveloppe.

Pour que la courbe (C) soit l'enveloppe des droites (D), il faut qu'une droite (D) quelconque soit tangente à la courbe (C) et qu'une tangente quelconque à la courbe (C) soit une droite D ; la suppression dans cet énoncé du mot quelconque le prive de sens.

34. On peut considérer la famille de courbes $f(x, y, \lambda)$ comme la famille des courbes intégrales de $F(x, y, y') = 0$ et lier la question de l'enveloppe de ces courbes à celle des intégrales singulières. Cette étude, très intéressante, est délicate ; l'exposé très soigné qu'a présenté le candidat, n'est manifestement pas rigoureux et conduit à des conclusions inexactes, dans le cas, par exemple, de $f(x, y) - \lambda = 0$. Il dépasse les possibilités d'un élève de Spéciales [conditions d'existence des fonctions x, y de λ définies par $f(x, y, \lambda) = 0$, $g(x, y, \lambda) = 0$].

36. Signalons, une fois encore, que le point M de coordonnées x, y, z, fonctions de deux paramètres indépendants u, v, ne décrit pas nécessairement une surface.

EPREUVES PRATIQUES

Elles ont été effectuées au Lycée Saint-Louis les 14 et 15 juillet.

Composition d'Epure : *Sujet.* — Le centre des axes coïncide avec le centre de la feuille. La ligne de terre est sur le petit axe de la feuille ; elle porte l'axe $y'y$ orienté de la gauche vers la droite. Les données sont exprimées en centimètres.

On donne les points O [8, 0, 8] ; A [11, 0, 8] ; B [11, 12, 20] ; S [14, 0, 8].

Un hyperboloïde de révolution (H) est engendré par la rotation de la droite AB autour de la verticale de O. Un paraboloïde hyperbolique (P), à plan directeur horizontal, a pour génératrices la droite AB et la verticale de S.

1° Les surfaces (H) et (P) ont en commun une droite et une courbe (C) ; construire (C).

2° Soit (Ω) le cône de sommet S et dont les génératrices rencontrent (C) ; il rencontre (H) selon une courbe (Γ). Construire (Γ).

3° Représenter la portion d'hyperboloïde supposé plein intérieur au cône (Ω) et situé entre les plans horizontaux de cotes 8 et 20. Par convention l'extérieur du cône est la région d'un seul tenant qui contient le point C [20, 0, 20].

Déterminer sur l'épure un point courant et un seul pour chaque courbe construite et la tangente en ce point et, éventuellement, les asymptotes (que l'on tracera à l'encre bleue), les points remarquables et les tangentes en ces points. Parmi ceux-ci figurent les points communs à (C) et (Γ).

Indiquer sur une notice les particularités remarquées et les méthodes employées.

Rapport de M. Théron, *correcteur.* — La réalisation de l'épure demandée aux candidats admissibles ne doit pas présenter de difficultés pour un bon élève de Mathématiques Spéciales ; il est très étonnant de constater que les notes attribuées aient été si basses, quelle qu'ait été l'indulgence du barème. La détermination de la courbe (C) et de son asymptote par leurs deux projections, avec un graphique correct, mais sans même la ponctuation de (C) et la représentation de l'hyperboloïde avec ses contours apparents, suffisait en effet pour obtenir la note 6, note qui n'est dépassée que par dix candidats.

Toute la partie relative à (Γ) n'a été quelque peu traitée que sur une dizaine d'épures. Une seule, notée 14, quoique présentant bien des lacunes, offrait à l'œil un dessin qui avait quelques rapports avec l'épure exacte et témoignait de l'effort de son auteur pour voir dans l'espace. La seconde, notée 10, a reçu cette note à cause d'une bonne notice, la seule en particulier à indiquer que les courbes (C) et (Γ) se correspondent dans une homologie involutive de point double S et dont le plan double est

le plan polaire de S par rapport à (H), propriété donnant les tangentes à (Γ) et se conservant en projection horizontale.

De nombreuses épures se réduisent à des dessins informes et fragmentaires, ce qui explique les quatre notes 1 et les cinq notes 2 attribuées.

Il semble qu'un entraînement même modeste à l'exécution d'épures procurerait aux candidats, sans grande fatigue intellectuelle, de solides chances d'améliorer de plusieurs points le total de leurs notes.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE : *Sujet.* — On considère l'équation différentielle :

(1) $$2x(1-x)y' + y - 2x = 0.$$

1° *Sans chercher à intégrer,* montrer qu'il existe une solution, et une seule, $Y(x)$, qui soit holomorphe pour $x = 0$. On posera :

(2) $$Y(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

et l'on déterminera les coefficients, ainsi que le rayon de convergence R de la série (2). Comment se comporte la solution générale de (1) au voisinage de $x = 0$?

2° Montrer qu'il existe une valeur réelle α, et une seule, comprise entre $-R$ et $+R$, pour laquelle $Y(x)$ est égal à $-0{,}2$. Calculer cette valeur α à 10^{-3} près.

3° Dans le plan de la variable complexe x, il existe un cercle de centre α et de rayon ρ à l'intérieur duquel $Y(x)$ ne prend qu'une fois la valeur $-0{,}2$. Sans chercher à déterminer exactement ρ, proposer une quantité ρ' positive telle que ρ est certainement supérieur à ρ'.

RAPPORT DE M. MILLOUX, *correcteur.* — La composition de Calcul numérique comporte trois parties d'inégale difficulté. La première partie consiste à trouver et à étudier sommairement la solution holomorphe au voisinage de l'origine, d'une certaine équation différentielle du premier ordre, d'un caractère très simple. Tous les candidats ont traité, en général convenablement, cette première partie.

Le second paragraphe contient l'un des deux calculs numériques demandés dans la composition. Il s'agit de rechercher la valeur de α pour laquelle la solution holomorphe — connue sous forme de série entière — est égale à une constante donnée. Il se trouve que la série dérivée est positive dans l'intervalle de convergence, ce qu'il est facile de constater, et qu'il en est de même de la série dérivée seconde, tout au moins, pour cette dernière, dans le voisinage de α. Il est pénible de constater que ces deux propriétés, qui sont si commodes à utiliser, n'ont été vues et exploitées que par un petit nombre de candidats. Les résultats à peu près exacts sont tous grossièrement approchés, et des méthodes invraisemblables, dénuées de toute rigueur, donnent à penser, une fois de plus, que la presque totalité des candidats à l'agrégation se désintéressent du calcul numérique.

Enfin, le troisième paragraphe, plus difficile, propose de chercher le rayon d'un cercle de centre α dans lequel la solution étudiée ne prend qu'une fois la valeur imposée en α. Ce cercle existe évidemment, puisqu'il y a univalence locale en α. Les résultats obtenus par les candidats valent d'être soulignés : l'un d'eux a reconnu l'existence du cercle, ce qui est déjà quelque chose ; un second a, sans explication, entamé les calculs, puis les a abandonnés presque aussitôt. Un troisième a déclaré que, s'il avait le temps, il étudierait la question à la lumière du théorème de Rouché. Ces trois candidats ont bénéficié de quelques points pour leurs intentions honnêtes.

Quant aux autres qui ont cru traiter la question, ils sont tombés à plaisir dans le piège qu'elle contenait, en confondant l'univalence locale avec l'univalence dans un domaine (l'univalence n'ayant d'ailleurs qu'un lointain rapport avec la question proposée). Pour eux, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction, holomorphe dans un domaine, y soit univalente, est que la dérivée ne s'y annule pas. Conséquence : la fonction exponentielle est univalente dans tout le plan ; en parti-

culier comme e^0 est égal à 1, $e^{2i\pi}$ est différent de 1 ; donc, ou bien cos (2π) est différent de 1, ou bien sin (2π) est différent de 0, à moins que ce ne soit l'un et l'autre. Il faut espérer que quelques-uns des candidats, qui ont utilisé un tel théorème, liront ce rapport, de façon à se réjouir de la remarquable conséquence qui vient d'en être tirée.

En résumé, l'épreuve a été bien mal traitée. Les notes s'en ressentent : elles ne dépassent pas 12, et sont pour la plupart voisines de 6.

RESULTATS GENERAUX

Les totaux des notes obtenues par les admissibles pour l'ensemble des épreuves en 1954 s'échelonnent entre 113 et 316, alors qu'en 1953 les nombres extrêmes étaient 124 et 334 (moyennes sur 20 : en 1954, 5,6 et 15,8 contre 6,2 et 16,5 en 1953). Le nombre des admissibles était sensiblement le même (47 en 1954, 48 en 1953) ; 157 concurrents en 1954, 148 en 1953 se sont effectivement présentés au concours. En outre, les barèmes des compositions écrites ont été plus généreux en 1954 qu'en 1953 ; l'appréciation des leçons d'oral a témoigné elle aussi d'une extrême indulgence ; on pouvait espérer, dans ces conditions, que les résultats de l'agrégation en 1954 seraient comparables à ceux du concours de 1953 et permettraient de proposer pour le titre d'agrégé un nombre au moins égal de candidats. Cet espoir a été déçu ; les résultats numériques confirment l'impression que donnait la correction des compositions écrites et qui s'est accusée, au cours des épreuves orales, celle d'une faiblesse générale de l'ensemble des candidats.

Le jury n'a donc pu proposer pour l'admission définitive, que les 26 candidats ayant totalisé 185 points au moins, c'est-à-dire ceux dont la moyenne était de 9,25 au moins. Les agrégés se répartissent ainsi : 7 élèves de l'Ecole Normale Supérieure (Ulm), 5 élèves de l'Ecole Normale Supérieure (St-Cloud), 2 étudiants libres, 1 élève des Centres pédagogiques régionaux, 1 assistant de Faculté, 10 professeurs titulaires (9 enseignants dans les lycées ou collège, 1 détaché).

Deux des admissibles sur les sept qui n'étaient pas encore titulaires du certificat ont été dispensés des épreuves théoriques et pratiques et trois autres des épreuves théoriques seulement du nouveau C.A.P.E.S.

Les dix professeurs titulaires, nommés agrégés, ont été, soit maintenus dans les postes qu'ils occupaient (6), soit nommés dans une chaire de Mathématiques Elémentaires de lycée (4). Nous sommes heureux de rendre hommage à ces derniers qui, déjà installés dans une ville, logés, ayant quelquefois des charges de famille, ont accepté avec simplicité les ennuis et les risques d'un déménagement pour aller occuper ailleurs des chaires de Mathématiques Elémentaires qui, sans cela, seraient restées sans titulaires agrégés. Il est très réconfortant de constater que, grâce à eux, grâce aussi aux agrégés non encore dans les cadres, dix classes de Mathématiques Elémentaires de lycées vacantes en juillet 1954, ont été pourvues ; la onzième, dans un lycée mixte, a été attribuée à une agrégée.

*
**

Le bilan de l'agrégation, établi comme nous l'avons exposé dans le rapport de l'année dernière, résulte de la comparaison de deux nombres : 1° celui des candidats provenant des Ecoles Normales Supérieures, des Facultés et des C.P.R. qui ont été nommés agrégés ; 2° celui de ces agrégés qui ont reçu, au mouvement de 1954, une première nomination dans l'Enseignement du Second Degré. Nous négligeons donc dans cette statistique les candidats à l'agrégation déjà professeurs titulaires de lycées, collèges, écoles normales, enseignement technique, qui n'ont fait que changer de cadre sans que ce changement influe sur le total des enseignants.

Seize agrégés nouveaux, proviennent des E.N.S., Facultés et C.P.R. ; 4 ont été autorisés à faire une quatrième année d'école normale, et, un seul a été appelé au service militaire avant le 1er octobre 1954.

Onze d'entre eux ont donc été pourvus d'une nomination de professeur dans l'Enseignement du Second Degré ; dans ce nombre, sont compris ceux qui, nommés au début de l'année scolaire et installés, ont été ultérieurement appelés au service militaire.

Il nous a paru équitable d'ajouter à ce nombre onze, celui des agrégés qui, reçus à l'agrégation dans les années précédentes, ont sollicité et obtenu en 1954 une première nomination, soit après une quatrième année d'école normale, soit après un passage dans l'Enseignement Supérieur ou la Recherche Scientifique. Ils sont quatre ; deux sont agrégés de 1952 (l'un d'eux a pu être nommé en Mathématiques Supérieures), et deux, agrégés de 1953 ; cet appoint porte à 15 le nombre des agrégés qui ont occupé en 1954 un poste dans l'Enseignement Secondaire pour la première fois.

Le bilan, pour les années 1953 et 1954, établi par comparaison de listes nominatives, donc aussi exact que possible, est de 29 premières nominations dans l'enseignement du Second Degré pour 30 agrégés non encore intégrés dans les cadres de notre enseignement. Il paraît très rassurant, si l'on ne tient pas compte du déficit des années antérieures, souvent signalé mais qui n'a pas, à notre connaissance, été chiffré. Il est prudent d'attendre, pour conclure, les résultats d'une statistique portant sur un plus grand nombre d'années.

*
**

Quinze agrégés de 1954 ont une moyenne supérieure ou égale à 10 (ils étaient 20 en 1953). Les moyennes des quatre premiers sont 15,8 ; 12,6 ; 11,7 ; 11 (en 1953 elles étaient 16,7 ; 15,8 ; 14 ; 13,5).

L'impression déjà donnée par les rapports particuliers concernant les épreuves écrites d'une faiblesse générale des résultats, impression aggravée par les épreuves orales, se traduit ici en notes chiffrées. Le fléchissement du niveau du concours est extrêmement sensible et préoccupant ; certes, il y a des raisons de croire qu'il a été accentué par une accumulation fortuite de circonstances défavorables qui ne se reproduira pas ; la répartition des scientifiques entre mathématiciens et physiciens dans les promotions de Normaliens et dans les Facultés peut influer, en dehors de tout contrôle, sur la qualité des candidats ; la promotion d'élèves de l'Ecole Normale Supérieure de St-Cloud qui s'est présentée à l'agrégation en 1954 est la dernière de celles qui furent recrutées avec les anciens programmes ; ces facteurs, d'autres encore, ont joué dans le même sens ; ils ont rendu sensible le fléchissement, ils ne l'ont pas provoqué.

Le concours d'agrégation de Mathématiques a atteint son rendement maximum et cela depuis plusieurs années ; le nombre des candidats diminue ; il était en 1954 de 143 (candidats effectifs, ayant remis quatre compositions écrites) contre 170 en 1950 et 185 en 1935, et malgré cette diminution du nombre de candidats, l'augmentation de nos besoins a conduit à augmenter le nombre des agrégés : il était de 19 en 1935 pour 185 candidats, il est aujourd'hui de 26 pour 143 candidats.

Le mécanisme de l'affaiblissement du concours est alors très clair ; il prélève, en 1954 par exemple, 16 candidats sur l'apport neuf des Ecoles et des Facultés, et le complément, 10, sur la réserve ; cette réserve ne se reconstitue pas, les 16 candidats prélevés sur l'apport des Ecoles et des Facultés, représentent tout ce qui était valable dans cet apport ou à peu près, et l'agrégation de Mathématiques ressemble à un malade atteint de leucémie auquel on ne fait pas de transfusion de sang.

Nous n'oublions pas le secours que lui a apporté le groupement dans les Centres pédagogiques régionaux, à proximité, par conséquent, des Facultés, de licenciés sélectionnés par un concours ; c'est à cet apport précieux d'éléments jeunes que nous

devons la très légère augmentation de l'effectif entre 1953 et 1954 ; 136 candidats en 1953, 143 en 1954. La création des C.P.R. a donc eu pour résultat de stopper la diminution du nombre des candidats à l'agrégation ; elle ne suffira pas, à elle seule, à renverser le mouvement et à faire que ce nombre augmente sensiblement et régulièrement.

La diminution du nombre des candidats à l'agrégation de Mathématiques nous paraît plus préoccupante que la faiblesse du concours en 1954. Dans un remarquable article, publié dans l'*Education Nationale* (6 janvier 1955), M. le Directeur général de l'Enseignement du Second Degré, interprétant des statistiques portant vraisemblablement sur les effectifs des candidats *et candidates* aux diverses agrégations scientifiques, constate que le nombre de ceux-ci a augmenté de 51 à 54 pour toutes les agrégations, sauf pour celle de Mathématiques. « Il faut, écrit-il, trouver à cela des raisons particulières à cet enseignement. Force est pour nous de constater qu'il a moins de succès auprès des étudiants des Facultés que les autres disciplines scientifiques. »

Le certificat de Calcul différentiel et intégral étant le seul dont la possession soit imposée aux candidats à l'agrégation de Mathématiques, il serait intéressant de déterminer si la diminution du nombre de candidats à cette agrégation correspond à une diminution du nombre des candidats à ce certificat. Il passe dans le monde des étudiants pour un obstacle difficile à franchir sur la route déjà longue qui mène à l'agrégation.

Nous terminerons ce rapport en rappelant que dix professeurs titulaires de lycées ou de collèges sont cette année au palmarès de l'agrégation ; l'un d'eux est âgé de 39 ans, un autre de 45 ans. Ce dernier a été reçu avec le numéro 4 ; ni l'un, ni l'autre n'ont demandé de congé pour leur préparation. Ce très bel exemple de ténacité et de courage, le succès très net qui en est la récompense, témoignent que l'agrégation est un concours accessible à la plupart de nos professeurs ; ils témoignent aussi de la qualité du corps enseignant.

R. DONTOT, *Inspecteur général de l'Instruction Publique.*