

**Réflexions, à propos de la mesure des grandeurs,
sur l'entendement humain et l'entendement bourbakiste**

Il faut remercier M. CARTAN pour l'article qu'il a bien voulu nous donner dans le *Bulletin* de décembre. Sur beaucoup d'entre nous, il aura produit un effet de choc.

Choc, d'abord, à découvrir que Bourbaki révolutionne la Grammaire aussi bien que la Mathématique : « ceci », pour désigner ce qui vient d'être dit (à savoir l'usage observé en Spéciales d'introduire les nombres réels par les coupures de Dedekind), ébranle le lecteur dès l'abord. Et c'est tout étourdi qu'il reçoit les coups suivants :

1° « Ceci, " donc ", prend beaucoup de temps et laisse les élèves assez indifférents. »

2° Ce n'est pas des coupures qu'on se sert dans les calculs numériques.

3° Ce n'est pas d'elles qu'on se sert, non plus, dans les développements ultérieurs de l'analyse mathématique.

Ayant repris nos sens, examinons ces trois points.

I

Mon cours doit ressembler à ceux de beaucoup de mes collègues. Je viens de m'assurer qu'en 136 lignes de 50 lettres (d'où le « il est immédiat » est aussi sévèrement proscrit que le « on verra sans difficulté »), il met le lecteur (1) en possession :

de la notion de coupure, *introduite* comme les nombres déjà connus (entiers et fractions), après démonstration de leur insuffisance, comme une *mesure* : c'est-à-dire, en définitive, comme un mode de détermination (par la classe des « points à gauche » et par celle des « points à droite ») d'un point de l'axe $x'Ox$;

d'une définition (par les images) et de critères (par les classes) de l'égalité et de l'inégalité ;

de la notion de borne supérieure d'un ensemble majoré (l'existence d'un « plus petit des majorants » étant, bien entendu, établie par constitution d'une coupure) ;

de la notion, conséquence de borne commune à deux ensembles adjacents (les éléments des deux ensembles n'étant plus nécessairement rationnels et la réunion ne s'étendant plus nécessairement à tout l'ensemble des nombres définis) ;

de l'idée, enfin, que la constitution d'ensembles adjacents sera le mode constant de définition d'un nombre dans les théories ultérieures.

136 lignes de 50 lettres : beaucoup de temps, c'est beaucoup dire.

Par contre, il est bien vrai que cet exposé, quand je le présente à mes élèves, les laisse « indifférents ». Il ne les arrache pas à leur humaine nature d'honnêtes bacheliers et de futurs techniciens. Ils y voient une modeste « mise en forme » de démarches qui leur sont familières. Nombre, mesure : cela va, ensemble. Possibilité d'une précision ϵ arbitrairement petite (puisque c'est cela que signifie l'adjacence), ils sentent que cela va, avec une rassurante surabondance, avec la possibilité d'expériences de plus en plus précises : l'instrument, décidément, semble devoir être à la mesure de toute tâche qu'on lui demandera... J'avoue me demander s'ils auraient la même confiance dans des nombres dont l'application à la mesure des grandeurs reposerait sur ce théorème fondamental : « Il existe une application strictement croissante f de I dans R^+ , telle que $f(\omega) = 0$ et $f(x + y) = f(x) + f(y)$ chaque fois que x, y et $x + y$ sont dans I . » Du moins, je veux accorder à M. CARTAN que ce mode d'exposition ne les laisserait pas « indifférents » : je craindrais même une réaction si explosive que je me sens lâche à l'idée de l'affronter.

Et il est bien vrai, aussi, que j'ai admis la notion de fraction, et celle de gâteau coupé en quatre dont on prend trois parts. M. CARTAN, lui, tient à souligner qu'il épargne cet effort à son auditoire : il lui suffit de 300 lignes (de 70 lettres chacune), d'un ensemble à peine dénombrable de « on verra que », et des modestes notions d'isomorphisme, d'automorphisme, de nombres dyadiques, de groupes archimédiens... pour en arriver, tout juste, à suggérer le théorème fondamental énoncé ci-dessus, et dont on trouvera la démonstration au chapitre V du livre III de Bourbaki. Avouons que cette économie de moyens a quelque chose d'admirable.

II

Les 91 lignes suivantes de mon cours traitent des opérations sur les nombres définis par ensembles adjacents. A partir d'une définition très hérétiquement concrète de ces opérations, elles étendent (2) les « propriétés » (admisses pour les nombres

(1) C'est du lecteur bachelier que je parle : je ne m'en connais point d'autre.

(2) Je ne voudrais pourtant pas laisser croire que, tout au long de leur enseignement, les attardés de ma sorte laissent subsister une confusion entre ce qui est empirisme et ce qui est déduction. Simplement, ils s'appliquent à éviter toute tromperie sur la qualité (ou l'origine) de la marchandise. Les « axiomes » étant issus de l'empirisme, ils les présentent

rationnels) dont Bourbaki fera des « axiomes » ; elles montrent qu'on obtient une valeur approchée par défaut de la somme (par exemple) en additionnant des valeurs approchées par défaut, et elles ajoutent qu'au prix d'une précision suffisante sur chaque terme, on assurera toute précision arbitrairement exigée sur le résultat : car la démonstration d'adjacence, pour les ensembles définissant le résultat de chaque opération, est immédiatement interprétée en termes de calculs d'erreur.

Il paraît que, ce faisant, nous sommes beaucoup trop loin (mille pardons à ceux de mes collègues que ce « nous » compromet !), nous sommes beaucoup trop loin, dis-je, du calcul numérique. Heureusement, M. CARTAN nous indique comment nous en rapprocher. Il nous suffira (foin des coupures et autres ensembles adjacents !) de faire reposer notre théorie des nombres réels sur le théorème suivant : « Tout groupe abélien ordonné G satisfaisant à (A_1) , (A_2) et (A_3) est isomorphe au groupe R des nombres dyadiques. »

J'ai prescrit à mes Taupins, à tout hasard, de joindre ce texte au mode d'emploi de leur table de Bouvard et Ratinet.

III

Enfin, il paraît que les coupures n'ont aucun rôle à jouer dans les développements ultérieurs de l'analyse mathématique. On aimerait, ici, quelques précisions sur l'exacte portée de cette condamnation.

Nous sommes nombreux à réserver le nom de coupure à une répartition de *tous* les nombres réels (rationnels d'abord, pour définir les irrationnels, et quelconques ensuite en deux classes telles que..., etc... et à employer le terme d'ensembles adjacents pour des ensembles *ne s'étendant plus à tous les nombres définis* (mais tels que l'un soit tout entier à gauche de l'autre et que leur écart soit nul). Mais M. VALIRON, et d'autres, nomment coupure ce que nous appelons ensembles adjacents. La condamnation de M. CARTAN porte-t-elle seulement sur ce que nous appelons coupures au sens strict ? Ou englobe-t-elle aussi nos ensembles adjacents, ou coupures selon M. VALIRON, ou « coupures généralisées » selon d'autres encore ?

Si M. CARTAN nous laisse ces « coupures généralisées », nous n'aurons point trop de peine à nous adapter, encore qu'une coupure dans l'ensemble de tous les nombres réels nous soit bien commode, par exemple, pour définir le rayon de convergence d'une série entière, et encore que, comme je l'ai dit, les « coupures strictes » soient un préalable bien commode aussi aux « coupures généralisées ».

Mais si celles-ci (comme je le crains, l'offensive ayant trop d'élan pour s'arrêter à de tels détails) nous sont également enlevées, que va-t-il nous rester ? Faute d'être autorisés à démontrer l'adjacence des S et des s de Darboux, nous faudra-t-il lire 19 tomes de Bourbaki avant de savoir comment, selon le New Look, il convient de définir l'intégrale de Riemann ?

Séries entières, intégrale définie... quels instruments plus importants avons-nous la charge d'introduire dans nos cours ?

**

Sire, le peuple murmure.

C'est entendu, ma hargne est excessive, obtuse, béotienne. Mais ce billet, Sire,

comme tels ; ils les extraient, comme ils en ont été extraits, d'une analyse de l'intuition empirique et *après* les avoir dégagés, ils disent : *désormais*, tout ne sera que déduction.

Je reproche à Bourbaki de commettre, dans son escamotage de la première tâche, une véritable dissimulation. Qu'on n'en soit pas dupe, entre gens *très* avertis, est une chose. C'en serait une autre, à laquelle je me refuse, que de faire de cette dissimulation la base de l'enseignement. Qu'on y prenne garde : les mathématiciens ne seraient pas longues à disparaître de nos programmes, et à bon droit, si nous nous appliquions nous-mêmes à les couper de toute attache avec l'univers commun.

Ce que j'interdis à Bourbaki, en somme, c'est de s'adresser à d'autres qu'à des mathématiciens *spécialisés* : les élèves de « Spéciales » n'en sont pas et ne peuvent en être.

s'est contraint à se faire plus grossier encore que son auteur. Car il voulait forcer votre attention, et la forcer à mesurer la profondeur d'un fossé qui est en train de devenir un abîme : celui qui vous sépare de votre peuple. Celui, plus précisément, que Bourbaki a creusé entre l'humanité et soi, et de part et d'autre duquel, les uns pour les autres, nous sommes devenus des Martiens.

Je ne voudrais pas, Sire, que mon impertinence vous dissimulât l'immense respect que je vous porte : c'est en vous disant ce respect que je suis sincère, et non en relevant une négligence de votre rédaction. Car je sais que vous avez été un très brillant Normalien. Et je sais que, depuis 30 ans que vous le fûtes, vous n'avez cessé d'aiguiser toujours davantage l'admirable instrument qu'est votre pensée.

Or nous sommes nombreux, dans votre peuple, à n'avoir été que des Normaliens très vulgaires, de très quelconques agrégés, ou moins encore. Depuis, nous n'avons fait que nous épaissir, toujours davantage, dans d'obscures besognes d'enseignement. Et nous y avons fait, pourtant, une importante découverte : celle que la plupart de nos élèves sont plus obtus encore que nous-mêmes.

Pour vous, Sire, dès qu'un mot a été défini, son sens est immédiatement clair, et ce mot est utilisable. Limpide est la phrase où se succèdent cinq ou six mots tels que groupe, isomorphisme, ou à plus forte raison, ces mots plus vulgaires que sont équivalents, implique, nécessaire, suffisant. Et limpide est le raisonnement qui tient en cinq ou six phrases de ce genre.

Mais savez-vous, Sire, qu'il faut de longs mois pour faire assimiler à un élève moyen le sens d'un seul mot sortant de sa langue courante ? Et ne m'objectez pas que notre effort est mal appliqué. Ne m'objectez pas que nous obtiendrions de meilleurs résultats en nous appliquant à enseigner, dès la base, au lieu de détails trop chargés d'opacité contingente, les mots-clés de votre construction de cristal. Car cette contingence, synonyme pour vous de confusion et de trouble, c'est, pour l'élève brut, la seule clarté. Où vous voyez trop nombreux axiomes, il voit, lui, donnée immédiate, directement appréhendée. Car l'instrument premier de sa pensée, à lui, n'est point l'axiome. Et nous ne l'aménons à la pensée logique, la sienne ne l'étant point de naissance, que par un patient effort.

Bien sûr, nous ne lui enseignons pas l'isomorphisme. Mais nos collègues du Secondaire n'ont guère d'autre soin que d'enseigner le mot « équivalent ». Savez-vous qu'ils n'y parviennent pas ? Savez-vous que rares sont les élèves de Spéciales pour qui ce mot évoque immédiatement l'idée de deux propositions (ou plutôt qui ne répugnent pas, sachant que ce mot est tyrannique, à l'employer) ?

Or, Sire, nous sommes des hommes, solidaires de l'humanité tout entière. Imiterons-nous Isidore Izou, assemblant des syllabes pour son solitaire et intransmissible plaisir ? Nous sommes quelques-uns à préférer Rimbaud et Valéry. Ou Cézanne, Ou Cauchy.

Pour qu'une lampe éclaire les veilles où vous épurez toujours davantage vos pensées (et où vous arriverez peut-être, un soir, à vous affranchir de l'axiome selon lequel l'ensemble des ensembles n'est pas vide), il faut bien que nous préparions des ingénieurs électriciens. Il nous faut bien, pour cela, leur enseigner des mathématiques intelligibles pour eux, et utilisables par eux. Laissez-nous donc, ces garçons, les prendre tels qu'ils sont. C'est un fait : il y a vingt ans qu'ils ont vu, pour la première fois, partager un gâteau. C'est pourquoi le partage du gâteau est pour eux une notion claire, sur laquelle nous pouvons bâtir. Laissez-nous, je vous en adjure, continuer comme nous le faisons. Réservez vos trésors, chaque année, aux deux ou trois plus brillants élèves de la promotion de l'Ecole Normale. Sinon, il risquerait d'être bien sombre et bien froid, aux approches de la fin des temps, l'amphithéâtre où le dernier Bourbakiste aurait survécu au dernier étudiant.

R. GUYON,

*professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée de Toulouse.*