

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

SOMMAIRE

Avis important 37

PREMIÈRE PARTIE

I. Réunion du Comité : 27 janvier 1955 38

II. Documents officiels :
 Rapport sur l'Agrégation féminine de Mathématiques 40

DEUXIÈME PARTIE

L. JÉRONNEZ : *L'organisation de l'enseignement des Mathématiques en Belgique* 60

H. MIRABEL : *Sur l'orientation relative de deux trièdres* 70

R. GOUYON : *Réflexions, à propos de la mesure des grandeurs, sur l'entendement humain et l'entendement bourbakiste* 77

M. FRÉCHET : *La méthode axiomatique* 81

L. FELIX : *L'axiomatique, nos élèves et nous* 81
 Deux notes sur l'emploi des symboles 86

L. GUÉNOT : *Remarques pédagogiques sur l'arc capable en Troisième et Quatrième* 87

Bibliographie : Introduction à la méthode statistique (A. MONJALLO) 88

Cotisations : 600 F

Abonnements : 1.000 F

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e

Cotisation pour les professeurs de mathématiques 600 F

Abonnement pour les autres membres 1.000 F

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France 200 F

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Énoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5.708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Couverture page II

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

- Président :** M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5°).
Vice-Présidents : Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14°).
M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelin, Neuilly-sur-Seine.
M. CAGNAC, 53, rue de Babylone, Paris (7°).
M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14°).
Secrétaires : M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16°).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).
Adjointe au Bureau : Mlle FÉLIX, professeur au Lycée La Fontaine.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1955 : M. CAGNAC (Louis-le-Grand) ; M. DURRANDE (St-Louis) ; M. HUISMAN (Montaigne) ; M. MARVILLET (Strasbourg, Kléber) ; M. MONJALLON (St-Louis).

Sortants en 1956 : Mlle MASSON (Marie-Curie) ; M. BAY (Condorcet) ; M. CARALP (Montaigne) ; M. CROZES (Henri-IV) ; M. DELTHEIL (Fac. Sc. Toulouse) ; M. PÉTRUS (Janson).

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, Faidherbe) ; M. ITARD (Henri-IV) ; M. MAILLARD (Charlemagne) ; M. POCHARD (Condorcet) ; M. ROSTOLLAND (Marcel-Roby) ; M. THOVERT (Lyon, Ampère).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (Fénelon) ; M. BIGUENET (E.N.P. Saint-Ouen) ; M. CHAZAL (Saint-Louis) ; M. EDDE (E.N. Auteuil) ; M. GIRARD (Arago) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. WALUSINSKI (Voltaire).

Membres de droit

Mme NICOD (Lyon, Marie-Vidalenc) ; M. CANONGE (Castres) ; Mlle MASSON (Marie-Curie) ; M. BAY (Condorcet) ; M. POUX (Saint-Cloud).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. BIGUENET ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques : Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales ; M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, Thiers) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (Lille, Faidherbe) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, Ampère) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, Henri-Poincaré) ; *Rennes :* M. RENAULD (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, Kléber) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (Casablanca, Lyauté) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, Carnot).

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

AVIS IMPORTANT

Afin de parer, dans la mesure du possible, à certaines irrégularités constatées dans la distribution du Bulletin (cf. procès-verbal de la réunion du Comité du 27 janvier 1955), et qui ne sont aucunement la faute du Bureau, le Trésorier prie instamment les membres de l'A.P.M. ayant à envoyer des réclamations de les lui adresser personnellement à l'adresse suivante :

M. P. LEGRAND,
3, Avenue R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise)

Pour guider nos collègues dans ces réclamations, nous leur signalons ci-dessous les numéros parus depuis octobre 1954 :

N° 164. Novembre 1954 : *Annales du Baccalauréat.*

N° 165. Décembre 1954 : *Bulletin.*

N° 166. Janvier 1955 : *Annales du B.E.P.C.*

Après le présent Bulletin (n° 167), il paraîtra (vraisemblablement vers le 15 mars), un Bulletin (n° 168), Bulletin préparatoire à l'Assemblée générale de 1955.

Nous prions les collègues désirant être candidats aux élections au Comité à l'Assemblée générale de 1955 de nous adresser leur déclaration de candidature avant le 1^{er} mars au Président.

Avez-vous versé votre cotisation pour l'année scolaire 1954-55 ?

Avez-vous pensé à verser votre complément de cotisation, celle-ci ayant été relevée de 400 F à 600 F par décision du Comité en date du 11 novembre 1954 ?

LE BUREAU.

PREMIÈRE PARTIE

I. Réunion du Comité

27 janvier 1955

Présents : Mlles AFFRE, DIONOT, FÉLIX, MASSON ; MM. BAY, CHAZAL, FAVRELLE, GIRARD, ITARD, LEGRAND, MAILLARD, MONJALLON, POCHARD, ROSTOLLAND, WALUSINSKI.

Excusés : MM. CAGNAC, CROZES, DURRANDE, EDDE, THOVERT.

La séance est ouverte à 16 h. 30.

Le Président fait part des constatations qu'il a relevées concernant la distribution du *Bulletin*. M. FERRIEU, qui avait protesté précédemment, l'a prié de lui adresser désormais son *Bulletin* à son adresse personnelle. Un *Bulletin*, n° 166, a été retrouvé par le Président dans la case d'un collègue d'anglais de l'Annexe du Lycée St-Louis alors que l'adresse était : boulevard St-Michel, et le destinataire un professeur du Lycée St-Louis, fort ancien dans la maison.

Sans vouloir incriminer qui que ce soit, il est clair que de tels faits montrent que le Bureau n'est pour rien dans la mauvaise distribution du *Bulletin*. D'ailleurs le pourcentage d'erreurs est faible, moins de 2 %. Cependant le Comité décide de prendre toutes mesures pour éviter ces situations désagréables. Il est obligé de reconnaître que l'envoi tardif des cotisations, l'oubli de faire changer son adresse, parfois aussi l'oubli de verser la cotisation, amènent de sérieuses complications qu'il serait heureux de voir disparaître. Les nouveaux adhérents inscrits tardivement ne peuvent être servis aussi rapidement que les anciens ; qu'ils prennent patience, ils ne sont pas oubliés.

M. LEGRAND, trésorier, informe le Comité de l'état des finances de l'Association. Il y a environ 963.000 francs en caisse. On a reçu 1.762 cotisations pour l'année en cours contre 1.556 l'année précédente à la même date. La plupart des collègues ont versé la majoration de 200 francs. Cette situation étant en somme satisfaisante, M. MAILLARD souhaiterait la publication de la liste des membres de l'A.P.M. comme on le faisait autrefois. Le Président n'y est pas hostile, quoique la dépense soit assez lourde. La question sera posée à la prochaine Assemblée générale.

M. MONJALLON, président, parle ensuite de la réforme de l'Enseignement qui est en cours, et demande notamment : Quelle doit être notre action ? M. POCHARD voudrait surtout que l'on rappelle l'importance qu'avaient les horaires de mathématiques dans les programmes de 1902. Il y avait alors, par exemple, sept heures (dont deux de dessin géométrique) en Première C et D. On a bien allégé en principe les programmes correspondants, mais, en pratique, on a l'impression que certaines questions sont maintenant traitées avec beaucoup plus de détails par l'ensemble des professeurs, l'étude des transformations en particulier. M. CHAZAL n'est pas de cet avis, cependant tout le monde est d'accord pour constater un abaissement du niveau en Première. Mlles DIONOT, FÉLIX et MASSON, intervenant dans la discussion, disent qu'il faudrait obtenir de la classe de Sixième un horaire suffisant pour que l'on puisse orienter les élèves et que l'on aurait quelque chance de l'obtenir en demandant des heures de travail dirigé permettant d'alléger le travail à la maison.

Comme conclusion, il est décidé que ces arguments seraient mis en valeur dans une lettre adressée au Ministre de l'Education Nationale.

Le Président prie Mlle Masson de vouloir bien résumer les vœux exprimés par la Commission, qui s'est réunie récemment, relativement à l'examen d'entrée en Sixième. Voici les divers points sur lesquels la Commission s'est mise d'accord :

— premier problème remplacé par des opérations sur des nombres abstraits entiers ou décimaux ;

— second problème à trois ou quatre questions de difficulté croissante ;

— remise du texte imprimé ou dactylographié (ce résultat avait été déjà obtenu l'an passé) ;

— examen plus important du dossier scolaire (M. POCHARD insiste sur ce point).

Quant au report à l'après-midi de l'épreuve de mathématiques, la question reste en litige par suite de difficultés d'organisation.

La prochaine Assemblée générale de l'Association devant avoir lieu le 3 avril, M. MONJALLON se préoccupe des candidatures à susciter, car il y aura cinq membres du Comité à élire. De plus, il souhaiterait accroître l'intérêt de l'Assemblée générale à l'instar de ce qu'il a pu voir en Belgique lors de l'Assemblée générale de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques à laquelle il a assisté récemment. Deux questions y étaient à l'étude : la résolution des équations et les lieux géométriques ; il y avait des rapporteurs et un large débat a suivi chacun des rapports. M. WALUSINSKI abonde dans le même sens que le Président et il est chargé de mettre au point un questionnaire relatif à l'enseignement de l'Astronomie. M. WALUSINSKI rappelle qu'il avait été décidé à la précédente réunion que des sujets d'étude devraient être proposés dans le *Bulletin*.

Enfin M. MONJALLON donne des renseignements sur les prochaines journées internationales d'information sur l'enseignement des mathématiques qu'il a organisées pour le Mardi-Gras avec le concours du Ministre de l'E.N. et la Direction des relations culturelles. Outre quatre délégués par Académie, de nombreux pays seront représentés : Angleterre, Hollande, Belgique, Luxembourg, Allemagne, Autriche, Suisse et Italie. Le sujet d'études est l'enseignement des mathématiques de 10 à 17 ans dans les divers pays. Vous trouverez plus loin une ébauche du programme de ces journées.

La séance est levée à 18 h. 15.

Le Secrétaire : R. ROSTOLLAND.

**Journées internationales d'information sur l'enseignement
des Mathématiques entre 10 et 17 ans
21, 22, 23 février 1955**

Le programme de ces journées, qui auront lieu au Centre International d'Etudes pédagogiques de Sèvres, 1, rue Léon-Journault, Sèvres (S.-et-O.), sera à peu près le suivant :

Lundi 21, à 9 heures : Panorama de l'enseignement des mathématiques entre 10 et 17 ans dans les pays voisins ;

à 15 heures : Inauguration des journées internationales par M. le Directeur général de l'Enseignement du Second Degré (une conférence générale suivra cette inauguration).

Mardi 22, à 9 heures : L'enseignement de la géométrie dans le Second Degré ;

à 15 heures : L'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre.

Mercredi 23, à 9 heures : L'enseignement mathématique dans les classes secondaires en France.

Débats et conclusions des journées.

L'après-midi, une visite de l'Institut Blaise-Pascal et une réception au Musée Pédagogique prendront place.

II. Documents officiels

Rapport sur l'agrégation de Mathématiques (Femmes) Session de 1954

Le jury de l'agrégation féminine de Mathématiques, pour la session de 1954, était composé de la façon suivante : M. VILLAT, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, président ; M. DESFORGE, inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président ; Mme DUBREIL, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers ; Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (classe de Fontenay) au Lycée Fénelon ; M. PÉTRUS, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Janson-de-Sailly.

Pour les épreuves pratiques et orales, auxquelles M. VILLAT n'a pu assister, la présidence a été assurée par M. DESFORGE, et M. VILLAT a été remplacé numériquement par M. DUGUÉ, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

La session du concours a duré du 31 mai, date du début des épreuves écrites, au 1^{er} août. Les résultats d'admissibilité ont été donnés le mercredi 7 juillet. Les épreuves pratiques et orales ont eu lieu au Lycée Fénelon, à Paris, à partir du 14 juillet.

Le nombre de candidates inscrites était soixante-douze.

EPREUVES ECRITES

Soixante candidates ont pris part à la première épreuve ; l'une d'entre elles a abandonné le concours après la composition de Mathématiques élémentaires, deux après la composition de Spéciales et une après la composition de Calcul différentiel et intégral.

Pour les cinquante-six candidates ayant terminé les épreuves écrites, le total des notes pour l'ensemble des quatre compositions varie de 70 à 10, le maximum étant 80 points, c'est-à-dire de 17,5 à 2,5 sur 20. La répartition de ces notes d'ensemble est la suivante : trois seulement sont supérieures à 10 sur 20 (un 17,5, un 14, un 11,5) ; quatorze sont comprises entre 10 et 8 ; quinze entre 8 et 7 ; treize entre 7 et 5 ; onze entre 5 et 2,5 (dix entre 4,5 et 3,5 ; un 2,5).

Les trente-deux premières candidates de ce classement ont été déclarées admissibles ; la moyenne des deux dernières admissibles (*ex-aquo*) est très voisine de 7 sur 20.

La moyenne de l'écrit pour les trente-deux admissibles est 8,6 sur 20 ; elle est égale à 4,4 pour les vingt-quatre non-admissibles et un peu supérieure à 6,6 pour les cinquante-six candidates.

Si l'on excepte la candidate classée en tête, avec une moyenne (17,5 sur 20) qui n'a été atteinte que tout à fait exceptionnellement lors des sessions antérieures, les autres notes d'ensemble apparaissent inférieures à celles du concours précédent (1), bien que l'écart entre les notes extrêmes (14—2,5) soit peu différent de celui de l'an dernier (15—3) ; les moyennes générales pour l'écrit étaient, en effet, en 1953 : 11 pour les admissibles (trente et une), 6,5 pour les non-admissibles, et 8,7 pour l'ensemble des candidates (soixante-cinq), alors qu'elles sont respectivement, en 1954 : 8,6, 4,4, et 6,6. Les comptes rendus détaillés des quatre compositions écrites feront apparaître que cette nette diminution correspond, pour une part, à un échec assez général en Mécanique, mais aussi à une baisse sensible des notes en Mathématiques Élémentaires et Spéciales (la tendance à l'amélioration qui avait pu être signalée, l'an

(1) Le rapport sur la session de 1953 a été publié dans le numéro de mai 1954 du Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public (29, rue d'Ulm, Paris, V^e), fascicule n° 162, 33^e année.

dernier, pour ces deux compositions, ne s'est malheureusement pas maintenue, ce qui est très regrettable), baisse que n'a pas compensée une certaine augmentation des notes d'Analyse. Il importe de préciser que le niveau des quatre épreuves proposées en 1954 était tout à fait comparable à celui des années précédentes.

Il est intéressant, d'autre part, de donner quelques indications sur l'origine des candidates au concours. Sur les soixante-douze inscrites, on compte :

- neuf élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, dont l'une accomplissait une quatrième année à l'Ecole ;
- cinq élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ;
- trois auditrices à l'Ecole Normale Supérieure, dont l'une était professeur titulaire en congé ;
- vingt-neuf professeurs titulaires en exercice ;
- une assistante de Faculté ;
- deux adjointes d'enseignement titulaires en exercice ;
- neuf élèves-professeurs accomplissant leur année de stage dans un Centre pédagogique régional, et un élève-professeur en exercice dans la France d'Outre-Mer ;
- treize étudiantes (Paris et province), dont trois étaient déjà titulaires du Certificat d'aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S.).

Parmi les candidates inscrites, douze ne se sont pas présentées et quatre n'ont pas pris part à toutes les épreuves écrites ; ces seize défaillantes comprennent : neuf professeurs titulaires en exercice, les deux adjointes d'enseignement titulaires, trois élèves-professeurs des Centres pédagogiques régionaux, et deux étudiantes (province).

Quant au groupe des trente-deux admissibles, il est formé par :

- huit élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles (dont l'élève de quatrième année) ;
- quatre élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ;
- les trois auditrices à l'Ecole Normale Supérieure ;
- sept professeurs en exercice ;
- l'assistante de Faculté ;
- deux élèves-professeurs des Centres pédagogiques régionaux (Bordeaux et Poitiers) ;
- sept étudiantes, dont une de la Faculté d'Alger, une de la Faculté de Lyon, une de la Faculté de Rennes, deux de la Faculté de Poitiers (trois d'entre elles déjà titulaires du C.A.P.E.S.).

Pour établir la liaison avec les sessions antérieures, notons que onze anciennes admissibles étaient inscrites au concours de 1954 ; dix d'entre elles figurent de nouveau sur la liste d'admissibilité : six professeurs titulaires en exercice, un professeur en congé (auditrice à l'Ecole Normale Supérieure), trois étudiantes (déjà titulaires du C.A.P.E.S.). Dans cet ordre d'idées, un fait est à signaler, qui me paraît fâcheux : huit professeurs titulaires en exercice, admissibles à des concours antérieurs, assez récents et parfois très récents, n'ont pas fait acte de candidature en 1954 ; plusieurs ont certainement des chances de succès et ne doivent pas abandonner la préparation de l'agrégation.

Pour compléter les indications déjà données concernant les relations entre les Centres pédagogiques régionaux et l'agrégation, précisons que les Centres réunissaient, cette année, trente-quatre élèves-professeurs de mathématiques (femmes) (sans compter, bien entendu, les élèves des Ecoles Normales Supérieures) : comme on l'a vu, neuf seulement se sont fait inscrire à l'agrégation, six ont pris part effectivement aux épreuves écrites et deux ont été admissibles.

D'autre part, certaines candidates à l'agrégation se présentaient en même temps au concours d'admission dans les Centres pédagogiques régionaux en 1954 (1^{re} partie

du C.A.P.E.S.-nouveau régime) : quatre élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, une élève de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, et huit étudiantes (Paris et province) ; neuf d'entre elles ont été admissibles à l'agrégation ; les cinq élèves des Ecoles Normales Supérieures et quatre étudiantes, qui se classaient du reste parmi les dix premières (1^{re}, 2^e, 6^e et 9^e) sur la liste d'admission définitive au concours d'entrée dans les Centres régionaux. (Cette liste, comprenant trente-quatre noms, en plus de ceux des Normaliennes, était publiée le 12 juillet, avant le début des épreuves orales de l'agrégation).

**

Les compositions écrites ont donné lieu aux observations qui suivent. (Les textes des épreuves ont été publiés par le Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques).

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (Mme DOMANGE)

Le problème proposait l'étude de quelques propriétés des sphères passant par un point fixe S et telles que le rapport du rayon de chacune d'elles à la distance MH de son centre M à une droite fixe D soit égal à un nombre positif donné k .

Dans une première partie, on demandait d'établir que les sphères ayant pour centres les points d'une conique Γ , et passant par le sommet S d'un cône de révolution contenant Γ , vérifient une telle condition, pour une droite D et un nombre k convenablement choisis. Dès ce début, qui faisait pourtant appel à des résultats et à des méthodes très classiques, plusieurs candidates montrent qu'elles ne comprennent pas l'expression : « telle propriété *caractérise* la conique », et croient avoir démontré ce qu'on leur demande lorsqu'elles ont prouvé que les points de la conique vérifient la propriété indiquée.

La suite de cette partie concernait l'étude, très soigneusement préparée et guidée par l'intervention d'une inversion dans l'espace, des cercles ayant leurs centres sur la conique Γ , le rayon de chacun d'eux étant égal au produit par le nombre constant k de la distance de son centre à la droite fixe D . Beaucoup négligent ce guide, faute, sans doute, de savoir tirer parti de l'inversion, et tentent de traiter le problème directement dans le plan de la conique ; si certaines arrivent à avoir une idée de l'enveloppe de ces cercles (sans rien démontrer de précis, toutefois, à cause des difficultés provenant des cas de figures et de la disposition des éléments), aucune ne peut résoudre par ce procédé les diverses autres questions posées sur ces cercles et sur leur enveloppe.

Dans l'ensemble, cette partie n'a pas semblé éveiller chez les candidates les échos que l'on espérait : peu d'entre elles remarquent que les centres des cercles-enveloppes sont les foyers de la conique ; les centres d'homothétie de ces deux cercles-enveloppes ne sont trouvés que trois fois (quelques-unes n'en découvrent qu'un) ; beaucoup de fautes grossières sur l'inversion, sur les cônes supplémentaires, sur la notion d'enveloppe... donnent une impression fâcheuse.

La seconde partie consistait essentiellement en une étude de la surface Σ , lieu des centres des sphères (M , S) vérifiant les conditions définies au début, pour un point S , une droite D , et un nombre k donnés. Cette étude se développait naturellement en mettant en évidence la nature et les particularités de diverses sections planes de Σ . Les deux premières questions, très faciles, ont été traitées dans presque toutes les copies ; la seconde n'était d'ailleurs qu'une application simple des résultats obtenus au début de la première partie, dont elle constituait une réciproque qui se démontrait aisément par identification. Venait ensuite la recherche des sections de la surface par les plans perpendiculaires à la droite D ; le fait que ces sections sont circulaires, lors-

que $k \neq 1$, est établi dans beaucoup de compositions, mais la propriété essentielle de ces cercles — c'est-à-dire qu'ils ont le même axe — est plus rarement découverte, et, chose étrange, lorsqu'elle est mentionnée, on n'en déduit pas toujours sa conséquence, pourtant immédiate : Σ est, pour $k \neq 1$, une quadrique de révolution. Quant à l'hypothèse particulière $k = 1$, elle est fréquemment oubliée, mais les candidates qui y pensent, donnent en général une solution correcte et montrent que la surface est alors un cylindre parabolique.

La quatrième question de cette deuxième partie était un peu plus difficile ; elle n'a été traitée complètement par personne. Une seule candidate, qui d'ailleurs « surclassait » à l'écrit toutes les autres, donne une démonstration correcte de la propriété qu'il s'agissait d'abord d'établir : la projection conique d'une section plane d'un cône de révolution ayant pour sommet S , faite, d'un point O de l'axe de révolution, sur le plan V perpendiculaire en S à cet axe, est une conique ayant pour foyer le point S . L'indication, fournie par l'énoncé, du fait que S est foyer de la projection, en la rapprochant de l'étude tout à fait classique de la projection orthogonale de la même section plane sur le plan V , devait tout naturellement orienter la recherche vers une comparaison des projections conique et orthogonale d'un point quelconque M de la section plane sur le plan V , et quelques remarques bien simples, faisant intervenir des homothéties à peu près évidentes, conduisaient à une solution mettant en évidence la directrice associée au foyer S , ainsi que l'excentricité, de la conique projection. Une autre candidate s'engage dans une bonne voie, mais se trompe dans le calcul de l'excentricité ; une troisième, enfin, ne traite la question que dans un cas de figure particulier (en réalité, la démonstration bien conduite est tout à fait générale). Quelques-unes semblent trouver le résultat évident, et ne vont guère au-delà d'une affirmation sans portée ; la grande majorité a buté sur la question sans rien trouver. La suite, où l'on faisait varier le cône ou le centre de projection, a été abordée dans quelques copies, mais bien peu manifestent une compréhension à peu près valable de ce qui était demandé.

La recherche des droites situées sur la surface Σ , lorsque k est supérieur à 1, faisait l'objet d'une cinquième question, qui a été mieux traitée que la précédente. Mais, ici encore, la découverte de ces droites est rarement accompagnée de son corollaire évident sur la génération de Σ comme surface « gauche » de révolution.

Dans la partie III, on proposait la recherche des sphères (M , S) ayant leur centre sur une droite donnée Δ , mais l'énoncé spécifiait bien que les résultats devaient être obtenus directement, sans utiliser ce que la partie II avait appris sur la surface Σ . Mettant à part deux cas particuliers faciles, et d'ailleurs traités dans un grand nombre de copies, le texte guidait les candidates vers une solution algébrique : on demandait d'établir, par deux procédés parallèles, des équations du second degré dont les racines permettaient de définir les positions sur Δ des centres M cherchés, et d'en déduire, sans entreprendre de discussion générale, les conditions pour que tous les points de Δ soient centres de sphères (M , S). Il est évident qu'on devait retrouver ainsi les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde de révolution Σ ; d'autre part, il apparaissait que les sphères (M , S), correspondant à une telle droite Δ , forment un faisceau linéaire dont le cercle de base (s) admet la droite D comme droite focale ; ce dernier aspect n'a pas été signalé, et, d'ailleurs, la connaissance des droites focales était absolument inutile pour traiter convenablement le problème, tel qu'il était posé.

Dans cette partie plus algébrique, les candidates ont montré aussi peu de maîtrise que dans les études géométriques des parties précédentes. Les données et les paramètres, que l'énoncé n'imposait pas, ont été le plus souvent très maladroitement choisis ; les calculs tournent court et aucune interprétation du cas où l'équation devient une identité n'est donnée. La candidate classée première est à peu près la seule à avoir compris l'ensemble de la question, et si les calculs et les discussions sont incomplètement expliqués, les indications données, le raccord intelligent avec la

fin de la deuxième partie, montraient bien que la solution n'avait pu être achevée faute de temps.

Dans l'ensemble, les copies satisfaisantes sont très peu nombreuses. Une seule est vraiment bonne et a mérité la note 18 ; sept autres seulement dépassent la moyenne, avec : un 13,5, deux 11, trois 10,5 et un 10. On trouve ensuite : dix notes comprises entre 8 et 10 ; dix-huit entre 5,5 et 8 ; dix-sept entre 3 et 5 ; cinq entre 1 et 3, et 0,5 pour les deux dernières.

La moyenne générale de l'épreuve est voisine de 6,25 ; elle se relève à 8,25 pour l'ensemble des trente-deux admissibles, et s'abaisse à 3,92 pour les vingt-huit non-admissibles (soixante candidates ayant pris part à cette première composition). Ces moyennes sont assez nettement inférieures à celles de l'an dernier.

Cependant, le problème était moins long que celui de la session précédente, et ne contenait guère de difficultés véritables. Si l'on met à part les très rares candidates que certaines ignorances paralysent, on constate que la plupart trouvent des résultats partiels, souvent intelligemment, mais ne savent pas, ou savent mal, les cordonner, les exploiter, en tirer les conséquences qui leur permettraient de s'élever un peu au-dessus du tissu des petites questions posées et de dominer, au moins en partie, leur travail.

**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(M. PÉTRUS)

Le sujet comportait l'étude d'une famille de coniques à centre dépendant d'un paramètre.

Dans les deux questions préliminaires, il s'agissait de retrouver une propriété des cercles bitangents à une conique à centre, et d'en déduire le calcul de deux constantes, attachées à la courbe et invariantes dans une similitude. Les candidates se sont en général perdues dans des calculs d'une extrême maladresse, accompagnées de considérations totalement inutiles sur les foyers, et plusieurs n'ont pu aboutir à la détermination des constantes K et K' ; il suffisait pourtant d'appliquer la théorie des faisceaux pour aboutir en quelques lignes aux résultats, mais de nombreuses concurrentes semblent l'ignorer totalement.

On demandait ensuite de caractériser, à partir de là, deux coniques à centre semblables ; la condition nécessaire a été en général correctement énoncée, mais l'étude de la réciproque, qui avait beaucoup préoccupé les auteurs, est, ou bien tronquée, ou bien escamotée. La comparaison d'une conique réelle et d'une autre imaginaire, ayant toutes deux le même système de constantes K et K' , celle d'une hyperbole et de sa conjuguée, le cas des hyperboles équilatères, tout cela est en général passé sous silence par les candidates, qui font confiance aux éléments imaginaires pour arranger les choses. Deux seulement se préoccupent des similitudes « inverses » (produit d'une homothétie et d'une symétrie par rapport à une droite passant par le centre), les autres semblent ignorer leur existence.

Dans la deuxième partie on abordait l'étude des coniques C , de la famille, en demandant de déterminer les carrés de leurs demi-axes en fonction d'un paramètre angulaire qu'on avait pris soin de préciser. Cette question, qui pouvait être traitée de diverses manières (changement d'axes provisoires, détermination du produit des distances des foyers à la tangente fixe, etc...), a donné lieu souvent à des calculs pénibles, parfois vains, comportant même de grossières fautes d'homogénéité. De même, la détermination du point de contact d'une conique quelconque de la famille avec la droite fixe Δ , à laquelle elle est tangente, a servi de prétexte à de trop nombreux développements sans conclusion sérieuse, alors que l'étude préliminaire, et aussi quelques considérations géométriques simples, permettaient de l'obtenir bien facile-

ment. Quant au lieu des foyers des coniques C , si les candidates en mentionnent la partie évidente, elles oublient en général celle qui correspond aux foyers situés sur l'axe passant par le centre du cercle donné ; cependant, on doit mentionner quelques copies qui contiennent, ou bien une solution géométrique, ou bien des calculs simples fondés sur l'emploi des coordonnées polaires. Enfin, celles des candidates qui avaient compris les questions préliminaires, et qui avaient déterminé correctement les demi-axes des coniques, ont pu vérifier que les constantes K et K' , relatives à une conique C , sont indépendantes du paramètre variable, mais elles n'ont, en général, rien dit de précis sur les similitudes liant deux courbes de la famille.

Une seconde question concernait d'abord l'enveloppe des asymptotes des coniques C , qui se déterminait immédiatement par des remarques géométriques élémentaires. Plusieurs concurrentes, utilisant cette méthode, ont ainsi défini exactement les points fixes formant l'enveloppe ; d'autres ont eu recours à une mise en équation simple et correcte. Mais beaucoup de compositions ne contiennent, sur ce sujet, qu'un fatras de calculs ridicules, car on ne songe pas à séparer les deux asymptotes, et l'on traîne, sans s'en douter, des expressions relatives au lieu du centre dans ce que l'on croit être l'équation de l'enveloppe ; on annonce alors les courbes les plus étranges, depuis les quartiques bicirculaires jusqu'aux courbes cissoïdales. Les mêmes complications, avec les mêmes conclusions fantaisistes, se retrouvent, en général, dans la recherche des lieux des sommets ; l'emploi des coordonnées polaires était ici tout indiqué ; or, la plupart se servent des coordonnées cartésiennes et ne parviennent pas à identifier les courbes inverses demandées par l'énoncé.

Il semble que la troisième question ait servi de refuge à beaucoup de candidates qui avaient peiné sans grand succès sur les deux premières, car elle constitue l'essentiel d'un bon nombre de copies ; il est vrai qu'elle ne dépendait pas en fait des considérations du début. La détermination des cercles orthogonaux aux cercles des différentes familles est en général correcte, ainsi que l'étude des cas particuliers ; mais on retrouve de graves maladroites dans la détermination du point Q ; quant au lieu des points caractéristiques des cercles D_m , il est presque toujours passé sous silence. Deux ou trois concurrentes seulement ont bien étudié et construit le lieu du point Q , dans le cas particulier demandé.

La dernière question de la deuxième partie proposait d'abord l'étude de l'enveloppe des coniques C . Dans la pensée des auteurs, il suffisait de faire appel aux résultats préliminaires pour obtenir les deux cercles signalés par l'énoncé ; mais la plupart des candidates, qui ont eu le temps d'entreprendre cette recherche, ont préféré se lancer dans des calculs extravagants, dont elles ne triomphent pas, à l'exception d'une seule. Enfin, on ne trouve à peu près rien de valable concernant les propriétés des sécantes communes à deux coniques de la famille.

La troisième partie constituait une généralisation de la deuxième. Elle a été abordée dans une douzaine de copies, mais trois ou quatre seulement arrivent à des conclusions sérieuses, quoique sans lendemain, et la fin du problème n'a pas eu de succès.

Mise à part une copie blanche, les cinquante-huit compositions corrigées ont été notées de 0,5 (une fois) à 17,5 (une fois) ; dix dépassent la moyenne : un 17,5, trois 13, deux 11, deux 10,5 et deux 10 ; viennent ensuite quatorze notes entre 8 et 10, dix-huit entre 6 et 8, douze entre 4 et 6, et, enfin, deux 3, un 1, un 0,5. La moyenne générale de l'épreuve est 7,25 ; elle est légèrement inférieure à 9 pour le groupe des trente-deux admissibles, et s'abaisse à 5,2 pour les vingt-six non-admissibles.

Trop nombreuses sont les copies dont la lecture laisse une impression pénible. Il semble que, pour beaucoup de candidates, la composition de Mathématiques Spéciales ne soit qu'un prétexte à calculs purement machinaux, dont l'interprétation est superflue ou impossible ; elles partent au petit bonheur, sans faire la moindre figure, et sans se préoccuper de la méthode à choisir. Elles devraient pourtant savoir qu'un problème de géométrie analytique, même placé sous l'égide des « Spéciales », reste

un problème de géométrie, — que le calcul ne doit intervenir qu'au bon moment, lorsqu'il a été préparé par un examen attentif de la question, — qu'il ne faut pas négliger les solutions géométriques simples, et qu'il faut même savoir les préférer à des calculs sans issue. Il faudrait aussi que les concurrentes soient mieux entraînées à la technique et à l'application des méthodes de la géométrie analytique, qui ne sont qu'une combinaison réfléchie et organisée de celles de la géométrie et de l'algèbre, et qu'elles ne révèlent point, à cet égard, des insuffisances parfois lamentables. Je veux aussi, en terminant, attirer l'attention sur les trop nombreux défauts de présentation : fautes de français, fautes d'orthographe, écriture illisible, multiples ratures au milieu desquelles se glisse parfois, discrètement, un résultat exact. Puis-ent ces observations, bien souvent renouvelées, obtenir, quelque jour, une amélioration !

*
**

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (M. VILLAT)

Le problème proposé était construit autour des propriétés d'une famille de droites (T) de l'espace, ces droites étant telles que le rapport des distances de deux points fixes P et Q à chacune d'elles soit égal à une constante donnée k .

On demandait tout d'abord de montrer l'équivalence de cette définition avec celle-ci : les deux plans, menés par chaque droite T et par l'un ou l'autre de deux certains points fixes A et B, sont rectangulaires. Ces deux nouveaux points A et B sont ceux qui divisent le segment PQ dans le rapport donné k ; la chose est quasi-évidente au moyen d'un raisonnement géométrique, tout à fait élémentaire, qui a été présenté par la très grande majorité des candidates. Deux ou trois seulement ont renoncé à y parvenir et ont simplement admis l'équivalence des définitions. Entre ces deux situations extrêmes, quelques candidates ont donné une démonstration analytique en général longue, malhabile, mais correcte, à une exception près.

La nouvelle définition des droites (T) conduisait aussitôt à la solution de la question suivante : trouver l'enveloppe des droites (T) appartenant à un plan donné. Une constatation géométrique simple a montré à presque toutes les concurrentes qu'il s'agissait d'une conique dont les foyers étaient en évidence sans aucun calcul. Cependant, quelques-unes ont effectué un calcul, qui revenait à définir, par les procédés classiques, la courbe du complexe (T) située dans un plan (ce complexe est du second ordre) ; il faut regretter ici que, lorsque l'équation tangentielle d'une conique se présente sous la forme

$$\lambda(u^2 + v^2) + (ua + vb + h)(ua' + vb' + h) = 0,$$

l'on n'aperçoive pas aussitôt les deux foyers réels, et qu'on se croie obligée d'en faire la recherche au moyen de nouveaux calculs.

Quoi qu'il en soit, toute cette première partie, d'ailleurs facile, a été résolue correctement à la quasi-unanimité.

Pour la suite, on distinguait deux cas : (α), celui où l'un des deux points A ou B était à l'infini ; (β), celui où les deux points A et B sont tous deux à distance finie. Il est clair que, dans tous les cas, la droite AB est un axe de révolution pour les propriétés éventuelles du complexe.

Cas (α). — Il est indiqué de prendre l'origine O des axes de coordonnées en celui des points, A ou B, qui est à distance finie, l'axe Oz contenant le point à l'infini du couple.

On demandait tout d'abord d'écrire l'équation caractérisant les courbes (C) dont les tangentes sont des droites (T). Ces courbes sont évidemment les courbes du complexe (T). On est donc amené à former l'équation du cône du complexe en un point, puis l'équation aux dérivées partielles dont le cône élémentaire coïncide avec le cône

du complexe ; les courbes (C) sont alors les courbes intégrales de cette équation aux dérivées partielles, et l'on sait qu'elles peuvent être obtenues en formant une intégrale complète et en dérivant deux fois l'équation de celle-ci. Telle est du moins la méthode que l'énoncé du problème proposait d'employer.

Bien entendu, cette méthode n'est pas la seule possible, et, dans le cas (α) actuel, il est facile, ayant écrit l'équation (de Monge) des courbes (C), à savoir :

$$(I) \quad (x dx + y dy) dz - z (dx^2 + dy^2) = 0,$$

de la transformer en coordonnées semi-polaires (θ, r, z) — coordonnées qui s'imposent pour bien des raisons évidentes —, ce qui conduit à

$$r dr dz - z (dr^2 + r^2 d\theta^2) = 0,$$

ou encore

$$z \cdot d\theta^2 = dr \cdot d\left(\frac{z}{r}\right),$$

et enfin (e)

$$d\theta^2 = d\rho \cdot dv,$$

en posant $\rho = \log r$, $v = \log \frac{z}{r}$. Tout est donc ramené à déterminer une courbe de l'espace (ρ, v, θ) satisfaisant à l'équation (e). En prenant v comme variable le long d'une telle courbe (ce qui est possible, sauf dans un cas exceptionnel évident), on a

aussitôt

$$\rho = \varphi(v), \quad \theta = \int \sqrt{\varphi'(v)} dv,$$

où $\varphi(v)$ est une fonction arbitraire.

Plus élégamment, en posant $v = \alpha + i\beta$, $\rho = \alpha - i\beta$, l'équation (e) devient

$$d\theta^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

et l'on est ramené à trouver une courbe, dans le plan (α, β) , telle que θ soit l'arc de cette courbe. Si on envisage une telle courbe comme enveloppe de la droite

$$\alpha \cos \lambda + \beta \sin \lambda - p'(\lambda) = 0,$$

la courbe est définie par les relations

$$\begin{cases} \alpha = p' \cos \lambda - p'' \sin \lambda, \\ \beta = p' \sin \lambda + p'' \cos \lambda, \end{cases}$$

l'arc étant fourni par l'équation

$$d\theta^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 = (p' + p''')^2 d\lambda^2,$$

d'où, la constante d'intégration étant soudée à p : $\theta = p + p''$, on obtient donc les courbes (α, s, θ) , et ensuite les courbes (r, θ, z) , sans aucun signe de quadrature, au moyen d'une fonction arbitraire.

Bien qu'une telle méthode ne fût pas explicitement demandée, deux candidates ont effectué la recherche des courbes (C) par un procédé analogue à celui qui vient d'être décrit, et ont réussi à peu près correctement — ce dont il leur a été tenu un juste compte.

Disons tout de suite que, si l'énoncé engageait à suivre la voie qui a été indiquée plus haut, c'est parce que, dans la généralisation ultérieure que nous avons désignée par « le cas (β) », l'examen de la seule équation de Monge conduisait à des calculs inextricables.

Revenant à la méthode de l'énoncé, l'équation aux dérivées partielles se présentait, sans effort, sous la forme

$$(py - qx)^2 + 4z(px + qy) - 4z^2 = 0,$$

dont l'intégration élémentaire est aisée, d'un grand nombre de façons. Les coordonnées semi-polaires s'indiquaient d'elles-mêmes, et la recherche d'une intégrale complète s'achevait facilement, même dans le cas où l'on traitait l'équation sans habileté

(c'est-à-dire en omettant d'observer que les variables $\frac{z}{r}$ et $\frac{1}{r}$ étaient plus commodes que z et r).

On cherchait ensuite à déterminer les congruences de normales appartenant au complexe des droites (T), et, plus précisément, les surfaces Σ dont les normales

appartiennent à ce complexe. La direction $(p, q, -1)$ de la normale à la surface Σ $[z = z(x, y)]$ devait donc satisfaire à l'équation (I) écrite plus haut, d'où l'équation aux dérivées partielles $px + qy + z(p^2 + q^2) = 0$, d'un type tout à fait classique, et aisée à intégrer, notamment après passage aux coordonnées semi-polaires. Les surfaces Σ étant ainsi obtenues, dépendant d'une fonction arbitraire, les arêtes de rebroussement des développables contenues dans chaque congruence de normales ainsi définie pour chaque surface Σ , sont des courbes (C) ; mais il est clair que la connaissance des courbes (C) par ce procédé, exige, outre la construction des surfaces Σ , l'intégration de l'équation de leurs lignes de courbure, ou de l'équation des développables formées avec leurs normales.

Comme on l'a noté plus haut, beaucoup de procédés étaient possibles pour résoudre la question relative aux surfaces Σ , et — le problème étant facile — on réussissait à déterminer ces surfaces avec plus ou moins d'élégance. Signalons un procédé réduisant à presque rien cette recherche :

Les normales à Σ étant généralement en cause, considérons une surface Σ comme enveloppe d'un plan ayant pour équation

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta - f(\theta, \varphi) = 0.$$

On sait que les équations dérivées :

$$x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta - f'_\theta = 0,$$

$$-x \sin \theta \sin \varphi + y \sin \theta \cos \varphi - f'_\varphi = 0,$$

représentent la normale à la surface-enveloppe. Pour que cette normale soit une droite T, il faut et il suffit que le plan parallèle à Oz et le plan passant par l'origine O qui la contiennent, soient rectangulaires ; cela conduit aussitôt à la condition $f'_\theta = 0$, ce qui permet d'achever en toute simplicité.

La troisième partie du problème proposait les mêmes questions que la seconde partie, mais dans le cas (β), où les deux points A et B sont à distance finie ; on les place alors sur l'axe Oz , aux cotes $\pm a$.

La recherche des courbes (C), ou — ce qui revient au même, comme on l'a vu — l'intégration de l'équation aux dérivées partielles dont le cône élémentaire coïncide avec le cône du complexe (T), était beaucoup moins simple, et demandait une ingéniosité nettement plus marquée, d'où des différences très sensibles dans les résultats obtenus par les concurrentes.

Il était, naturellement, comme dans le cas (α), presque imposé de prendre des coordonnées semi-polaires ; alors l'équation de Monge des courbes (C) prenait la forme

$$(rdz - zdr)^2 + (r^2 + z^2)r^2d\theta^2 - a^2(dr^2 + r^2d\theta^2) = 0.$$

Le premier terme suggère l'introduction de $\frac{z}{r}$ plutôt que de z , et l'on aperçoit assez vite (ce que l'énoncé du problème conseillait d'ailleurs explicitement) la commodité des variables $u = \frac{1}{r}$, $v = \frac{z}{r}$, qui donnaient à l'équation précédente la forme

$$d\theta^2(1 + v^2 - a^2u^2) + dv^2 - a^2du^2 = 0.$$

La suite devenait très maniable, avec les coordonnées (u, v, θ) . Mais il était difficile de ne pas remarquer que u et v n'interviennent que par les combinaisons

$$\alpha = au + v, \quad s = au - v,$$

qui réduisent l'équation à la forme $d\theta^2(1 - \alpha\beta) - d\alpha d\beta = 0$.

L'équation aux dérivées partielles correspondante s'obtient en écrivant que, pour une surface (α, β, θ) , dont le plan tangent est défini par $d\theta = Pd\alpha + Qd\beta$, ce plan est tangent au cône du complexe, d'où la condition $PQ(1 - \alpha\beta) - 1 = 0$. Cette équation aux dérivées partielles est d'une forme classique, ne contenant que les combinaisons $\alpha\beta$ et PQ . Les équations des caractéristiques admettent donc l'intégrale première $P\alpha - Q\beta = C^te$, ce qui, du reste, saute aux yeux dès qu'on a formé ces équations. La suite du calcul est alors immédiate.

Telle est l'une des méthodes conduisant à la formation des courbes (C).

Quant à la recherche des surfaces Σ , dont les normales sont des droites (T), elle pouvait se faire par un procédé analogue. En exprimant que la normale à Σ est une droite du complexe (T), on obtient aussitôt la condition

$(x + pz)^2 + (y + qz)^2 + (py - qx)^2 - a^2(p^2 + q^2) = 0$,
qui devient, en prenant des coordonnées semi-polaires, avec $dz = Pdr + Qd\theta$:

$$(r^2 + z^2 - a^2) \left(P^2 + \frac{Q^2}{r^2} \right) + r^2 + z^2 - (Pr - z)^2 = 0 ;$$

à cette équation s'appliquent les mêmes considérations que pour celle de la question précédente, notamment quant à l'emploi des variables $\frac{z}{r}$ et $\frac{1}{r}$.

Mais la façon la plus simple de résoudre la question consiste à considérer — comme dans le cas (a) — la surface Σ comme enveloppe du plan

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta - f(\theta, \varphi) = 0 ;$$

en écrivant que les deux plans passant par la normale, et respectivement par les points A et B, sont rectangulaires, on parvient sans peine à l'équation aux dérivées partielles $f''_{\theta} + f''_{\varphi} (1 + \cotg^2 \theta) - a^2 \sin^2 \theta = 0$, d'un type tout à fait élémentaire, et pour laquelle on obtient une intégrale première en posant $f'_{\varphi} = C^*$.

On voit donc que cette troisième partie du problème demandait de meilleures qualités de finesse et d'analyse que les précédentes. Aussi, dans cette partie, les candidates se sont nettement séparées. Plusieurs d'entre elles ont fait preuve de solides connaissances, dont elles ont profité correctement. Mais, chez beaucoup, il semble que les acquisitions qu'elles ont faites soient restées insuffisantes ; on doit, par exemple, regretter qu'il soit possible de trouver, dans certaines copies, des affirmations telles que les suivantes (je cite textuellement) : « Pour qu'une congruence de droites soit « congruence de normales, il faut et il suffit qu'on puisse trouver, dans cette « congruence, des surfaces développables ; on introduit ainsi une condition de « plus. » Il est même tout à fait affligeant que le texte précédent figure, avec des variations insignifiantes, dans deux copies distinctes.

Dans l'ensemble, les résultats, sans être brillants, sont en général honnêtes. Sur cinquante-sept copies, vingt-cinq dépassent la moyenne, et, si l'on excepte une copie blanche, les notes oscillent entre 17 et 5 ; voici, du reste, leur répartition : un 17, un 16,5 et deux 16 ; sept comprises entre 15 et 14 ; un 13 ; sept entre 11 et 12 ; six entre 10 et 11 ; neuf entre 9 et 10 ; huit entre 8 et 9 ; sept entre 7 et 8 ; puis deux 6, un 5,5 et quatre 5.

La moyenne générale de l'épreuve est 9,8 pour l'ensemble des candidates ; elle passe à 11,6 pour les trente-deux admissibles, et devient un peu inférieure à 7,5 pour les vingt-quatre non-admissibles.

*
**

COMPOSITION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

(Mme DUBREIL)

La première question du problème se traitait sans faire de simplification schématique du système, mais en supposant seulement que l'enfant s'abaissait et se redressait aux instants où la balançoire atteignait l'élongation maximum ou passait à la verticale. Elle nécessitait seulement de la réflexion et une bonne compréhension du théorème de la force-vive. L'énoncé indiquait entre quels instants il convenait d'appliquer ce théorème, et suggérait, par le pluriel, qu'une fois ne suffisait pas. L'application au système total montrait, puisque le travail de la pesanteur est nul, que

l'accroissement d'énergie cinétique éventuel était égal au travail fourni par l'enfant. Pour prouver que ce travail était positif, on appliquait le théorème de la force-vive au mouvement relatif de l'enfant par rapport à la balançoire entre les mêmes instants : à ces deux instants, l'enfant est au repos par rapport à la balançoire, le travail de l'enfant est donc l'opposé de la somme du travail de la pesanteur dans son mouvement relatif par rapport à la balançoire et du travail des forces d'inertie. Ce travail est donc bien positif, et les oscillations s'amplifient.

Cette question a été complètement massacrée et n'a été bien traitée dans aucune copie. On s'est refusé le plus souvent à appliquer le théorème de la force-vive entre les instants indiqués. Alors, si l'on a écrit la formule correctement de part et d'autre de la verticale en assimilant de chaque côté le système à un solide en mouvement autour d'un axe, toutes les fantaisies se sont présentées pour le passage à la verticale ; dans aucune composition, on n'a eu l'idée d'écrire la conservation du moment de la quantité de mouvement. Dans les copies où l'on a appliqué correctement le théorème de la force-vive à l'ensemble enfant-balançoire, entre les instants indiqués, et cherché à calculer le travail de l'enfant, on a oublié le travail des forces d'inertie.

La seconde partie, qui comportait quatre questions, et qui était plus originale, a été bien traitée par quelques candidates. Le système était assimilé à un pendule simple de longueur variable. Il fallait intégrer l'équation du mouvement en prenant

comme fonction inconnue $\frac{d\theta}{dt}$, comme le suggérait l'énoncé, en remarquant (cas classique d'intégration) que t ne figure pas explicitement dans l'équation. Suivaient ensuite diverses questions relatives à la recherche des meilleurs mouvements à effectuer pour se balancer le plus haut possible, et qui s'étudiaient à partir de la relation

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{2g}{l(\theta)} \int_0^\theta l^2(\theta) \sin \theta d\theta, \\ (-1)^{i+1} \theta_i$$

donnant $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ en fonction de θ entre la i^{me} elongation maximum, d'amplitude $(-1)^{i+1} \theta_i$, et la $(i+1)^{\text{me}}$.

Cette relation n'a été trouvée que dans quatorze copies sur cinquante-six, copies dont les notes s'échelonnent entre 18 et 6. Les autres compositions sont désespérément insuffisantes.

La répartition des notes est la suivante : 18, 16, 13, 12, 10 (chacune de ces notes, une fois) ; puis trois 9, trois 8, deux 7 et un 6 ; viennent ensuite dix-sept notes entre 3 et 4 et vingt-cinq entre 1 et 2. La moyenne générale de l'épreuve est à peine supérieure à 4 ; elle est égale à 5,5 pour le groupe des admissibles, et à 2,3 pour les non-admissibles.

EPREUVES PRATIQUES

Pour chacune des deux épreuves pratiques, les notes extrêmes sont sensiblement les mêmes : 1 et 15 pour la géométrie descriptive, 2 et 14 pour le calcul, et les moyennes des deux compositions, pour les trente-deux admissibles, sont assez voisines : 7,4 et 8,3 environ.

Cependant, le groupement des deux épreuves donne, cette année, un classement assez différent du classement de chacune d'elles, prise séparément : la somme des deux notes varie de 5,5 à 22, sur 40, c'est-à-dire de 3 à 11 sur 20, avec un échelonnement assez régulier entre 11 et 7 (vingt-deux candidates), suivi d'un groupe de neuf notes comprises entre 4 et 5,5, et d'une dernière un peu inférieure à 3 (sur 20).

Il ne faut cesser de répéter, dans ce commentaire annuel du concours, que les épreuves dites « pratiques » doivent être prises au sérieux par les candidates, non

seulement parce qu'elles ont une influence non négligeable sur le classement des admissibles et, par conséquent, sur le succès ou l'échec de telle ou telle, mais surtout parce qu'elles doivent manifester certaines aptitudes et certaines qualités d'esprit qu'un aspirant-mathématicien ne peut mépriser et doit s'efforcer de développer.

Sur le premier point, indiquons que les notes de ces deux compositions ont apporté quelques changements appréciables dans l'ordre résultant de l'ensemble des autres épreuves, écrites et orales, qu'elles ont, en particulier, constitué l'un des éléments favorables d'appréciation pour deux ou trois candidates dont le succès final était resté incertain, et qu'elles ont, au contraire, très nettement déclassé, dans le mauvais sens, deux admissibles qui auraient pu, sans ces deux épreuves, être comptées parmi les « possibles ».

D'autre part, il est banal de dire que les mathématiques ne peuvent ni ne doivent se réduire à un jeu de spéculations abstraites, que la plupart des problèmes posés au mathématicien, dans les divers domaines de l'activité scientifique et technique, se réduisent, en définitive, à la détermination effective de certains nombres, définis par les procédés les plus variés, mettant en jeu des théories mathématiques souvent difficiles. N'est-il pas indispensable que le futur professeur n'ignore pas cet aspect essentiel de notre discipline, et qu'il ait vraiment pris contact avec les « réalités numériques » ? Du reste, il ne manquera pas de trouver, dans un travail de ce genre, poussé jusqu'au bout, maints sujets de réflexion et de comparaison, qui l'amèneront souvent à une compréhension meilleure et plus approfondie de bien des notions importantes, sans compter la satisfaction que l'on éprouve à parfaire une œuvre entreprise.

On peut en dire autant de la « géométrie descriptive », si souvent décriée, et bien à tort — car son étude, raisonnablement conduite, bien entendu, et débarrassée des questions relevant de techniques particulières, dont elle était parfois, traditionnellement, encombrée —, se lie étroitement à celle de la géométrie et de la géométrie analytique ; en donnant le moyen et l'occasion d'illustrer et d'éclairer un certain nombre de théories fondamentales, que l'on sera à même de dominer lorsqu'on aura pris la peine d'en traiter à fond quelques applications bien choisies.

Puissent ces recommandations, renouvelées après chaque session, être enfin comprises et suivies ; les quelques heures que les candidates voudront bien consacrer, au cours de leur préparation, à de tels travaux, ne seront pas gaspillées.



COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

(M. PÉTRUS)

Énoncé du problème

Les données sont exprimées en millimètres. La figure est rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. L'axe $x'Ox$, équidistant des bords gauche et droit de la feuille, est orienté positivement vers le bas ; l'origine O est à 220 du bord inférieur ; l'axe $y'Oy$, parallèle au bord inférieur, est orienté positivement de gauche à droite ; le plan xOy est le plan horizontal de projection et le plan yOz est le plan frontal, qui est supposé rabattu de façon que la demi-droite positive Oz soit confondue avec la demi-droite Ox' . Les points sont définis par leurs coordonnées (x, y, z) .

1° On considère :

a) le parabolôïde de révolution (P) engendré par la rotation autour de son axe d'une parabole qui a pour sommet S (100, 0, 50) et pour foyer F (100, 0, 0) ;

b) le cône de révolution (C) ayant pour sommet S , et circonscrit à la sphère tangente à l'axe de (P), et dont le centre est le point A (100, $30\sqrt{2}$, 80).

Déterminer l'intersection (I) de (C) et de (P), avec tous ses éléments remarquables, et notamment : un point courant et sa tangente, — les tangentes au point double, — les asymptotes des projections de l'intersection.

2° Les surfaces (C) et (P) étant supposées opaques, on demande de représenter l'ensemble formé par les portions de chacune d'elles qui sont intérieures à l'autre, et qui sont situées au-dessus du plan horizontal. (On dessinera en noir les arcs conservés de l'intersection, — en rouge, les arcs supprimés ainsi que les arcs des projections virtuelles, et les asymptotes des projections).

3° Déterminer et dessiner en rouge fort la courbe enveloppe des traces sur le plan $z = 50$ des plans tangents à (P) aux points de (I).

4° Justifier sur une feuille annexe les constructions effectuées et les résultats obtenus.

**

L'épure comportait l'étude de l'intersection d'un paraboloïde de révolution, défini par sa méridienne principale, et d'un cône de révolution circonscrit à une sphère donnée. La mise en place des deux surfaces ne présentait aucune difficulté ; cependant, quelques candidates n'arrivent pas à déterminer la parabole demandée, ou commettent de grossières erreurs dans la représentation du cône, lui attribuant en particulier un contour apparent horizontal, alors qu'il n'en existe visiblement pas.

Pour déterminer l'intersection par éléments de contact, diverses méthodes pouvaient être employées, suivant les circonstances ; je ne citerai que les suivantes :

- utilisation de sphères ayant pour centre le sommet du cône (il convient alors de partir d'un point de la parabole, et non d'une sphère prise au hasard, comme on le voit dans beaucoup d'épures) ;

- utilisation des plans de Monge du cône ;

- détermination des points de rencontre du paraboloïde et des génératrices du cône, en effectuant sur chacune des génératrices utilisées, une rotation autour de l'axe du paraboloïde, qui l'amenait à être de front.

Les notices révèlent sur ce point que les intentions des candidates étaient en général bonnes, mais trop souvent on ne sait en tirer parti, faute sans doute d'un peu d'audace, ou de persévérance, dans l'exécution. Aussi le tracé des projections de la courbe est fréquemment empirique, et parfois entaché d'erreurs grossières.

La détermination des tangentes est très généralement escamotée ; on relève bien des inexactitudes dans la recherche des tangentes au point double, et seules les meilleures épures marquent le souci d'une détermination rigoureuse des points d'arrêt. L'étude des asymptotes est correcte dans la plupart des notices où elle est entreprise, mais, là encore, l'exécution ne suit pas l'intention, même lorsqu'on se contente de recourir aux propriétés de la projection frontale, en cherchant à construire les asymptotes d'une hyperbole à partir de quelques points de cette courbe. Convient-il de rappeler ici (puisque de nombreuses candidates semblent ignorer ce résultat pourtant classique) que l'étude des sections du cône et du paraboloïde par des plans de bout coupant les deux surfaces suivant des coniques ayant les mêmes points à l'infini — sections dites parfois « homothétiques » —, fournissait bien facilement les résultats demandés ?

Le degré de la projection horizontale est en général indiqué exactement, mais parfois sans justification. La recherche de l'enveloppe des traces, sur le plan $z = 50$, des plans tangents à (P) le long de la courbe (I), est tentée par trois candidates, mais une seule en tient compte sur son épure.

La représentation de l'ensemble de surfaces, défini par l'énoncé, est rarement complète ; une omission fréquente concerne la section du cône par le plan horizontal,

ou les points de rencontre de cette section avec le parallèle correspondant du paraboloïde, et, *a fortiori*, les tangentes à (I) en ces points, qui pouvaient cependant être obtenus facilement, par exemple à partir des points communs à la projection frontale de (I) et à la ligne de terre.

L'exécution matérielle est, pour la majorité, déplorable ; beaucoup paraissent ignorer la plus rudimentaire technique du dessin graphique et ne respectent même pas les quelques conventions rappelées dans l'énoncé. On se demande combien de candidates ont consenti à préparer quelque peu cette épreuve. Tout se passe comme si la plupart considéraient qu'il s'agit là d'une formalité désuète, alors que cette composition met en jeu, et permet d'apprécier, des qualités d'imagination et d'intuition contrôlées par le raisonnement, et qu'elle constitue un test excellent en matière de géométrie.

Les notes s'échelonnent de 1 à 15. La note 1 sanctionne un travail inexistant (quelques lignes de notice et quelques traits sur l'épure), œuvre d'une candidate qui avait du reste abandonné l'épreuve quarante minutes avant la fin. La plus haute note a été méritée par un travail à la fois soigné, net, et assez complet, qui distance sensiblement les autres. De 2,5 à 8,5, les notes sont réparties assez régulièrement sur vingt et une candidates qui ont fait preuve de bonnes intentions dans leur notice, mais qui n'ont pas su passer à la réalisation effective sur l'épure. Dix candidates atteignent ou dépassent la note 10,5 (un 15 ; un 14 ; deux 12,5 ; un 12 ; quatre 11 ; un 10,5), et grâce à elles, la moyenne de cette composition est 7,4 environ.

Mais, pour cette épreuve, qui n'est abordée que par le groupe déjà sélectionné des admissibles, les résultats devraient être bien meilleurs, et l'on souhaite que les futures candidates se décident à comprendre le sérieux et la valeur de cette partie du concours.

**

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE

(M. DUGUÉ)

Enoncé du problème

On considère les deux séries

$$1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n^2 z^2}$$

et
$$(2\pi)^{1/2} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} e \left[- (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{8z^2} \right]$$

où z représente une variable réelle.

I. Montrer que ces deux séries sont convergentes pour $z \neq 0$. On admettra qu'elles ont même somme ; soit $F(z)$ cette somme.

II. On se propose de calculer les valeurs approchées des quatre nombres

$$A = F\left(\frac{1}{2}\right), B = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), C = F(\sqrt{2}), D = F(2).$$

1° Quel est celui des deux développements que l'on utilisera pour calculer chacune de ces valeurs le plus rapidement possible ? Justifier sommairement le choix que l'on aura fait.

2° Calculer effectivement les valeurs approchées à $\frac{1}{10^5}$ près par défaut des quatre nombres A, B, C, D.

NOTA. — On rencontrera, au cours de la solution de ce problème, des calculs de nombres de la forme $e^{-(p+\alpha)}$, p étant un entier positif et α un nombre compris entre 0 et 1. On pourra montrer que, pour calculer des valeurs approchées d'un tel nombre lorsque p est assez grand, il peut être commode de calculer e^{-p} comme un produit de facteurs, et $e^{-\alpha}$ par l'intermédiaire d'un développement en série.

On donne les valeurs approchées à $\frac{1}{10^7}$ près des nombres π^2 , $(2\pi)^{\frac{1}{2}}$, e^{-1} , qui sont respectivement :

9,869 604 4 ; 2,506 628 2 ; 0,367 879 4.

Il s'agissait, dans ce problème, d'utiliser judicieusement les deux développements de la fonction « thêta » de Jacobi. Il était facile de voir que l'un des développements est plus commode lorsque z est inférieur à 1, et l'autre, lorsque z est plus grand que 1.

Bien que ne présentant pas de sérieuses difficultés, l'épreuve n'a donné que des résultats très moyens : les notes sont comprises entre 2 et 14, avec la répartition suivante : un 2 ; dix entre 4 et 7 ; dix entre 7 et 10 ; dix entre 10 et 13, et un 14. La moyenne générale est voisine de 8,3. On pourrait espérer mieux d'admissibles à l'agrégation.

L'une des candidates a été incapable d'établir la convergence des séries, qui se trouvent toujours dans le cas douteux des règles qu'elle invoque ! On trouve ailleurs des affirmations telles que : « $e^{-\pi^2}$ est un infiniment petit », ou « $e^{-\pi^2}$ tend vers zéro ».

Neuf candidates se sont contentées de remettre quatre pages tendant à établir plus ou moins rapidement la convergence des séries, et à discuter le choix de celle des deux qui serait employée pour le calcul, mais elles ont jugé inutile d'aborder le calcul proprement dit ; ce mépris du résultat numérique a eu évidemment une fâcheuse répercussion sur leur note.

Les vingt-trois autres concurrentes ont obtenu un, deux ou trois des nombres demandés ; aucune n'est arrivée à quatre.

On souhaiterait, à côté d'une amélioration de fond, qui marquerait que la valeur et la signification de cette épreuve sont mieux comprises, une présentation plus heureuse, et, en particulier, des calculs mieux ordonnés, une mise en évidence plus claire des résultats, — également, mais la remarque devient traditionnelle, plus de circonspection dans l'emploi des tables de logarithmes.

EPREUVES ORALES

Comme d'habitude, les deux leçons de « Mathématiques Élémentaires » et de « Mathématiques Spéciales », que devait exposer chacune des trente-deux admissibles, avaient été associées par le jury, avant le tirage au sort traditionnel.

Voici la liste des sujets de leçons (les numéros entre parenthèses accompagnant chacune des questions d'« Élémentaires » et de « Spéciales » correspondent au groupement des deux leçons traitées par une même candidate) :

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Pour une classe de *Seconde C* ou *Moderne* :

- (1) Positions relatives de deux cercles.
- (2) Somme et différence des carrés des distances d'un point à deux points fixes ; applications.
- (3) Segments déterminés sur un côté d'un triangle par les bissectrices de l'angle

opposé. Lieu des points dont le rapport des distances à deux points est donné. Applications.

(4) Exemples de résolution des problèmes de construction.

Pour une classe de *Première C* ou *Moderne* :

(5) Etude du signe du trinôme du second degré. Inéquations du second degré. Applications.

(6) Exemples de problèmes dont la résolution conduit à des équations du premier ou du second degré.

Pour une classe de *Mathématiques* :

(7) Arithmétique : division des nombres entiers.

(8) Diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres. Nombres premiers entre eux. Applications.

(9) Définition et propriétés élémentaires des nombres premiers. Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers. Applications.

(10) Première leçon sur les nombres fractionnaires.

(11) Première leçon sur les nombres positifs et négatifs.

(12) Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Interprétation graphique.

(13) Exemples de résolution d'équations trigonométriques. Résolution et discussion de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$.

(14) Traiter un ou deux exemples de résolution de triangles dans des cas non classiques.

(15) Première leçon sur les trièdres.

(16) Applications de l'inversion, les propriétés générales de cette transformation étant supposées traitées.

(17) Cercles passant par deux points donnés et tangents à une droite donnée ou à un cercle donné. Applications.

(18) Première leçon sur la parabole.

(19) Tangente en un point d'une conique ; asymptotes de l'hyperbole. Propriétés élémentaires des tangentes à une conique.

(20) Géométrie descriptive ou géométrie cotée, au choix de la candidate : rabattements ; applications.

(21) Cosmographie. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes ; crépuscules.

(22) Cosmographie. Eclipses de lune et de soleil.

Pour une classe de *Mathématiques Supérieures* (programme de « géométrie pure ») :

(23) Symétrie par rapport à un point. Symétrie par rapport à un plan. Produits de ces deux transformations.

(24) Similitude plane.

(25) Première leçon sur l'inversion.

(26) Plan polaire d'un point par rapport à une sphère ; pôle d'un plan ; droites conjuguées.

(27) Faisceaux linéaires de cercles ; faisceaux orthogonaux.

(28) Conditions pour que quatre points soient sur un cercle. Applications.

(29) Conique définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité : tangente, problèmes sur les tangentes.

(30) Ellipse et cercle déduits l'un de l'autre par affinité. Diamètres ; diamètres conjugués. Construction d'une ellipse connaissant deux demi-diamètres conjugués.

(31) Propriétés d'une hyperbole relativement à ses asymptotes. Diamètres ; diamètres conjugués.

(32) Sections planes d'un cône de révolution.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

- (30) Première leçon sur les nombres complexes.
- (15) Les propriétés générales des opérations élémentaires sur les nombres complexes étant supposées traitées, en donner quelques applications (géométriques, trigonométriques...).
- (31) Division des polynômes à une variable.
- (22) Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.
- (32) Première leçon sur les déterminants.
- (28) Formes linéaires. Conditions d'indépendance.
- (23) Elimination d'une inconnue entre deux équations algébriques. Résultant.
- (25) Transformation d'une équation algébrique entière par une substitution rationnelle portant sur une seule racine ; applications.
- (19) Fonction inverse d'une fonction monotone continue. Représentation graphique.
- (21) Fonction logarithmique.
- (4) Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction. Exemples.
- (3) Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables réelles.
- (20) Première leçon sur l'intégrale définie d'une fonction continue.
- (27) Changement de variable dans une intégrale (indéfinie et définie). Exemples.
- (17) L'intégration des fractions rationnelles étant supposée traitée, donner des exemples de calcul d'intégrales indéfinies se ramenant à l'intégration de fractions rationnelles.
- (26) Première leçon sur les séries numériques.
- (24) Les généralités sur les séries à termes réels et à termes complexes étant supposées traitées, établir les caractères de convergence dits « de Cauchy » et « de d'Alembert » pour les séries à termes positifs et pour les séries à termes quelconques. Exemples.
- (16) Première leçon sur les séries entières.
- (1) Intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : 1° sans second membre ; 2° dans le cas où le second membre est un polynôme ou une somme de termes de la forme Ae^{ax} (a constante, A polynôme).
- (8) Courbes planes dont l'équation polaire est résolue par rapport au rayon vecteur : tangente ; concavité ; branches infinies ; asymptotes.
- (9) Construction des courbes planes définies en coordonnées polaires. Exemples. (Les résultats généraux sur les tangentes, sur la concavité, sur les branches infinies, sont supposés connus).
- (12) Première leçon sur l'enveloppe d'une famille de courbes dans un plan (géométrie analytique).
- (6) Géométrie analytique : courbure d'une courbe plane ; développée ; développantes.
- (10) Géométrie analytique : exemples de surfaces définies par un mode de génération géométrique simple.
- (11) Géométrie analytique : directions principales et axes de symétrie des courbes du second ordre. Réduction de l'équation d'une courbe du second ordre en axes rectangulaires.
- (13) Géométrie analytique : diamètres dans les quadriques. Diamètres conjugués dans les quadriques à centre.
- (5) Géométrie descriptive : intersection de deux cônes ou cylindres du second ordre ayant en commun une courbe plane.
- (7) Cinématique du point : vecteur-vitesse. Vecteur-accélération ; composantes tangentielle et normale. Applications.

(29) Cinématique : changement du repère. Composition des vitesses. Composition des accélérations lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation. Applications.

(14) Système de vecteurs glissants ; moment résultant ; axe central. Equivalence de deux systèmes de vecteurs glissants.

(2) Dynamique du point matériel : travail d'une force. Théorème de la force-vive pour un point matériel. Applications.

(18) Pendule simple.

(Toutes ces leçons devaient être traitées au niveau d'une classe de Mathématiques Spéciales).

**

Les rapports des sessions précédentes ont, à maintes reprises, attiré l'attention sur le rôle particulier que jouent les épreuves orales dans l'ensemble du concours. Il est bien évident que les deux leçons servent d'abord à compléter le jugement que le jury a essayé de porter à partir des six compositions écrites et « pratiques » — car l'épure et le calcul numérique fournissent des éléments d'appréciation très précieux et non négligés —, sur les connaissances de fond de chacune des candidates. Il s'agit là, bien entendu, non d'une érudition acquise sur quelques chapitres particuliers, qui permettrait peut-être, grâce à un hasard favorable, de paraître dominer de très haut tel ou tel sujet, mais des éléments fondamentaux des mathématiques, qu'il faut avoir longuement médités et approfondis, en allant au-delà des notions explicitement mentionnées dans les programmes des classes que l'on pourra être appelé à diriger, afin que tout ce que l'un aura à transmettre à d'autres soit vraiment compris, et non simplement appris de façon plus ou moins superficielle et hâtive ; car il est périlleux, et rarement efficace, d'enseigner jusqu'à l'extrême limite de son propre savoir.

Mais il y a plus, car l'oral met chaque candidate, pendant près de deux heures, en présence d'un auditoire attentif et impassible — ce qui n'exclut nullement la bienveillance —, qui s'efforce de découvrir, à travers les péripéties d'un exposé préparé à loisir sur des questions connues (du moins, en principe), à côté des connaissances techniques, les qualités d'esprit, le caractère, les aptitudes souvent encore indécises. C'est, bien sûr, une épreuve redoutable, et le jury fait largement la part de l'émotion, de la nervosité, en excusant bien des bévues, en cherchant l'interprétation la plus favorable pour telle indication maladroitement exprimée, pour telle intention manifestée, mais dont la réalisation a brusquement tourné court.

Sur cet aspect très important de l'oral du concours, tout a été dit, et répété sans doute, depuis des années. Pourtant quelques recommandations élémentaires valent peut-être la peine d'être renouvelées parfois, d'autant plus que certaines remarques portent sur des faits relevant d'habitudes acquises de longue date, ou de traits de caractère difficiles à réformer en quelques mois ; puissent-elles fournir, incidemment, un thème de réflexion, à défaut d'une action plus efficace !

Je redirai donc, une fois encore, qu'une leçon doit être exposée posément, et qu'il est bien fâcheux d'entendre, et de voir, une candidate transformée en récitante, « débitant » — souvent, à quelle allure ! — un texte qui semble appris par cœur, quand il n'est pas rédigé sur quelques feuilles, d'un format parfois peu discret, dont on semble ne pouvoir se séparer, au grand détriment d'une certaine aisance d'attitude, d'une certaine liberté de mouvements, qui, lorsqu'elles ne sont point affectées, impressionnent favorablement un « public ».

Il faut souhaiter aussi que l'on veuille bien apprendre à faire un bon usage de la craie et du tableau — qui est traditionnellement confié au professeur de mathématiques, non pour être couvert de figures, de formules, de calculs, parfois enchevêtrés d'inextricable manière, mais pour fixer, dans un ordre soigneusement contrôlé, les éléments essentiels de la question exposée —, et aussi du « chiffon », trop souvent

manié à tort et à travers, faisant malencontreusement disparaître (quelquefois à dessein, peut-être ?) ce qui aurait dû être conservé.

Et je crois nécessaire de revenir, une nouvelle fois, sur les défauts et les fantaisies de vocabulaire et d'expression, car leur abondance est inquiétante. D'une récolte trop riche, je ne retiendrai que quelques échantillons, allant du cocasse :

« un théorème qui s'intéresse à... » ;

« on peut raisonner par pentes... » (il s'agissait de l'interprétation graphique de la résolution d'un système de deux équations linéaires) ;

« le coefficient 2 étant *toujours* différent de zéro... »,
à l'incorrection de langage :

« nous noterons par... », « cette dérivée est nommée par... » ;

« plus grand ou égal à... » ;

« nous allons passer en $\frac{x}{2}$... » (à propos d'une résolution d'équation trigonométrique),

et à l'incorrection d'ordre technique :

« cette expression est une condition nécessaire et suffisante... » ;

« l'expression est vérifiée... » ;

« la différence est possible... » ;

« la division d'une fraction par un nombre est une fraction... » ;

« le quotient est l'opération inverse de la multiplication... » ;

« quand l'équation sera un polynôme... » ;

« portons cette égalité dans celle-ci... » ;

« les racines d'une inéquation... » ;

« la translation amenant deux plans parallèles en coïncidence... », sans omettre, bien entendu, « les cylindres de base, un cercle de rayon a ... », ni « les homothéties de centre, un point de la droite D ... ».

On ne cesse de répéter, non sans raison, qu'une classe de Mathématiques doit être une classe de français ; que les aspirants-professeurs veuillent bien réfléchir sur les obligations qui leur incomberont de ce fait, et exercer sur eux-mêmes un sérieux contrôle, afin de ne pas laisser s'accréditer quelque fâcheuse légende sur l'existence d'une « langue mathématique », dont les règles et les lois mépriseraient celles du bon français.

Revenons aux questions de fond.

Quelques-uns des sujets traités fournissent l'occasion de remarques, qui ne sont pas nouvelles, mais qui paraissent toujours actuelles, sur certains types de problèmes.

Il en est ainsi de la leçon sur des « exemples de résolution de problèmes de construction » dans une classe de Seconde, leçon qui s'apparente, quant à la conduite de la recherche et des raisonnements, aux exposés sur les « lieux géométriques » dont il a été longuement parlé dans un rapport récent. Il convient d'abord de s'entendre sur la signification de tels problèmes, et sur la forme qu'il conviendrait peut-être de donner à leur énoncé, en rompant, au besoin, avec certaines traditions : lorsqu'on propose, par exemple, de « construire un triangle connaissant la longueur a de l'un des côtés, la mesure A de l'angle qui lui est opposé, et la différence k^2 des carrés des longueurs des deux autres côtés », ne s'agit-il pas, en fait, d'une part, d'établir l'existence d'au moins un triangle vérifiant les conditions énumérées ; d'autre part, de réaliser effectivement la construction d'un tel triangle ? Logiquement, la solution doit faire apparaître cette double étape.

En général, dans une étude de ce genre, on doit aller à la découverte, et le point de départ naturel consiste alors à *supposer* qu'il existe une figure (ici, un triangle) « répondant à la question » (à « supposer le problème résolu ») ; dès lors, les propriétés successivement trouvées sont liées à cette hypothèse, et, si l'on a démontré, par exemple, que, le côté BC , ayant la longueur donnée a , étant placé, le troisième som-

met A se trouve, à la fois, sur l'un ou l'autre de deux arcs de cercle (γ) passant par B et C, et sur l'une ou l'autre de deux droites bien déterminées (Δ), perpendiculaires à la droite BC, la conclusion précise de cette partie de la solution ne peut être que : « Si le triangle cherché existe, les arcs (γ) et les droites (Δ) se coupent et le sommet A est l'un des points communs à ces deux courbes. » Il est bien clair que ces déductions, faites sous réserve (« si le triangle existe »), ne prouvent pas qu'inversement un point de rencontre de (γ) et de (Δ) (courbes l'une et l'autre bien définies à partir des données, les points B et C étant placés), si un tel point existe, forme avec B et C les sommets d'un triangle vérifiant les conditions imposées ; l'étude d'une réciproque s'impose logiquement, en partant cette fois de la figure formée par les points B et C, les arcs (γ) et les droites (Δ), définis respectivement à partir de l'angle donné A et de la constante donnée k^2 ; cette étude ne présente d'ailleurs aucune difficulté, mais c'est seulement après avoir établi que cette réciproque est exacte que l'on peut substituer au problème initial le nouveau problème — intersection de (γ) et de (Δ) — dont on vient de démontrer qu'il est équivalent au premier. Dans le présent exemple, on peut, sans nouvelle transformation, franchir la deuxième étape, celle de la construction effective (« par la règle et le compas ») de la figure. Quant à la discussion des conditions de possibilité, elle se réduit, en raison de l'équivalence précitée, à la discussion de l'existence des points communs aux courbes (γ) et (Δ), ce qui est banal.

Il est à peine utile d'insister sur l'analogie, pour ne pas dire l'identité, de structure entre ce raisonnement, détaillé à dessein, et le raisonnement classique dans la recherche d'un lieu géométrique. L'exemple précédent met du reste en lumière une autre analogie entre ces deux types de problèmes, car, ici, une solution bien plus rapide et simple est facile à mettre en jeu (ce n'est pas toujours possible) à condition de ne pas s'engager, au départ, dans la voie à sens unique ouverte par l'hypothèse, « supposons qu'il existe un triangle vérifiant les conditions données » ; elle repose sur la possibilité de ne faire intervenir que des conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour transformer le problème posé en un problème équivalent : partant d'un triangle arbitraire, on peut fixer, sans diminuer la généralité de l'étude, deux des sommets B et C de façon que la longueur BC soit égale à a ; dès lors, pour que ce triangle vérifie les conditions imposées, il faut et il suffit que le troisième

sommet appartienne, d'une part, au lieu des points M tels que l'angle BMC ait pour mesure A, d'autre part, au lieu des points P tels que la différence $PB^2 - PC^2$ (ou $PC^2 - PB^2$) soit égale à k^2 . Les courbes (γ) et (Δ) apparaissent ainsi avec leur signification complète de « lieu géométrique », et il est prouvé que l'existence des triangles cherchés est liée, d'une façon équivalente, à l'existence des points communs aux courbes (γ) et (Δ).

Cette bien longue analyse d'un problème simple montre en particulier combien la présentation d'une solution doit être méticuleusement contrôlée. Car il est clair que, dans ces problèmes, la phrase traditionnelle (« Soit M un point du lieu cherché », — « Supposons le problème résolu... »), très légitimement employée lorsqu'une recherche est entreprise « dans le noir », sans qu'on ait découvert immédiatement quelque moyen valable de transformation, impose une certaine forme à tout le reste du raisonnement ; et si l'on s'aperçoit, en route, qu'un mode d'étude plus simple peut être utilisé, il sera nécessaire de réviser, dès le début, la rédaction.

La candidate qui a traité la leçon sur les problèmes de construction a bien insisté sur l'hypothèse d'existence qu'elle prenait comme point de départ, mais, dans la plupart des exemples choisis, elle n'a pas su en dégager nettement la conséquence logique, et la démonstration d'existence s'est révélée souvent incomplète, ou mêlée à la discussion de la possibilité d'une construction, dont on ne savait pas précisément si elle était réellement équivalente à la construction proposée par l'énoncé. D'autre part, la réalisation effective des constructions a été quelque peu négligée dans cet exposé.

Deux leçons, pour une classe de Seconde, comportaient une étude de lieux géométriques simples, liés aux propriétés classiques de la somme ou de la différence des carrés des distances, et au rapport des distances, d'un point à deux points fixes. Les remarques précédentes dispensent de revenir sur les modes de raisonnement. Disons simplement que l'idée d'« identification » est très souvent facile à mettre en œuvre dans la démonstration des réciproques ; bien appliquée, elle permet dans bien des cas une présentation claire et simple de la solution.

Une leçon sur des « exemples de problèmes conduisant à la résolution d'équations du premier ou du second degré », pour une classe de Première, se rattache normalement aux précédentes, puisque l'une des idées essentielles qu'il convient de dégager est relative à la « mise en équations » d'un tel problème : l'analyse bien menée de cette phase de la solution doit montrer qu'il s'agit d'un véritable raisonnement, tout à fait semblable à celui que l'on rencontre dans la recherche d'un lieu géométrique, tendant à établir l'équivalence de la question à résoudre et de la question d'algèbre (résolution d'un système d'équations et de conditions variées) qui va finalement la remplacer. La leçon entendue cette année était loin de répondre à cette exigence logique.

Les rapports précédents avaient longuement insisté sur certaines questions de géométrie élémentaire, présentées au niveau de la Seconde, telles que « Positions relatives de deux cercles ». Le hasard du tirage au sort a, cette année encore, attribué cette leçon à une candidate. Si son exposé a montré qu'elle avait réfléchi sérieusement à ces problèmes, il a fait apparaître aussi, par quelques imperfections, combien leur présentation demande de soin et d'attention pour arriver à mettre en lumière, non pas les résultats classiques, qui finissent toujours par être dégagés, mais l'ordonnance logique des raisonnements qui y conduisent, une fois nettement précisé le point de vue adopté au départ. On ne saurait trop attirer l'attention des candidates sur l'intérêt et sur l'importance de ces notions géométriques de base, qui ne se laissent quelque peu dominer que par une longue réflexion.

Deux leçons d'arithmétique, l'une sur les diviseurs communs, à deux ou plusieurs nombres, l'autre sur les nombres premiers, ont été, dans l'ensemble, correctement présentées, et ont été d'ailleurs favorablement appréciées. Notons, en passant, sur ce sujet, que tout entier a admet a comme diviseur au même titre que 1, et qu'il

semble préférable, dans cette théorie, de ne pas employer la notation $\frac{a}{D}$ pour représenter le quotient exact d'un entier a par l'un de ses diviseurs D .

Un exposé sur la division des nombres entiers s'est révélé plein de bonnes intentions, mais il a paru trop lent et hésitant ; un essai d'explication du mécanisme opératoire classique, tenté dans un système de numération à base quelconque, s'il correspond à une idée intéressante et louable, n'a pas été tout à fait convaincant.

Quelques « premières leçons », correspondant à des têtes de chapitres d'arithmétique et d'algèbre, ont encore été entendues cette année par le jury. Des points de vue différents, également acceptables, avaient été adoptés par les candidates ; à cet égard, il est bien entendu qu'aucune idée préconçue, qu'aucune préférence particulière pour telle ou telle théorie, n'interviendra dans l'appréciation de l'épreuve, mais l'on attend évidemment, à ce niveau, une présentation cohérente, solidement et logiquement construite, montrant clairement, non seulement les fondations de l'édifice, mais aussi son développement, et si, faute de temps, on ne peut aller jusqu'au bout, qu'au moins la voie ait été assez clairement tracée pour que l'on comprenne comment il pourra être achevé.

Dans ce domaine, une leçon sur les nombres positifs et négatifs (pour une classe de Mathématiques), bâtie sur la considération de couples de nombres arithmétiques rangés (a, b) , astreints à certaines règles, a donné l'impression d'un effort courageux et louable — dont il a été largement tenu compte — pour arriver à un exposé logique

et abstrait de la théorie ; cependant, bien des écueils apparaissent çà et là, qui auraient sans doute gêné un auditoire d'élèves. De tels modes d'exposition sont intéressants à bien des titres, et ne sont nullement à proscrire, mais ils ne prennent toute leur valeur que s'ils sont réellement dominés jusque dans les détails. Un bon conseil à donner aux candidates, en ce qui concerne ces grands chapitres des débuts de l'arithmétique et de l'algèbre, est de procéder par elles-mêmes à une étude comparée et approfondie des diverses théories — disons, pour abréger, anciennes et modernes —, en essayant d'accomplir des mises au point complètes, afin de bien mesurer les difficultés qui souvent ne se révèlent que lorsqu'on se donne la peine de ne *rien* laisser dans l'ombre.

Signalons, avant de quitter ce sujet, un point sur lequel l'attention des candidates avait été attirée déjà il y a quelques années : la propriété d'associativité de l'addition (ou de la multiplication) n'a de sens, évidemment, que si l'on a effectivement défini, au préalable, la somme (ou le produit) de plus de deux nombres.

A propos de leçons sur des équations ou des systèmes d'équations, remarquons d'abord que, si l'on tient à rappeler ce qu'est une équation, il est préférable de ne pas prendre comme définition : « une équation est une expression, $E(x)$ ou $E(x, y, z)$, égale à zéro », car cette phrase n'exprime, ni une idée, ni même une convention intelligible, et ne fait pas apparaître l'essentiel, c'est-à-dire qu'une équation est la traduction symbolique d'une question, d'un problème que l'on pose à partir de deux fonctions données.

L'étude, très classique pourtant et maintes fois commentée, d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues (dans une classe de Mathématiques) devrait, une fois le problème bien posé, se développer suivant une ligne logique, — que l'on opère en recherchant d'abord toutes les solutions d'une équation linéaire à deux inconnues, pour passer de là au cas de deux équations simultanées — ce qui conduit à la « méthode » de substitution —, ou que l'on emploie tout autre procédé. Malheureusement, on voit trop souvent un raisonnement, en général correctement commencé, tourner court et s'effriter. Et l'on souhaite voir enfin disparaître la faute traditionnelle, souvent signalée, concernant la double hypothèse $ab' - ba' = 0$, $ac' - ca' = 0$ (qui n'entraîne pas nécessairement $bc' - cb' = 0$). Pour l'interprétation graphique de la résolution d'un tel système, il paraît indiqué de rappeler, au niveau de la classe de Mathématiques, ce qu'est l'équation d'une droite par rapport à un système de coordonnées, et de faire ressortir le lien entre cette notion et celle du lieu géométrique, afin qu'apparaisse clairement la relation logique existant entre le problème d'algèbre et le problème de géométrie.

Une leçon sur les équations trigonométriques a été encombrée, au début, de conseils — j'allais dire, de recettes, —, non justifiés d'ailleurs, sur le choix d'une inconnue auxiliaire lorsqu'interviennent dans une équation diverses lignes trigonométriques de l'inconnue. Chercher « si l'équation ne change pas » lorsqu'on « change » x en $-x$, ou en $\pi - x$, ou en $\pi + x$, paraît une recommandation bien superflue lorsqu'il s'agit de résoudre l'équation $1 - \sin x - 2 \cos^2 x = 0$, ou l'équation $1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x + 8 \cos^4 x = 0$ (surtout si l'on doit aboutir, pour cette dernière, au choix de $\tan x$ comme inconnue), d'autant plus que la locution : « l'équation est — ou n'est pas — changée », prise à la lettre, ne signifie pas grand'chose et risque même d'être mal comprise. Cependant, la candidate a manifesté constamment le très louable souci de s'occuper, en temps utile, de l'existence des êtres qui intervenaient dans les raisonnements et les calculs ; c'est là un fait assez rare, qui mérite d'être signalé, car il touche à un point dont l'importance est évidente. L'étude de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$ a été correctement présentée, avec une interprétation géométrique classique à partir de l'intersection d'une droite et d'un cercle ; remarquons, à ce sujet, que l'expression $(a \cos x + b \sin x)$ représente, dans un plan rapporté à un système de coordonnées rectangulaires $X'OX, Y'OY$, la projection sur l'axe $\overrightarrow{Ou}$,

défini par l'angle polaire $(\vec{OX}, \vec{Ou}) = x$, du vecteur ayant pour composantes a et b : les transformations connues de cette expression, comme la résolution d'équations ou d'inéquations où elle intervient simplement, se déduisent facilement de cette propriété.

Dans une leçon sur les trièdres, pour la classe de Mathématiques, les définitions préliminaires ont été données avec un luxe de précautions minutieuses qui aurait bien risqué, s'il s'était agi de débutants, d'obscurcir les idées les plus simples. Notons qu'il est inutile de considérer plusieurs cas de figures pour établir les inégalités existant entre une face d'un trièdre et la somme ou la différence des deux autres, car toutes ces relations se déduisent facilement de la comparaison de la plus grande des trois faces aux deux autres. Le jury a su gré à la candidate d'avoir posé le problème de l'existence d'un trièdre admettant comme faces trois angles vérifiant les conditions d'inégalité découvertes d'abord.

Lorsqu'on présente l'inversion, il convient de ne pas omettre le fait que la définition de la transformation exige la donnée d'une unité de longueur, et le rôle particulier du pôle mérite mieux qu'une indication très sommaire sur les transformés des points à l'infini de l'espace. Lorsque l'on étudie l'inverse d'une courbe admettant une tangente en un point, il importe d'établir l'existence de la tangente à la courbe transformée au point correspondant, la démonstration étant du reste liée à celle de la propriété classique relative à la position de ces deux tangentes.

Comme applications de l'inversion (classe de Mathématiques), la candidate avait choisi différents problèmes parfaitement acceptables, et les solutions proposées étaient, dans leur principe, valables ; mais, si l'on peut bien facilement excuser quelques lapsus ou quelques omissions de détails, il est plus difficile de laisser passer des fautes ou des lacunes de fond, même si elles paraissent imputables à une présentation trop rapide, car le désir d'exposer le plus grand nombre possible de théorèmes ou de résultats, pendant les cinquante minutes de l'épreuve, ne doit pas faire oublier la nécessité d'expliquer clairement et de se faire bien comprendre.

Dans l'étude des rabattements, en géométrie descriptive, il n'est pas mauvais de mentionner, à côté de la règle classique « du triangle rectangle », que le rabattement d'un point M d'un plan quelconque P , non parallèle à la ligne de terre, sur un plan horizontal donné, se construit très facilement au moyen de la frontale du plan P qui passe par M , en remarquant que le segment de cette frontale, compris entre le point M et la charnière est connu « en vraie grandeur » par sa projection frontale.

L'insuffisance de raisonnement longuement exposée à propos des problèmes de constructions n'a pas été évitée dans la leçon sur la recherche des cercles passant par deux points et tangents à une droite ou à un cercle ; elle est pourtant facile à déceler dans la solution couramment donnée où l'on analyse d'abord, et assez longuement, les propriétés d'une figure vérifiant les conditions proposées. L'intervention, toute naturelle dans cette question, d'un faisceau linéaire de cercles permet du reste d'en simplifier et d'en clarifier la présentation.

Dans une leçon de révision sur les conditions pour que quatre points soient sur un même cercle, il est évidemment fâcheux que soit oubliée celle qui est liée à la notion de puissance. d'un point par rapport à un cercle.

Les coniques ont fait l'objet de quelques exposés dont plusieurs étaient fort convenables. Je ne retiendrai, à leur sujet, que quelques observations :

Il est préférable de donner une définition « projective » d'une asymptote, en partant de la notion de direction asymptotique préalablement précisée, afin de faire ressortir l'analogie, dans le domaine projectif, entre tangentes et asymptotes, ce qui n'empêche pas d'établir qu'une asymptote peut être caractérisée par une propriété faisant intervenir la distance d'un point variable de la branche infinie de courbe à une certaine droite.

Il faut sans doute classer dans la catégorie des lapsus une phrase où l'on affirme qu'une droite coupant en un seul point une hyperbole ou une parabole est une tangente à la courbe, mais c'est là une étourderie regrettable à cause des réminiscences

qu'elle peut évoquer chez des élèves qui ont souvent entendu définir de cette façon, dans les débuts de la géométrie, une tangente à un cercle.

Une leçon sur les tangentes à une conique définie par un foyer, la directrice associée et l'excentricité, a été tout à fait déséquilibrée par une longue étude préalable de l'intersection d'une conique avec une droite quelconque, alors que l'existence d'une tangente en un point s'établit bien simplement à partir de la définition ponctuelle adoptée pour la courbe. Il n'est peut-être pas inutile d'attirer l'attention sur le fait que, contrairement à une tradition qui commence heureusement à être abandonnée, dans l'étude élémentaire des courbes usuelles, le problème de la définition et de l'existence d'une tangente en un point ne doit pas être lié à celui de l'intersection avec une droite, puisqu'il s'agit, en fait, de chercher la position limite, non d'une « sécante » à la courbe, mais de la droite joignant deux points pris sur la courbe.

La construction d'une ellipse, connaissant deux diamètres conjugués, figurait, conformément au programme, dans le texte de la leçon sur la correspondance par affinité entre une ellipse et son cercle principal ou son cercle secondaire ; la question a paru surprendre la candidate ; elle est pourtant classique et une solution est assez facile à reconstituer.

Pour les Mathématiques Spéciales, nous ferons les remarques suivantes, dont beaucoup ne sont pas nouvelles, mais conservent une actualité certaine :

Une leçon sur quelques applications des propriétés générales des opérations sur les nombres complexes n'a pas été comprise ; il s'agit pourtant d'une matière assez riche, aussi bien dans le domaine de la géométrie plane que dans celui de la trigonométrie, pour se borner aux deux indications, non limitatives d'ailleurs, suggérées dans le texte même de la leçon. Il n'est évidemment pas déraisonnable de considérer que l'étude des éléments géométriques imaginaires peut se placer sous la rubrique de ces applications, et c'est une interprétation admissible du sujet ; cependant, ce chapitre de géométrie algébrique offre une importance telle qu'il est difficile de le glisser, même en le limitant à ses débuts, au milieu des applications directes de la théorie des opérations sur les nombres complexes, que l'on traite naturellement comme conséquences immédiates de cette théorie, dont elles constituent en quelque sorte un commentaire.

A propos de la division des polynômes à une variable, il convient de rappeler que la définition du degré d'un polynôme ne peut pas s'appliquer à un polynôme identiquement nul (un polynôme de degré zéro doit être une constante non nulle). Par conséquent, lorsqu'on définit le reste de la division suivant les puissances décroissantes, il est indispensable de préciser que ce polynôme est astreint, soit à avoir un degré inférieur au degré du diviseur, soit à être identiquement nul. D'ailleurs, le déroulement normal du raisonnement qui permet de mettre en évidence le quotient et le reste de la division par la détermination des monômes successifs, ordonnés suivant les puissances décroissantes, fait apparaître, à chaque étape, une alternative : ou bien le dividende partiel obtenu est identiquement nul, et l'opération est terminée, ou bien le dividende partiel n'est pas identiquement nul, et l'on compare alors son degré à celui du diviseur, pour continuer l'opération. Des remarques analogues s'appliquent à la division « suivant les puissances croissantes ».

Concernant toujours la division, il paraît préférable de ne pas employer une notation telle que $\frac{a}{b}$ pour représenter le monôme quotient du monôme a par le monôme b , lorsqu'on suppose que le degré de a est supérieur ou égal à celui de b (monômes à une variable), car on semble introduire ainsi une fraction rationnelle (avec ses conditions d'existence) dans un problème où ne doivent intervenir que des monômes et des polynômes (le « prolongement » de l'opération de division au moyen des puissances à exposant négatif constitue une autre question, qui trouve normalement sa place dans l'étude des fractions rationnelles).

Dans une leçon sur les formes linéaires, même si on la situe après la théorie générale des systèmes d'équations linéaires, il importe que les définitions fondamentales relatives au tableau des coefficients, aux déterminants principaux, au rang... soient données à partir des formes elles-mêmes, et non à partir du système d'équations linéaires que l'on obtient en les égalant à zéro, ne serait-ce que pour souligner le fait que la théorie des formes n'est pas nécessairement subordonnée à celle des équations. Quant aux relations linéaires d'identité existant entre des formes dépendantes, il est bon de faire apparaître qu'il existe en réalité $(n - r)$ relations fondamentales — n étant le nombre des formes et r le rang du système — exprimant les formes non principales en fonction des formes principales, et que toute autre relation linéaire entre les formes peut être obtenue comme une combinaison linéaire de ces relations fondamentales.

L'étude de l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques ne doit pas négliger la détermination de la ou des racines communes aux équations considérées, une fois exprimée la condition d'existence de telles racines : il s'agit, dans ce problème, de la résolution d'un système de deux équations à une inconnue, et la solution doit tout naturellement faire intervenir des systèmes équivalents au système initial. Le vocabulaire employé dans cette théorie doit être sérieusement contrôlé, car de très fâcheuses confusions risquent fort de se produire entre les polynômes mis en jeu et les équations ou les relations que l'on forme avec eux ; la définition et le maniement du « résultat » présentent, à cet égard, quelques dangers, auxquels il est bon d'avoir réfléchi ; ainsi, il est regrettable d'entendre dire que « le résultant est une relation... ».

La transformation d'une équation algébrique par une substitution rationnelle portant sur une seule racine consiste, essentiellement, dans le remplacement de l'équation donnée, à une inconnue, par un système de deux équations à deux inconnues ; c'est une idée qu'il est bon de mettre en lumière, quand on cherche à utiliser une transformation pour simplifier la résolution d'une équation. Naturellement, la question des ordres de multiplicité des racines ne doit pas être laissée de côté, ni celle de la possibilité pratique d'« abaissement du degré », qui peut être analysée clairement sur des exemples faciles à imaginer, ne serait-ce que l'exemple classique des équations réciproques.

L'exposé sur l'emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction devrait bien faire ressortir comment le problème se pose en pratique : le fait de substituer à la recherche du sens de variation de $f(x)$ la recherche du signe de la fonction dérivée $f'(x)$ apporte-t-il une simplification ? Comment va-t-on procéder, en général, pour étudier le signe de $f'(x)$? C'est en cherchant à répondre à ces deux questions que l'on découvrira le véritable intérêt de cette substitution : on constatera d'abord que, dans le cas général, la détermination du signe d'une fonction est liée à la détermination des intervalles à l'intérieur desquels elle est définie, continue et monotone, et à celle des signes des valeurs numériques ou des limites de la fonction aux extrémités de tels intervalles, — et, par suite, liée à la détermination du sens de variation de la fonction, — de sorte que la question semble avoir été déplacée (remplacement de f par f') sans avantage appréciable, puisque la fonction $f'(x)$ peut être aussi compliquée, sinon plus, que $f(x)$. Mais le gain pratique apparaîtra en remarquant que, pour la fonction $f'(x)$, il ne s'agit que du signe, et que l'on pourra par conséquent substituer à l'étude de f' celle d'une ou de plusieurs fonctions dont le signe est lié, d'une façon connue, au signe de f' . Bien entendu, dans une telle leçon, les exemples choisis devraient illustrer les points essentiels, et la solution présentée pour chacun devrait pouvoir servir de modèle.

L'étude de l'intégrale définie d'une fonction continue a été fâcheusement alourdie, dans l'étude classique des sommes « S » et « s », par une hypothèse sur le signe de la fonction, qui ne joue aucun rôle dans le raisonnement. Faut-il redire encore, à ce sujet, que la notion de limite employée dans cette théorie ne peut être confondue

avec celle qui a été définie pour des fonctions d'une ou de plusieurs variables. et qu'une définition précise doit en être donnée ?

Il convient aussi d'attirer l'attention, de nouveau, sur le problème du changement de variable dans une intégrale, problème qui doit permettre de faire comprendre la signification exacte de la notation employée pour représenter « l'élément différentiel » placé sous le signe somme. D'autre part, pour l'application des formules classiques sur le changement de variables, les conditions d'existence et de continuité des fonctions mises en jeu interviennent pratiquement beaucoup plus que les conditions de « monotonie », dont il est souvent inutile de se préoccuper. Enfin, si les changements de variables que l'on est amené à prendre comme exemples, pour la transformation de certaines intégrales définies, conduisent à l'introduction des limites $+\infty$ ou $-\infty$, ou bien s'ils font apparaître des fonctions cessant d'exister à l'une des bornes de l'intervalle d'intégration, il est indispensable de rappeler (ou de définir) la signification et les conditions de validité des symboles que l'on est ainsi appelé à écrire.

Les leçons sur les séries sont rarement satisfaisantes ; les questions classiques qui en font l'objet sont cependant parmi les plus importantes des débuts de l'analyse, et sont faciles à délimiter et à mettre au point. Or, beaucoup de fautes de principe, sans compter les erreurs de détail, sont, la plupart du temps, à relever dans ces exposés. Ainsi, une étude des séries à termes positifs, qui ne met pas d'abord en évidence la propriété de la somme des n premiers termes d'être une suite croissante, ou non décroissante, risque fort d'être obscure, ou inutilement compliquée ; de même, une démonstration du théorème classique sur une condition suffisante de convergence d'une série alternée, qui ne fait pas intervenir le fait que le terme général tend vers zéro, est manifestement incorrecte. Le problème du changement de l'ordre des termes dans une série mérite d'être nettement défini et posé, puisqu'il s'agit, au départ, de collections qui ne comprennent pas un nombre fini d'éléments. Bien d'autres insuffisances seraient à citer ; ajoutons seulement à la liste l'étourderie que constitue la recherche de la nature de la série ayant pour terme général 2^n au moyen de la règle de d'Alembert.

L'intégration des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants est un sujet bien délimité, relativement simple, et qui peut être présenté sans que l'on ait besoin de recourir à de soi-disant « théorèmes généraux », qui n'ont aucune valeur quand ils sont énoncés sous une forme vague, propre à donner des idées tout à fait fausses. Tous les exemples d'équations différentielles figurant au programme de Spéciales peuvent justement être traités d'une façon directe, en faisant simplement appel aux propriétés classiques des intégrales, et la mise en évidence de toutes les solutions, ne relève nullement de l'application de théories générales qui sont hors de question dans cette classe.

En géométrie analytique, deux leçons sur les coordonnées polaires ont apporté leur contingent, malheureusement habituel, d'erreurs ou d'insuffisances. Comment peut-on avoir l'idée d'étudier la tangente au pôle, pour une courbe qui passe par ce point, en appliquant une formule que l'on vient d'établir en supposant manifestement que le rayon vecteur n'est pas nul, alors qu'il est tout indiqué de revenir tout simplement à la définition d'une tangente ? Comment peut-on insister, d'abord dans les généralités sur les constructions de courbes, puis à propos d'un exemple traité en détail, sur le fait qu'une courbe définie par une équation $\rho = f(\theta)$ admet un axe de symétrie passant par le pôle lorsque la relation $f(\theta + \beta) = -f(\theta)$, ou β est une constante, est vérifiée quel que soit θ ? Passons sous silence les imprécisions, les hésitations, les maladresses de calcul que l'on aimerait bien voir disparaître dans le maniement de formules usuelles comme les formules élémentaires de trigonométrie.

La définition des directions principales, qu'il s'agisse des courbes ou des surfaces du second ordre, a été maintes fois l'objet d'une remarque qu'il convient de renouveler encore cette année : dire qu'une direction principale est une direction perpendiculaire à son diamètre (ou à son plan diamétral) conjugué, c'est sous-entendre que

l'on se borne à la considération des directions admettant un diamètre (ou un plan diamétral) conjugué à distance finie, et c'est par conséquent écarter d'avance les directions asymptotiques singulières, que l'on va pourtant récupérer un peu plus tard, plus ou moins habilement, pour en faire à leur tour des directions principales ; il est pourtant bien simple de partir de l'étude d'une direction admettant comme direction conjuguée la direction (ou toute direction) qui lui est perpendiculaire, en supposant naturellement définie, au préalable, la notion de directions conjuguées. D'autre part, la détermination analytique des axes de symétrie mérite d'être exposée au même titre que le problème de la réduction de l'équation et de la recherche de la forme réduite en axes rectangulaires.

L'étude des diamètres dans les quadriques peut évidemment être rattachée aux notions générales sur les éléments conjugués, mais, si, dans le rappel des résultats généraux susceptibles d'intervenir, on se borne à signaler les points conjugués, les plans polaires et les pôles, sans faire allusion aux droites conjuguées, on peut craindre une théorie un peu déficiente ou confuse. Il s'agit là cependant d'un chapitre important de la géométrie des surfaces du second ordre, qui vaut la peine d'être précisé et mis au point.

En mécanique, deux des sujets, souvent commentés dans des rapports antérieurs, ont encore donné lieu, cette année, à des observations sans nouveauté. Le problème du changement du système de référence, correctement traité dans l'ensemble, est présenté à partir d'une formule vectorielle qui mériterait d'être expliquée avec soin, car c'est à propos de cette question qu'apparaît nettement le rôle que joue l'espace de référence dans la définition de la dérivée vectorielle. Quant à la leçon sur le travail d'une force et sur le théorème « de la force-vive », elle n'a pas été mieux présentée que dans la plupart des années précédentes ; sans doute, la question est délicate, mais elle ne fait pas seulement l'objet d'un court chapitre du programme de Spéciales ; elle intervient constamment, et d'une façon essentielle, en mécanique et en physique ; il semble que les candidates ont eu maintes occasions, au cours de leurs études, d'y réfléchir, d'en mesurer les difficultés en même temps que l'importance, et d'en faire, une bonne fois, la mise au point.

*
**

Les notes obtenues par les candidates, pour les diverses épreuves orales, se répartissent ainsi :

En Mathématiques Élémentaires, les meilleures leçons (deux d'arithmétique, deux de géométrie) ont été cotées 18 (une fois) et 16 (trois fois) ; puis viennent deux 15, un 14,5 et un 14, précédant un lot assez massif de dix-neuf notes comprises entre 13,5 et 10 [six fois 13,5 et 13 ; quatre fois 12,5 et 12 ; trois fois 11,5 et 11 ; et six fois 10,5 et 10], pour terminer par deux 9, un 7 et deux 6, ces deux dernières concernant une leçon d'algèbre en Seconde et une leçon d'arithmétique. La moyenne pour les trente-deux admissibles est 12, supérieure d'un point à celle de 1953. Puisse cette tendance à la hausse se confirmer dans l'avenir, car, on l'a souvent répété, il s'agit là d'une épreuve dont la préparation mérite évidemment de retenir d'une façon toute particulière l'attention des candidates, puisqu'elle les oblige à réfléchir sur les questions de base qui feront bientôt l'objet de leur enseignement.

En Mathématiques Spéciales, deux bonnes leçons d'analyse et d'algèbre, l'une sur la fonction inverse d'une fonction continue monotone, l'autre sur les déterminants, ont mérité les notes 18 et 17 ; les questions étaient certainement dominées par les deux candidates, reçues d'ailleurs en tête de liste, et le jury a volontiers excusé quelques défauts et quelques maladroites faciles à réparer. Deux autres leçons d'analyse, solides et correctement présentées, ont mérité la note 16. Vient ensuite une lacune de deux points, suivie de neuf notes échelonnées de 14 à 10 (inclus) ; ce n'est qu'au-dessous de la moyenne que se trouve, malheureusement, la zone d'accumulation :

quinze notes entre 9,5 et 7, avec prédominance des 9 et des 8, prolongée par un 6, trois 5, et finalement un 2, attribué à une leçon d'analyse dont la faiblesse doit être imputée à une défaillance passagère. La moyenne générale de cette épreuve est 9,7, nettement inférieure à celle des années précédentes.

Le groupement des deux épreuves orales donne, sur 20, des notes qui vont de 17 à 5,5, avec une répartition assez classique comprenant d'abord une tête assez effilée, avec un 17, un 15,5, un 14,5 et deux 14, — puis un premier amas de huit notes entre 13 et 12, suivi d'un deuxième lot un peu plus fourni de douze notes entre 11 et 9,5, — pour finir, en s'amenuisant, avec un 8,5, deux 8, deux 7,5, un 7 et un 5,5. La moyenne générale de l'oral, pour les trente-deux admissibles, est environ 10,8, sensiblement égale à celle de 1953, et très comparable à celle des années voisines.

RESULTATS GENERAUX

La somme de toutes les notes correspondant à l'ensemble des épreuves écrites, pratiques et orales, pour chacune des trente-deux admissibles, varie, cette année, de 331 à 142, pour un maximum de 400 points. La moyenne générale de chacune de ces candidates est donc comprise entre 16,5 et 7,1 sur 20, et la moyenne générale pour l'ensemble des admissibles est 9,65 sur 20. Il est intéressant d'observer que les notes extrêmes (16,5 et 7,1) sont sensiblement plus élevées qu'en 1953 (14,3 et 6,4), alors que la moyenne générale est plus faible : 9,65 au lieu de 10,5, mais ces différences s'expliquent en grande partie par le fait que la note la plus élevée (16,5) constitue une sorte d'exception, les deux moyennes suivantes, correspondant aux candidates classées seconde et troisième, étant 14,4 et 11,8. La candidate venant en tête de liste, déjà première à l'écrit avec une forte avance, a montré une réelle supériorité sur toutes ses camarades.

Le classement de l'écrit a été très sensiblement modifié, à partir du troisième rang, par les épreuves pratiques et orales, et plusieurs candidates, assez dangeureusement placées à l'admissibilité (la 26^e et la 31^e, par exemple), ont finalement réussi à figurer dans le premier tiers de la liste définitive.

Le nombre des postes mis au concours, nettement plus élevé que les années précédentes, était de vingt-huit, dont trois pour la France d'Outre-Mer. Le jury n'a pu proposer, pour l'admission définitive, que les vingt et une premières du classement, dont l'une, reçue à titre étranger, et figurant sur la liste avec le numéro 19 *bis*, ne peut être nommée professeur dans un établissement de l'Etat.

Les notes d'ensemble des vingt et une reçues vont de 331 à 180 sur 400, c'est-à-dire de 16,5 à 9 sur 20. Cette année, pour la première fois depuis assez longtemps, la moyenne générale d'une partie des candidates reçues est inférieure à 10 sur 20 ; l'échelonnement des vingt et une notes est du reste le suivant : 16,5 ; — 14,4 ; — 11,8 ; puis trois notes voisines de 11 ; cinq entre 10,5 et 10 ; cinq entre 10 et 9,5 et cinq entre 9,5 et 9. Ainsi, dans cette liste de tête, mises à part les six premières, quinze candidates se trouvent pratiquement classées dans le même groupe, avec des écarts insignifiants ; une coupure plus accentuée se manifestait après le vingt et unième rang.

Cette baisse des notes, par rapport aux années précédentes, dans la zone moyenne de la liste de classement, paraît accidentelle et tient, pour une bonne part, aux résultats de l'écrit, comme on l'a vu au début de ce rapport ; car les épreuves pratiques et orales sont finalement très comparables à celles des sessions antérieures. Le jury a largement tenu compte de ces faits pour établir ses propositions définitives, avec la préoccupation de maintenir le niveau du concours.

Indiquons, pour compléter les renseignements statistiques, que les moyennes générales, correspondant respectivement aux épreuves écrites, puis aux épreuves pratiques, puis aux épreuves orales, et enfin à l'ensemble des épreuves, sont :

pour les vingt et une reçues 9,13 — 8,25 — 12,10 — 10,54 ;
pour les onze admissibles non reçues 7,54 — 7,05 — 8,45 — 7,95

Ces moyennes, sauf pour l'écrit, sont tout à fait voisines, et même, parfois, légèrement supérieures aux moyennes correspondantes de 1953.

La promotion des vingt et une agrégées de 1954 comprend : sept élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, dont six sont classées parmi les sept premières et dont une est reçue à titre étranger ; trois auditrices à l'Ecole Normale Supérieure, dont l'une était professeur titulaire en congé ; quatre professeurs titulaires en exercice dans des lycées ou collèges pendant l'année scolaire 1953-1954 ; une élève de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ; une élève-professeur du Centre pédagogique régional de Poitiers, étudiante à la Faculté de Poitiers, et d'ailleurs reçue définitivement au Certificat d'aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S.) en 1954 ; cinq étudiantes, dont deux de la Faculté de Poitiers, une de la Faculté d'Alger, et deux ayant préparé l'agrégation à Paris. Parmi les nouvelles agrégées se trouvent huit candidates déjà admissibles à des concours antérieurs.

Le groupe des onze admissibles non reçues est formé par : une élève-professeur du Centre pédagogique régional de Bordeaux, d'ailleurs reçue définitivement au C.A.P.E.S. en 1954 ; une élève de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles ; trois élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, dont une avait été reçue au C.A.P.E.S. en 1953 et une autre venait d'être reçue au C.A.P.E.S. en 1954 ; trois professeurs titulaires en exercice, dont deux anciennes élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay ; deux étudiantes, l'une de la Faculté de Rennes, l'autre de la Faculté de Lyon ; une assistante à la Faculté des Sciences de Nancy. Dans ce groupe, l'un des professeurs titulaires, déjà admissible en 1953, obtenait par son nouveau succès à l'écrit, le titre de professeur bi-admissible, titre que possédait déjà depuis l'an dernier une autre des candidates non reçues, admissible cette année pour la troisième fois.

Selon la législation en vigueur depuis 1953, le jury a proposé l'attribution de l'équivalence complète du C.A.P.E.S. (nouveau régime) à deux des candidates admissibles non reçues, élèves, l'une de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, l'autre de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay. D'autre part, l'équivalence de la première partie (épreuves théoriques) du C.A.P.E.S. (nouveau régime), qui constitue en même temps le concours d'admission dans les Centres pédagogiques régionaux, a été accordée à une autre admissible, assistante à la Faculté des Sciences de Nancy, qui sera ainsi nommée élève-professeur dans un Centre régional pour l'année 1954-1955.

Il convient de rappeler que la liste des candidates reçues au concours d'admission dans les Centres pédagogiques régionaux (première partie du C.A.P.E.S.) en 1954, liste publiée avant la fin des épreuves de l'agrégation, comprenait, à des places très honorables (1^{re}, 2^e, 6^e et 9^e), les noms de quatre admissibles à l'agrégation (sans compter les élèves des Ecoles Normales Supérieures, qui font l'objet d'un classement spécial) : deux d'entre elles ont été reçues agrégées, les deux autres accompliront, en 1954-1955, leur année de stage comme élève-professeur dans un Centre régional.

Les liaisons entre l'agrégation et le C.A.P.E.S. ont continué à se préciser, cette année, dans un sens très favorable. Il est certain que la préparation, qui s'organise méthodiquement, de la première partie du Certificat d'aptitude peut constituer, pour de futures candidates à l'agrégation, une première étape fort appréciable, et susceptible de faciliter le travail ultérieur, notamment dans le domaine des Mathématiques Élémentaires ; ce qui ne veut pas dire qu'il n'est pas possible de mener de front la préparation des deux concours, pour des étudiants déjà titulaires d'un diplôme d'études supérieures. Et le stage d'une année dans un Centre pédagogique régional, dans une ville de Faculté, même s'il ne permet pas toujours de participer complète-

ment aux conférences et aux travaux prévus pour les candidats à l'agrégation, met l'élève-professeur dans d'excellentes conditions, tant au point de vue de la formation pédagogique que pour l'entretien et le développement de sa culture générale et de sa culture scientifique.

Il faut souhaiter que les prochaines années voient s'accroître le nombre de bonnes candidates à l'agrégation, aussi bien parmi les étudiantes, attirées par vocation vers l'enseignement, qui trouveront, soit dans les Ecoles Normales Supérieures, soit dans les Facultés et les Centres pédagogiques, des conditions de travail qui ne cessent de s'améliorer, que parmi les professeurs déjà entrés dans la carrière, et qui ont le légitime et fort louable désir de persévérer, d'aller plus loin. Que les unes et les autres sachent bien que le rude effort qu'elles sont ainsi appelées à fournir, et qu'il faudra peut-être renouveler à plusieurs reprises, est de toutes façons fructueux, même si le succès ne vient pas toujours le récompenser, car il apporte un enrichissement certain, moral et intellectuel, dont la valeur est inestimable pour qui a l'ambition d'élever et de guider les jeunes, en prenant une part active à leur formation.

J. DESFORGE,

*Inspecteur général de l'Instruction publique,
Vice-président du Jury.*

DEUXIÈME PARTIE

L'organisation de l'enseignement des Mathématiques en Belgique.

Nous limiterons notre propos à l'organisation de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires de l'Etat.

Précisons que les athénées et les lycées (1) royaux correspondent aux lycées français. Notons, cependant, deux différences : l'enseignement donné dans les athénées belges s'adresse normalement aux élèves de 12 à 18 ans ; il n'existe pas à proprement parler de classe de transition entre l'Enseignement Moyen et l'Enseignement Supérieur (ou universitaire).

Rappelons encore que l'Enseignement Moyen belge comprend deux cycles de trois ans. Dans les classes du premier cycle (élèves de 12 à 15 ans) le programme de mathématiques est le même, quelle que soit la section (moderne ou ancienne). Nous étudierons d'abord l'organisation de l'enseignement des mathématiques dans ces classes.

PREMIERE PARTIE

L'enseignement des mathématiques dans le cycle inférieur

A. RESUME DES PROGRAMMES

(Dans chacune des classes du cycle inférieur, il y a quatre heures hebdomadaires de cours de mathématiques).

I. ARITHMÉTIQUE.

Classe de Sixième

Les quatre opérations : revenir sur l'explication du mécanisme des opérations et en dégager les propriétés. Caractères de divisibilité. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Recherche du P.G.C.D. et du P.P.M.C. de deux ou de plusieurs

(1) En Belgique, les lycées sont les établissements d'enseignement moyen réservés aux jeunes filles.

nombre. Fractions ordinaires. Nombres décimaux. Système métrique. Problèmes empruntés à la vie pratique.

Classe de Cinquième

Egalités. Inégalités. Puissances d'un nombre. Fractions généralisées. Quotient approché de deux nombres à moins de une unité près et à moins d'une unité décimale près. Problèmes.

Classe de Quatrième

Rapports et proportions. Division des nombres entiers. Etude raisonnée du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun. Racines carrées. Problèmes. Partages proportionnels. Intérêt composé.

II. ALGÈBRE.

Classe de Cinquième

Problèmes conduisant à des équations numériques du premier degré. Calcul algébrique jusqu'à la division d'un polynôme par un monôme.

Classe de Quatrième

Calcul algébrique. Décomposition en facteurs. Equations du premier degré. Système d'équations linéaires. Problèmes. Radicaux d'indice deux. Notions de variable indépendante et de fonction introduites à partir de problèmes empruntés à la géométrie et à la physique. Représentations graphiques.

III. GÉOMÉTRIE.

Classe de Sixième

Géométrie intuitive : reproduction en vraie grandeur ou à une échelle donnée de figures géométriques concrètes (carrés, rectangles, parallélogrammes, losanges, triangles, circonférences, parallélogrammes, tétraèdres, cylindres, cônes, sphères, etc...).

Classe de Cinquième

En liaison avec le programme précédent, révision des notions théoriques acquises en Sixième. Cas d'égalité des triangles. Perpendiculaires et obliques. Droites parallèles. Somme des angles d'un triangle. Premières notions sur les lieux géométriques.

Classe de Quatrième

(L'enseignement de la géométrie, en Quatrième, a un caractère plus rationnel).

Le cercle. Longueurs proportionnelles. Similitude des triangles et des polygones. Rapports trigonométriques d'un angle aigu. Tables de valeurs naturelles. Résolution des triangles rectangles. Polygones réguliers (4, 8, 6, 3 côtés).

Notions de géométrie dans l'espace : plutôt une « géométrie des solides » qu'une étude rationnelle du début traditionnel de la géométrie dans l'espace.

B. CONSIDERATIONS GÉNÉRALES

Les programmes actuellement en vigueur ont été appliqués pour la première fois, dans les classes de Sixième, à partir de septembre 1948. Et si ces programmes sont loin d'avoir reçu une approbation unanime de la part des professeurs, ils n'en constituent pas moins un progrès sensible sur les précédents, ne fût-ce qu'en raison de la grande liberté qu'ils laissent aux professeurs.

En Sixième, on reprend les connaissances acquises à l'école primaire, on les classe, on les élargit. L'enseignement a un caractère intuitif. En arithmétique on calcule plutôt qu'on ne raisonne. En géométrie on construit, on dessine, on observe. Les idées se précisent graduellement en même temps que le langage.

La classe de Cinquième est devenue une classe de transition entre le concret et l'abstrait. Le calcul numérique va évoluer vers le calcul algébrique. En géométrie, la méthode déductive s'introduit progressivement. Et le professeur doit évidemment assurer la coordination entre les différentes branches des mathématiques, comme aussi entre les mathématiques et les autres branches.

Dans la classe de Quatrième, le cours de géométrie acquiert un caractère plus nettement rationnel, sans pour cela qu'il soit question de construire une géométrie basée sur un ensemble de postulats ou d'axiomes. Il ne s'agit nullement, par exemple, de démontrer l'unicité du point milieu d'un segment ou de la bissectrice d'un angle. On évite au contraire de démontrer ce qui apparaît évident à l'élève. Ce n'est qu'à partir de la Troisième que des préoccupations au sujet d'une axiomatique se font jour.

Ces considérations assez générales permettent d'affirmer que les programmes actuels sont d'une très grande souplesse et que le professeur est libre de les adapter à la fois à sa personnalité et au développement de ses élèves.

Je les considère même comme étant excellents. On leur a reproché — bien à tort à mon sens — d'avoir imposé des méthodes d'enseignement. A la vérité, les « directions méthodologiques » qui accompagnent les programmes officiels sont loin d'être impératives. Il y est bien dit que l'abstraction sera précédée de considérations concrètes qui lui serviront d'introduction, que le professeur évitera la méthode dogmatique, qu'on fera sortir l'élève de son rôle passif, etc... Qui ne pourrait être d'accord avec de tels procédés d'enseignement, d'ailleurs nullement précisés dans le détail d'application ?

Depuis six ans que ces programmes sont appliqués, on peut affirmer que les résultats sont excellents, qu'en géométrie surtout — grâce aux résultats extraordinaires des cours de géométrie intuitive — les progrès ont été remarquables.

CERTAINS RÉSULTATS DOIVENT ÊTRE MIS EN ÉVIDENCE

Les élèves ont d'abord été attirés vers une géométrie qui n'avait pas d'emblée l'aspect abstrait de la géométrie traditionnelle.

La liaison plan-espace a été aussi extraordinairement féconde.

Par exemple, la plupart de nos élèves ont été habitués dès la Sixième à tracer des segments de droites dans les faces opposées d'un parallélépipède et n'éprouvent pas la moindre difficulté, dans la suite, à l'étude des droites gauches. Ils savent qu'il est commode — et toujours possible — de les placer dans deux plans parallèles.

Nous continuons à penser, d'après notre propre expérience, que la géométrie des solides est la plus accessible au jeune élève et qu'elle doit être le point de départ de l'étude de la géométrie.

Qui ne voudra admettre que la notion de « plan illimité » est pour le jeune élève d'une difficulté plus grande que la notion de « portion de surface plane » (face des polyèdres étudiés en Sixième) ?

Enfin, nous sommes assez nombreux, en Belgique, à avoir exploité les ressources de la géométrie intuitive, à tous les degrés de l'enseignement.

Signalons, en passant, que le professeur Paul Libois, de l'Université de Bruxelles, organise chaque année une exposition de « modèles » réalisés par ses élèves de première année. (Voir, par exemple, dans le n° 2 de « Mathematica et Paedagogia », revue de la Société belge de professeurs de mathématiques, l'article de M. Libois, intitulé : Symétrie, thème de la dernière exposition organisée à l'Université de Bruxelles).

RESUME

Les programmes des trois premières années de l'Enseignement Moyen sont souples, bien coordonnés et gradués, pas trop copieux.

L'étude de quelques éléments de géométrie dans l'espace dans la classe de Quatrième est un heureux couronnement d'un premier cycle d'étude de la géométrie.

DEUXIEME PARTIE

L'enseignement des mathématiques dans le cycle supérieur

A. RESUME DES PROGRAMMES

Si le programme de mathématiques est le même dans les différentes sections du cycle inférieur, il n'en est pas ainsi dans le second cycle où il existe trois programmes distincts.

I. SECTION MODERNE SCIENTIFIQUE ET LATIN-MATHÉMATIQUES

(Sept heures de cours hebdomadaires dans les trois classes).

a) ARITHMÉTIQUE.

Le cours de *Troisième* comporte principalement la révision des théorèmes relatifs à la multiplication et la division, et l'étude de l'extraction de la racine carrée d'un nombre à moins de $1/n$ près.

En *Seconde*, on étudie les fractions décimales périodiques et on aborde l'étude élémentaire de la théorie des erreurs.

En *Première*, on revoit la théorie de la divisibilité du P.G.C.D. et du P.P.M.C., des nombres premiers entre eux et des nombres premiers (y compris le théorème de Fermat).

b) ALGÈBRE.

Le cours de *Troisième* comporte, en ordre principal, des notions sur les principes d'équivalence, la résolution des équations et des systèmes d'équations linéaires, l'étude de l'équation et du trinôme du second degré. Le programme se termine par l'étude des logarithmes vulgaires : progressions, logarithmes, intérêt composé, annuité, règle de calcul.

En *Seconde*, on reprend la résolution et la discussion des systèmes d'équations linéaires, précédée de l'étude des déterminants à 4 et à 9 éléments. Une autre partie du cours comprend des éléments d'analyse : fonctions, limites, continuité, dérivées, variation des fonctions et construction de courbes ayant une équation de la forme $y = f(x)$.

On réserve pour la classe de *Première* l'étude de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique, ainsi que celle des nombres complexes.

c) GÉOMÉTRIE.

La géométrie plane est revue en *Troisième* d'un point de vue plus rigoureux que dans le premier cycle. Certains professeurs estiment qu'il est indispensable, à ce moment, de faire le départ entre les données de l'expérience et les propriétés des êtres abstraits créés par le mathématicien, en énonçant les postulats qui sont à la base de la géométrie euclidienne. D'autres, au contraire, tout en s'attachant à donner des démonstrations aussi rigoureuses que possible des théorèmes revus, refusent de remonter jusqu'aux premiers postulats considérant qu'il n'est pas indispensable de tout recommencer.

Il n'en reste pas moins que la *Troisième* constitue un nouveau seuil dans l'enseignement de la géométrie, le premier seuil étant situé au niveau de la classe de Cinquième où la géométrie démontrée est abordée pour la première fois.

On aborde aussi, en *Troisième*, la géométrie dans l'espace en étudiant les positions relatives de la droite et du plan.

Le programme de *Seconde* comprend deux parties : la première se rapporte à la géométrie dans l'espace ; après l'étude de la géométrie des droites et des plans vient celle des polyèdres et des trois corps ronds, des trièdres et des triangles sphériques. L'étude des éléments de la trigonométrie sphérique est évidemment rattachée à celle

des triangles sphériques. Le calcul des aires et des volumes des solides traditionnels termine le cours de géométrie dans l'espace. On étudie aussi, en Seconde, les rapports anharmoniques, les rapports harmoniques et la théorie des pôles et des polaires par rapport à un cercle.

Notons encore que c'est dans cette classe que l'on commence l'étude de la *géométrie analytique* : la droite en axes cartésiens obliques, la circonférence et les coniques en axes rectangulaires. Certains professeurs auraient préféré que l'étude des propriétés affines des coniques (en axes obliques, bien entendu) eût précédé celle de la circonférence et des coniques en axes rectangulaires.

On commence aussi en Seconde la *géométrie descriptive* par la méthode de Monge : intersection de deux droites, d'un plan et d'une droite, de deux droites, de deux plans. Cette étude est évidemment faite parallèlement à celle de la géométrie dans l'espace.

Le programme de *Première* scientifique (qui correspond à la classe de Mathématiques des lycées français) comporte en ordre principal une étude importante de la géométrie analytique des coniques. Ce programme ne parle guère de l'étude des coniques d'un point de vue purement géométrique, et nos élèves sont en fait déconcertés par certaines questions relatives aux coniques proposées à la seconde partie du baccalauréat français. Par contre, nos élèves utilisent les procédés de la géométrie analytique avec une certaine virtuosité. Dans plusieurs athénées les élèves sont même entraînés au maniement des coordonnées ponctuelles et tangentielles (suivant les questions proposées) ainsi que des coordonnées polaires.

Soulignons ici le souci de l'inspection de donner aux professeurs de mathématiques des athénées et des lycées un maximum de liberté dans l'interprétation du programme, celui-ci constituant surtout un guide.

Le programme de *géométrie descriptive* de *Première* comprend les rabattements, les changements de plans de projection et les rotations. Ces notions sont notamment utilisées dans la détermination de la vraie grandeur de sections planes des polyèdres.

Enfin le cours de géométrie synthétique (que nous continuons à désigner par le vocable malheureux de « compléments de géométrie ») traite des cercles orthogonaux, des faisceaux de cercles et de la transformation des figures par homothétie et inversion. (Le professeur n'attend évidemment pas la classe de *Première* pour parler des transformations, et une première étude de l'homothétie est faite en *Troisième*, voire même en *Quatrième*).

d) TRIGONOMÉTRIE.

Une première étude de la trigonométrie a été faite en *Quatrième*, en liaison étroite avec le cours de géométrie. Cette étude est reprise et étendue en *Troisième* où les fonctions trigonométriques sont étudiées de façon plus détaillée.

Le cours comprend encore la résolution des triangles, l'usage des tables naturelles, l'étude des formules dites d'addition et de multiplication et l'usage des tables logarithmiques des fonctions trigonométriques. La résolution et la discussion d'équations et de systèmes d'équations trigonométriques terminent ce cours.

En *Seconde*, le cours précédent est revu et amplifié par des compléments qui comprennent, entre autres choses, l'étude des fonctions trigonométriques inverses. Quant aux éléments de trigonométrie sphérique, rappelons qu'ils sont étudiés dans le cadre du cours de géométrie. L'application de la trigonométrie à des problèmes de géométrie et de physique constitue d'ailleurs la partie la plus importante du cours de trigonométrie de *Seconde* scientifique.

II. SECTION LATIN-SCIENCES

(Cinq heures de cours hebdomadaires dans les trois classes).

a) ARITHMÉTIQUE.

En *Troisième*, le programme comprend l'étude de la racine carrée d'un nombre à moins de $1/n$ près et des notions élémentaires de la théorie des erreurs.

En *Seconde* le cours n'existe pas, tandis qu'en *Première* il comporte l'étude de la divisibilité, du P.G.C.D. et du P.P.M.C., des nombres premiers entre eux et des nombres premiers.

b) ALGÈBRE.

Le cours d'algèbre des classes de *Troisième* et de *Seconde* latin-sciences correspondent, à peu de choses près, aux programmes des classes parallèles de la section scientifique et de la section latin-mathématiques.

Le cours de *Première* latin-sciences se rapporte surtout à des éléments de calcul différentiel et intégral. Un tel cours n'existe pas en section scientifique. Il comprend principalement, après l'étude générale des fonctions et de quelques fonctions particulières, l'étude des dérivées et des différentielles (théorème des accroissements finis, formule de Taylor et de Mac-Laurin, quelques développements en série, etc...), l'étude des différents procédés d'intégration et des applications géométriques élémentaires du calcul intégral (calcul d'aires et de volumes, par exemple).

c) GÉOMÉTRIE.

En *Troisième*, on revoit et on complète l'étude de la géométrie plane. Le programme de cette classe est analogue à celui des classes de *Seconde* moderne des lycées français.

En *Seconde*, on étudie des éléments de géométrie dans l'espace. Le programme de cette classe est analogue à celui des classes de *Première* moderne des lycées français.

Le cours de *Première* comprend la révision du cours de *Seconde*, complétée par des calculs d'aires et de volumes. Dans cette classe on aborde aussi l'étude de la géométrie analytique des coniques : cette étude est cependant moins développée qu'en *Première* scientifique.

d) TRIGONOMÉTRIE.

Le cours de *Troisième* et de *Seconde* latin-sciences est quelque peu moins développé que celui des classes parallèles de scientifique et de latin-mathématiques.

III. SECTION LATIN-GREC ET SECTION ÉCONOMIQUE

(Trois heures hebdomadaires dans chacune des trois classes de ces sections).

Le programme de ces sections est moins étendu que les précédents. Il ne comprend, ni géométrie descriptive, ni géométrie analytique, ni trigonométrie sphérique, ni les éléments de calcul différentiel et intégral de la section latin-sciences.

Ce programme est d'ailleurs encore trop copieux. Je le verrais volontiers amputé du cours de géométrie de *Première*, par exemple, ce cours se réduisant actuellement au calcul des aires et des volumes de quelques solides. On pourrait, dans les conditions actuelles de l'organisation de l'Enseignement Moyen (organisation qui fait une part insuffisante aux disciplines scientifiques) réduire le cours de *Première* latin-grec à l'étude de l'algèbre (fonctions, limites, dérivées, quelques intégrales, avec interprétation géométrique de ces éléments de calcul différentiel et intégral).

a) ARITHMÉTIQUE.

En *Troisième*, on revoit la théorie du P.G.C.D. et des nombres premiers entre eux. On étudie aussi les nombres premiers et la décomposition des nombres en facteurs premiers.

En *Seconde* et en *Première*, il n'y a pas de cours d'arithmétique.

b) ALGÈBRE.

Le cours de *Troisième* comprend la révision du calcul algébrique, ainsi que la résolution des équations et des systèmes d'équations linéaires. On étudie aussi dans cette classe la fonction linéaire et on commence l'étude de l'équation du second degré.

En *Seconde*, on étudie surtout le second degré (équations et inéquations) et on fait une théorie élémentaire des logarithmes (progression, logarithmes décimaux, usage des tables, intérêt composé et annuités).

Le cours de *Première* comporte principalement l'étude des fonctions des limites et des dérivées, avec des applications à la géométrie et à la physique. Le cours se termine par la recherche des fonctions primitives de quelques fonctions simples avec les applications géométriques (calcul d'aires).

c) GÉOMÉTRIE.

Classe de *Troisième* : révision de la géométrie plane.

Classe de *Seconde* : début de la géométrie dans l'espace.

Classe de *Première* : calcul d'aires et de volumes (prismes, pyramides, cylindre, cône, solides dérivés de la sphère).

d) TRIGONOMÉTRIE.

En *Troisième*, le cours de trigonométrie est fait à l'occasion des leçons de géométrie plane sur les relations métriques dans le triangle.

En *Seconde*, on revoit le programme précédent et on étudie les variations des fonctions trigonométriques.

Le cours de *Première* complète l'étude précédente par la résolution d'équations trigonométriques et l'usage des tables de valeurs naturelles.

Remarque. — Le cours d'algèbre est complété, en *Première économique* seulement, par un cours d'algèbre financière (une heure hebdomadaire).

Notons que ce cours est facultatif.

B. CONSIDERATIONS GÉNÉRALES

Les travaux poursuivis dans différents pays sur « la connaissance de l'élève », sur les réactions de nos étudiants vis-à-vis de nos mathématiques traditionnelles et aussi — et surtout — vis-à-vis des mathématiques plus modernes, ne permettent pas encore d'envisager une nouvelle refonte générale des programmes. Mais la nécessité de tenir compte des possibilités des élèves, d'une part, des tendances des mathématiques contemporaines d'autre part, n'échappe à personne. Voici d'ailleurs quelques remarques sur les programmes actuels.

Les programmes des sections scientifiques et latin-mathématiques donnent satisfaction. Les professeurs de nos Facultés universitaires admettent généralement que ces programmes sont suffisants. Les Commissions de Réforme des programmes de l'Enseignement Moyen comprenaient d'ailleurs des représentants des quatre Universités belges et des Facultés polytechniques.

La section latin-sciences est de création récente. Il faudra attendre quelques années encore avant de porter un jugement sur la qualité de cette section, et, en particulier, sur l'efficacité du programme actuel de mathématiques. On peut dire déjà que le cours d'algèbre sera particulièrement fécond si la liaison avec les autres sciences fait l'objet des soucis constants du professeur.

En section latin-grec, au contraire, il semble bien que les programmes actuels de mathématiques ne satisfont personne : ni les élèves qui sont noyés dans une masse imposante de cours trop divers, ni les professeurs de l'Enseignement Moyen qui constatent l'inutilité quasi totale de leurs efforts, ni les professeurs des Universités qui se plaignent amèrement du manque de préparation des élèves de section latin-grec à suivre les cours de sciences des Facultés de sciences, de médecine et de pharmacie, etc...

Les élèves des classes supérieures des athénées ont d'ailleurs trop d'heures de cours (36 heures hebdomadaires) et trop de cours différents. C'est un problème qui a toute l'attention du Ministre actuel.

Il faudrait maintenant parler de la pénurie de professeurs de mathématiques (et aussi de physique, de chimie et de biologie) qui se fait cruellement sentir depuis quelques années. Nous manquons de mathématiciens, de physiciens, d'ingénieurs... *L'Enseignement secondaire va se trouver dans une situation inextricable pour le recrutement des professeurs de sciences.*

Dans la revue « Education » (novembre 1954, n° 30, Bruxelles), M. Marion Coulon, conseiller pédagogique au Ministère de l'Instruction publique, écrit ce qui suit :

« Plus grave encore, ou plus amère si vous voulez, la déclaration publique que M. Brunold, Directeur de l'Enseignement français du Seconde Degré, a déjà faite plusieurs fois devant nous, sur la façon dont nous continuons à orienter les enfants dans nos classes d'humanités. En bref, le chef de l'Enseignement secondaire français s'élève contre la dangereuse manie de ses concitoyens de pousser vers les études de lettres et de philosophie tout ce que les lycées comportent de bons éléments, pour les précipiter ensuite dans des Facultés universitaires dont la clientèle augmente en raison inverse de leurs débouchés. Ainsi, on voit telle agrégation de philosophie attirer vingt-cinq candidats de premier ordre pour une ou deux chaires à conférer, cependant qu'à côté des agrégations de physique et des chaires d'enseignement technique manquent régulièrement de titulaires. »

Il semblerait donc que le mal dont nous souffrons en Belgique soit partagé par nos amis français. Nous voudrions cependant attirer l'attention sur les chiffres suivants, extraits du rapport annuel du « Bureau de Statistiques Universitaires », 11, rue d'Egmont, à Bruxelles (rapport de 1953).

Nombre total d'étudiants inscrits dans les établissements d'Enseignement supérieur pendant l'année académique 1952-53 : 23.567.

Nombre d'étudiants inscrits dans les Facultés de sciences pendant l'année académique 1952-53 : 1.900, soit 8 % du nombre total d'étudiants inscrits.

Nombre total d'étudiants inscrits en première année dans les Universités belges pendant l'année académique 1952-53 : 5.053.

Nombre d'étudiants inscrits en première candidature en mathématiques pendant l'année académique 1952-53 : 152 (117 hommes et 35 femmes, soit 3 % du nombre d'étudiants inscrits en première candidature).

Nombre de diplômes légaux délivrés en 1952 par toutes les Universités : 3.896.

Nombre de diplômes d'agrégés pour l'enseignement des mathématiques délivrés en 1952 : 22 (13 hommes et 9 femmes, soit 0,56 % du nombre total de diplômes délivrés en 1952).

Ces chiffres sont, je crois, assez éloquentes. Ils se passent de commentaires.

Nous voudrions cependant signaler encore qu'à côté des 22 diplômés (régime flamand et régime français réunis) pour l'enseignement des mathématiques, nous trouvons 495 docteurs en droit diplômés pendant la même année.

« En réalité, nous ne serons bientôt plus, à ce compte, qu'un pauvre petit syndicat de clercs un peu fanés et qui prennent leur myopie pour un signe de distinction. » (Marion Coulon, *loc. cit.*).

L. JERONNEZ,

Secrétaire de la Société belge
de professeurs de mathématiques.

Sur l'orientation relative de deux Trièdres

Dans sa note « Sur l'orientation relative de deux trièdres », insérée dans le numéro de décembre 1954 de ce *Bulletin*, M. WEBER a montré ce que présentait de défectueux l'essai que j'avais tenté sur le même sujet dans le numéro de janvier 1954.

Je répondrai d'abord à la « petite question » qu'il me pose pour finir. Il a eu la

gentillesse de croire à une inadvertance de rédaction là où il y a lieu, me semble-t-il, de voir tout simplement un cercle vicieux.

J'avais conçu cet exposé comme prenant place dans un cadre général où il eût été précédé d'un rappel du déroulement axiomatique indiqué par M. CHOQUET dans sa conférence de 1953. Pour l'avoir détaché du cadre, je me trouve avoir fait : « ce qu'il ne faut pas faire ».

J'espère donc qu'un collègue, mieux avisé que moi, voudra bien nous donner une mise au point définitive de la question. Je crois qu'il lui faudra, après avoir mis en évidence les axiomes fondamentaux, et notamment celui qu'en géométrie plane M. CHOQUET appelle : l'axiome de pliage, d'où il déduit la définition de la symétrie par rapport à une droite, l'étendre à l'Espace et montrer comment, sans faire intervenir de considérations angulaires, on en déduit la définition d'une transformation II et ses propriétés. On sera sans doute amené à énoncer certains de ces théorèmes en en admettant les démonstrations, car on ne peut, faute de temps, tout refaire. Mais il sera nécessaire d'étudier avec soin les produits d'isométries. Et cette étude donnera réponse à toutes les autres questions posées par M. WEBER.

Qu'il me soit permis, après cette « auto-critique nécessaire », d'exprimer mon opinion sur ce qu'a dit dans le même numéro du *Bulletin* (p. 23) M. WEBER sur l'introduction des exposés axiomatiques dans l'Enseignement secondaire.

Si les recherches qui tendent à augmenter la rigueur des démonstrations sont à encourager, la liberté qui nous est laissée de nos méthodes pédagogiques ne nous autorise pas pour autant à en « essayer expérimentalement » les résultats dans nos classes. Cette liberté est, en effet, conçue dans le cadre du programme et celui-ci, dans son texte, est évidemment basé sur l'axiomatique traditionnelle. Celle-ci ne peut donc être modifiée, si cette possibilité de modification n'est pas incluse dans le programme; ce qui a été fait par exemple, à propos des coniques ou de la fonction logarithmique. Et il y a à cela une autre raison que celle indiquée par M. WEBER. Nos élèves, en effet, sont appelés à avoir différents maîtres successivement. Si chacun d'eux a son axiomatique personnelle, pour lui avoir fait parcourir successivement des routes diverses on risque de le rendre incapable d'en parcourir aucune.

Et quant à demander la modification du programme, encore faudrait-il être certain que ce qui serait proposé serait « meilleur » que ce qui existe : et ceci n'est pas encore acquis. Cela ne pourra l'être que lorsqu'un texte, imprimé noir sur blanc, formulé en *termes accessibles aux élèves* nous aura été proposé, qui rende possible une comparaison avec les textes actuels.

H. MIRABEL (*Saint-Louis*).

Réflexions, à propos de la mesure des grandeurs, sur l'entendement humain et l'entendement bourbakiste

Il faut remercier M. CARTAN pour l'article qu'il a bien voulu nous donner dans le *Bulletin* de décembre. Sur beaucoup d'entre nous, il aura produit un effet de choc.

Choc, d'abord, à découvrir que Bourbaki révolutionne la Grammaire aussi bien que la Mathématique : « ceci », pour désigner ce qui vient d'être dit (à savoir l'usage observé en Spéciales d'introduire les nombres réels par les coupures de Dedekind), ébranle le lecteur dès l'abord. Et c'est tout étourdi qu'il reçoit les coups suivants :

1° « Ceci, " donc ", prend beaucoup de temps et laisse les élèves assez indifférents. »

2° Ce n'est pas des coupures qu'on se sert dans les calculs numériques.

3° Ce n'est pas d'elles qu'on se sert, non plus, dans les développements ultérieurs de l'analyse mathématique.

Ayant repris nos sens, examinons ces trois points.

I

Mon cours doit ressembler à ceux de beaucoup de mes collègues. Je viens de m'assurer qu'en 136 lignes de 50 lettres (d'où le « il est immédiat » est aussi sévèrement proscrit que le « on verra sans difficulté »), il met le lecteur (1) en possession :

de la notion de coupure, *introduite* comme les nombres déjà connus (entiers et fractions), après démonstration de leur insuffisance, comme une *mesure* : c'est-à-dire, en définitive, comme un mode de détermination (par la classe des « points à gauche » et par celle des « points à droite ») d'un point de l'axe $x'Ox$;

d'une définition (par les images) et de critères (par les classes) de l'égalité et de l'inégalité ;

de la notion de borne supérieure d'un ensemble majoré (l'existence d'un « plus petit des majorants » étant, bien entendu, établie par constitution d'une coupure) ;

de la notion, conséquence de borne commune à deux ensembles adjacents (les éléments des deux ensembles n'étant plus nécessairement rationnels et la réunion ne s'étendant plus nécessairement à tout l'ensemble des nombres définis) ;

de l'idée, enfin, que la constitution d'ensembles adjacents sera le mode constant de définition d'un nombre dans les théories ultérieures.

136 lignes de 50 lettres : beaucoup de temps, c'est beaucoup dire.

Par contre, il est bien vrai que cet exposé, quand je le présente à mes élèves, les laisse « indifférents ». Il ne les arrache pas à leur humaine nature d'honnêtes bacheliers et de futurs techniciens. Ils y voient une modeste « mise en forme » de démarches qui leur sont familières. Nombre, mesure : cela va ensemble. Possibilité d'une précision ϵ arbitrairement petite (puisque c'est cela que signifie l'adjacence), ils sentent que cela va, avec une rassurante surabondance, avec la possibilité d'expériences de plus en plus précises : l'instrument, décidément, semble devoir être à la mesure de toute tâche qu'on lui demandera... J'avoue me demander s'ils auraient la même confiance dans des nombres dont l'application à la mesure des grandeurs reposerait sur ce théorème fondamental : « Il existe une application strictement croissante f de I dans R^+ , telle que $f(\omega) = 0$ et $f(x + y) = f(x) + f(y)$ chaque fois que x, y et $x + y$ sont dans I . » Du moins, je veux accorder à M. CARTAN que ce mode d'exposition ne les laisserait pas « indifférents » : je craindrais même une réaction si explosive que je me sens lâche à l'idée de l'affronter.

Et il est bien vrai, aussi, que j'ai admis la notion de fraction, et celle de gâteau coupé en quatre dont on prend trois parts. M. CARTAN, lui, tient à souligner qu'il épargne cet effort à son auditoire : il lui suffit de 300 lignes (de 70 lettres chacune), d'un ensemble à peine dénombrable de « on verra que », et des modestes notions d'isomorphisme, d'automorphisme, de nombres dyadiques, de groupes archimédiens... pour en arriver, tout juste, à suggérer le théorème fondamental énoncé ci-dessus, et dont on trouvera la démonstration au chapitre V du livre III de Bourbaki. Avouons que cette économie de moyens a quelque chose d'admirable.

II

Les 91 lignes suivantes de mon cours traitent des opérations sur les nombres définis par ensembles adjacents. A partir d'une définition très hérétiquement concrète de ces opérations, elles étendent (2) les « propriétés » (admises pour les nombres

(1) C'est du lecteur bachelier que je parle : je ne m'en connais point d'autre.

(2) Je ne voudrais pourtant pas laisser croire que, tout au long de leur enseignement, les attardés de ma sorte laissent subsister une confusion entre ce qui est empirisme et ce qui est déduction. Simplement, ils s'appliquent à éviter toute tromperie sur la qualité (ou l'origine) de la marchandise. Les « axiomes » étant issus de l'empirisme, ils les présentent

rationnels) dont Bourbaki fera des « axiomes » ; elles montrent qu'on obtient une valeur approchée par défaut de la somme (par exemple) en additionnant des valeurs approchées par défaut, et elles ajoutent qu'au prix d'une précision suffisante sur chaque terme, on assurera toute précision arbitrairement exigée sur le résultat : car la démonstration d'adjacence, pour les ensembles définissant le résultat de chaque opération, est immédiatement interprétée en termes de calculs d'erreur.

Il paraît que, ce faisant, nous sommes beaucoup trop loin (mille pardons à ceux de mes collègues que ce « nous » compromet !), nous sommes beaucoup trop loin, dis-je, du calcul numérique. Heureusement, M. CARTAN nous indique comment nous en rapprocher. Il nous suffira (foin des coupures et autres ensembles adjacents !) de faire reposer notre théorie des nombres réels sur le théorème suivant : « Tout groupe abélien ordonné G satisfaisant à (A_1) , (A_2) et (A_3) est isomorphe au groupe R des nombres dyadiques. »

J'ai prescrit à mes Taupins, à tout hasard, de joindre ce texte au mode d'emploi de leur table de Bouvard et Ratinet.

III

Enfin, il paraît que les coupures n'ont aucun rôle à jouer dans les développements ultérieurs de l'analyse mathématique. On aimerait, ici, quelques précisions sur l'exacte portée de cette condamnation.

Nous sommes nombreux à réserver le nom de coupure à une répartition de *tous* les nombres réels (rationnels d'abord, pour définir les irrationnels, et quelconques ensuite en deux classes telles que..., etc... et à employer le terme d'ensembles adjacents pour des ensembles *ne s'étendant plus à tous les nombres définis* (mais tels que l'un soit tout entier à gauche de l'autre et que leur écart soit nul). Mais M. VALIRON, et d'autres, nomment coupure ce que nous appelons ensembles adjacents. La condamnation de M. CARTAN porte-t-elle seulement sur ce que nous appelons coupures au sens strict ? Ou englobe-t-elle aussi nos ensembles adjacents, ou coupures selon M. VALIRON, ou « coupures généralisées » selon d'autres encore ?

Si M. CARTAN nous laisse ces « coupures généralisées », nous n'aurons point trop de peine à nous adapter, encore qu'une coupure dans l'ensemble de tous les nombres réels nous soit bien commode, par exemple, pour définir le rayon de convergence d'une série entière, et encore que, comme je l'ai dit, les « coupures strictes » soient un préalable bien commode aussi aux « coupures généralisées ».

Mais si celles-ci (comme je le crains, l'offensive ayant trop d'élan pour s'arrêter à de tels détails) nous sont également enlevées, que va-t-il nous rester ? Faute d'être autorisés à démontrer l'adjacence des S et des s de Darboux, nous faudra-t-il lire 19 tomes de Bourbaki avant de savoir comment, selon le New Look, il convient de définir l'intégrale de Riemann ?

Séries entières, intégrale définie... quels instruments plus importants avons-nous la charge d'introduire dans nos cours ?

**

Sire, le peuple murmure.

C'est entendu, ma hargne est excessive, obtuse, béotienne. Mais ce billet, Sire,

comme tels ; ils les extraient, comme ils en ont été extraits, d'une analyse de l'intuition empirique et *après* les avoir dégagés, ils disent : *désormais*, tout ne sera que déduction.

Je reproche à Bourbaki de commettre, dans son escamotage de la première tâche, une véritable dissimulation. Qu'on n'en soit pas dupe, entre gens *très* avertis, est une chose. C'en serait une autre, à laquelle je me refuse, que de faire de cette dissimulation la base de l'enseignement. Qu'on y prenne garde : les mathématiciens ne seraient pas longues à disparaître de nos programmes, et à bon droit, si nous nous appliquions nous-mêmes à les couper de toute attache avec l'univers commun.

Ce que j'interdis à Bourbaki, en somme, c'est de s'adresser à d'autres qu'à des mathématiciens *spécialisés* : les élèves de « Spéciales » n'en sont pas et ne peuvent en être.

s'est contraint à se faire plus grossier encore que son auteur. Car il voulait forcer votre attention, et la forcer à mesurer la profondeur d'un fossé qui est en train de devenir un abîme : celui qui vous sépare de votre peuple. Celui, plus précisément, que Bourbaki a creusé entre l'humanité et soi, et de part et d'autre duquel, les uns pour les autres, nous sommes devenus des Martiens.

Je ne voudrais pas, Sire, que mon impertinence vous dissimulât l'immense respect que je vous porte : c'est en vous disant ce respect que je suis sincère, et non en relevant une négligence de votre rédaction. Car je sais que vous avez été un très brillant Normalien. Et je sais que, depuis 30 ans que vous le fûtes, vous n'avez cessé d'aiguiser toujours davantage l'admirable instrument qu'est votre pensée.

Or nous sommes nombreux, dans votre peuple, à n'avoir été que des Normaliens très vulgaires, de très quelconques agrégés, ou moins encore. Depuis, nous n'avons fait que nous épaissir, toujours davantage, dans d'obscures besognes d'enseignement. Et nous y avons fait, pourtant, une importante découverte : celle que la plupart de nos élèves sont plus obtus encore que nous-mêmes.

Pour vous, Sire, dès qu'un mot a été défini, son sens est immédiatement clair, et ce mot est utilisable. Limpide est la phrase où se succèdent cinq ou six mots tels que groupe, isomorphisme, ou à plus forte raison, ces mots plus vulgaires que sont équivalents, implique, nécessaire, suffisant. Et limpide est le raisonnement qui tient en cinq ou six phrases de ce genre.

Mais savez-vous, Sire, qu'il faut de longs mois pour faire assimiler à un élève moyen le sens d'un seul mot sortant de sa langue courante ? Et ne m'objectez pas que notre effort est mal appliqué. Ne m'objectez pas que nous obtiendrions de meilleurs résultats en nous appliquant à enseigner, dès la base, au lieu de détails trop chargés d'opacité contingente, les mots-clés de votre construction de cristal. Car cette contingence, synonyme pour vous de confusion et de trouble, c'est, pour l'élève brut, la seule clarté. Où vous voyez trop nombreux axiomes, il voit, lui, donnée immédiate, directement appréhendée. Car l'instrument premier de sa pensée, à lui, n'est point l'axiome. Et nous ne l'aménons à la pensée logique, la sienne ne l'étant point de naissance, que par un patient effort.

Bien sûr, nous ne lui enseignons pas l'isomorphisme. Mais nos collègues du Secondaire n'ont guère d'autre soin que d'enseigner le mot « équivalent ». Savez-vous qu'ils n'y parviennent pas ? Savez-vous que rares sont les élèves de Spéciales pour qui ce mot évoque immédiatement l'idée de deux propositions (ou plutôt qui ne répugnent pas, sachant que ce mot est tyrannique, à l'employer) ?

Or, Sire, nous sommes des hommes, solidaires de l'humanité tout entière. Imiterons-nous Isidore Izou, assemblant des syllabes pour son solitaire et intransmissible plaisir ? Nous sommes quelques-uns à préférer Rimbaud et Valéry. Ou Cézanne, Ou Cauchy.

Pour qu'une lampe éclaire les veilles où vous épurez toujours davantage vos pensées (et où vous arriverez peut-être, un soir, à vous affranchir de l'axiome selon lequel l'ensemble des ensembles n'est pas vide), il faut bien que nous préparions des ingénieurs électriciens. Il nous faut bien, pour cela, leur enseigner des mathématiques intelligibles pour eux, et utilisables par eux. Laissez-nous donc, ces garçons, les prendre tels qu'ils sont. C'est un fait : il y a vingt ans qu'ils ont vu, pour la première fois, partager un gâteau. C'est pourquoi le partage du gâteau est pour eux une notion claire, sur laquelle nous pouvons bâtir. Laissez-nous, je vous en adjure, continuer comme nous le faisons. Réservez vos trésors, chaque année, aux deux ou trois plus brillants élèves de la promotion de l'Ecole Normale. Sinon, il risquerait d'être bien sombre et bien froid, aux approches de la fin des temps, l'amphithéâtre où le dernier Bourbakiste aurait survécu au dernier étudiant.

R. GUYON,

*professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée de Toulouse.*

La méthode axiomatique

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt — et de satisfaction — l'article « Les Mathématiques et la réalité extérieure », publié par M. M. WEBER, dans le numéro de décembre 1954 de ce *Bulletin*, aux pages 17-24.

Bien que, sur ce sujet, ma pensée puisse différer par certaines nuances de celle de M. WEBER, je suis d'accord avec lui sur l'ensemble.

Peut-être ne repousserais-je pas aussi complètement qu'il le fait, en apparence, l'emploi de la méthode axiomatique ? (Je dis en apparence, car il ne propose pas de supprimer la géométrie d'Euclide, qui était axiomatique, bien avant Hilbert). Mais je suis entièrement d'accord avec lui pour affirmer les risques et les dangers auxquels le recours à cette méthode expose *dans l'enseignement élémentaire*.

Comme le dit fort bien M. WEBER, l'emploi de cette méthode risque « de faire méconnaître aux élèves la véritable nature des mathématiques, à les couper de leur évolution historique, à laisser ignorer le rôle des mathématiciens créateurs. Conséquence plus grave encore, [elle] risque d'amener les élèves à se figurer naïvement que, par un jeu purement verbal, on puisse aboutir à des résultats utilisables, en rapport avec la réalité.

J'avais déjà énoncé des idées très voisines dans une petite note : « Sur les fondements de la géométrie et sur son enseignement », parue dans le numéro de septembre 1948 du présent *Bulletin*, aux pages 115 à 117. J'y disais en particulier : « C'est fausser dangereusement les esprits que de faire croire (ou laisser croire) qu'une théorie axiomatique se suffit à elle-même pour être applicable au monde réel. » On trouverait dans cette note quelques remarques qui pourraient compléter utilement l'article de M. WEBER. J'y montre en particulier que si l'on fait usage de la méthode axiomatique, on ne peut éliminer les risques et les dangers que, tout à fait indépendamment, nous avons signalés, M. WEBER et moi, qu'en lui associant les trois autres stades mentionnés dans ma note. On trouvera des indications plus complètes dans les textes des deux premières conférences reproduites dans mon ouvrage « La Mathématique et le concret » (1).

Maurice FRÉCHET,
professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Paris.

L'axiomatique, nos élèves et nous

Entre les mathématiques que nous enseignons dans nos classes et les livres destinés aux chercheurs comme les « *Éléments* », de Bourbaki, la distance est énorme. Mais, comme les mathématiciens modernes font, par l'axiomatique, un retour aux sources et invitent à une prise de conscience des structures à partir des plus simples, le professeur qui fait, en tant qu'élève, l'effort pour voir les faits habituels sous un jour nouveau, voit aussi sous un jour nouveau son enseignement. Ses habitudes étant mises à l'épreuve, il comprendra mieux les enfants qui n'ont pas nos habitudes.

Ce n'est pas un paradoxe que de rapprocher, comme nous allons tenter de le faire, des mots d'enfants et des citations de Bourbaki (prises surtout dans les introductions). On distinguera sans peine les deux sources !

L'ABSTRACTION EN ARITHMÉTIQUE.

Janot (4 ans, école maternelle) ne peut pas compter les pommes qu'il a dessinées « parce qu'il ne sait plus quelle est la quatrième ». Il n'est pas mûr pour l'axiomatique. Mais son voisin, qui se moque de lui, et lui dit : « Prends-les n'importe comment, ça revient au même », possède déjà les premiers axiomes.

A quel moment se détachent des objets, non seulement le nombre et les opérations, mais encore le raisonnement ?

(1) En cours d'impression, aux Presses Universitaires.

Bien jeune était le petit enfant de Fouché qui, invité à ôter 5 pommes de 12 pommes, ne pouvait pas le faire et finit par s'écrier : « Mais, enfin, qu'est-ce qu'on en a fait des 5 pommes ? » Mais c'est en classe de 6^e que notre collègue ARNAUDIÈS voulut expliquer le problème d'examen dont on se souvient peut-être, où un enfant et un vieillard parcouraient le périmètre d'un rectangle. Il proposa, pour arriver à la réponse demandée, de supposer que le vieillard a un frère jumeau qui part à la même heure que l'enfant, etc... Tous les élèves comprirent très bien, mais l'un d'eux s'écria : « Il fallait le savoir, qu'il avait un frère jumeau ! » Et la classe approuva.

Qu'est-ce qui compte et qu'est-ce qui ne compte pas dans un énoncé ? dans un raisonnement ? dans un texte mathématique ? A force de faire des problèmes de robinets ou de courriers, l'enfant finira par le soupçonner. Mais si nous le savons bien, nous pourrions peut-être (et même inconsciemment) l'aider. Ce qui compte, c'est la nature et les combinaisons des opérations à faire, c'est la structure du problème.

« Un même calcul algébrique peut servir à résoudre des problèmes portant sur des kilogrammes ou sur des francs, sur des paraboles ou sur des mouvements uniformément accélérés... Cette faculté de donner des contenus communs multiples aux mots et notions premières d'une théorie est une importante source d'enrichissement de l'intuition mathématique qui n'est pas nécessairement de nature spatiale ou sensible comme on le croit parfois, mais qui est plutôt une certaine connaissance du comportement des êtres mathématiques, aidée souvent par des images de nature très variée... La méthode permet, lorsqu'on a affaire à des êtres mathématiques complexes, d'en dissocier les propriétés et de les regrouper autour d'un petit nombre de notions, c'est-à-dire, de les classer suivant *les structures* auxquelles elles appartiennent. »

La reconnaissance de ces structures, que l'on peut étudier « en culture pure », suivant l'expression de J. Dieudonné, permet l'emploi d'un petit nombre de symboles suffisants. « La méthode axiomatique n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formulation est facile à concevoir. » On notera que l'auteur n'exige pas, et, du reste, n'emploie pas de textes formalisés, et la rédaction, les explications, subsistent entre les formules.

Ainsi, ce qui compte, c'est ce que nous pouvons exprimer par des symboles. Et quelle nouveauté pour l'enfant qui prend conscience qu'il peut travailler sur des symboles ! Dans une classe de 5^e, un problème concret, à données numériques, a été traduit par une équation. Pour la première fois, on résout l'équation. Un élève traduit son impression : « Oh ! Monsieur, c'est drôle de nager ainsi dans le vague ! » (Noté par R. CASSÉ).

LES OPÉRATIONS.

En arrivant en 6^e, les enfants savent faire le calcul que demande une opération. En 5^e, on les invite à réfléchir sur celles-ci pour prendre conscience de leur structure. Il n'y a aucune difficulté pour la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication. Il faut naturellement donner des exemples de non-commutativité : par exemple, pour faire une friture, il faut mettre l'huile avant le poisson ! Les formules, les deux mots qui symbolisent les notions nouvelles et les fixent dans la mémoire, sont très bien accueillis (même en 6^e avec l'ancien programme).

Mais ensuite vient une structure beaucoup plus compliquée : on mélange les deux opérations ; il faut voir les relations qu'elles ont entre elles. Commutativité ? Distributivité ? La difficulté commence, soulignée par les erreurs des élèves. Ne passons-nous pas trop vite ? Il s'agit, non plus de changer l'ordre des termes ou facteurs (c'est-à-dire des éléments de l'ensemble qui subit l'opération), mais de changer l'ordre des actions. Par exemple, les actions (ajouter 3), (multiplier par 2), ne sont pas commutatives, pas plus que les actions (mettre son manteau), (le boutonner), ou bien (mettre deux planches l'une sur l'autre), (placer un clou sur la planche), (taper sur le clou).

Quant à la distributivité, qui ne va qu'à sens unique, avons-nous essayé de la signaler par un bon symbolisme ? Quel signe nous crie à cet endroit : « Attention,

« tournant dangereux » ? Ce n'est pas un instituteur pour ses marmots, c'est Bourbaki qui, dans sa sollicitude pédagogique, a fait passer le signal, du bord de la grand'route aux marges de son livre ! Un symbole est utile s'il traduit nettement une idée nouvelle et sert, en somme, d'avertissement. Au lieu d'écrire, dans les petites classes $a.(b + c)$ et $a + b.c$ ou $a + (b.c)$, ne pourrait-on essayer, par exemple, d'exiger le crochet (boîte ouverte) pour contenir la somme, ce qui permet de faire la distribution, et de mettre le produit dans une boîte fermée avec le droit de supprimer la boîte si on colle les facteurs. Ainsi, le crochet signifierait « distributivité permise ».

Quant à la parenthèse, j'en propose la suppression dans les petites classes, parce que c'est un symbole complètement dévalué. On s'en rend compte (facilement) par un coup d'œil sur (certains) journaux (très) répandus. Les enfants ont, des parenthèses, une conception qu'il faut leur laisser le temps d'oublier : on ne détruit pas un symbolisme habituel par la terreur, mais par l'abandon (surtout s'il est vrai que l'école primaire n'est pas entièrement innocente ici).

Ce matin encore, une bonne élève de 4^e, trop consciencieuse et trop sincère, pour calculer $\overline{AM} = 3 \overline{AB} - 4 \overline{BC}$ dans le cas d'abscisses $a = 3$, $b = -4$, $c = -1$, m'a écrit textuellement $x(\overline{AM}) = (-21)(\overline{AB}) - (+12)(\overline{BC})$, ce qui exprime clairement une idée exacte. Je ne vois d'autre solution que l'interdiction provisoire du symbole () en mathématiques.

C'est le moment de placer une citation ! « Les formules du calcul algébrique ordinaire seraient un texte formalisé si l'on avait complètement codifié les règles gouvernant l'emploi des parenthèses et qu'on s'y conformât strictement, alors qu'en fait, certaines de ces règles ne s'apprennent guère qu'à l'usage, et que l'usage autorise à y faire certaines dérogations. »

Si Bourbaki trouve notre emploi des parenthèses peu net, est-il étonnant que les enfants fassent des confusions ?

LES RELATIONS.

Inutile de parler ici de la relation d'ordre. L'enfant n'y trouve aucune difficulté, et le signe $<$ est un excellent symbole immédiatement agréé. Les inégalités en cas-cades plaisent beaucoup aussi.

Mais je n'en dirais pas autant de la relation d'équivalence ! Et je serais presque tentée de jeter l'interdit sur le signe $=$ comme sur le signe de parenthèse ! Sans aller jusque-là, il faut se rendre compte de la signification qu'a ce signe pour l'enfant : il n'indique pas, pour lui, une relation d'équivalence, mais une action. Dans $3 + 5 = 8$, le 8 remplace les deux termes qui *disparaissent*, d'où l'écriture naturelle

$$3 + 5 = 8 + 2 = 10.$$

J'ai trouvé, cette année, dans un devoir de Mathématiques Élémentaires une division d'entiers écrite $a/b = q + r$ qui traduit « a divisé par b donne un quotient q avec un reste r ».

Le symbolisme ($=$) pour (donne) et ($+$) pour (avec), (en outre), est du reste continuellement utilisé par les élèves quand elles écrivent pour elles, en prenant des notes ou dans leurs brouillons. L'écriture abrégée $a/b \Rightarrow (q \ \& \ r)$ serait très acceptable.

Une relation d'équivalence n'indique pas une action ; elle est, si j'ose dire, statique. Mais nous en rencontrons tant d'exemples variés en arithmétique, algèbre et géométrie, que je crois mieux d'en réserver l'étude pour un autre article qui pourrait s'intituler : Les relations d'équivalence dans notre enseignement de la 6^e à la 3^e. Ce sera, en quelque sorte, l'exploitation pratique des notions introduites par M. CHOQUET dans sa conférence (*Bulletin*, octobre 1953).

LES FONCTIONS.

Nous introduisons sans difficulté les graphiques dès la 6^e et la fonction linéaire en 3^e. Je noterai seulement que les graphes sont construits d'une façon plus claire et plus logique dans les livres savants, en séparant les deux axes sans superposition des

origines. Cela éviterait toute confusion avec la géométrie analytique (voir les énoncés de B.E.P.C.). En cas de changement d'origine par la variable $x = X - a$, on ne serait pas obligé de changer l'axe des y ! et le graphe de $y = 0$ ne serait plus l'axe des x .

La création de la courbe représentative nous conduit à de nouvelles structures : « A côté des structures algébriques, interviennent des structures d'une autre sorte : celles où l'on donne un sens mathématique aux notions intuitives de limite, de continuité, de voisinage... Nous partons du concept physique d'approximation... » (Introduction à la *topologie*).

Finalement l'enfant aura connaissance des principales propriétés à partir desquelles on construit l'algèbre et l'analyse : le stade pré-axiomatique sera terminé. Il pourra concevoir la possibilité (même s'il n'est pas destiné à faire le travail) de construire les mathématiques sur une base axiomatique. Comme l'a dit M. CARTAN au début de sa conférence : « Une exposition basée sur les propriétés, c'est là l'axiomatique. Nous allons donc faire le bilan des propriétés que nous connaissons bien : il nous faudra, soit les prendre comme axiomes, soit les retrouver comme théorèmes. » Et dans les introductions de Bourbaki pour l'algèbre : « Bien entendu, les axiomes n'ont pas été choisis arbitrairement, mais ne sont autres que les propriétés appartenant à la plupart des lois de composition qui interviennent dans les applications, telles que l'associativité, la commutativité, etc... » Et, dans la topologie : « Le choix des axiomes est évidemment quelque peu arbitraire et historiquement a donné lieu à de longs tâtonnements. Le système d'axiomes auquel on s'est finalement arrêté couvre sensiblement les besoins actuels de l'analyse sans tomber dans une généralité excessive et sans objet. »

Ainsi, le choix des axiomes dépend de ce que l'on veut en faire. J'ouvre ici une parenthèse : on se montre parfois inquiet de la réapparition du suspect C.Q.F.D. accusé de souligner le dogmatisme. Mais c'est ici la justification même du bon choix des axiomes qui nous donnent ce dont nous avons besoin pour l'utilisation mathématique ou physique. Si, du point de vue logique, le choix des axiomes est arbitraire, soumis seulement à la non contradiction, au point de vue mathématique, la condition supplémentaire est que ce choix soit fécond et utilisable.

LA GÉOMÉTRIE.

L'exploration de l'espace commence avec les premiers gestes de l'enfant. Mais le champ des expériences physiques est complexe. Pour l'apprentissage des formes et du vocabulaire de base, après le jardin d'enfants, nous comptons (en France) sur quelques calculs de surface et volumes, sur les jeux, les travaux manuels, le dessin, la géographie, etc... Utilisons-nous bien la classe de 5^e ?

Période pré-axiomatique (4^e, 3^e). — 1) Aucune construction d'ensemble de la géométrie n'est possible tant que la formation logique est insuffisante. La théorie, au début de l'année surtout, ne peut exiger que deux ou trois pas logiques à partir des faits évidents que donnent les instruments choisis. En acceptant dès le début la règle (ou le pli) et le compas, je vois trois grands chapitres :

Le triangle ; médiatrice et cercle circonscrit ; bissectrices et cercles tangents.

Les parallèles, avec, rapidement, retour à la géométrie locale par l'outil parallélogramme.

L'angle inscrit : la circonférence intervient sans son centre ! En 3^e, la possibilité d'employer l'algèbre en géométrie est une révélation.

2) Outre l'acquisition de quelques résultats fondamentaux, nous pouvons déjà atteindre l'essentiel : la valeur d'un raisonnement et la généralité d'un énoncé. Je m'explique sur un exemple vécu.

Nous avons rencontré, en exercice sur les cas d'égalité, la figure formée d'un triangle avec une médiane prolongée. Mon but est de la reprendre pour la comparaison de l'angle extérieur et d'un angle intérieur. Je propose donc d'étudier d'abord les régions du plan découpées par trois droites, et nous les colorions. Puis nous construisons la médiane, voyons dans quelle région elle passe et achevons l'étude sur la figure (1). Est-ce fini ? Non, puisque lorsque je dessine la figure (2) (sans lettres ni couleurs) on ne sait trop ce qu'on peut dire des angles marqués (*).

J'amorce en prenant les craies : « Puis-je mettre les couleurs ? » Réaction presque immédiate : « Mais nous avions bien dit que les sept régions se retrouvent dans tous les triangles. » (C'est l'enfant qui a souligné de la voix). Je ne colore pas, j'attends la suite. Et j'admire, sans le montrer, d'entendre : « L'angle marqué deux traits peut être pris opposé par le sommet, alors on peut prendre la médiane partant du sommet de droite, ou du sommet du bas. » « Faut pas couper l'angle intérieur ! » et, en chœur : « La médiane du sommet du bas ! » (bis). Alors, sans craie, ni mots, par des gestes (à défaut d'autres symboles) nous refaisons la démonstration. Cette fois, nous concluons : Dans tout triangle chaque angle extérieur, etc... Nous avons atteint la classe des triangles.

Quelques semaines plus tard, nous démontrons la propriété : « Les bissectrices d'un parallélogramme forment un rectangle. » Puis je dessine un parallélogramme ridiculement long et plat. « Est-ce encore vrai ? » On a confiance maintenant : « Oui, c'est toujours vrai. » Mais le losange nous donne un démenti. Pourtant nous avions affirmé que toutes les propriétés du parallélogramme appartiennent au losange ! « Oh ! bien, le losange donne un rectangle nul, voilà tout ! » (Nous corrigeons : de dimensions nulles, réduit à un point).

Comparer la géométrie du parallélogramme à celle du losange qui a une exigence de plus, c'est de l'axiomatique. Et l'extension au concept de rectangle-point, nous la retrouverons (cercle-point, point à l'infini, nombre irrationnel...).

Période axiomatique. — Comme professeur de Mathématiques Élémentaires, j'estime que le programme actuel de 1^{re} fait perdre à peu près complètement la formation que l'on avait pu commencer à donner en Seconde. Il ne reste que des énoncés dans la mémoire. Une de mes élèves, assez boudeuse, m'a finalement demandé : « Mais enfin, Mademoiselle, qu'est-ce donc en géométrie qu'un couple de points ? On nous parlait de segments et de triangles ! »

Certains professeurs construisent leur cours de Seconde à partir de la métrique, par exemple, comme notre amie regrettée Mme FROMENT, de la symétrie par rapport à une droite. La géométrie affine apparaît comme une géométrie plus pauvre qu'on en extrait. D'autres professeurs partent de la géométrie affine : c'est plus simple, mais bien abstrait au départ, bien loin des instruments vraiment pratiques. Les observations et conclusions de ces expériences seraient bien intéressantes à connaître, et je me permets de les solliciter. J'ai trop peu d'expérience de cette classe pour en parler.

Quelle que soit la solution adoptée, cela ne peut nous gêner en Mathématiques Élémentaires, où il est normal de partir bien plus bas, puisque nous avons l'arithmétique, l'algèbre comme la géométrie à reprendre. Il nous faudra une axiomatique plus fine, bien qu'encore, naturellement, largement surabondante. La recherche d'une base axiomatique minimum et la comparaison des divers systèmes d'axiomes est évidemment du domaine des spécialistes dans l'Enseignement Supérieur.

Reculerons-nous devant l'idée qu'on pourrait peut-être rendre meilleur l'enseignement traditionnel ? « Voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité. » Les enseignants n'en diront-ils pas autant ?

L. FÉLIX, Lycée La Fontaine, Paris.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure très simple.

Deux notes sur l'emploi des symboles

I. Pour l'adoption du symbole $\forall$ en Mathématiques Élémentaires

Lorsqu'on introduit une notion importante très souvent utilisée par la suite, il est naturel de la signaler. Le bon symbole est celui qui est immédiatement adopté par les élèves, qui leur plaît et qui les protège contre les étourderies. Il en est ainsi du symbole $\forall$ qui se lit officiellement dans la théorie des ensembles « quel que soit » ou « pour tout ».

Ainsi, $ax + b = 0$ est une équation, mais $ax + b = 0 \forall x$ est une identité et équivaut à $a = 0, b = 0$.

De même si x et y sont les coordonnées d'un point M $ax + by = c$ exprime que le point est sur une droite ; mais $ax + by = c \forall M$ de D , exprime que M est le point courant, de la droite D , c'est donc l'équation de la droite.

Le symbole est surtout utile dans l'étude des transformations.

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ indique que $AMM'A'$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}, \forall M$ indique une translation.

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}, \forall M$ de (F) indique que la figure (F) subit une translation.

Nous lisons dans ce dernier cas, « M explorant toute la figure F », « M étant le point générique de (F) », tandis que A est un point quelconque choisi dans F .

Le signe d'appartenance (à l'imprimerie on met souvent un epsilon ϵ) permet d'écrire $\forall M, M \epsilon (F)$. Très bien accueilli aussi, ce signe me paraît moins indispensable, car il exprime une idée si simple qu'il n'y a pas de danger de confusion et nous pouvons conserver $\forall M$ de (F) si nous craignons d'augmenter le nombre des symboles.

II. Sur l'emploi du signe $\longrightarrow$

Les élèves, en prenant des notes ou en faisant leurs brouillons utilisent des symboles personnels. Plutôt que de les interdire tous, il est préférable de codifier les plus utilisés.

Mes élèves de Mathématiques Élémentaires employaient continuellement le signe $\longrightarrow$ pour indiquer, à peu près, *donc*, mais aussi bien *il faut que il suffit* ; c'était à peu près *donne, devient, est suivi de, cela fait, d'où la conclusion*, etc...

Nous avons convenu ce qui suit : le signe $\longrightarrow$ est réservé pour le sens officiel « tend vers » dans l'étude des limites. $y \longrightarrow b$ quand $x \longrightarrow a$.

La *déduction logique* « A entraîne B », « J'ai A , donc j'en déduis B » est traduite par $A \Longrightarrow B$.

L'*équivalence logique* $A \Longleftrightarrow B$.

[Une *relation d'équivalence* (pour éviter la confusion, M. CHATELET préfère la nommer *congruence*) est notée naturellement par les signes habituels $=, \equiv, \sim$ etc.].

Une fonction, une correspondance ponctuelle (c'est-à-dire une application) est notée dans les schémas par une *flèche courbe* qui se lit « a pour image » ou « devient »

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \\ x_0 \xrightarrow{\quad} y_0$$

$$(F) \xrightarrow{\mathcal{C}} (F') \\ \forall M, M \xrightarrow{\quad} M'$$

Tout ceci, naturellement, n'empêche pas d'interdire l'excès de symboles dans une rédaction soignée. C'est une question de tact. On accepte $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ mais

$$(F) \xrightarrow{\mathcal{C}} (F')$$

n'est pas recommandé par l'usage actuel.

En tout cas, il semble bien qu'un résumé, un schéma, par quelques symboles, en évoquant la pensée sans l'écran des mots, est un véritable soulagement.

L. FÉLIX.

Remarques pédagogiques sur l'arc capable en troisième et quatrième

Le programme de la classe de 3^e et même celui de la classe de 4^e moderne (enseignement court) portent : points d'où l'on voit un segment de droite sous un angle donné ; c'est ce que nous appelons l'arc capable.

Alors que l'étude de l'angle inscrit paraît assez aisée aux élèves, il nous semble que celle de l'arc capable leur paraît difficile et que même en Seconde elle leur donne encore du mal.

Ils sont déjà déroutés par le fait que la définition et le lieu sont confondus dans la plupart des manuels. Médiatrice, bissectrice, cercle, parallèle, ont une définition ; ensuite il est établi qu'ils sont des lieux. Nous croyons, après expérience faite sur des élèves de 4^e, qu'il est avantageux de définir l'arc capable dès le début du chapitre sur l'angle inscrit.

Etant donné un cercle, un point P de ce cercle, et deux cordes PA et PB, l'angle $\widehat{APB}$ s'appelle angle inscrit dans le cercle, l'arc $\widehat{APB}$ s'appelle arc capable de l'angle inscrit $\widehat{APB}$ et l'arc $\widehat{AB}$, qui ne porte pas le point P, s'appelle arc intercepté par l'an-

gle inscrit $\widehat{APB}$. Il nous semble nécessaire d'expliquer que capable signifie « qui contient », mais nous croyons qu'il faut se garder de reprendre l'ancien vocable « segment capable », qui était plus exact et plus clair, mais qui risque d'amener la confusion entre segment de cercle et segment de droite ; il est assez tôt de parler de segment de cercle avec le calcul des aires.

Si on juge préférable de définir isolément l'angle inscrit, on peut à la suite énoncer : les intersections des côtés de l'angle inscrit avec le cercle partagent celui-ci en deux arcs, l'arc capable, qui porte le sommet de l'angle inscrit et l'arc intercepté qui ne le porte pas.

Il est évident que nous écartons délibérément l'objection qui nous a été faite que l'arc capable ne se conçoit que pour une valeur d'angle, généralement α , dans les manuels, et non pour un angle déterminé $\widehat{APB}$, fixe.

Nos premiers exercices d'application sur le théorème de l'angle inscrit portent à la fois sur l'angle et les deux arcs ; ils sont d'abord numériques, puis littéraux si les élèves sont assez avancés en algèbre. Exemples : un angle inscrit valant 70° (ou α°) calculer l'arc intercepté et l'arc capable ; un arc capable mesurant $\frac{3}{4}$ de cercle (ou k°) calculer l'angle inscrit.

Quand les théorèmes sur l'angle inscrit, l'angle intérieur, l'angle extérieur et la définition de l'arc capable, comme nous l'avons envisagée, sont bien assimilés par nos élèves, nous traitons dans une leçon nettement distincte, le lieu géométrique appelé arc capable, comme nous avons traité dans des leçons nettement délimitées les lieux géométriques appelés médiatrice ou bissectrice.

Le plan de la leçon est simple : théorème direct, déjà étudié en tant que corollaire du théorème de l'angle inscrit ; théorème contraire, formé de la réunion des deux théorèmes sur l'angle intérieur et l'angle extérieur ; régions déterminées par le lieu. Nous ne croyons pas indispensable, ni même utile, de faire remarquer que nous avons utilisé le théorème contraire, alors que pour les lieux précédemment étudiés nous avons utilisé le théorème réciproque ; nous pensons que cette remarque peut être faite avec plus de profit en Seconde, mais il nous est arrivé que des élèves l'ont faite pour nous.

L'énoncé du résultat principal de la leçon, auquel invite le texte officiel, est : le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment de droite sous un angle donné est l'arc capable de cet angle construit sur ce segment. Nous lui préférons : le lieu géométrique du sommet des angles de grandeur donnée (ou constante) dont les côtés

passent chacun par un point fixe est l'arc capable de cet angle ayant pour extrémités les deux points fixes. Notre préférence ne vient pas de l'élimination des mots « voir » et « sous » qui sont à expliquer, mais de ce que le segment de droite en question n'est apparu dans aucune de nos démonstrations, qu'il manque souvent dans les figures relatives aux problèmes proposés et qu'enfin il est facile de faire comprendre aux élèves que si le point dont on cherche le lieu est le sommet d'un angle constant, il reste à chercher si ses côtés passent chacun par un point fixe.

Le dernier point à envisager est la construction de l'arc capable. Pour les élèves elle est bien plus difficile que toutes celles qu'ils ont déjà rencontrées dans le cours. Nous sommes d'avis de la laisser à l'écart, pour la reprendre à part, règle et compas en mains.

L. GUÉNOT, *Collège Colbert, Paris.*

Bibliographie

A. MONJALLON : *Introduction à la méthode statistique*. Un vol. 16×25 de 280 p. avec tables. Paris, Vuibert (1954), 63, boulevard Saint-Germain, Paris (5^e). Prix : 2.000 francs.

La statistique commence à faire partie de l'enseignement élémentaire dans de nombreux pays étrangers. En France, l'Enseignement technique procède à une expérience en incorporant cette matière au programme de la section « Technique économique ». Les livres français d'initiation à cette matière sont assez rares. La parution de l'ouvrage de M. MONJALLON semble donc un événement heureux. Nous avons glané dans la presse française et étrangère quelques-unes des appréciations émises au sujet de ce livre, les voici :

« Excellente initiation, rédigée sous une forme accessible... L'ensemble est des plus éducatifs. » G. BOULIGAND, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, sept.-oct. 1954.

« M. MONJALLON, le premier en France (à ma connaissance), vient d'étudier les méthodes de la statistique... Notre collègue a su rester simple et éviter l'écueil des mathématiques trop élevées...

« Le livre de notre collègue s'adresse aux candidats aux Baccalauréats techniques et aux candidats à l'expertise comptable, mais il intéressera d'autres lecteurs : professeurs de mathématiques, de géographie et même de philosophie (pourquoi pas ?). » S. MINOIS, *L'Agrégation*, octobre 1954 et *Les Humanités scientifiques*, janvier 1955.

« L'auteur n'insiste pas sur les preuves théoriques... mais il amène progressivement à une compréhension nette des concepts et des méthodes fondamentales, sur des exemples choisis avec discernement.

« Le chapitre sur la théorie des probabilités et les principales lois statistiques est remarquable.

« Il mérite l'attention de quiconque veut acquérir un fonds solide de notions sur une discipline dont l'importance croît dans la vie. » H. DOPP, *Revue des questions scientifiques*, octobre 1954.

« Destiné à l'initiation d'un public sans formation mathématique spéciale, l'ouvrage sera lu avec fruit... Les notions fondamentales et leur mise en œuvre sont exposées de façon très claire.

« On doit regretter l'absence de toute bibliographie... Quoi qu'il en soit, le mérite du livre n'est pas douteux. Les exposés d'ensemble, même et surtout élémentaires, n'abondent pas en langue française. Celui de A. MONJALLON vient à point. » P. WISER, *Mathésis*, t. LXIII (1954), fasc. 6, 7, 8.

« Ce livre, d'une lecture agréable et aisée — l'appareil mathématique y est réduit au minimum nécessaire à la compréhension — s'adresse à tous ceux qui désirent acquérir des notions simples et précises permettant la lecture d'ouvrages plus spécialisés.

« En un mot, ce livre est recommandable tant par sa simplicité que par l'abondance des exemples concrets illustrant chacun des concepts développés. » L. D., *L'Athénée*, n° 4, sept.-oct. 1954.

« Dans son *Introduction à la méthode statistique*, A. MONJALLON présente, sous une forme à la fois simple et complète, les éléments de cette méthode de connaissance...

« Ce livre, de lecture facile, s'adresse à tous ceux qui désirent acquérir des notions simples sur une méthode de connaissance qui gagne sans cesse en importance. » *Bulletin technique de la Suisse Romande*, Lausanne, 2-10-1954.

« Cet ouvrage s'adresse à l'Enseignement technique et reprend les leçons de l'auteur au Conservatoire des Arts et Métiers. Il a pour but l'initiation des futurs experts-comptables. Les lecteurs pourront y trouver un instrument sûr, pour l'étude des éléments de base de l'analyse statistique, par contre le but même de l'ouvrage les privera de celle des grands systèmes prévisionnels que les économistes modernes ont élaboré... » J.-M. A., *Economie et Humanisme*, 11-12-1954.

« Ce livre, qui reproduit les leçons données par l'auteur à l'Institut national des techniques économiques et comptables, rattaché au Conservatoire des Arts et Métiers, constitue une excellente introduction aux méthodes statistiques. Chacun des concepts et chacune des méthodes étudiées sont illustrés par des exemples concrets qui en permettront la lecture à un large public. » H. CHAMBRE, *Revue de l'Action populaire*, janvier 1955.

« In tal modo questo libro si rivolge soprattutto agli studenti di ragioneria e pertanto ad un pubblico più vasto, a tutti coloro cioè, che per il loro mestiere, hanno bisogno di primi rudimenti, espressi in forma chiara e precisa, di questa disciplina, la statistica, che tanta parte ha nel mondo moderno... » *Bollettino internazionale delle opere scientifiche*, n° 4, 1954.

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors. Imp. A. Coueslant (personnel intéressé). 87.285 — 1955
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : 1-1955

MASSON & C^{ie}, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

— COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE —

Nouveauté :

Nouveauté :

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Classes de 2^e A et B

par

E. GILET

Censeur des Etudes du Lycée J.-B. Say

Un volume (13,5×20) de XXIV-208 p., avec figures et problèmes,
broché.. ..

Octobre 54

DELAGRAVE

Premier cycle du second degré

UN ENSEMBLE CONTINU ET COHÉRENT :

Classe de sixième ARITHMETIQUE **Edition 1954** (+ Corrigé) BRACHET et DUMARQUE

Classes de 5^e, 4^e et 3^e — BRACHET et DUMARQUE

ARITH. & ALGÈBRE **Edition 1954**

Un seul volume pour les trois classes

G É O M É T R I E **Edition 1954**

Un seul volume pour les trois classes

Cette **unité** de chaque cours donne plus de **cohésion** à l'enseignement des mathématiques, lequel exige une parfaite **continuité**. Tous les retours en arrière, toutes les révisions sont possibles. Ainsi les lacunes sont plus facilement comblées et les retards rattrapés.

1.000 PROBLÈMES RÉSOLUS

Corrigé de l'ouvrage ci-dessus

Supplément 3^e, pour Moderne Court

600 PROBLÈMES RÉSOLUS

Corrigé de l'ouvrage ci-dessus

Supplément 3^e, pour Moderne Court

Tables trigonométriques naturelles et tables numériques usuelles

Maniement rapide : dépliant à trois volets sur papier fort.

**LE PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C.
et au concours d'entrée des Ecoles normales**

par Marcel BOMPARD, Professeur à l'Ecole Normale d'Instituteurs de Paris

Catalogue et spécimens sur demande : 15, rue Soufflot — PARIS (5^e)

LIBRAIRIE VUIBERT, 63, Boulevard St-Germain, PARIS 5^e

Vient de paraître :

Vient de paraître :

**INTRODUCTION
A LA
MÉTHODE STATISTIQUE**

par Albert MONJALLON

*Agrégé de l'Université, Professeur au lycée
Saint-Louis et à l'Institut national des
Techniques économiques et comptables du
Conservatoire national des Arts et Métiers.*

Volume 25 x 16, de 280 pages, avec 99 figures..... **2.000 fr.**

Sous presse :

Sous presse :

**HISTOIRE ABRÉGÉE
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES**

par Maurice d'OCAGNE

*Membre de l'Institut. Ouvrage recueilli et
achevé par René DUGAS, maître de
conférences à l'Ecole polytechnique.*

Volume 25 x 16 de 408 pages *sous presse*

**PARMI LES BELLES FIGURES
DE LA
GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE**

(Géométrie du Tétraèdre)

par Victor THÉBAULT

Volume 25 x 16, de XVI-288 pages..... *sous presse*

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

V. LESPINARD et R. PERNET

NOUVEAUTÉ :

LESPINARD et PERNET. — Mathématiques, classe de SECONDE C.M.

Algèbre : 1 volume. Br. : 395 f. ; cart. : 495 f.

Géométrie : 1 volume. Br. : 565 f. ; cart. : 685 f.

LESPINARD et PERNET. — Mathématiques, classe de SECONDE A.B.

Algèbre et géométrie : 1 volume. Br. : 525 f. ; cart. : 645 f.

L'introduction des éléments orientés (vecteurs, angles) a été faite avec tout le soin nécessaire. Un plan nouveau du cours permet de rénover de nombreux exercices classiques.

SPECIMEN GRATUIT SUR DEMANDE

Tous les ouvrages de la collection, rédigés avec clarté et précision, facilitent la tâche des Professeurs par le grand nombre d'exercices classés par ordre de difficulté et rattachés aux différents paragraphes du cours.

L'ouvrage de Troisième, surtout celui destiné au Cours Complémentaire permet une excellente préparation aux examens : B.E.P.C., E.N., etc...

PREMIER CYCLE :

Lycées et Collèges

Classe de 6^e, 1 vol. Br. : 235 f., cart. : 330 f.

— 5^e, 1 vol. Br. : 300 f., cart. : 380 f.

— 4^e, 1 vol. Br. : 420 f., cart. : 520 f.

— 3^e, 1 vol. Br. : 450 f., cart. : 550 f.

Cours complémentaires (cours complet)

Classe de 6^e, 1 vol., cart. : 350 f.

— 5^e, 1 vol., cart. : 440 f.

— 4^e, 1 vol., cart. : 550 f.

— 3^e, 1 vol., cart. : 570 f.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique, Cosmographie).

Tout le programme se trouve réuni en un volume qui donne aux élèves des méthodes pratiques ; les questions sont traitées avec le maximum de simplicité, sans toutefois sacrifier l'essentiel de l'esprit mathématique Br. : 845 f., cart. : 945 f.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE Br. : 340 f., cart. : 445 f.

Classe de MATHÉMATIQUES :

COURS COMPLET

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE Br. : 690 f., cart. : 790 f.

» — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE Br. : 275 f.

» — ARITHMETIQUE Br. : 285 f.

» — MECANIQUE Br. : 245 f., cart. : 335 f.

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE, ... Br. : 330 f., cart. : 425 f.

LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE Br. : 595 f., cart. : 695 f.

» — TRIGONOMETRIE Br. : 375 f., cart. : 470 f.

» — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
2^e partie, classe de Mathématiques 335 f.

Classe de Première C. et M.

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
1^{re} partie, séries C. et M. 280 f.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

Programmes du 18 avril 1947
Tarif juin 1954

Arithmétique 6°	220	»
Dessin Géométrique 6° et 5°	125	»
Géométrie 5° et 4°	375	»
Arithmétique 5°	295	»
Arithmétique et Algèbre 4°	300	»
Arithmétique et Algèbre 3°	350	»
Géométrie 3°	295	»
Compléments d'Algèbre et de Géométrie Géométrie 3° Moderne court	100	»
Algèbre 2° A.B.C.M.	500	»
Géométrie 2° A.B.C.M.	465	»
Algèbre 1° A.B.	180	»
Algèbre et Trigonométrie 1° C.M.	550	»
Géométrie 1° A.B.C.M.	440	»
Questions de Cours de Mathématiques du Baccalauréat, 1° partie, A.B.C.M.	390	»
Géométrie 5°, 4°, 3° (pour les Lycées, Col- lèges et Cours Complémentaires), car- tonné	800	»

Nouveauté :

Les Mathématiques au B.E.P.C. (parution novembre)

Roland MAILLARD

Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Charlemagne
Chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

et

Albert MILLET

Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second degré

Classe de Sixième. *Un volume. + Corrigés.*

Classe de Cinquième. *Un volume. + Corrigés.*

Classe de Quatrième. *Un volume. + Corrigés.*

Classe de Troisième (Nouvelle édition). *Un volume. + Corrigés.*

Classes de Seconde Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Seconde Classique C et Moderne :

Algèbre. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume. + Corrigés.*

Classes de Première Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Première Classique C et Moderne :

Algèbre et Trigonométrie. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume. + Corrigés.*

★ **Classe de Sciences expérimentales.** *Un volume.*

Classes de Philosophie et Sciences expérimentales :

Cosmographie. *Un volume.*

★ **Classe de Philosophie :**

Trigonométrie et Algèbre. *Un volume.*

★ **Mathématiques (Trigonométrie, Algèbre et Cosmographie).**
Un volume.

Classe de Mathématiques :

Algèbre. *Un volume.*

Géométrie descriptive.

★ **Arithmétique.** *Un volume.*

Un volume.

Cosmographie. *Un vol.*

Trigonométrie. *Un vol.*

Géométrie. *Un volume.*

★ **Mécanique (en préparat.)**

Classe de Mathématiques (Technique) :

★ **Algèbre (en préparation).**

Géométrie. *Un volume.*

Trigonométrie. *Un volume.*

Cours Complémentaires

★ **Classe de Sixième.** *Un volume.*

★ **Classe de Cinquième.** *Un volume.*

★ **Classe de Quatrième.** *Un volume.*

★ **Classe de Troisième (en préparation).**

+ Les **Corrigés**, hors commerce, sont exclusivement réservés
à MM. les Professeurs de Mathématiques.

★ **NOUVEAUTÉS.**

