

L'approximation dans le calcul logarithmique

La table à cinq décimales, mise entre les mains des élèves, est un *instrument de calcul pratique* (donnant des *valeurs approchées*), et il serait regrettable de l'utiliser sans se soucier de l'erreur commise par cet instrument. Les manuels sont généralement muets sur ce point.

1) ENCADREMENT FONDAMENTAL. — D'abord, l'erreur due à « l'instrument » est bien connue : la partie décimale (mantisse) écrite dans la table est approchée à 0,5 en plus ou en moins sur son dernier chiffre. Si, par exemple, on lit dans la table 30 103, en face du nombre 2, c'est que l'on a :

$$0,30\ 102,5 < \log 2 < 0,30\ 103,5.$$

(Je place une seconde virgule après le 5^e chiffre de la mantisse, car toutes les évaluations d'erreur se font sur ce 5^e chiffre. Cette écriture n'entraîne aucune ambiguïté).

On peut, au lieu de la double inégalité, utiliser la valeur moyenne des deux bornes, en écrivant conventionnellement :

$$\log 2 = 0,30103 \pm 0,5$$

(il est entendu que 0,5 se rapporte au 5^e chiffre de la mantisse).

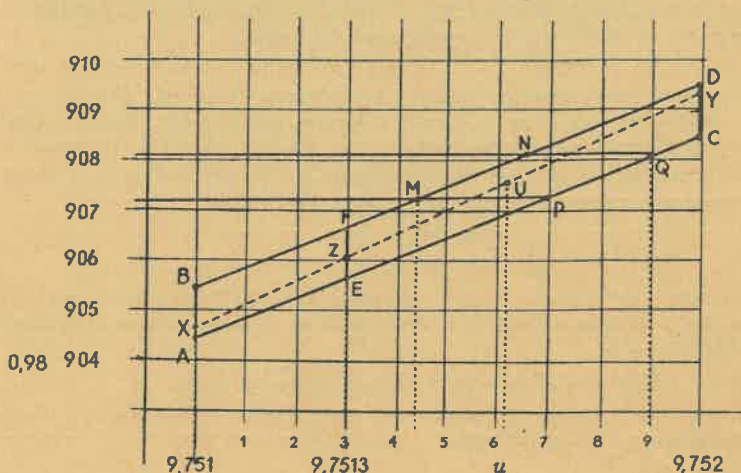
2) OPÉRATIONS. — En utilisant l'encadrement fondamental, on obtient facilement les résultats suivants :

a) La prise du cologarithme n'introduit aucune erreur.

b) Dans l'addition des logarithmes, les erreurs s'accroissent par addition.

c) En multipliant ou en divisant un log par un entier, l'erreur est multipliée ou divisée par cet entier. (Pour abrégé, je dis « erreur » pour différence entre la valeur moyenne et les bornes de l'encadrement).

Mais dans le cas de la division, les quotients peuvent ne pas être exacts. S'il ne s'agit que des erreurs, on peut les « forcer » par excès au plus près ; s'il s'agit de la mantisse elle-même, il faut ajouter l'erreur commise en prenant sa valeur approchée. C'est donc en utilisant l'encadrement fondamental (où la valeur moyenne ne figure pas) que l'on obtient toujours l'approximation la plus serrée.



3) IMAGE GRAPHIQUE. — La fonction $\log x$ ne figure qu'au programme de Sciences Expérimentales. Je crois qu'on peut sans remords affirmer en Mathématiques Élémentaires qu'une telle fonction existe (pourvu que x soit positif), qu'elle est monotone (croissante) et qu'elle se représente par une ligne, comme toutes les fonctions « honnêtes » étudiées dans le cours.

Pour faciliter le langage, j'appellerai *horizontale* la direction de l'axe des nombres, et *verticale* celle de l'axe des log. Pour que le graphique soit lisible, l'unité verticale sera plus grande que l'unité horizontale ; les valeurs seront portées sur des parallèles aux axes situées dans le voisinage de l'arc de courbe que l'on étudie.

Considérons l'encadrement :

$$0,98\ 904,5 < \log 9,751 < 0,98\ 905,5.$$

Soit A le point représentatif de la borne inférieure et B celui de la borne supérieure. Le point X représentatif de $\log 9,751$ est situé quelque part sur le segment AB.

Passons au nombre voisin de la table :

$$0,98\ 908,4 < \log 9,752 < 0,98\ 909,5.$$

Soient C et D les points représentatifs du 1^{er} et du 3^e membre, et Y celui de $\log 9,752$ (Y quelque part sur CD).

L'arc de courbe qui représente les logarithmes de tous les nombres situés entre 9,751 et 9,752 est très tendu, et *peut être confondu avec le segment XY* (on peut démontrer que l'erreur commise en remplaçant l'arc par sa corde ne porte que sur le 8^e chiffre décimal ; elle est donc complètement négligeable).

La conséquence importante est que le *log vrai* (pour un nombre situé entre 9,751 et 9,752) est toujours enfermé dans le parallélogramme ABCD. La différence d'ordonnées entre C et A (ainsi qu'entre D et B) est la différence tabulaire.

4) CALCUL DES PARTS PROPORTIONNELLES. — Soit à calculer $\log 9,7513$. Le principe du calcul consiste à augmenter $\log 9,751$ des $3/10$ de la différence entre $\log 9,752$ et $\log 9,751$. Cette différence n'est pas connue ; on lui substitue la différence tabulaire, mais dans le cas le plus défavorable, l'erreur commise peut s'approcher de $0,5 \times 2 = 1$. Il est donc important d'examiner cette question de près.

Soit Z l'image graphique de $\log 9,7513$. La verticale de Z rencontre AC en E et BD en F. Le point Z est quelque part sur EF.

Or, pour les points E et F, le calcul par les parts proportionnelles est *exact*. L'ordonnée de E, par exemple, est exactement celle de A augmentée des $3/10$ de la différence tabulaire (égale à la différence des ordonnées de C et A). *Donc, en faisant le calcul des parties proportionnelles sur les bornes de l'encadrement fondamental, on n'introduit aucune erreur et le nouvel encadrement obtenu est correct.*

Dans l'exemple choisi, la différence tabulaire est 4 ; on a $4 \times 0,3 = 1,2$. On obtient donc :

$$0,98\ 904,5 - 1,2 < \log 9,7513 < 0,98\ 905,5 + 1,2).$$

(Les bornes de cet encadrement sont les ordonnées de E et F).

5) RETOUR AU NOMBRE. — Supposons que l'on ait obtenu :

$$0,98\ 907,2 < \log u < 0,98\ 908,1.$$

L'horizontale de la borne inférieure coupe BD en M et AC en N ; l'horizontale de la borne supérieure coupe BD en N et AC en Q. Le point U représentatif de $\log u$ est quelque part dans le parallélogramme MNQP. La valeur approchée par défaut de u sera l'abscisse de M, sa valeur approchée par excès sera l'abscisse de Q. On en déduit la règle suivante :

La borne inférieure de u est le nombre tel que son logarithme par excès soit inférieurement le plus près de la borne inférieure de $\log u$.

La borne supérieure de u est le nombre tel que son logarithme par défaut soit supérieurement le plus près de la borne supérieure de $\log u$.

Appliquons cette règle. Dans la table, la mantisse immédiatement inférieure à 98 907,2 est 98 905, dont la borne supérieure est 98 905,5 (ordonnée de B). La différence est donc 1,7. La différence tabulaire est 4, et l'on a sous les yeux le tableau des parts proportionnelles ; on voit immédiatement que la différence 1,7 correspond à la part 4, à placer après le dernier chiffre significatif du nombre. On a donc :

$$9,7514 < u.$$

Cherchons maintenant l'abscisse de Q. La mantisse immédiatement inférieure à 98 908,1 est encore 98 905, dont la borne supérieure est 98 905,5, la différence est donc 3,6. Toujours dans la « table 4 », on voit que 3,6 correspond à la part 9, à placer après le dernier chiffre significatif du nombre. Finalement on a :

$$9,7514 < u < 9,7519.$$

6) REMARQUES. — Pour la clarté du graphique et des explications, l'exemple a été choisi avec une faible marge d'approximation. Lorsque cette marge est plus grande, le « couloir » du logarithme peut comprendre plusieurs parallélogrammes successifs (de même pente tant que la différence tabulaire reste la même) et les points

4	
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

MNPQ peuvent être sur des parallélogrammes différents. On constate facilement que cela ne change rien aux règles du n° 5.

J'ajouterai que le calcul du retour au nombre, en utilisant l'encadrement fondamental, ne présente pas de difficultés pour les élèves ; au début, ils auront avantage à faire, à côté de leur calcul, un croquis « pense-bête » représentant le « couloir » (qui leur rappelle les bornes supérieures et inférieures des log) coupé par les deux parallèles correspondant aux bornes de $\log u$; ils retrouveront ainsi facilement les règles du n° 5.

G. THOVERT (*Lycée Ampère, Lyon*).