

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

SOMMAIRE

I. La vie de l'Association.

G. WALUSINSKI : Les Mathématiques et la Réforme de l'Enseignement.	129
Quelques lettres	132
Réunion du Comité : 20 octobre 1955	133
Audience du Directeur Général de l'Enseignement Technique	135
Audience du Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré	136
J. LE RÉVÉREND : Sciences physiques et Réforme de l'Enseignement.	138
M. MASSON : Projet d'enquête sur les classes de Sixième et Cinquième	140
Le bloc-notes de l'A.P.M. Questions sans réponses	141

II. Informations et documents officiels.

Une nouvelle préparation à l'Agrégation	143
Le nouveau C.A.P.E.T. A ₁	144
A propos du Baccalauréat (juin 1955)	145

III. Etudes.

J. ITARD : Diophante et la tradition diophantienne	146
L. FÉLIX : L'enseignement de la statistique et de la probabilité	159

IV. Documentation et bibliographie.

A. HUISMAN : <i>Initiation au calcul matriciel</i>	169
A. HERME : Une introduction à l'Algèbre moderne	170
L. F. : Deux livres sur les Mathématiques modernes	171
G. W. : <i>L'astronomie populaire</i> Camille Flammarion	173

V. Essais et variétés.

L. THIBERGE : A propos des fractions	178
H. MAS : Inégalités et inéquations	178
F. HÉRAUT : Grandeurs inversement proportionnelles	179
J. LEGRAND : Remarques sur le théorème de Gauss	180
G. THOVERT : L'approximation dans le calcul logarithmique	181
L. F. : Sur le signe $=$ et sur la relation d'équivalence	184
Les Mathématiques et la culture (deux lettres au <i>Times</i>)	185

Cotisations : 600 F

Abonnements : 1 000 F

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France **200 F**

Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5.708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Couverture page II

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

- Président :* M. WALUSINSKI, 32, rue de la Fontaine-au-Roi, Paris (11^e).
OBE, 56-95.
- Vice-Présidents :* Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14^e).
M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelin, Neuilly-sur-Seine.
M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris (9^e).
M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14^e).
- Secrétaires :* M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16^e).
M. ITARD, 6, avenue Paul-Appel, Paris (14^e).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
- Trésorier :* M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).
- Comité de rédaction du « Bulletin » :* Mlle FÉLIX, MM. CHAZAL, GIRARD, THOVERT, WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1956 : Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (Fac. Sc. Toulouse) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (*Condorcet*) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. Saint-Ouen*) ; M. CHAZAL (*Saint-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. WALUSINSKI (*Voltaire*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Membres de droit

Mme NICOU (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. POUX (Saint-Cloud).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. BIGUENET ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (Casablanca, *Lyautey*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

I. LA VIE DE L'ASSOCIATION

Les Mathématiques
et la réforme de l'Enseignement

Quand on nous parle de Réforme de l'Enseignement, il nous arrive de manifester un scepticisme poli. Depuis dix ans, pour laisser aux historiens le soin d'étudier les temps plus anciens, la réforme de l'enseignement n'est en effet qu'un sujet de conversation. Et comme les discours, ou même les projets, ne sont pas des solutions, les données du problème ne se simplifient pas toutes seules. Il y a deux *faits* :

1° la croissance continue des effectifs scolaires et en particulier ceux du Second Degré ;

2° l'importance de plus en plus grande des Mathématiques dans les besoins culturels d'un individu au XX^e siècle.

L'appréciation de ce dernier fait, plus ou moins consciente chez les élèves et leurs familles, entraîne même qu'à l'intérieur de ces effectifs de plus en plus lourds du Second Degré, il y a une tendance en faveur des sections scientifiques : la classe de Mathématiques Élémentaires étant la seule section terminale à caractère scientifique se trouve souvent surchargée au détriment de la section de philosophie ou de celle dite de « Sciences Expérimentales ». Si, dès le premier cycle, les élèves avaient à choisir entre deux sections, l'une plus scientifique et l'autre plus littéraire, il n'est pas douteux que la même préférence se marquerait.

Que cette évolution ait pu être prévue depuis longtemps, cela est vrai, mais cela ne change malheureusement rien au problème actuel qui se pose à nous sous un double aspect :

1° le changement des effectifs en quantité doit-il modifier notre enseignement en qualité ?

2° l'évolution des sciences, et particulièrement celle des Mathématiques, n'impose-t-elles pas une révision de nos méthodes et de nos programmes ?

Essayons de nous expliquer clairement sur ces deux questions.

L'accroissement des effectifs ne signifie pas nécessairement baisse générale du niveau des études. La sélection des élèves à l'entrée du Second Degré actuel, n'a que de lointains rapports avec la sélection selon les aptitudes et les goûts (les considérations géographiques, économiques et sociales paraissent bien jouer un rôle prédominant, ainsi que la séparation trop importante entre les sections secondaires et les

sections techniques). Mais il est évident que, pour nombre d'années, nous sommes condamnés à enseigner dans des classes pléthoriques. Pour prendre un exemple concret, si l'horaire hebdomadaire de deux heures et demie en Quatrième, est insuffisant avec une classe de 25 élèves, quel qualificatif mérite-t-il dans une classe de quarante élèves ?

Cette question de temps est primordiale. Nous savons qu'il n'y a pas d'esprit complètement fermé aux Mathématiques. Mais nous savons que les voies de la compréhension des Mathématiques sont très diverses et l'âge mental où l'abstraction devient « familière », très variable, selon les individus. Jadis, cela était aussi vrai qu'aujourd'hui ; mais les conséquences des échecs en Mathématiques n'étaient pas aussi graves ; les débouchés des carrières non scientifiques étaient sensiblement plus nombreux : les élèves pouvaient, plus facilement qu'aujourd'hui, être autorisés à redoubler des classes. Car, c'est avec du temps, grâce à des exercices répétés et variés que le professeur pourra trouver, avec ces élèves qui ne sont pas des cancre mais qui ont besoin d'aide, la voie qui convient à leur forme d'esprit, au stade considéré de leur évolution. La méthode dogmatique est exclue. Mais la redécouverte n'a de sens que si le temps est laissé... de redécouvrir.

De plus, dans toutes les classes, de la Sixième à Mathématiques Élémentaires, il est faux de prétendre qu'une augmentation d'horaire correspondra nécessairement à un surmenage des élèves. Dans le premier cycle, l'augmentation des heures de cours réduira à très peu de choses le travail à la maison. Surtout si des séances de travail dirigé, avec effectifs d'une demi-classe, permettent de montrer aux enfants comment chercher avec des chances de succès. Dans le second cycle, le travail dirigé pourrait être conçu comme une initiation aux applications pratiques des Mathématiques ; nos élèves, même ceux qui obtiennent de bons résultats en Mathématiques, arrivent souvent en classe de physique « en ne sachant plus calculer », comme le remarquent nos Collègues physiciens. Sans doute ne sont-ils pas suffisamment rompus au calcul. Mais, de plus, ils sont parfois décontenancés par l'énoncé d'un problème concret, ne sachant plus comment y appliquer la théorie mathématique qu'ils ont bien comprise, mais qui reste une chose de la théorie, sur un plan étranger à l'application considérée. Comme si les Mathématiques n'étaient que la langue des concepts abstraits et non pas aussi la langue la mieux adaptée à la description du réel et à son explication.

Mais, dans ces conditions, faut-il maintenir sans changement l'esprit de notre enseignement qui a presque la religion de l'abstraction, ou bien faudra-t-il admettre que des voies d'accès plus concrètes peuvent être empruntées, étant bien entendu que la rigueur finale sera la même ? Faut-il se désoler si, pour une partie de nos élèves, la géométrie reste expérimentale, ou plutôt si le recours à l'expérience, la construction de modèles, leur permet de progresser, de prendre goût à la recherche (ce qui est bien la première condition indispensable à la réussite), et finalement de comprendre par eux-mêmes la valeur du raisonnement ?

Sans vouloir conclure, il peut donc paraître fatal que l'afflux des élèves entraînera une évolution de nos méthodes ; l'histoire des Mathématiques le confirmerait, et l'exemple de l'enseignement dans d'autres pays.

**

Enfin, on entend parfois poser ce dilemme : Faut-il concevoir l'enseignement (et en particulier celui des Mathématiques) comme un enseignement de culture ou comme un enseignement utilitaire ?

Ce dilemme me paraît faux parce que la culture ne peut pas être désintéressée. Si, à l'époque de Montaigne, les hommes ayant quelque responsabilité dans la vie de la société devaient pouvoir lire les auteurs latins, c'était sans doute dans l'espoir d'y trouver des réponses valables aux problèmes que posaient les affaires de leur temps.

A la même époque, les agriculteurs n'avaient aucun besoin de lire le latin (même pas les Bucoliques) et l'enseignement agricole était réduit à l'apprentissage des techniques en usage depuis des dizaines ou des centaines d'années.

Au xx^e siècle, un mécanicien, un administrateur, un agronome, trouvent sans doute dans Cicéron ce que Montaigne y trouvait déjà (d'autant mieux que Montaigne les y aide). Mais il leur faudra bien des Mathématiques pour comprendre les problèmes qui se posent effectivement à eux, aussi bien dans leur vie professionnelle que dans leur vie de citoyens ou même dans leur vie personnelle. Il est devenu banal de reconnaître la présence des Mathématiques à tous les carrefours de l'activité humaine au xx^e siècle. A tous les carrefours et jusque dans les impasses où s'engagent, en poussant des lamentations les tenants d'une culture dite classique, statue de la culture de nos arrière-grands-pères.

En Mathématiques, comme dans toutes les formes de la pensée, il y a un conflit inévitable entre l'initiative créatrice et la résistance conservatrice. La fixité inévitable, encore que relative des programmes, s'oppose au mouvement continu de l'évolution des sciences. N'y a-t-il pas danger de voir les programmes se dissoudre à vouloir suivre de trop près les progrès de la science ? N'y a-t-il pas danger de voir se creuser un fossé entre les Mathématiques enseignées et les Mathématiques qui se font, dans le cas contraire ? Une solution de synthèse n'est-elle pas possible ?

Il y a les exigences de l'enseignement, de l'enseignement des Mathématiques à de jeunes adolescents, qui ne seront pas tous de futurs mathématiciens, mais qui seront tous des usagers des Mathématiques. Il y a les exigences théoriques de la science qui se fait, qui se perfectionne, qui s'approfondit, qui s'étend. N'est-ce pas justement le rôle de notre Association de concilier dans la mesure du possible ces exigences souvent contradictoires ? Aux moindres sacrifices pour les uns et pour les autres, car nous savons qu'il n'y a pas de solution parfaite.

Mais la pire des solutions serait de considérer les difficultés comme insurmontables *a priori*. Ce serait d'ailleurs mal apprécier les possibilités qui s'offrent toujours de renouveler un enseignement.

**

Le Comité de l'A.P.M. a pensé qu'un examen approfondi de ces questions, une consultation générale de tous les adhérents, devaient précéder une prise de position de notre Association.

S'il est donc prématuré de conclure, peut-être faut-il limiter l'ampleur de nos ambitions ? Cela n'est pas certain, si nous pouvons prévoir les moyens de réaliser ce qui sera notre but idéal. Serait-il utopique de poser les objectifs suivants ?

1) *Principe général* : l'enseignement des Mathématiques, dans le Second Degré et dans l'Enseignement Technique, n'aura sa véritable portée que si deux conditions sont réalisées : *effectifs* inférieurs à 30 élèves par classe ; horaire hebdomadaire supérieur ou égal à 4 heures, ces 4 heures étant le minimum des classes les moins scientifiques.

2) *Travail dirigé* : une heure hebdomadaire, avec demi-effectif, dans toutes les classes.

3) *Second Degré et Technique* : une meilleure coordination des programmes doit faciliter les passages de l'un à l'autre ordre d'enseignement et la rectification des erreurs d'orientation.

4) *Programmes* : après large consultation du personnel enseignant (dans les divers ordres d'enseignement) et des personnalités qualifiées représentant les principales activités scientifiques, réforme progressive des programmes ; choisir dans les Mathématiques modernes ce qui peut et ce qui doit être adapté à l'enseignement élémentaire ; s'inspirer de l'évolution des Mathématiques et des sciences physiques pour

supprimer des programmes ce qui n'y figure plus que par respect des traditions ; accepter de faire entrer dans l'enseignement, comme un reflet de la découverte contemporaine...

Quoi, objectera-t-on, vous réclamez un effectif réduit d'élèves et plus d'heures alors que l'on manque cruellement de professeurs ? Vous voulez introduire dans les programmes ces fleurs à peine écloses et encore si fragiles de la Mathématique moderne ?

Eh bien, oui. Il faudra bien qu'un jour la formation culturelle des jeunes gens soit imprégnée de Mathématiques comme toute la science de leur temps. Et vous n'empêcherez pas la science vivante d'envahir ou même de bouleverser un enseignement qui se scléroserait.

A science vivante, enseignement neuf.

G. WALUSINSKI.

Quelques lettres...

De M. J. GLAESER, chef de travaux à la Faculté des Sciences de Nancy :

« ...Jusqu'à ce jour, un dialogue de sourds s'établissait entre les « mysonéistes » qui dénigraient systématiquement tout ce que leurs maîtres n'enseignaient pas voici trente ans et, d'autre part, certains esprits novateurs qui prêchaient dans le vague la nécessité de moderniser notre enseignement

« Une des tâches de l'A.P.M. doit être de préciser ce que peut être cette modernisation dans une classe de « 30 élèves moyens ». L'élaboration d'un matériel pédagogique concret doit être entreprise sans retard pour pouvoir faire bénéficier les élèves de tous les éclaircissements qui ont permis de rendre facile ce qui, jadis, était obscur. »

De M. M. WEBER, professeur honoraire de Mathématiques Spéciales au Lycée Condorcet :

« En ce qui concerne l'enseignement des sciences dans les lycées, j'ai toujours été quelque peu partisan d'introduire des notions de physique et de chimie dès le premier cycle, sortes de « leçons de choses supérieures ». C'est sans doute un souvenir persistant de l'initiation scientifique que j'ai reçue à l'Ecole Turgot, dès l'âge de douze ans et qui m'a toujours fort intéressé. C'est vous dire que j'approuve tout à fait votre souci de maintenir la classe de Sciences Expérimentales ; mais peut-être les projets que vous avez soutenus à ce sujet, il y a quelque temps, sont-ils un peu trop ambitieux ?

« En ce qui concerne les Mathématiques Élémentaires, il est certain qu'on pourrait y introduire un peu d'analyse ; mais on se heurte tout de suite à la difficulté des nombres irrationnels : ainsi le théorème de Rolle n'est plus nécessairement exact dans le domaine rationnel ($y = x^3 - x$ entre 0 et 1) ; si, pour tourner la difficulté, on se borne à l'intuition graphique, cela ne me paraît pas très sérieux, car, avant tout, il faut apprendre à raisonner, sans oublier, bien entendu, l'utilisation des Mathématiques dans le monde réel. »

De Mlle LONJARET (Lycée de jeunes filles de Metz) :

« Je vous signale qu'il existe au Lycée deux postes non pourvus : si quelque Collègue est mécontente de son affectation, si quelque étudiante (ou étudiant) cherche à être près d'une ville où l'on fasse des Mathématiques (communications très faciles entre Metz et Nancy) qu'elle téléphone au Lycée... et arrive ; administration, élèves sans professeur et collègues, l'accueilleront à bras ouverts. »

N.-B. — Nous espérons que depuis que nous avons reçu cette lettre, les chaires de Mathématiques du Lycée de jeunes filles de Metz ont été pourvues. Nous publions cependant cette lettre pour deux raisons. En premier lieu, il est intéressant pour le Bureau de l'A.P.M. d'être directement et rapidement informé des situations difficiles du genre de celle-ci ; nous ne prétendons pas pouvoir y porter remède ; mais dans la mesure où nous pourrions aider des jeunes candidats à une délégation rectorale nous le ferions volontiers. En second lieu, nous versons ce témoignage au dossier « recrutement » ; l'Inspection Générale nous a signalé que les chaires de Mathématiques Elémentaires d'Haguenau, de Thionville, de Blida, de Lons-le-Saunier, de Foix, d'Oran et de Bastia n'avaient pu être pourvues de professeurs agrégés ; l'acuité de la crise de recrutement des professeurs de Mathématiques doit être présente à l'esprit de tous nos Collègues, et en particulier de ceux qui peuvent avoir à conseiller des jeunes gens en quête d'orientation.

Réunion du Comité

20 octobre 1955

Présents : Mlles AFFRE, DIONOT, FÉLIX, MASSON ; MM. BAY, CHAZAL, CROZES, EDDE, FAVRELLE, FOUCHÉ, GIRARD, ITARD, LEGRAND, MAILLARD, ROSTOLLAND, THOVERT, WALUSINSKI.

Excusés : MM. BERTRAND, CANONGE, MINOIS.

La séance est ouverte à 14 h. 30.

Les Statuts de l'A.P.M. — M. WALUSINSKI propose la désignation de trois membres chargés d'étudier certaines modifications qui lui paraissent souhaitables, en particulier l'augmentation du nombre des membres du Comité, justifiée par celle du nombre des membres de l'Association. Mlle AFFRE, MM. CHAZAL et BIGUENET s'occuperont de cette question, et Mlle AFFRE centralisera les communications qui seront faites à ce sujet.

Tarif réduit d'abonnement au « Bulletin ». — M. WALUSINSKI pense que l'on pourrait assurer le service du *Bulletin* à demi-tarif, pour les élèves des E.N.S. et des C.P.R. Le nombre de ces derniers est estimé à 80 environ. M. LEGRAND, trésorier, estime la chose possible d'après le nombre de cotisations reçues, supérieur à celui de l'an dernier à la même époque. Le contrôle des cotisations sera d'ailleurs renforcé. Le projet de demi-tarif est donc adopté par le Comité.

Le « Bulletin » et les fascicules d'énoncés. — L'offre habituelle de la Librairie Vuibert, relativement aux « Annales » du Baccalauréat et du B.E.P.C., est acceptée. Le Comité décide de ne les adresser qu'aux membres de l'A.P.M. ayant payé leur cotisation, les retardataires les recevront seulement en janvier. D'autre part, M. LEGRAND fait part de l'état financier de l'Association : il est satisfaisant malgré les frais d'un *Bulletin* plus étoffé. M. GIRARD s'efforcera d'améliorer le rendement de la publicité et l'effort de propagande sera poursuivi, spécialement (à la demande de M. PÉTRUS) auprès des Centres pédagogiques régionaux.

M. WALUSINSKI fait part de différents projets d'articles à paraître dans les prochains *Bulletins*. Mlle MASSON propose d'organiser une consultation relative à l'orientation scolaire par les Mathématiques, dans les classes de Sixième et Cinquième.

M. WALUSINSKI fait remarquer que la publication de comptes rendus est liée à celle d'une bibliothèque où l'on rassemblerait les ouvrages ayant fait l'objet d'une étude. La bibliothèque existe au Musée Pédagogique, il faudrait trouver un bibliothécaire, faire un inventaire, organiser peut-être un service de prêt. Notre collègue HUISMAN sera sollicité pour cette fonction.

Audiences accordées au Bureau. — Notre Président a reçu une convocation du Directeur de l'Enseignement Technique pour le vendredi 21 octobre. MM. BIGUENET et ITARD l'accompagneront.

Liaison avec l'Union des Physiciens. — Le Président de l'Union a adressé une lettre à M. WALUSINSKI qui en donne lecture :

MON CHER COLLÈGUE,

Le Conseil de l'Union des Physiciens, après avoir examiné les travaux de notre Commission pédagogique et les résultats du questionnaire adressé à nos Collègues physiciens, a décidé d'envisager comme possible la structure suivante de l'enseignement des sciences physiques dans le cadre de la réforme projetée :

1° UN ENSEIGNEMENT PRÉLIMINAIRE (de 14 à 15 ans), donné par un professeur de physique. Il s'agit de séances analogues aux séances de travaux pratiques actuelles, à raison de deux heures par quinzaine. But à atteindre : a) faire prendre connaissance avec les instruments de mesure les plus courants et l'esprit des méthodes scientifiques ; par exemple, mesure des grandeurs géométriques, rapports trigonométriques, tracé de graphiques, mesure des masses, réalisation d'un montage électrique simple, usage d'un thermomètre dans différentes conditions, études d'appareils de chimie, etc... b) entraîner les élèves au calcul numérique.

2° UN ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL (de 15 à 18 ans) :

1^{re} classe, cours 3 heures ; T.P. 1 h. 1/2 ;

2^e classe, cours 3 heures ; T.P. 1 h. 1/2 ;

3^e classe (terminale) série scientifique, deux sections :

a) section à prédominance des Mathématiques : pour les sciences physiques, cours 5 h. 1/2 ; T.P. 1 h. 1/2 ; le reste sans changement, sauf qu'il paraît raisonnable de souhaiter la suppression de l'histoire dans les sections scientifiques terminales (cette discipline s'étend en effet sur de nombreuses années et pourrait, dans la dernière classe, céder des heures aux enseignements qui, comme la physique, sont donnés tardivement) ;

b) section à prédominance des sciences expérimentales : sciences physiques, cours 6 h. ; T.P. 1 h. 1/2. Mathématiques : 6 h. ; sciences naturelles : 4 h. ; philo : 3 h. ; le reste comme en a). Cette section est destinée à la préparation ultérieure à diverses écoles d'ingénieurs, aux futurs médecins et pharmaciens. Elle se substituerait à l'actuelle classe de Sciences Expérimentales. Les Mathématiques y sont renforcées.

REMARQUE : Nous n'avons pas étudié encore les problèmes relatifs aux sections littéraires, ni à la classe de Philosophie.

J'ai l'honneur de porter ces renseignements à la connaissance de votre Société et de vous demander si vous voyez des objections à ce plan primitif. L'Union des Physiciens souhaite réaliser un accord sur ces questions avec l'A.P.M. et avec l'Union des Naturalistes, afin que nos délégués au Conseil du Second Degré et au Conseil Supérieur puissent défendre un projet commun des disciplines scientifiques.

Veuillez agréer, mon cher Collègue, mes très cordiaux sentiments.

Le Comité approuve en général les points de vue exposés dans cette lettre. Cependant M. BAY n'est pas d'accord sur la question des horaires demandés, il s'oppose à toute fixation d'horaires par une catégorie de Spécialistes. Il fait remarquer que c'est ainsi que l'on aboutit à un nombre total d'heures de classe déraisonnable ; il souhaiterait que, les horaires ayant été établis dans leur ensemble, les programmes soient ensuite adaptés à ces horaires par les Spécialistes.

L'enseignement dans la classe de Sciences Expérimentales fait l'objet d'une discussion animée. M. WALUSINSKI, ayant résumé l'opinion d'un grand nombre de collègues souhaitant voir pour cette classe une épreuve écrite de Mathématiques à l'écrit,

Mlle MASSON, MM. BAY, MAILLARD et PÉTRUS font diverses observations. Ils souhaitent en particulier que l'enseignement y conserve son « esprit » expérimental, et n'y soit pas le même que dans la classe de Mathématiques.

Séances d'étude des programmes. — M. WALUSINSKI propose, plutôt que de prendre aussitôt position sur les projets de nos Collègues physiciens, d'attendre, pour le faire, qu'une consultation générale des membres de l'A.P.M. ait pu être organisée. A cette fin, il propose le plan suivant :

Organisation de séances d'étude des programmes, largement ouvertes à tous les Collègues de la région parisienne. Trois séances pourraient avoir lieu avant la fin du trimestre. Une réunion du Comité prendrait connaissance des conclusions auxquelles on aurait pu aboutir. Le Comité formulera alors les questions précises sur lesquelles nos adhérents seraient appelés à se prononcer. Inconvénient évident : impossibilité matérielle pour nos Collègues des départements de participer à ces réunions ; mais il est recommandé aux « régionales » de prévoir des échanges du même genre. Les décisions, en tout cas, appartiendront à tous.

Le plan est approuvé. Deux rapporteurs sont désignés pour la première réunion, fixée au 17 novembre à 14 h. 30 : Mlle MASSON et M. WALUSINSKI (voir plus loin le bloc-notes de l'A.P.M.).

Conférences de l'A.P.M. — Leur organisation est difficile et certaines expériences ont été un peu décevantes ; M. MAILLARD va jusqu'à contester leur utilité. Cependant, on peut penser que bien des collègues se dérangeraient pour écouter un exposé qui ne les dépasse pas trop, au besoin en s'y préparant, si quelques conseils étaient donnés auparavant par l'intermédiaire du *Bulletin*. M. WALUSINSKI ne voit que des avantages à rester en relation avec l'Enseignement Supérieur ; Mlle FÉLIX et M. CROZES montrent d'autre part combien notre enseignement peut être vivifié et renouvelé par exemple par la connaissance des éléments de l'algèbre moderne. J'en suis, pour ma part, persuadé, et je crois que tout élargissement de notre culture ne peut qu'avoir d'heureux effets. D'ailleurs n'est-ce pas là le but des « Etudes » qui constituent l'une des parties les plus intéressantes de notre *Bulletin* ?

Questions diverses. — Il est entendu que le calendrier des réunions de l'A.P.M., et en particulier de son Comité, sera fixé en accord avec les Collègues qui organisent des réunions parallèles : groupe de Sèvres, Séminaire d'histoire des Mathématiques, etc..

R. ROSTOLLAND.

Audience de Monsieur le Directeur Général de l'Enseignement Technique

M. le Directeur Général de l'Enseignement Technique a accordé une audience au Bureau de l'A.P.M., le 21 octobre, à 11 heures. Faisaient partie de la délégation : MM. BIGUENET, ITARD et WALUSINSKI.

M. le Directeur Général BUISSON nous a réservé le meilleur accueil. Nous lui avons présenté les buts de notre Association, en insistant sur notre souhait que beaucoup de professeurs de l'Enseignement Technique y adhèrent. M. le Directeur Général a reconnu l'intérêt des échanges pédagogiques que permettent nos *Bulletins* et nos réunions d'étude. S'associant à notre souhait de plus larges contacts avec l'Enseignement Technique, il nous a promis de faire connaître l'A.P.M. quand il en aurait l'occasion.

M. BUISSON nous signale que les études de première année dans les Ecoles d'Ingénieurs d'Arts et Métiers présentent des problèmes de même nature que ceux des classes de Mathématiques Supérieures ou de Propédeutique scientifique. Il est donc

utile que ces problèmes soient, sinon résolus de la même manière, tout au moins étudiés en commun.

Nous insistons sur notre souci d'être informés des problèmes pédagogiques en discussion pour les étudier. A ce propos, nous présentons les principes généraux que nous préconisons dans le cadre général de la future réforme de l'Enseignement (vœux de l'Assemblée générale 1955). M. le Directeur Général accueille cette motion avec sympathie.

Sur la question de la formation des professeurs et du recrutement d'un nombre suffisant de maîtres qualifiés, nous nous proposons de préciser ultérieurement des projets réalisables pour une agrégation « technique » de Mathématiques et pour la possibilité d'un mouvement des professeurs dans les divers ordres d'Enseignement. M. le Directeur Général souhaite que de tels projets prennent forme et aboutissent.

Enfin M. BUISSON nous donne des informations sur les développements nouveaux de l'Enseignement Technique féminin avec l'institution du Baccalauréat Technique Economique, plus naturellement ouvert aux jeunes filles que le Baccalauréat Technique (industriel).

M. le Directeur Général nous assure, en conclusion, qu'il examinera toujours avec attention nos communications. Nous le remercions de son bienveillant accueil et lui répétons notre désir de travailler pour le progrès de l'enseignement scientifique en général et par conséquent aussi pour celui de l'Enseignement Technique. L'audience prend fin à 11 h. 45.

Audience de Monsieur le Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré

M. le Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré a accordé une audience au Bureau de l'A.P.M., le mercredi 2 novembre, à 17 h. 30. Faisaient partie de la délégation : Mlle MASSON, MM. BIGUENET, EDDE, GIRARD, ROSTOLLAND et WALUSINSKI (MM. CHAZAL et LEGRAND, empêchés, étaient excusés). M. le Directeur Général était assisté de M. CAMPAN, Inspecteur Général, et de Mlle DESBAZEILLES, Chef du Premier Bureau.

M. WALUSINSKI présente les vœux de l'A.P.M. :

1° Principe du développement de l'enseignement scientifique dans le cadre de la future réforme de l'Enseignement ; développement des Mathématiques dans le cycle d'essai et d'orientation où elles doivent jouer un rôle équivalent à l'étude du français ; intérêt, dans le premier cycle, d'une augmentation d'horaire qui permettrait à *tous* les élèves d'assimiler le cours et supprimerait le travail à la maison grâce à l'organisation de séances de travail dirigé avec demi-effectifs. Enfin, nécessité de développer l'enseignement des Mathématiques dans les sections scientifiques du second cycle et intérêt de prolonger, en Seconde, pour le moins, les séances de travail dirigé.

2° Sans attendre la réalisation de cette réforme, aménager ce qui doit l'être et ce qui peut l'être : a) renforcer les Mathématiques en classe de Sciences Expérimentales et prévoir surtout une épreuve de Mathématiques à l'écrit de l'examen ; b) à l'examen d'entrée en Sixième, réserver la première partie de l'épreuve de Mathématiques à la simple vérification que les techniques opératoires sont bien connues ; c) l'organisation dans le délai le plus bref des séances de travail dirigé.

3° Sur le plan du recrutement, l'A.P.M. connaît les difficultés actuelles. Elle souhaite que se développent toutes les formes possibles d'aide aux candidats au C.A.P.E.S. et à l'Agrégation. En particulier un allègement de service pourrait être accordé pendant certaines époques de l'année tout au moins, aux adjoints d'Enseignement qui préparent activement le C.A.P.E.S. par correspondance.

4° Enfin, l'A.P.M. souhaite être associée par plusieurs de ses membres, y compris des membres de l'Enseignement Technique, aux travaux pédagogiques que la Direction du Second Degré pourra entreprendre.

M. le Directeur Général répond globalement à nos demandes :

1° *Séances de travail dirigé* : comme toute demande de ce genre, elle se traduit par une demande de crédits qu'il faut faire accepter par le Ministère des Finances ; on sait les difficultés.

Mlle MASSON suggère que les séances actuelles de travail dirigé pourraient, sans provoquer de dépenses nouvelles, être inscrites dès le début de l'année dans les emplois du temps. M. le Directeur Général préfère l'actuelle liberté d'emploi de ces heures. Cependant il rappellera comment on peut en tirer le meilleur parti.

2° *Classe de Sciences Expérimentales* : devant l'éventualité d'une réforme générale de l'Enseignement, il n'est pas opportun d'envisager une réforme de détail de cette classe.

3° *Aide aux candidats aux concours de recrutement* : là encore, cela signifie demande de crédits toujours difficiles à obtenir. Déjà plus de mille stagiaires (au lieu de 300 en 1952) sont cette année dans les C.P.R. L'Enseignement est privé de mille délégués ; mais, malgré la pénurie actuelle de professeurs, il faut s'opposer à transformer ces stagiaires en professeurs délégués ; ce serait « manger son blé en herbe ». Ceci dit, il est impossible de multiplier à l'extrême les formes d'aide aux candidats ; dans dix ans, prévoit M. le Directeur Général, il y aura un afflux très excédentaire de candidats professeurs (nous lui répondons que, même si cette situation se présente, la formation des candidats les orientera facilement vers les carrières scientifiques en développement).

4° *Participation de l'A.P.M. aux travaux pédagogiques* : le principe en est acquis, ainsi que la mise en application ; M. le Directeur Général nous signale qu'une première réunion a eu lieu à Sèvres, groupant les Inspecteurs Généraux de Mathématiques, des membres de l'Enseignement Supérieur, dont le Doyen PÉRÈS, et M. MONJALLON, qui avait été invité pour représenter les professeurs de Mathématiques du Second Degré. De nouvelles réunions de cette Commission sont prévues et le Président de l'A.P.M. y sera convoqué.

5° *La réforme de l'Enseignement* : aucun délai ne peut être prévu quant à la réalisation effective de la Réforme ; cependant il faut se préparer à celle-ci. M. le Directeur Général pose la question du renouvellement ou de la refonte des méthodes et des programmes. Pour les horaires, il s'oppose en général à toute augmentation. Il pense, cependant, qu'une légère augmentation des horaires de Mathématiques dans le premier cycle serait nécessaire.

Dans le second cycle, il y aurait équivalence entre les sections A et B (au point de vue des Mathématiques), puis entre les sections A', C, M, M' et T. Pour ces dernières, pas de modifications importantes. Pour les sections A et B, il n'est pas question de leur imposer l'égalité scientifique avec les autres sections. Mais une sorte d'égalité sur le plan de la culture mathématique est souhaitable. Cependant, les Mathématiques en A et B seraient beaucoup plus orientées vers l'algèbre et comprendraient une initiation au calcul statistique.

L'afflux des élèves dans le Second Degré, même en admettant qu'un bon nombre d'entre eux soit judicieusement orienté vers le Technique, impose à tout notre enseignement, et particulièrement à celui des Mathématiques, de se réformer. Peu d'élèves peuvent accéder de plain-pied à l'abstraction ; il ne faut pas hésiter à mettre un « escabeau » pour aider les moins doués à monter jusqu'au niveau des meilleurs. Il faut d'ailleurs tenir compte que moins de 0,7 % des élèves de Spéciales deviendront professeurs de Mathématiques. Autant dire que, pour tous, les Mathématiques seront

essentiellement un outil, l'outil puissant qu'elles sont effectivement pour comprendre le réel et pour le transformer.

Poursuivant son exposé, M. le Directeur Général insiste sur les mérites de la méthode de redécouverte, en particulier dans les classes du premier cycle. Nous répondons que les progrès dans cette voie ont été très grands, qu'ils l'auraient été plus encore si les horaires et les effectifs avaient été tels que l'emploi de la méthode ne soit pas, dans certains cas, rendu impossible. M. le Directeur Général pense que ce n'est pas seulement affaire de temps, mais qu'il faut aussi vouloir employer la méthode. Il souhaite donc voir l'A.P.M. agir en ce sens. Nous pouvons lui répondre que cette action est menée depuis longtemps, compte tenu de la liberté du choix des méthodes qui est accordée par l'Inspection Générale, liberté qui est *a fortiori* respectée à l'intérieur de notre Association.

Cependant, devant l'intérêt de ce problème pédagogique, M. le Directeur Général pense qu'un vaste échange d'idées entre professeurs de Mathématiques est souhaitable. Il nous propose de réfléchir à l'organisation d'un stage de deux jours à Sèvres ; des Collègues de toutes les Académies seraient appelés à y participer. Nous soumettrons cette proposition à la prochaine réunion du Comité et nous tiendrons M. le Directeur Général au courant de nos projets.

L'audience prend fin à 19 h. 40.

Les Sciences Physiques et la réforme de l'enseignement

M. LE RÉVÉREND, Président de l'Union des Physiciens, a bien voulu exposer lui-même, ici, les projets que nos Collègues physiciens souhaitent insérer dans le cadre de la future réforme de l'Enseignement.

En publiant, dans le *Bulletin* d'octobre, un important rapport sur la coordination des enseignements des sciences physiques et des Mathématiques, nous avons déjà exprimé combien nous étions attachés à ce problème, combien nous souhaitions que nos efforts à tous puissent être convergents. Il n'y aura de progrès dans l'enseignement scientifique, nous en sommes convaincus, que dans la mesure où physiciens et mathématiciens parleront le même langage. Remercions donc M. LE RÉVÉREND et laissons-lui la parole :

« Répondant à l'aimable invitation de M. le Président de l'A.P.M., je me permettrai d'exposer brièvement les préoccupations de mes Collègues physiciens au moment où nos Sociétés de Spécialistes étudient les problèmes posés par la nouvelle réforme de l'Enseignement, car si depuis trente-six ans que je suis au service de l'Université il a toujours été question de réformer l'Enseignement, il n'est pas douteux que les efforts qui ont été déployés n'aient abouti qu'à des solutions peu satisfaisantes.

Etant élève, j'ai vécu les programmes de 1902, très révolutionnaires à cette époque, et dont il faut dire qu'ils contenaient d'excellentes choses : ils étaient cohérents, et pour les physiciens ils introduisaient enfin la méthode expérimentale dans l'Enseignement Secondaire. Assez rapidement, cependant, ils ont paru trop copieux et il a fallu un peu les alléger. S'il est vrai que de nombreuses questions y figuraient les professeurs s'étaient bornés à les exposer sommairement, se contentant de dégager les notions fondamentales, n'hésitant pas à élaguer les difficultés. Mais, lorsqu'un programme vieillit, nous savons tous que pour plusieurs raisons, les développements se dilatent... En particulier la rapidité avec laquelle ont évolué les sciences physiques pendant la première moitié de ce siècle et les répercussions qu'ont eues les récentes découvertes sur la vie des sociétés ont nécessité un remaniement de l'Enseignement du Second Degré. Après la première guerre mondiale, on s'était inquiété du manque de culture des étudiants et des élèves des Grandes Ecoles et on avait pensé y remédier

en imaginant l' « égalité scientifique ». Ce système n'a conduit qu'à une surcharge des horaires et à un abaissement du niveau scientifique de nos élèves, et il a fallu y renoncer.

D'une manière générale, nous considérons qu'il conviendrait d'alléger un peu les horaires ; il faut laisser à nos élèves le temps de la réflexion personnelle. Ceci nous paraît possible par le jeu des options dans les dernières années du lycée. C'est pourquoi nous envisageons la création de sections scientifiques et de sections littéraires, très nettement différenciées. Le projet ministériel de réforme semble d'ailleurs favorable à cette conception. L'objet essentiel de nos préoccupations est de voir la classe terminale ne pas comporter un faux équilibre de sciences et de lettres. La philosophie doit être une classe essentiellement littéraire et, pour ma part, j'irai jusqu'à déclarer que s'il fallait en alléger l'horaire, je consentirais à y supprimer tout enseignement des sciences physiques. Par contre, nous réclamons dans la classe de Mathématiques Élémentaires une place importante pour les sciences physiques à côté des Mathématiques. Il est alors temps que les jeunes gens de 17-18 ans, qui ont consacré la majeure partie des années précédentes aux disciplines littéraires et qui viennent d'opter pour la section Mathématiques Élémentaires, puissent s'adonner entièrement à l'étude des sciences. Le système actuel ne le leur permet pas et il faut reconnaître que certains enseignements, comme l'histoire et la géographie, ont progressivement empiété sur les sciences expérimentales. Le tableau suivant est instructif à cet égard :

	Histoire et Géogr.	Sc. Physiques
Année 1902.....	3 h.	5 h. + 2 h. T.P.
Année 1925	3 h. 1/2	4 h. 1/2 + 1 h. 1/2 T.P.
Année 1947	4 h.	4 h. 1/2 + 1 h. T.P.

Je ne méconnais certes pas la valeur de l'enseignement de l'histoire pour la formation des citoyens qui peuvent être appelés à commander des hommes et à prendre de graves responsabilités. Personnellement, je considère que puisque l'âge des futurs bacheliers est retardé d'une année, il serait peut-être possible de demander à nos Collègues historiens, dont l'enseignement s'échelonne sur un grand nombre d'années, d'en terminer sensiblement le cycle avec la première partie du Baccalauréat dans les sections scientifiques. Cette mesure réduirait l'horaire de l'histoire dans les classes terminales scientifiques et permettrait aux physiciens, qui ne disposent que des trois dernières années, d'enseigner l'essentiel d'une science dont la matière croît d'année en année à une vitesse effrayante.

D'autre part, il a semblé à beaucoup de mes Collègues que la classe de Mathématiques Élémentaires, avec son enseignement de géométrie assez chargé, dont je suis très loin de contester, croyez-le bien, la grande utilité pour la formation de l'esprit mathématique, est lourd et difficile pour certains de nos élèves dont les goûts pour les sciences expérimentales se sont cependant révélés ; il serait donc utile de créer pour ces derniers une section à prédominance sciences expérimentales qui se substituerait à la classe qui porte actuellement ce nom, mais nous souhaiterions que les Mathématiques y prennent une place plus importante ; l'enseignement de la géométrie y serait réduit, tandis que l'algèbre, la mécanique, les éléments du calcul des dérivées et des primitives, dont le physicien a un besoin constant, y seraient plus développés.

Ceci m'amène à vous faire part de la seconde de nos préoccupations : s'il a été fait antérieurement de sérieux efforts pour tenter de coordonner nos deux enseignements, notamment après la guerre par des réunions communes de nos deux Bureaux, il faut reconnaître que cette grave question n'a pas été entièrement réglée. Malgré le grand désir qu'ont nos Collègues de Mathématiques de nous venir en aide, leurs efforts sont souvent paralysés par l'obligation d'enchaîner leurs cours, non dans un

but utilitaire, mais bien plus dans un but de culture correcte des Mathématiques. Lorsque les élèves nous arrivent en Seconde et en Première, ils ont souvent oublié les règles les plus simples de l'arithmétique et de l'algèbre. Leur embarras est grand devant certaines fractions, devant les grandeurs proportionnelles, devant l'emploi des vecteurs, des lignes trigonométriques, d'une façon générale devant le calcul numérique. Ils ont oublié tout cela, qui leur a été pourtant enseigné jadis, comme d'ailleurs ils ont oublié, quand ils abordent la classe de Mathématiques Élémentaires, les lois des gaz parfaits... Ne voyez donc, sous ma plume, aucune idée de critique, mais l'expression d'une réalité aussi amère à constater pour le Physicien que pour le Mathématicien. C'est pourquoi, nous souhaitons que dans l'année qui précédera le début de l'enseignement des sciences physiques (14 ans), il soit organisé, dans les sections scientifiques, des séances d'initiation aux sciences physiques, à raison de deux heures par quinzaine. Ces séances de « Travaux pratiques » auraient un double objet : a) faire prendre connaissance avec les instruments de mesure les plus courants et l'esprit des méthodes expérimentales (Exemple : mesures de grandeurs, de masses, usage du thermomètre, d'une lentille ; montages électriques simples, étude de quelques appareils de chimie...) ; b) entraîner nos élèves aux calculs numériques ; les exercices précédents conduiraient en effet à des constructions graphiques, des compositions et décompositions de vecteurs, à l'usage des lignes trigonométriques, à l'usage des tables naturelles, à des calculs de surfaces et de volumes, à l'emploi des puissances de 10 (positives et négatives), à l'évaluation des incertitudes, aux formules d'approximation, etc...

Nous avons d'ailleurs déjà soumis ces suggestions à l'examen du Bureau de l'A.P.M. et nous souhaitons vivement qu'une entente intervienne entre nous sur ces questions, et qu'une liaison soit prise afin de mettre plus à l'aise le professeur de physique de la classe de Mathématiques Élémentaires.

En écrivant ces lignes, je n'ai eu pour intention que de commenter pour les lecteurs du *Bulletin* de l'A.P.M., les suggestions déjà adressées à leur Bureau et d'essayer de les pénétrer de l'esprit qui nous anime à la veille de la nouvelle réforme. »

J. LE RÉVÉREND,
Président de l'Union des Physiciens.

Un projet d'enquête sur les classes de sixième et cinquième

Il est beaucoup question, dans les projets actuels de réforme de l'Enseignement, de la suppression de l'examen d'entrée en Sixième. Tous les enfants aborderaient alors, vers l'âge de onze ans, les mêmes études et il serait nécessaire, durant une période dont le nom aussi bien que la durée suscitent les controverses passionnées, d'étudier les possibilités des élèves.

Il est à peine utile d'affirmer, une fois encore, que les professeurs de Mathématiques qui enseignent dans le premier cycle, ne conçoivent une telle recherche d'aptitudes qu'avec des horaires suffisants. Supposons donc cette condition préalablement remplie.

Il serait intéressant pour les professeurs de Mathématiques de réunir, dès maintenant des textes d'exercices leur paraissant particulièrement propres à révéler les aptitudes des enfants : intuition esprit d'observation, puissance logique...

Evidemment, il ne s'agirait pour nous que d'apporter notre contribution aux observations faites par les Collègues des autres disciplines.

J'ai transmis les réflexions faites à ce sujet au dernier Comité de l'A.P.M. à une réunion du groupe qu'anime Mlle DIXOT à Sèvres. Mlle DIXOT accepte de rassembler les textes que voudraient bien lui envoyer des Collègues. Une étude ana-

logue, mais non point identique, a d'ailleurs été faite, l'an dernier, à Sèvres : il s'agissait de préparer des textes-type d'examen d'entrée en Sixième. Le problème, cette fois, est un peu différent, d'une part, parce que les enfants auxquels ces énoncés seraient destinés seraient un peu plus âgés, d'autre part parce qu'il ne s'agit point d'épreuves d'examen. Ces textes pourraient être proposés pendant une période correspondant à la durée des actuelles classes de Sixième et de Cinquième.

M. l'Inspecteur Général DESFORGE, qui assistait à la réunion, a bien voulu s'intéresser à ce projet. Il a fait remarquer qu'il serait d'ailleurs opportun de rechercher quelles parties des programmes actuels de Sixième et de Cinquième offrent le plus d'occasions d'exercices propres à de telles investigations. Ceci avec les projets en cours conservant les horaires et les programmes.

Il me reste à souhaiter que nos Collègues envoient de nombreux textes à Mlle DIONOT (18, Grande-Rue, à Sèvres, Seine-et-Oise). Il serait intéressant que les auteurs des textes joignent à ceux-ci des indications sur les résultats qu'ont donnés ces exercices dans les classes où ils ont été proposés. Ceci suppose un délai avant l'envoi de ces textes, mais il serait souhaitable cependant que celui-ci ne soit pas trop long. Peut-on suggérer comme date-limite d'une première série d'envois la fin de décembre ?

M. MASSON.

Le bloc-notes de l'APM

● Errata.

Dans le *Bulletin* n° 170, nous avons commis une faute dans le numéro du compte postal de l'A.P.M. (voir avis important de la première page) : au lieu de C.C.P. 3708-21, il fallait lire

C.C.P. 5708-21.

Nous avons fait aussitôt une démarche auprès des Chèques Postaux qui ont bien voulu corriger automatiquement les virements portant le numéro inexact.

Que nos Collègues nous excusent de cette négligence, qu'ils notent le bon numéro et que les retardataires en profitent pour verser aussitôt leur cotisation. Rappelons que les cotisations sont à verser avant le 31 décembre dernier délai.

Autre faute : sur la couverture et en 1^{re} page, il faut lire 35^e Année, et non 34^e. Pour nous, l'année scolaire seule compte.

● Pour les professeurs stagiaires.

Un tarif réduit d'abonnement à notre *Bulletin* a été fixé par le Comité (séance du 20 octobre 1955).

Pour 300 F (au lieu de 600) les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. recevront l'ensemble des publications de l'A.P.M., et par conséquent les rapports aux concours de recrutement que nous publions régulièrement.

Nous comptons sur l'action de nos Collègues Conseillers pédagogiques pour signaler ces avantages aux intéressés.

● Révision des Statuts.

Une Commission de trois Collègues, Mlle AFRE, MM. BIGUENET et CHAZAL a été désignée par le Comité. Sa tâche : rassembler les propositions de modification aux Statuts et au règlement intérieur, puis en faire la synthèse. Proposer au Comité, qui se réunira fin décembre, les propositions à soumettre au vote des adhérents lors de la prochaine Assemblée générale.

Adresser toutes les communications sur les Statuts à Mlle AFFRE, Lycée Fénelon, Paris, 6^e.

● Réunions de l'A.P.M.

Les réunions d'étude des programmes, décidées par le Comité, ont été fixées aux dates suivantes :

— 17 novembre : rapports introductifs ; les Mathématiques et la réforme de l'Enseignement, les classes du second cycle, par G. WALUSINSKI ; les classes du premier cycle, par Mlle MASSON.

— 1^{er} décembre : suite des débats en sous-commissions.

— 8 décembre : tentative de synthèse.

Ces réunions, qui ont lieu au Lycée St-Louis, sont ouvertes à tous les Collègues qui désirent y participer.

Les remarques adressées par les Collègues des départements aux rapporteurs seront les bienvenues. Insistons qu'il s'agit de journées d'étude ; le plus large échange d'idées est désirable.

● Prochaine réunion du Comité.

Elle aura lieu entre le 15 et le 22 décembre.

● Rédaction du « Bulletin ».

Rappelons notre plan de publication : cinq *Bulletins* paraîtront aux dates suivantes : 15 octobre, 1^{er} décembre, 15 janvier, 1^{er} mars et 1^{er} mai.

Tous les Collègues sont appelés à participer à la rédaction : envoyez des articles, répondez aux questions posées. Faites vivre l'A.P.M., cela dépend de vous.

Les Conseillers pédagogiques sont souvent appelés à faire des exposés devant les stagiaires des C.P.R. Pourquoi ces exposés ne fourniraient-ils pas au *Bulletin* les « études », dont il a besoin ? Ces exposés peuvent aussi servir d'introduction à des études plus développées. Certains Conseillers pédagogiques nous ont déjà promis leurs exposés devant le C.P.R. de Paris ; mais pourquoi ne serait-ce pas un Collègue de province qui montrerait l'exemple ?

Notons à ce sujet que les foyers des C.P.R. sont inscrits sur notre fichier pour recevoir désormais un service de notre *Bulletin*.

Petite recommandation pratique : pour faciliter notre travail matériel, quand vous écrivez vos articles, n'écrivez que sur le recto des feuilles, faites les figures sur des feuilles séparées. Envoyez vos articles six semaines environ avant la date de publication du *Bulletin*.

● Les Annales du Baccalauréat et du B.E.P.C.

Les adhérents de l'A.P.M. en règle avec la trésorerie, ont reçu ou vont incessamment recevoir les Annales du Baccalauréat et celles du B.E.P.C. représentant les numéros 172 et 173 de notre *Bulletin*.

Les Collègues qui ont négligé jusqu'ici de renouveler leurs cotisations sont priés d'effectuer ce renouvellement sans tarder afin que l'expédition des *Annales* puisse leur être faite dès le début de janvier ; par un versement trop tardif de leurs cotisations ils s'exposeraient à ne plus recevoir ces Annales qui seront rapidement épuisées (cette organisation de la distribution des Annales a été décidée par le Comité dans sa réunion du 20 octobre 1955).

Question sans réponses...

A propos de Normalisation.

Dans le *Bulletin* n° 170, on a pu lire une assez surprenante recommandation du Comité Technique de l'Organisation Internationale de Normalisation.

Rectifions d'abord une faute typographique qui est notre fait. A la quatrième ligne à partir du bas, le signe de multiplication est une croix et non $+$; nos Collègues ont sans doute rectifié d'eux-mêmes.

Mais que pensent-ils de cet angle découpé « par deux lignes droites se terminant au même point » et de cet angle analytique, « rapport de l'arc découpé sur la circonférence d'un cercle au rayon de ce cercle » ?

Un Collègue nous demande de rappeler qu'un fascicule (FD X, n° 02-005) de l'A.F.N.O.R. a été adressé (le 25 février 1954) par M. le Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré, à MM. les Professeurs de sciences, avec recommandation d'en suivre les préceptes.

Dans ce fascicule, on peut lire (p. 17) :

— Le symbole « arc AB » désigne la portion d'une courbe non orientée comprise entre les points A et B. On peut aussi employer le symbole AB. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, le symbole arc AB représente aussi la longueur de l'arc. Dans le cas d'une courbe fermée, la définition de l'arc est à préciser.

— Le symbole $\overline{\text{arc AB}}$ désigne la valeur algébrique de l'arc d'origine A et d'extrémité B (pris sur une courbe orientée).

Cependant, ce problème de la normalisation ne se pose pas qu'en classe de Mathématiques. Que signifie notre exigence rigoureuse à ce sujet, si l'usage courant (c'est-à-dire les habitudes typographiques, la grande presse et même le *Journal Officiel*) n'observe pas ces règles, fussent-elles légales ? Les billets de dix mille francs portent les signatures réglementaires et la mention « 10.000 frs » qui l'est moins...

L'A.P.M. doit-elle reprendre sa campagne en faveur de la normalisation ?

Tables numériques.

Selon les examens, les tables de valeurs numériques, dont l'usage est autorisé, diffèrent. Pour le seul Baccalaurat, en Mathématiques Élémentaires, on autorise la table de logarithmes des fonctions circulaires ; en Sciences Expérimentales, on autorise l'emploi des tables des valeurs naturelles.

Est-il possible de fixer quel serait le sommaire idéal d'une table de valeurs numériques pour les élèves du Second Degré et du Technique ?

(Question posée par un Collègue de Lyon et transmise par M. THOVERT).

II. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS

Une nouvelle préparation à l'Agrégation

Au contraire de ce qui existe depuis longtemps dans beaucoup de Facultés de province, la Faculté des Sciences de Paris ne comportait, jusqu'à une époque récente, aucune préparation à l'Agrégation de Mathématiques. Quand on sait les éminents services que les cours de Faculté ont rendus pour le recrutement d'un personnel qualifié, on est pour le moins étonné que rien n'eût été prévu, à Paris, hormis la possibilité, pour un petit nombre de privilégiés, d'être nommés pour un an, auditeurs à l'E.N.S.

Nous nous réjouissons d'autant plus d'annoncer que, sous l'impulsion du Doyen PÉRÈS, et grâce au concours actif de M. ZAMANSKY, une préparation vient d'être organisée. L'Enseignement Supérieur rend ainsi le plus estimé des services à l'Enseignement du Second Degré, son fournisseur attitré en étudiants.

Dès l'annonce de l'ouverture des cours, une cinquantaine de candidats se sont inscrits ; ce succès montre combien l'initiative répond à un besoin véritable. Il est envisagé d'organiser deux séries de séances qui pourraient être mieux adaptées aux niveaux divers des candidats. Le même souci pédagogique présidera au choix des

problèmes qui ne seront pas tout de suite des problèmes de concours dans toute leur ampleur.

Les cours ont lieu à l'Institut Henri-Poincaré (où l'on s'adressera pour des renseignements complémentaires), le jeudi et le samedi. Mme LÉVY-BRUHL, MM. BASTIEN, DAVID et FRENKEL collaboreront, sous la direction de M. ZAMANSKY, pour l'étude des leçons de Mathématiques Élémentaires et de Spéciales, ainsi que pour la correction des problèmes (corrigés huit jours après leur remise ; pour les candidats empêchés par des obligations professionnelles, les devoirs pourront être adressés par la poste).

À côté de ces séances classiques de leçons et de problèmes, des cours de perfectionnement sont prévus, en particulier pour les candidats n'ayant pu suivre un cycle suffisant des classes de Spéciales.

Cette nouvelle préparation aidera certainement des candidats. Elle agira donc heureusement dans la voie du progrès du recrutement des professeurs.

En Province.

À notre connaissance, des préparations à l'Agrégation sont organisées dans les Facultés de Bordeaux, Caen, Lille, Lyon, Marseille, Montpellier, Nancy, Poitiers, Rennes, Strasbourg et Toulouse. En cas d'omission, prière de nous le signaler et de nous excuser : nous nous empresserons de rectifier.

Nous sommes heureux de pouvoir publier l'horaire des cours de la préparation organisée à Lille :

— Mercredi 14 h. à 15 h. 30, Mme LELONG : Leçons d'analyse, correction du problème d'analyse (une semaine sur trois) ;

15 h. 30 à 17 heures, M. POITOU : Leçons de Mathématiques Élémentaires.

— Jeudi 10 h. 30 à 12 h. 30, M. GERMAIN : Leçons de mécanique, correction du problème de mécanique (une semaine sur trois) ;

14 h. à 15 h. 30, M. DECUYPER : Leçons de Mathématiques Spéciales ;

15 h. 45 à 17 h., M. DECUYPER : Correction du problème de Mathématiques Élémentaires ou Spéciales.

Les candidats ont à remettre chaque semaine un problème portant alternativement sur analyse, mécanique, spéciales ou élémentaires. Les auditeurs sont au nombre de 14 (dont 10 déjà titulaires du diplôme). Résultats obtenus en 1954-55 : Agrégation féminine : cinq candidates, une reçue, trois admissibles dont deux ont obtenu l'équivalence du C.A.P.E.S. ; Agrégation masculine : neuf candidats, trois reçus, un admissible déjà titulaire du C.A.P.E.S.

Le nouveau C.A.P.E.T. A₁

L'Education Nationale des 29 septembre et 6 octobre signale une nouvelle organisation du Certificat d'aptitude au Professorat de l'Enseignement Technique, section A₁. Deux options sont désormais prévues : sciences mathématiques ou sciences physiques. Le concours sera ainsi rendu plus accessible aux licenciés ès-sciences ; d'autre part, cette nouvelle organisation va vers une plus grande spécialisation des professeurs qui est conforme à l'évolution générale. Une nouvelle session spéciale du C.A.P.E.T. a été prévue pour le 15 novembre.

D'autre part, *L'Education Nationale* (13 et 27 octobre) signale que les titulaires d'une licence d'enseignement ayant exercé au moins un an dans un établissement public (depuis trois ans au plus) peuvent, après une inspection générale et à condition de satisfaire à une seule épreuve (consistant en un exposé scientifique), recevoir l'équivalence de la première partie du professorat A₁.

A propos du baccalauréat

La lettre que nous avons adressée à M. le Directeur Général de l'Enseignement Supérieur, au nom de l'A.P.M. et à propos de l'épreuve de Mathématiques à la session de juin 1955 (voir *Bulletin* n° 170), est jusqu'à présent restée sans réponse.

Plus favorisé que nous, un Parlementaire a obtenu une réponse du Ministre à l'une de ses questions écrites. Notre Collègue CANONGE, qui nous le signale, nous communique l'extrait du *Journal Officiel* (Assemblée Nationale, séance du 4 octobre 1955, page 4785) ; nous reproduisons ce qui concerne les Mathématiques :

« 17337. — M. Jean NOCHER signale à M. le Ministre de l'Education Nationale qu'en dépit de ses questions écrites du 8 juillet et du 8 septembre 1954, les sujets de mathématiques et de français proposés cette année aux candidats de Première semblent avoir été choisis pour multiplier les pièges, les risques ou les aléas. La solution du problème de Mathématiques, mal équilibré et sans gradation, dépendait de la connaissance plus ou moins heureuse d'une formule du cours de Seconde...

RÉPONSE. — Les sujets du Baccalauréat sont choisis par le Ministre de l'Education Nationale parmi les sujets proposés par les Facultés et retenus par des Commissions comprenant, un doyen, un professeur de Faculté, un inspecteur général de l'Instruction publique et un professeur agrégé. Il semble, dans ces conditions, que le choix des sujets soit entouré des meilleures garanties possibles. Il est exact que le problème de Mathématiques des séries A', C, C', M et T de la première partie était fondé sur la connaissance d'un théorème qui figure explicitement au programme de la classe de Seconde, mais ce théorème, étant tout à fait classique, est souvent utilisé, et on peut exiger qu'il soit connu des candidats ; d'autre part, l'énoncé du problème portait : « On donne dans l'espace un segment AB de milieu O », cette indication supplémentaire étant donnée pour attirer l'attention des candidats sur le fait qu'ils devaient utiliser le théorème en question. Ce problème comportait ensuite des difficultés variées, qui permettaient de juger de la précision des connaissances et de l'intelligence des candidats. »

VIII^e Congrès international d'Histoire des Sciences

Organisé sous les auspices de l'Académie et de l'Union Internationale d'Histoire des Sciences, le VIII^e Congrès International d'Histoire des Sciences se tiendra à Florence du 3 au 9 septembre 1956 (avec clôture à Milan).

Le Congrès se divisera en quatre sections :

- a) histoire de la mathématique, physique et astronomie ;
- b) histoire de la chimie et pharmacie ;
- c) histoire de la médecine et biologie ;
- d) histoire des sciences appliquées et technologie.

Lettres d'inscription, informations et suggestions : s'adresser au Secrétariat du Congrès, Museo di Storia della scienza, Piazza dei Giudici 1, Firenze.

Cotisation : \$ 10 pour chaque membre ; \$ 5 pour les membres de leurs familles (à envoyer directement ou par l'Agence Cook). Date limite pour l'envoi des communications : 1^{er} avril 1956.

III. ETUDES

Diophante et la tradition diophantienne

L'époque de la vie de DIOPHANTE D'ALEXANDRIE est fort incertaine. Il fleurissait peut-être dans la seconde moitié du III^e siècle. Ses *Arithmétiques* sont un recueil assez confus de problèmes numériques, compilés, au moins en partie, sur des sources antérieures remontant au moins jusqu'à l'école de Pythagore, si ce n'est jusqu'à la Mathématique babylonienne. De ces problèmes, les uns sont déterminés, mais la plupart sont indéterminés, avec la condition que les solutions soient rationnelles. DIOPHANTE se contente d'ailleurs d'une solution particulière, obtenue au moyen d'artifices qui ne se prêtent pas à la généralisation. Le système des notations se réduit à des abréviations et ne comporte que la représentation d'une seule inconnue, dont les diverses puissances, jusqu'à la sixième, et leurs inverses, ont des symboles spéciaux.

Il y a là une ébauche de notation, encore fort insuffisante, en particulier du fait qu'une seule inconnue peut être utilisée. Mais cette insuffisance même du symbolisme oblige le mathématicien à une grande habileté dont en fin de compte la science a profité.

Pour donner un aperçu des procédés de DIOPHANTE, prenons dans la traduction VER ECKE quelques exemples précis :

Livre II, proposition XX : « Trouver deux nombres tels que le carré de chacun d'eux, diminué du nombre restant, forme un carré.

« Que le plus petit nombre soit 1 arithme accru d'autant d'unités qu'on voudra, notamment de 1 unité, et que le plus grand nombre soit le carré du plus petit nombre, à moins d'un carré d'arithme, afin que le carré du plus petit nombre, diminué du plus grand nombre, forme un carré » (le petit nombre est $x + 1$, le grand $(x + 1)^2 - x^2$, la différence entre le carré du petit et le grand est alors x^2).

« Dès lors, puisque le carré du plus petit nombre est 1 carré d'arithme plus 2 arithmes plus 1 unité, il s'ensuit que le plus grand nombre sera ce qui est ajouté au carré de l'arithme, c'est-à-dire 2 arithmes plus l'unité [$(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$], et il s'établit ainsi que le carré du plus petit nombre, diminué du plus grand, forme un carré. Il faut aussi que le carré du plus grand nombre, c'est-à-dire 4 carrés d'arithme, plus 4 arithmes plus 1 unité, diminué du plus petit nombre, forme un carré. Mais le carré du plus grand nombre, diminué du plus petit nombre, donne 4 carrés d'arithme plus 3 arithmes, ce que nous égalons à un carré. Formons le carré de 3 arithmes, et l'arithme devient $3/5$ ($4x^2 + 3x = 9x^2$, $x = 3/5$). Le plus petit nombre sera $8/5$; le plus grand nombre sera $11/5$, et ces nombres satisfont à la proposition. »

Livre IV, proposition XXIV : « Partager un nombre donné en deux nombres, et faire en sorte que le produit de ces nombres soit un cube à moins de la racine de ce cube.

« Que le nombre donné soit 6. Posons que le premier nombre est 1 arithme, et il s'ensuit que le second nombre restant sera 6 unités moins 1 arithme. (Il faut donc résoudre $x(6 - x) = y^3 - y$).

« Il faut encore avoir que le produit de ces nombres soit un cube à moins de sa racine. Mais le produit des nombres sera 6 arithmes moins 1 carré d'arithme, ce qui doit être égal à un cube à moins de sa racine. Formons le cube d'une quantité quelconque d'arithmes moins 1 unité, notamment, le cube de 2 arithmes moins 1 unité. Le cube de cette expression, diminué de cette expression même, forme 8 cubes d'arithmes plus 4 arithmes moins 12 carrés d'arithme ; ce que nous égalons à 6 arithmes moins 1 carré d'arithme. (On pose $y = 2x - 1$, d'où $y^3 - y = 8x^3 + 4x - 12x^2$, et l'équation $6x - x^2 = 8x^3 + 4x - 12x^2$).

« Or, si les quantités d'arithmes étaient égales de part et d'autre dans l'équation, il resterait des cubes d'arithmes égaux à des carrés d'arithmes et l'arithme serait rationnel. (Si les coefficients de x étaient égaux dans les deux membres, l'équation aurait une racine rationnelle évidente ; il s'agit désormais de modifier les hypothèses arbitraires du début de la solution pour arriver à ce cas particulier, et nous saisissons ici sur le vif un raisonnement purement analytique). Mais 4 arithmes proviennent d'un excédent sur 2 arithmes, notamment de l'excédent de trois fois 2 arithmes. D'autre part, si trois fois 2 arithmes sont diminués de 2 arithmes, ils forment deux fois 2 arithmes, tandis que 6 a été pris arbitrairement par hypothèse. Dès lors, nous sommes amenés à trouver, comme pour 2, qui est la quantité d'arithmes, un nombre qui, pris deux fois, forme 6. Or, ce nombre est 3. En conséquence, cherchons à égaler 6 arithmes moins 1 carré d'arithme à un cube à moins de sa racine. Posons maintenant que la racine du cube est 3 arithmes moins 1 unité ; le cube de cette racine, diminué de cette racine même, forme 27 cubes d'arithme plus 6 arithmes moins 27 carrés d'arithme, ce que nous égalons à 6 arithmes moins 1 carré d'arithme, et l'arithme devient 26/27.

« Revenant aux choses posées, le premier nombre sera 26/27, et le second sera 136/27. »

Le livre VI, le dernier des treize livres qui soit arrivé jusqu'à nous, s'occupe des triangles rectangles en nombres. On savait depuis les anciens Babyloniens trouver un triangle rectangle dont les côtés soient mesurés par des entiers. Si m et n sont deux nombres premiers entre eux de parités différentes, et l un entier quelconque, les trois côtés du triangle sont : $l(m^2 + n^2)$, $l(m^2 - n^2)$ et $2lmn$.

Voici quelques énoncés de problèmes du livre VI :

I. — « Trouver un triangle rectangle tel que le nombre de l'hypoténuse, diminué de chacun des nombres des perpendiculaires, forme un cube. »

La solution consiste à poser $l = 1$, $m = x$, $n = 3$, d'où l'équation : $x^2 + 9 - x^2 + 9 =$ un cube, mais 18 ou $2n^2$ n'est pas un cube, prenons donc $n = 2$, et une des conditions du problème est satisfaite. Il faut de plus que $m^2 + n^2 - 2mn$ soit un cube, ou $x^2 + 4 - 4x$, carré de $x - 2$. Egalons donc $x - 2$ à un cube, 8 par exemple. Il vient $x = 10$, et le triangle a pour côtés 104, 96 et 40.

III. — « Trouver un triangle, rectangle, tel que le nombre de son aire, augmenté d'un nombre donné, forme un carré. »

Réponse : $l = 1$, $m = 24/5$, $n = 5/24$, le nombre donné étant 5.

IX. — « Trouver un triangle rectangle, tel que le nombre de son aire, diminué du nombre constituant la somme de ses perpendiculaires, forme un nombre donné. »

Le nombre donné étant 6, le triangle aura pour côtés : $\frac{18}{35}, \frac{270}{35}$
 et $\frac{168}{35}$.

XXI. — « Trouver un triangle rectangle, tel que le nombre de son périmètre soit un carré, et que ce périmètre, augmenté du nombre de l'aire du triangle, forme un cube. »

Ces quelques exemples suffiront à dégager les caractéristiques de l'Algèbre de DIOPHANTE. Il y a là une Mathématique toute gratuite, sans applications pratiques immédiates, une sorte d'art pour l'art, qui ne pouvait s'épanouir que dans des écoles et être cultivée par des professionnels de l'enseignement. En cela, elle se distingue nettement du courant plus pratique qui apparaît dans ARCHIMÈDE, HÉRON ou PTOLÉMÉE. Il n'empêche qu'il y a là un aspect très vivace de la science mathématique, qui remonte d'une part aux exercices des Babyloniens et qui, d'autre part, fera sentir son influence, très nette et très salutaire, aux XVI^e et XVII^e siècles.

L'ancienne analyse diophantienne

L'analyse des nombres rationnels, ou analyse diophantienne, se propose, comme nous l'avons vu au sujet de DIOPHANTE, de résoudre des systèmes d'équations indéterminées où les données et les inconnues sont des nombres rationnels.

Abordée sporadiquement, sous des influences arabes, par les mathématiciens du XII^e siècle, LÉONARDO PISANO particulièrement, elle ne prend un essor notable qu'au XVI^e siècle, lorsque l'œuvre diophantienne commence à être connue directement par l'Occident. BOMBELLI en traite longuement, dans une sorte de paraphrase des Arithmétiques de DIOPHANTE, dans son Algèbre de 1572. Ce travail y fait l'objet du livre III où sont étudiés 143 problèmes dont 35 sont tirés du premier livre de DIOPHANTE, 27 du second, 21 du troisième, 40 du quatrième et 20 du cinquième. Les deux premiers livres de l'Algèbre de BOMBELLI résument l'évolution purement italienne de la science, en particulier la résolution des équations des quatre premiers degrés, et l'introduction des imaginaires.

Au moment de la parution du travail de BOMBELLI, l'Allemand Guillaume HOLZMANN, ou XYLANDER, s'occupait de la traduction latine des Arithmétiques de DIOPHANTE, traduction qu'il publia à Bâle en 1575. Dès 1577, GOSSELIN de Caen, dans son Algèbre latine publiée à Paris, s'inspirait des méthodes diophantiennes dans le troisième livre, chapitres 11 et 12, où il traitait particulièrement de la double équation.

C'est ici le lieu d'indiquer ce qu'était le problème de la double équation. Il s'agissait essentiellement de trouver des valeurs des deux inconnues x et y qui rendent à la fois carrés parfaits deux polynômes donnés en x et en y . Par exemple (DIOPHANTE, Liv. 2, prop. 20) : « Trouver deux

nombres tels que le carré de chacun d'eux, accru du nombre restant, forme un carré », ou (Liv. 2, prop. 11) : « Ajouter un même nombre à deux nombres donnés, de manière que chacun d'eux forme un carré. »

Ni DIOPHANTE, ni ses imitateurs du xvi^e siècle ne cherchent une solution générale. Ils se contentent tous d'une solution particulière. Par ailleurs, bien entendu, les données sont purement numériques, et une seule inconnue est utilisée.

Si XYLANDER s'efforce de donner une traduction fidèle du texte de DIOPHANTE, BOMBELLI et GOSSELIN, plus libres par les buts qu'ils s'assignent, ne craignent pas d'utiliser leurs propres notations algébriques dans la résolution des problèmes indéterminés.

Simon STÉVIN, ce savant universel, dont on a trop tendance, en France, à sous-estimer l'influence, dans son ouvrage de 1585, écrit en français, sous le titre « L'Arithmétique de Simon STÉVIN de Bruges... », annonce « les quatre premiers livres d'Algèbre de DIOPHANTE, d'Alexandrie, maintenant premièrement traduits en français ». En fait, on ne trouve dans cet ouvrage que de simples adaptations de 81 propositions des quatre premiers livres de DIOPHANTE, dans les notations algébriques de STÉVIN, voisines de celles de BOMBELLI.

Enfin, François VIÈTE publie à Tours, en 1593, ses cinq livres de problèmes, ou Zététiques, *Zeteticorum libri V*, ouvrage d'Analyse Diophantienne, traduit en français et publié par VAU LÉZARD en 1630 sous le titre « *Les cinq livres des Zététiques de François VIÈTE* ». A l'encontre des auteurs précédents, le grand analyste ne se contente pas d'appliquer les méthodes de DIOPHANTE, mais il les étend et les utilise pour la résolution des problèmes les plus difficiles. VIÈTE ne craint d'ailleurs pas, dans cet ouvrage, d'utiliser parfois les méthodes du savant grec à des problèmes où la variable est continue, et qui sortent par suite de l'analyse indéterminée. On peut dire à cet égard que se dessine chez lui une évolution qui fera passer d'une étude des nombres rationnels à une étude des fonctions rationnelles, étude qui sera des plus utiles pour les créateurs du calcul intégral. Le problème : rendre rationnelle par un changement de variable, lui-même rationnel, l'expression :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

relève en effet des méthodes mêmes de DIOPHANTE, et son importance dans les intégrations est considérable. On le résoudra, soit en posant

$$ax^2 + bx + c = (xt + \sqrt{c})^2, \text{ si } c > 0,$$

soit en posant $ax^2 + bx + c = (x\sqrt{a} + t)^2$, si $a > 0$. Un changement linéaire de variable pouvant toujours ramener l'expression, lorsqu'elle est réelle, à un de ces cas, le problème de l'intégration d'une fonction irrationnelle se ramène pour un homme comme Jean BERNOULLI à un problème diophantien.

En 1621, BACHET de Méziriac publie à Paris sa célèbre édition grecque du Diophante, précédée de porismes et accompagnée d'une traduction et d'un abondant commentaire latin.

L'influence sur FERMAT de cette édition de DIOPHANTE fut considérable. Son fils en publia en 1670, à Toulouse, une réédition enrichie des

remarques de son père, remarques où sont consignées plusieurs de ses découvertes en théorie des nombres, et dont nous parlerons plus loin. En Analyse diophantienne proprement dite, les découvertes de FERMAT sont exposées principalement dans un ouvrage annexe à l'édition de son fils, *Doctrinæ Analyticæ Inventum Novum*, du Père Jacques DE BILLY. Ce travail est extrait des lettres que FERMAT adressa à son auteur qui déclare (1) : « ...Je veux dès maintenant dire en quelques mots quelles récentes découvertes lui sont dues et quelle en est la portée. En premier lieu, il y a certaines équations doubles difficiles pour lesquelles les analystes n'ont pu jusqu'à présent trouver qu'une solution unique ; BACHET lui-même affirme qu'on ne peut en trouver deux, tandis que FERMAT va en donner tout à l'heure une infinité, sans être arrêté par les nombres faux et plus petits que zéro qui se présentent souvent dans les calculs de ce genre ; il les soumettra en effet à un subtil traitement qui les réduit immédiatement à des nombres vrais. En second lieu, personne, que je sache, n'a encore résolu l'équation triple, à moins de l'avoir d'avance formée artificiellement et combinée de telle sorte que la solution en apparaisse immédiatement, même aux yeux des novices ; FERMAT a trouvé une méthode singulière pour résoudre les équations arbitrairement proposées de ce genre, en exceptant un seul cas que nous indiquerons ci-après. En troisième lieu, qui jamais a donné autant de solutions que l'on veut pour les expressions composées de cinq termes de degrés successifs ? Qui, des racines primitives, a su en tirer de dérivées du premier ordre, du second, du troisième, et ainsi de suite indéfiniment ? Personne, sans doute ; à FERMAT seul appartient cette découverte. Il n'a pas puisé ces inventions dans les ouvrages d'autrui, comme ont coutume de le faire certains arrangeurs, il les a tirées de son propre fonds, élaborées lui seul... »

Prenons maintenant quelques exemples dans l'*Inventum Novum*. Soit la double équation $-2x + 1 = \square$ $2x^2 - 4x + 1 = \square$. Il s'agit d'égaliser à des carrés les deux premiers membres. La méthode classique alors connue consistait à mettre leur différence $2x^2 - 2x$ sous forme d'un produit $2x(x - 1)$, et d'égaliser la seconde des deux expressions au carré de la demi-somme des deux facteurs $(2x - 1)^2$. On trouve la solution sans intérêt $x = 0$. En prenant les facteurs x et $2x - 2$, de demi-somme $\frac{3}{2}x - 1$, on a $2x^2 - 4x + 1 = \frac{9}{4}x^2 - 3x + 1$, d'où $x = -4$. « Cette solution, écrit DE BILLY, est, je l'avoue, un faux nombre, cependant elle peut servir à trouver des nombres vrais. Prenez $x = -4$ comme nouvelle position de l'inconnue, et substituez dans les expressions proposées ; elles deviendront $-2x + 9$ et $2x^2 - 20x + 49$,... Dans les expressions transformées, les termes indépendants de x sont carrés ; la méthode de DIOPHANTE permet donc de trouver une valeur de x . » (On égalera à des carrés, non les expressions données, mais leurs produits respectifs par 49 et par 9, et on procédera comme plus haut). « J'en retrancherai 4, puis-

(1) Traduction de P. Tannery, *Œuvres*, de FERMAT, C. III, p. 326.

que j'ai pris $x - 4$ pour représenter l'inconnue ; j'aurai ainsi une solution $\frac{5333240}{39150049}$ pour le système proposé. Ainsi, le faux nombre a permis d'en trouver un vrai qui satisfait au problème, comme on peut le vérifier. »

« C'est un champ très fertile que celui que nous avons commencé à cultiver ; car la méthode de FERMAT peut fournir une infinité de solutions non seulement pour les doubles équations, mais encore pour les autres. Soit à évaluer à un cube $8x^2 - 12x + 8$.

Prenons $2 - x$ pour racine de ce cube ; on aura $8 - 12x + 6x^2 - x^3 = 8x^2 - 12x + 8$, d'où $x = -2$, faux nombre qui satisfait à la question. Pour en avoir un vrai, substituons $x - 2$ à x dans l'expression proposée $8x^2 - 12x + 8$; la transformée sera $8x^2 - 44x + 64$ à évaluer à un cube.

On prendra pour racine de ce cube $4 - \frac{11}{12}x$ (4 étant la racine cubique de 64..., $\frac{11}{12}x$ est le quotient obtenu en divisant $44x...$ par 3 fois le carré de la racine cubique 4...), d'où je tire $x = 2 \frac{938}{1331}$. Si je retranche 2, puis-que j'ai pris $x - 2$ pour représenter l'inconnue, j'aurai pour celle-ci la valeur $\frac{938}{1331}$. »

Ces citations donneront une idée de la méthode de FERMAT, à certains égards moins en avance que celle de VIÈTE, à d'autres très supérieure, par exemple lorsque le nombre négatif est utilisé. Une étude plus complète deviendrait rapidement trop technique pour que nous insistions.

Après FERMAT, l'analyse diophantienne continue à être très cultivée, sans que toutefois aucun grand nom de mathématicien ne soit à signaler dans ce domaine au cours du XVII^e siècle. Sous l'influence de VIÈTE, la méthode évolue cependant vers une étude des fonctions rationnelles, comme nous l'avons signalé. Les notations employées sont celles de DESCARTES. En France, citons en plus du Père DE BILLY, OZANAM, dont un manuscrit, *Les six livres de l'Arithmétique de Diophante, augmentés et réduits à la spécieuse*, qui a d'ailleurs disparu, indique bien par son titre l'influence de VIÈTE.

Voici un exemple de sa méthode, tiré de son dictionnaire mathématique, édition de 1691 : « Trouver trois nombres quarréz, tels que la somme de deux quelconques soit un nombre quarré.

« Formez de ax et de by ce triangle rectangle $2abxy$, $aaxx - bbyy$, $aaxx + bbyy$; et réciproquement de bx et de ay . Ce triangle rectangle $2abxy$, $aayy - bbxx$, $aayy + bbxx$, et mettez la hauteur commune $2abxy$, et les deux bases $aaxx - bbyy$, $aayy - bbxx$, pour les côtes des trois quarréz qu'on cherche, lesquels par conséquent seront tels $4aabbxxyy$, $a^4x^4 - 2aabbxxyy + b^4y^4$, $a^4y^4 - 2aabbxxyy + b^4x^4$, car ainsi le premier fera avec chacun des deux autres un nombre quarré, par la nature du triangle rectangle, et il ne reste plus qu'à évaluer au quarré la somme des deux derniers $a^4x^4 + b^4x^4 - 4aabbxxyy + a^4y^4 + b^4y^4$. Pour cette fin, supposez $x = z - \frac{ay}{b}$, et vous aurez en entiers cette autre puissance à

égaler au quarré, $a^8y^4 - 2a^4b^4y^4 + b^8y^4 + 4a^3b^5zy^3 - 4ba^7zy^3 + 6a^6bbyyzz + 2aab^6yyzz - 4a^5b^3zy^3y - 4ab^7z^3y + a^4b^4z^4 + b^8z^4$, pour le côté duquel prenant $a^4yy - b^4yy - 2a^3bzy + \frac{a^6bbzz + aab^6zz}{a^4 - b^4}$ on trouvera $y = b^9 - 2a^4b^5 - 3a^8b$ et $z = 4ab^8 - 4a^9$, et conséquemment $x = 3ab^8 + 2a^5b^4 - a^9$, et les côtes des trois quarez qu'on cherche seront tels :

$$\begin{aligned} 6aab^{18} - 8a^6b^{14} - 28a^{10}b^{10} - 8a^{14}b^6 + 6bba^{18}, \\ a^{20} - 13a^{16}b^4 - 14a^{12}b^8 + 14a^8b^{12} + 13a^4b^{16} - b^{20}, \\ 8a^{18}bb + 16a^{14}b^6 - 16a^6b^{14} - 8aab^{18}. \end{aligned}$$

« Si l'on suppose $a = 1$ et $b = 2$, les trois quarez qu'on cherche seront tels, 1995529167424, 20464733025, 5561295897600, dont les côtes sont 1412632, 143055, 2358240. »

Le Père PRESTET consacre presque tout le second volume de ses *Nouveaux Eléments des Mathématiques*, Paris, 1689, à l'Analyse indéterminée. « J'ai résolu, écrit-il dans sa préface, toutes les questions de DIOPHANTE à cause de l'estime qu'on en fait généralement, et du soin que des auteurs illustres ont pris de les commenter. Si l'on compare leur méthode avec celle-ci, on verra l'extrême différence qui s'y trouve. J'ai résolu d'une manière générale toutes les questions qui sont déterminées, et d'une manière infinie et le plus souvent sans restriction celles qui sont indéterminées. Et, lorsque j'ai mis des restrictions, j'en ai mis le moins que j'ai pu, afin de conserver une plus grande étendue dans les résolutions infinies que je découvrirais. J'ai ajouté partout les formules littérales des résolutions générales et des résolutions infinies, afin que l'on eût dans ce volume comme une table déjà résolue des questions de DIOPHANTE, et de beaucoup d'autres qui sont d'un grand usage, comme celles des doubles et des triples égalitez... »

Voici un exemple qui montre combien ces problèmes intéressaient les mathématiciens français à l'époque même de l'invention du nouveau calcul infinitésimal. On lit page 233 de son traité :

« J'ajouterai seulement ici, pour faire encore mieux voir en particulier l'usage et l'application des triples égalités, la résolution d'un problème qui a été proposé à Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, et sur lequel ils ont bien voulu travailler. M. OZANAM en a déjà fourni trois ou quatre résolutions différentes dans un traité des lignes qui commence à paraître, et on pourrait en fournir beaucoup d'autres. Celle que je donne ici sera tirée d'une triple égalité, où l'on arrive d'abord avec une extrême facilité et sans rien supposer. J'en tirerai ensuite quelques résolutions, qui s'y rapportent naturellement. Le problème peut être posé en ces termes :

« Pour couper une grandeur connue en quatre parties, dont les six différences alternatives soient des quarez parfaits. »

En appelant $4a$ la grandeur donnée, z, y, x, v les quatre parties, il pose $z - y = 4t^2$, $z - x = 4s^2$, $z - v = 4r^2$, d'où x, y, z et v en fonction de a, t, s, r . Le problème se ramène à une triple égalité, c'est-à-dire qu'il faut évaluer à des carrés $r^2 - t^2$, $r^2 - s^2$ et $s^2 - t^2$. PRESTET donne une solution à trois paramètres n, m, l . Posant $f = n^2 + m^2$, $g = n^2 - m^2$,

$$k = \frac{12n^5 + 4nm^4}{22n^4m^4 + m^8} - 7n^8,$$

$$t = \frac{8n^2m^{16}l - 128n^8m^{12}l - 304n^{10}m^8l + 448n^{14}m^4l - 24n^{18}l}{49n^{16} - 308n^{12}m^4 + 470n^8m^8 + 44n^4m^{12} + 1m^{16}}$$

ou $2kfgnl + k^2f^2l$, $s = n^2l - m^2l + t$, $r = n^2l + m^2l + t$, $z = a + t^2 + r^2 = s^2$, $y = a - 3t^2 + r^2 + s^2$, $x = a = t^2 + r^2 - 3s^2$, $v = a + t^2 - 3r^2 + s^2$.

Après la floraison du XVII^e siècle, où les exemples précédents montrent l'exubérance exagérée des calculs, l'Analyse diophantienne des nombres rationnels fut graduellement abandonnée. Les mathématiciens du XVIII^e siècle avaient d'autres problèmes plus importants à traiter. Cependant, EULER lui consacre encore une bonne partie de son *Algèbre*, 1770, dont la traduction française parue en 1774 contient de plus les importantes additions de LAGRANGE qui écrit dans son avertissement : « Cette branche de l'Analyse a été presque abandonnée dans ce siècle ; et si on en excepte M. EULER, je ne connais personne qui s'y soit appliqué ; mais les belles et nombreuses découvertes que ce grand géomètre y a faites nous ont bien dédommagé de l'espèce d'indifférence que les autres géomètres paraissent avoir eue jusqu'ici pour ces sortes de recherches. Les commentaires de Pétersbourg sont pleins des travaux de M. EULER dans ce genre, et l'ouvrage qu'il vient de donner est un nouveau service qu'il rend aux amateurs de l'Analyse de DIOPHANTE. On n'avait point encore d'ouvrage où cette science fût traitée d'une manière méthodique, et qui renfermât et expliquât clairement les principales règles connues jusqu'ici pour la solution des problèmes indéterminés. Le traité précédent réunit ce double avantage... »

Nous avons cru devoir nous étendre un peu sur cette partie actuellement à peu près délaissée des Mathématiques. C'est que, du XVI^e à la fin du XVII^e siècle, elle a joué un rôle de premier plan, et qu'en l'oubliant on fausse la perspective de l'histoire. Elle a habitué les mathématiciens au calcul algébrique, et contribué ainsi au progrès général de notre science, facilitant en particulier la naissance des nouveaux calculs différentiel et intégral. D'autre part, comme nous allons le voir, elle a donné naissance à l'Analyse indéterminée des nombres entiers, qui porte aujourd'hui son nom même d'Analyse Diophantienne, et à la Théorie des Nombres.

La théorie des nombres et l'analyse diophantienne

Au XVII^e siècle, la théorie des nombres est née de l'étude même de l'œuvre de DIOPHANTE. C'est l'éditeur de cette œuvre, BACHET de Méziriac, qui étudie systématiquement les équations indéterminées du premier degré, principalement dans la seconde édition de ses *Problèmes délectables*, de 1624. En utilisant l'algorithme d'EUCLIDE, il démontre que deux nombres étant premiers entre eux, on peut trouver des multiples de ces nombres qui diffèrent entre eux de l'unité, ce qui lui permet de donner la solution générale en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$. Des problèmes analogues avaient déjà été traités aux Indes par ARYABHATA et BRAHMAGUPTA, en Occident par LÉONARD DE PISE, REGIOMONTANUS, TARTAGLIA, mais BACHET a un souci de la rigueur qu'il serait vain de chercher avant lui dans ce domaine, sauf chez son modèle constant, EUCLIDE.

Le Père MERSENNE souleva la question des nombres parfaits, multiples et sous-multiples, ce qui amena des recherches dans ce domaine, de DESCARTES et de FERMAT en particulier. L'étude des nombres parfaits n'avait pas cessé d'intéresser les mathématiciens, mais ils étaient arrêtés par la recherche des nombres premiers de la forme $2^p - 1$, et les listes de nombres parfaits que l'on trouve chez les auteurs du xvi^e siècle sont toutes fautives. STIFEL, par ailleurs, avait indiqué le nombre des diviseurs d'un nombre donné, mais cet ensemble de recherches, y compris celles de DESCARTES et de FERMAT, relèvent beaucoup plus de l'Algèbre et de l'Analyse combinatoire que de la théorie des nombres proprement dite. C'est ainsi que FERMAT trouve vers 1636 la règle pour les nombres sous-doubles : si n et P premier satisfont à la relation $2^n - 1 = P(2^{n-3} + 1)$, le nombre $3P \times 2^{n-1}$ est sous-double, c'est-à-dire égal à la moitié de la somme de ses diviseurs, lui-même étant exclu de cette somme. Il croit que la règle donnera une infinité de nombres sous-doubles. En 1638, DESCARTES déclare avec raison qu'elle ne peut en donner que deux, P ne pouvant prendre que les valeurs 5 et 7.

FERMAT et DESCARTES donnent la règle de TABIT BEN KORAH (ix^e siècle), pour la formation de couples de nombres amiables, c'est-à-dire tels que chacun d'eux égale la somme des diviseurs de l'autre ; si $R = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $S = 3 \cdot 2^n - 1$, $P = 9 \cdot 2^{n-1} - 1$ sont trois nombres premiers, les deux nombres $2nP$ et $2nRS$ sont amiables. Vers la même époque, les deux savants fabriquent à plaisir des nombres sous-multiples, ainsi que leurs émules SAINTE-CROIX et FRÉNICLE. C'est ainsi que DESCARTES donne le sous-double 1476304896, et indique des règles comme : « Tout sous-double divisible par 3, sans l'être par 7, 9, ni 13, multiplié par 273, donne un sous-triple. »

Mais ces amusements ne vont pas très loin. Ce ne sont que d'habiles combinaisons algébriques qui impliquent la connaissance de la somme des diviseurs d'un nombre décomposé en ses facteurs premiers, mais n'ont rien à voir avec la vraie théorie des nombres, que FERMAT va créer sur ces entrefaites.

Lorsque commence sa correspondance, en 1636, il est à peu près ignorant de tout en la matière. Et, cependant, nous le voyons, dès 1639, essayer le savoir de ses émules, comme FRÉNICLE, en leur proposant des problèmes qu'il sait impossibles, comme « trouver un triangle rectangle duquel l'aire soit un nombre carré, trouver deux carrés carrés desquels la somme soit carrée carrée, trouver quatre carrés en proportion arithmétique continue, trouver deux cubes desquels la somme soit cube ».

En 1640, il est en possession des plus importantes de ses découvertes et de ses méthodes. Il sait que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ pour p premier, a non divisible par p . Il a montré que $2^{27} - 1$ n'est pas premier, mais admet le facteur 223, et établi que tout nombre premier de la forme $4k + 1$ est d'une seule façon somme de deux carrés, et il possède sa méthode de démonstration par la descente infinie.

Il résumera dans une lettre à CARCAVI, d'août 1659, l'ensemble de ses découvertes : « J'appelai cette manière de démontrer la descente infinie ou indéfinie... ; je ne m'en servis en commencement que pour démontrer les propositions négatives comme, par exemple :

« Qu'il n'y a aucun nombre, moindre de l'unité qu'un multiple de 3, qui soit composé d'un carré et du triple d'un autre carré.

« Qu'il n'y a aucun triangle en nombres dont l'aire soit un nombre carré. »

Interrompons ici cette citation pour donner, au sujet de cette dernière affirmation, la traduction française de l'Observation sur DIOPHANTE où FERMAT traite la même question.

« Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré ; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent, on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés, qui servent à le composer, soit également un carré. Mais si un nombre carré est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis prouver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composants formera la base, et le double de l'autre carré la hauteur.

« Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera que chacun de ces deux carrés est plus petit que les deux premiers, dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc, si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là-même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et inférieurs.

« Par le même raisonnement, on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il peut y avoir une infinité de nombres entiers plus petits. »

(On sait qu'un triangle rectangle en nombre, dont les côtés sont premiers entre eux dans leur ensemble, ont pour côtés $2mn$, $m^2 - n^2$ et $m^2 + n^2$, m et n premiers entre eux, de parités différentes ; on trouve déjà dans EUCLIDE X, comme 2 à la prop. 28, une relation analogue. L'aire est donc $mn(m^2 - n^2)$. Si elle est un carré parfait, m et n sont carrés, ainsi que $m^2 - n^2$. Soient $m = x^2$, $n = y^2$; x^4 est un carré, d'où $x^2 - y^2 = t^2$. $x^2 + y^2 = z^2$, ou encore $z^2 = t^2 + 2y^2$, $x^2 = t^2 + y^2$. Mais si $z^2 = t^2 + 2y^2$, $(z - t)(z + t) = 2y^2$, d'où $z - t = 4u^2$, $z + t = 2v^2$, et $z = v^2 + 2u^2$, $t = v^2 - 2u^2$, $y = 2uv$, $x^2 = v^4 + 4u^4$. Donc v^2 et $2u^2$ sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'aire v^2u^2 est un carré. Chacun de ces côtés est inférieur à z ...).

« Je fus longtemps, écrit FERMAT dans sa lettre à CARCAVI, sans pouvoir appliquer ma méthode aux questions affirmatives... De sorte que lorsqu'il me fallut démontrer que tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux carrés, je me trouvai en belle peine. Mais, enfin, une méditation diverses fois répétée me donna les lumières qui me manquaient, et les questions affirmatives passèrent par ma méthode, à l'aide de quelques nouveaux principes qu'il fallut joindre par nécessité...

« Il y a infinies questions de cette espèce, mais il y en a quelques autres qui demandent des nouveaux principes pour y appliquer la descente... Telle est la question suivante : Tout nombre est carré ou composé de deux, de trois ou de quatre carrés. (Il avait énoncé cette proposition plus généralement, dans une lettre datée à tort, dans les Œuvres Complètes, de septembre ou octobre 1636, mais qu'il faut reporter à mai ou juin 1638). Tout nombre est la somme de trois nombres triangulaires au plus, ou de quatre carrés, ou de cinq pentagones, de six hexagones, sept heptagones, etc...

« Celle que j'avais proposée à M. FRÉNICLE et autres (WALLIS, LORD Brouncker) est d'aussi grande et même plus grande difficulté : Tout nombre non carré est de telle nature qu'il y a infinis carrés qui, multipliant ledit nombre, font un carré moins 1. Je la démontre par la descente appliquée d'une manière toute particulière. (Il s'agit de l'équation dite à tort, depuis EULER, équation de PELL : $ax^2 + 1 = y^2$).

« J'ai ensuite considéré certaines questions qui, bien que négatives, ne restent pas de recevoir très grande difficulté, la méthode pour y pratiquer la descente étant tout à fait diverse que les précédentes, comme il sera aisé d'éprouver. Telles sont les suivantes : Il n'y a aucun cube divisible en deux cubes. Il n'y a qu'un carré en entiers qui, augmenté du binaire, fasse un cube. Ledit carré est 25.

« Il n'y a que deux carrés en entiers, lesquels, augmentés de 4, fassent un cube. Lesdits carrés sont 4 et 121.

« Toutes les puissances carrées de 2, augmentées de l'unité, sont nombres premiers... » Cette dernière proposition, que FERMAT n'a cessé d'énoncer tantôt dubitativement, tantôt comme ici, et vers la fin de sa carrière seulement, d'une façon absolue, et qui porte sur les nombres $2^{2n} + 1$, est fausse, comme EULER l'a vérifié pour $2^{32} + 1$ divisible par 641. Il est curieux de constater ici l'obstination de FERMAT, d'autant plus étrange qu'il avait effectué la factorisation aussi difficile de $2^{37} - 1$. Tant une conviction profonde, ou un préjugé d'inventeur, peuvent être un obstacle insurmontable.

Mais ce qui frappera le plus dans la Correspondance de FERMAT, c'est que l'on n'y rencontre jamais son grand théorème sur l'impossibilité de l'équation $x^n + y^n = z^n$ pour $n > 2$. Seuls y figurent les deux cas particuliers $n = 3$ et $n = 4$. Il y a là une forte présomption pour croire qu'effectivement, il n'avait pas de méthode pour démontrer le cas général, sa descente infinie devenant impuissante, dès $n = 5$. C'est dans ses remarques sur DIOPHANTE, notes personnelles écrites en marge de son exemplaire, pieusement recueillies et publiées par son fils en 1670, que la proposition est affirmée. Voici la traduction de sa remarque à la proposition 8 du livre II ; trouver deux carrés dont la somme soit un carré : « Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré ; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir. » Les mathématiciens doivent être reconnaissants à Samuel FERMAT de son indiscrétion. La publication de cette note personnelle, que son père n'avait jamais voulu rendre publique, a

été un des principaux stimulants pour les théoriciens du nombre, et nous lui devons la plupart des grands progrès accomplis dans ce domaine.

Au XVIII^e siècle, l'œuvre de FERMAT est reprise principalement par EULER, LAGRANGE, LEGENDRE et GAUSS.

EULER publia en 1736 la première démonstration du théorème de FERMAT affirmant que $x^{p-1} - 1$ est divisible par p , si ce nombre p est premier et ne divise pas x . Il généralisera d'ailleurs la proposition en 1760 en introduisant la fonction $\phi(n)$ ou indicateur de n . L'indicateur est égal au nombre des entiers inférieurs à n et premiers avec lui. En 1770, WARING énonçait un théorème qu'il attribuait à John WILSON : si p est premier, $1 + (p-1)!$ est divisible par p . LEIBNIZ, dans un de ses manuscrits, avait déjà énoncé cette proposition, dont LAGRANGE publia une preuve en 1773, en remarquant de plus que la proposition réciproque est vraie.

Le problème des partitions fut attaqué pour la première fois par EULER en 1741, qui discuta la question de trouver le nombre de façons de décomposer un nombre donné en une somme de n termes, n donné, soit que les termes soient tous inégaux, soit que certains soient égaux entre eux. Il reprit la question en 1748 dans son *Introductio in Analysin Infinitorum*. Entre 1773 et 1782, il s'occupa de triangles dont les côtés et les médianes sont rationnels, et, pendant quarante années, il s'intéressa à l'affirmation de FERMAT et de BACHET, suivant laquelle tout nombre est la somme de quatre carrés au plus. Ce n'est que vingt ans après ses premières recherches sur la question qu'il publia, en 1751, quelques résultats importants, en particulier sa formule qui exprime le produit de deux sommes de quatre carrés sous une forme analogue :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = x^2 + y^2 + z^2 + v^2,$$

avec $x = ap + bq + cr + ds$, $y = aq - bp \pm cs \mp dr$,

$$z = ar \mp bs - cp \pm dq, \quad v = as \pm br \mp cq - dp.$$

La première preuve publiée fut celle de LAGRANGE en 1772, où l'auteur reconnaissait tout ce qu'il devait à la publication précédente d'EULER. Celui-ci publiait à son tour, l'année suivante, une preuve plus simple que celle de LAGRANGE, et qui n'a pas été dépassée depuis.

L'équation, dite de PELL, $x^2 - Ay^2 = 1$, où les lettres représentent des entiers, est née, comme nous l'avons vu, tout au moins aux temps modernes, du défi porté par FERMAT aux mathématiciens anglais. WALLIS et BROUNCKER trouvèrent une méthode permettant de découvrir les racines lorsqu'elles existent, mais n'en établissant pas l'existence.

Cette méthode, comme celle de BACHET pour les équations indéterminées du premier degré, revient en dernière analyse à l'Algorithme d'EUCLIDE, ou si l'on préfère, à celui des fractions continues. En 1765, EULER expose la méthode des mathématiciens anglais d'une façon plus claire en utilisant la fraction continue qui exprime $\sqrt{A}$, et trouve plusieurs faits importants. Un an ou deux après, toujours au moyen du même algorithme, LAGRANGE prouve l'existence des racines. L'importance de l'équation de PELL réside dans le fait que toute équation indéterminée du second degré se ramène à elle. EULER a résolu un grand nombre d'équations indéterminées. A la suite de FERMAT, il a étudié quelques-unes des plus simples formes quadratiques, et il a donné une preuve de l'impossibilité de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$, en nombres entiers.

Il se présente en somme, en théorie des nombres, comme le brillant continuateur de l'œuvre du grand mathématicien français.

Nous venons de citer plusieurs fois le nom de LAGRANGE.

Ici, comme dans bien d'autres branches de l'Analyse, ce disciple d'EULER entre plusieurs fois en compétition avec son maître, chacun d'eux travaillant à partir de résultats obtenus par l'autre, tantôt en simplifiant les preuves, tantôt en déduisant de nouveaux résultats.

En plus de ses travaux déjà cités, LAGRANGE a montré qu'une congruence de module premier a un nombre de racines au plus égal à son degré. Surtout, en 1773, il fit les premières recherches générales sur les formes quadratiques binaires.

LEGENDRE s'intéressa en 1785 aux congruences binômes. Pour p premier, il prouva qu'il y a exactement $\Phi(e)$ nombres appartenant à l'exposant e , si e divise $p-1$, ce qui signifie qu'un de ces nombres satisfait à la congruence $a^e - 1 = 0 \pmod{p}$, mais ne satisfait à aucune congruence $a^m - 1 = 0 \pmod{p}$ où $m < e$. Il donna en 1808 une preuve insuffisante de l'existence d'une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique $a + nb$, où a et b sont premiers entre eux. C'est DIRICHLET qui devait, en 1837, prouver définitivement cette proposition. En 1798, LEGENDRE donnait une expression du nombre de décomposition d'un entier en somme de deux carrés et établissait que tout nombre qui n'appartient ni à la forme $8n+7$, ni à la forme $3n$ est la somme de trois carrés. GAUSS devait, en 1801, apporter une preuve plus claire de ce fait. CAUCHY ayant réussi en 1813, 1815 à établir la proposition de FERMAT : Tout nombre est la somme de m nombres polygones de m côtés, LEGENDRE simplifia immédiatement la preuve de CAUCHY et montra que tout nombre suffisamment grand est la somme de quatre ou cinq polygones de m côtés, selon que m est impair ou pair.

Il déduisit de formules de son traité de 1828, sur les fonctions elliptiques, que le nombre de façons dans lesquelles un nombre N est la somme de quatre triangulaires est égal à la somme des diviseurs de $2N+1$, et trouva le nombre de façons dans lesquelles N est la somme de huit triangulaires.

En 1828-29, JACOBI comparait deux séries infinies de la même fonction elliptique pour montrer que, si p est impair et si $s(p)$ est la somme de ses diviseurs, le nombre des représentations de 2^ap comme somme de quatre carrés est $8s(p)$ ou $24s(p)$ selon que $a=0$ ou >0 . D'une façon analogue, LEGENDRE et lui-même prouvèrent simultanément qu'il y a exactement $s(p)$ groupes de quatre nombres impairs dont la somme est $4p$. On doit encore à LEGENDRE le premier énoncé, en 1785, de la loi de réciprocité des résidus quadratiques. Sa première démonstration de cette loi était d'ailleurs incomplète. GAUSS en donna ensuite six preuves exactes. Les travaux arithmétiques de LEGENDRE ont porté surtout sur les formes quadratiques. Ils ont donné lieu principalement à ses *Recherches d'analyse indéterminées* en 1785, son *Essai sur la théorie des nombres* en 1798, réédité en 1808, et sa *Théorie des Nombres* parue en 1830.

Le dernier grand nom à signaler en Théorie des Nombres à la fin du XVIII^e siècle est celui de GAUSS. Il écrit lui-même dans la préface de ses *Disquisitiones Arithmeticae*, parues en 1801 et traduites en français par

POULLET-DELISLE : « ...Lorsqu'en 1795 (il avait alors 18 ans), j'ai commencé à m'appliquer à ce genre de considérations, je n'avais absolument aucune idée de tout ce qui avait été fait sur ce sujet, même par les modernes, et... j'étais privé de tous les secours que j'aurais pu tirer de leurs travaux. Occupé dans ce temps d'une autre matière, je tombai par hasard sur une vérité importante de l'Arithmétique (-1 est résidu de tous les nombres premiers de la forme $4n + 1$, et non résidu de tous les nombres premiers de la forme $4n + 3$, autrement dit l'équation $x^2 + 1 = py$, où p est premier, est possible ou non en nombres entiers selon que p est un multiple de 4 plus ou moins 1) ; comme elle me sembla très belle par elle-même, et que je la soupçonnais liée à d'autres plus importantes, j'employai toute la contention d'esprit dont j'étais susceptible à découvrir les principes sur lesquels elle s'appuyait, et à en trouver une démonstration rigoureuse ; le succès ayant répondu à mes vœux, je me sentis tellement entraîné par l'attrait de ces questions, qu'il me fut impossible de les abandonner, et, comme une vérité me conduisait à une autre, la plus grande partie des quatre premières sections était déjà terminée avant que j'eusse rien vu des travaux des autres géomètres sur ce sujet. (Les quatre premières sections forment la théorie des congruences). M'étant ensuite trouvé à même de lire les ouvrages de ces hommes de génie, je ne tardai pas à reconnaître que j'avais employé la plus grande partie de mes méditations à des choses faites depuis longtemps ; mais, animé d'une nouvelle ardeur, je m'efforçai, en suivant leurs pas, de cultiver plus avant le champ de l'Arithmétique, et telle a été l'origine des sections V, VI et VII (formes quadratiques et équations $z^n - 1 = 0$). »

Nous venons de donner un aperçu de l'histoire de la théorie des nombres que l'on pourrait appeler classique. Elle a été étudiée tout au long du XIX^e siècle et pendant le XX^e, mais les noms à citer seraient alors très nombreux.

Par ailleurs, déjà avec GAUSS, elle commence à subir une mutation qui conduira à la théorie des corps de nombres algébriques.

Jean ITARD.

L'enseignement de la Statistique et de la Probabilité

9^e rencontre organisée par la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Ramsau am Dachstein (Autriche), 23-31 août 1955. Rapport de Mlle FÉLIX, membre de la Commission.

Le sujet mis à l'étude était : « L'enseignement de la Statistique et de la Probabilité ». La rencontre réunit 23 savants ou professeurs venus de sept pays : Allemagne, Autriche, Belgique, Espagne, France, Yougoslavie. Quelques défections au dernier moment, et la simultanéité d'un Congrès en Amérique, nous privèrent de la présence de spécialistes de la Probabilité sur lesquels nous comptions, de sorte qu'il a été surtout question de Statistique. Participèrent surtout aux discussions, outre notre Secrétaire général, organisateur de la rencontre, M. GATTEGNO, Profes-

seur à l'Université de Londres, et notre Président, M. G. CHOQUET, Professeur à la Sorbonne, M. M. KENDALL, Directeur des recherches à la « London School of Economics » de l'Université de Londres, M. G. KUREPA, Professeur à l'Université de Zagreb, Vice-Président de la Commission internationale de l'Enseignement Mathématique, M. PUIG ADAM, membre de l'Académie de Sciences, Professeur à Madrid. Mais chacun, suivant son expérience personnelle, intervenait, en particulier les Professeurs anglais et le D^r A. KOCH (Autriche), qui enseignent la statistique à l'université ou dans des instituts spéciaux.

Nous avons regretté l'absence de M. MONJALLON, due à son état de santé.

M. CHOQUET présenta tout d'abord le point de vue du Mathématicien pur, pour lequel la question est élucidée quand un exposé axiomatique est construit.

Mais dans un groupe qui a pour principal objet l'étude psychologique permettant de construire une pédagogie adaptée à tous les niveaux et à tous les élèves, nous ne pouvions en rester là : il fallait analyser l'attitude d'esprit du statisticien ou du probabiliste en action et dans son enseignement. Les spécialistes présents firent donc un examen de conscience. Faute de pouvoir transcrire les longues discussions polyglottes, je fais suivre ces quelques lignes d'un résumé des interventions de M. KENDALL, que celui-ci a bien voulu revoir et approuver.

M. GATTEGNO remarque qu'une machine à calculer fera des calculs de probabilité si elle est dirigée par un probabiliste ! Qu'est-ce qui est superposé à l'algèbre ? un sentiment personnel ? un mode de pensée ? Mais alors quelle sorte de rigueur atteint-on ? (La question fut aussi posée, en son temps, pour le calcul différentiel). La discussion souleva de nombreuses questions qui ne restèrent pas sans réponses : Pourquoi la pensée probabiliste apparaît-elle si tard dans l'histoire des Sciences ? Pourquoi l'étude des probabilités s'est-elle développée surtout en France, tandis que l'Angleterre est le pays de prédilection pour la statistique ? Ceci est-il en relation avec un mode de pensée caractéristique de chaque pays ?

Toutes ces questions sont évidemment importantes pour la pédagogie. Les notions de probabilité, de fréquence, n'appartiennent-elles qu'à la pensée adulte ? Revenant à une opinion souvent exprimée dans les rencontres qu'il organise, M. GATTEGNO regrette qu'on se préoccupe si peu de savoir ce que les enfants peuvent faire spontanément. L'expérience montre qu'ils peuvent faire beaucoup plus qu'on ne le croit généralement et qu'ils peuvent atteindre la maîtrise sur certains points quand on ne leur impose pas prématurément un cadre choisi par idées préconçues, qui les conditionne sans leur laisser leur chance de développement libre. L'action, la vie éveillent des pensées primitives qui s'organisent en expérience mathématique, puis se précisent par le dialogue, par la communication et deviennent des structures élaborées. Une maîtrise limitée, locale, est alors atteinte, qui s'étend peu à peu et devient une connaissance plus complète en se généralisant.

Quant aux moyens d'éveiller l'intérêt des élèves pour les questions de statistique et de probabilité, il ne semble pas que l'on ait éprouvé de

difficultés malgré la variété des exemples utilisés. Pour M. KOCH (Autriche), il suffit de submerger les enfants par un flot de documents, tableaux de nombres, graphiques, etc..., et l'habitude de les utiliser vient d'elle-même. M. PUIG ADAM intéresse les enfants en les faisant participer à l'examen de leurs résultats, et aussi à l'examen de la difficulté des questions posées. M. KENDALL remarque que les enfants sont intéressés par les jeux et que les questions de statistique élémentaire peuvent être présentées sous forme de jeux. M. DRENCKHAHN (Allemagne) souligne l'intérêt des enfants pour les paris aux courses, aux matches de foot-ball, etc... M. KUREPA note que les expériences possibles permettent à l'enfant d'agir et font jouer son individualité. Il me semble que, puisque la pensée statistique s'impose dans la vie moderne, il n'y a pas à chercher des exemples artificiels : on doit en trouver constamment au cours des études de toutes sortes (vérification en géométrie ou physique, données numériques en histoire ou sciences naturelles, etc...). L'enfant devrait donc être amené tout naturellement à l'état d'esprit qui lui permettra de comprendre à l'heure où un cours spécial, à programme imposé, lui sera fait.

Pour terminer cet aperçu très imparfait, il faut ajouter que bien des souvenirs que nous laisse cette rencontre ne sont pas d'ordre mathématique : nous avons rencontré, non des mathématiciens ou des professeurs abstraits, mais des hommes, des femmes, des enfants aussi, et des montagnes, des paysages... Il nous en reste, non des conclusions à utiliser paresseusement, mais des problèmes de toutes sortes à méditer, et aussi des amitiés nouvelles, une jolie aquarelle reçue en cadeau, des souvenirs d'agréables moments passés ensemble. De tout ceci, pourquoi d'autres collègues de France ne sont-ils pas venus profiter ?

*
**

Prochaines rencontres prévues :

Fin août 1956, en Yougoslavie : La pénurie de professeurs de Mathématiques. La formation des maîtres du premier degré.

Avril 1957, en Espagne : Les matériels d'enseignement mathématique.

Août 1957, en Norvège : Les Mathématiques modernes et l'enseignement destiné aux enfants qui ne poursuivront pas leurs études.

*
**

VIENT DE PARAÎTRE (publication de la Commission) : « L'Enseignement des Mathématiques », par MM. BETH, CHOQUET, DIEUDONNÉ, GATTIGNO, LICHNÉROVICZ, PIAGET. Un volume chez Delachaux et Niestlé (Neuchâtel), 32, rue de Grenelle, Paris, 7^e, 980 fr.

Un compte rendu paraîtra au prochain bulletin.

Probabilité et Mesure

Notes prises sur l'exposé de M. G. Choquet par Mlle L. Félix

Nous recevons de Princeton, au moment de la correction des épreuves, une lettre du professeur Choquet : « Cet exposé improvisé, convenable dans les circonstances où il a été fait, est insuffisant pour un texte écrit. Le Bulletin mérite mieux qu'une petite ébauche qui pourrait décevoir certains collègues. » Nous croyons cependant bien faire en laissant subsister dans ce compte rendu les pages qui suivent, pensant qu'elles peuvent servir déjà de base de réflexion pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec le sujet. Cela servira d'introduction à l'article que veut bien nous promettre M. Choquet pour « enrichir et préciser » ce qu'il a dit à Ramsau.

La Rédaction.

On sait que la géométrie élémentaire peut être fondée sur divers systèmes d'axiomes (par exemple à partir de la notion de déplacement ou de celle de symétrie) ; il en est de même de la théorie des probabilités. Nous étudierons ici brièvement l'un des fondements possibles de cette théorie.

I. — RAPPEL DE LA DÉFINITION D'UNE MESURE SUR UN ENSEMBLE

Exemple 1. — Sur le segment $(0,1)$, nous connaissons la *mesure naturelle dite de Lebesgue*. Elle vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Les mesures sont des nombres positifs ou nuls.
- 2) Si deux sous-ensembles E_1 et E_2 ont des mesures $m(E_1)$ et $m(E_2)$:
 - a) Si ces ensembles sont sans points communs, à leur réunion est attaché le nombre somme. Ainsi :

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

- b) Si ces deux sous-ensembles ont des points communs, on a :

$$m(E_1 \cup E_2) \leq m(E_1) + m(E_2)$$

Exemple 2. — Dans tout le plan, une mesure naturelle, l'aire, est attachée à tous les polygones.

Exemple 3. — Dans le plan, supposons définie une densité en chaque point x , soit $f(x)$, fonction positive continue de x . Nous savons définir par une intégrale double le poids $m(E)$ d'un domaine E . Ce poids est aussi une mesure.

Exemple 4. — Donnons un exemple abstrait, non lié à la géométrie élémentaire :

Considérons une suite finie d'éléments non précisés $x_1, x_2, \dots, x_n$ formant notre *système fondamental* U . A chaque élément x_i , associons un nombre positif a_i que nous nommerons son *poids*. A tout sous-ensemble E de U , attachons le nombre $m(E) = \sum a_i, x_i \in E$. Ce nombre satisfait aux propriétés énoncées et est encore nommé une mesure.

De même si la suite est infinie.

Notons que si U est un ensemble quelconque et si $a_i = 1$ pour tout i , $m(E)$ est le nombre des éléments de E . Ainsi, le nombre des éléments est une des mesures attachées au sous-ensemble.

Définition générale d'une mesure :

1) On considère un ensemble fondamental U , nommé *univers*. Aux sous-ensembles E de U , j'attache un *nombre positif ou nul*, $m(E)$ satisfaisant aux conditions $a)$, $b)$. Je dis avoir ainsi attaché une mesure à U .

En fait, on ne considère pas *tous* les sous-ensembles de U ; on ne considère qu'une classe $\mathcal{F}$ de ces sous-ensembles, qui satisfasse aux propriétés suivantes :

Si E_1 et E_2 appartiennent à $\mathcal{F}$, la réunion $E_1 \cup E_2$,
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'intersection } E_1 \cap E_2, \\ \text{le complémentaire } C_{\mathcal{F}} E_1 \end{array} \right.$

appartiennent à $\mathcal{F}$.

Il en résulte que la différence $E_1 - E_2$, définie quand E_2 est inclus dans E_1 , appartient bien à $\mathcal{F}$, puisque $E_1 - E_2 = E_1 \cap C_{\mathcal{F}} E_2$.

2) Dans le cas où c'est utile, on exigera aussi l'appartenance à $\mathcal{F}$ de la réunion d'une infinité dénombrable de sous-ensembles E de $\mathcal{F}$. On exigera dans ce cas les propriétés $a)$ et $b)$ pour les réunions dénombrables.

Nous ne parlerons pas ici de la construction effective de mesures générales : c'est de la technique mathématique hors de notre sujet.

II. — PASSAGE A LA PROBABILITÉ

On ajoute à la définition précédente de la mesure l'hypothèse $m(U) = 1$ ou, en tout cas, $m(U)$ fini. Nous allons voir pourquoi :

Chaque élément de U est considéré comme un *événement* d'une certaine nature. Si, parmi eux, on distingue un sous-ensemble E formé d'événements dits *favorables*, on nomme *probabilité associée à E* le rapport

$$p(E) = \frac{m(E)}{m(U)}$$

On voit donc la simplification apportée par l'hypothèse $m(U) = 1$.

1) Si les conditions précédentes sont réalisées, on dit que la mesure m définit sur l'ensemble U d'événements *une loi de probabilité élémentaire*.

Ainsi, une *loi de probabilité élémentaire sur un ensemble U d'événements est une mesure telle que la masse totale soit égale à 1*.

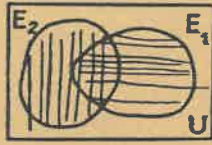
2) Supposons que, sur U , soient distinguées deux sortes d'éléments *favorables* constituant les sous-ensembles E_1 et E_2 . Dire que les éléments des deux sortes sont *incompatibles* équivaut à dire que E_1 et E_2 sont *disjoints* (c'est-à-dire sans éléments communs). Alors, d'après les propriétés de la mesure : $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$.

En introduisant la notation des probabilités, nommons p_1 et p_2 respectivement les probabilités d'un événement favorable de chaque sorte et $P_{1,2}$ la probabilité d'un événement favorable en l'un quelconque des deux sens, on a : $P_{1,2} = p_1 + p_2$.

Si les événements ne sont pas *incompatibles*, l'intersection $E_1 \cap E_2$ n'est pas vide : c'est l'ensemble des éléments favorables à la fois aux deux sens 1) et 2). Nommons $\Pi_{1,2}$ la probabilité d'un tel événement et

précisons que $P_{1,2}$ est la probabilité d'un événement favorable au moins en l'un des deux sens 1) ou 2) :

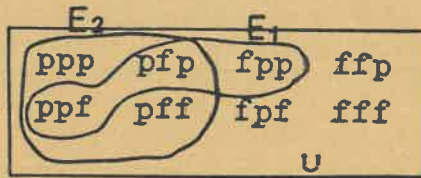
$$\Pi_{1,2} = p(E_1 \cap E_2), \quad P_{1,2} = p(E_1 \cup E_2)$$



De l'équivalence qui apparaît sur le schéma ci-contre résulte l'égalité : $P_{1,2} + \Pi_{1,2} = p_1 + p_2$.

1^{er} exemple. — On joue à pile ou face en jetant une seule fois une pièce. U est constitué par les deux événements : pile ou face. E_1 est, par exemple, l'événement pile, E_2 l'événement face. Leurs probabilités sont *a priori* quelconques positives avec $p_1 + p_2 = 1$. Quand la symétrie l'impose, on prend $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

2^e exemple. — On jette trois pièces distinctes, par exemple une d'or, une d'argent, une de bronze, et l'on distingue pile ou face. U est formé de huit événements : *ppp*, *ppf*, etc..., dont nous supposons les probabilités égales. Prenons comme événements favorables ceux de deux types :



1) Il y a deux piles et une face.

2) La pièce d'or donne pile.

Nous avons ici : $p_1 = \frac{3}{8}$, $p_2 = \frac{4}{8}$, $P_{1,2} = \frac{5}{8}$, $\Pi_{1,2} = \frac{2}{8}$.

3) *Produits* : Rappelons la définition du produit de deux ensembles. Soient U_1 et U_2 . A leurs sous-ensembles E_1 et E_2 , nous associons l'ensemble des couples ordonnés (x_1, x_2) , x_1 appartenant à E_1 et x_2 à E_2 . Cet ensemble de couples est nommé l'ensemble produit de E_1 et E_2 et se représente par $E_1 \times E_2$.

Notons que les deux ensembles U_1 et U_2 peuvent être le même ensemble considéré deux fois.

Si des mesures $m'(E_1)$ et $m''(E_2)$ sont définies respectivement sur U_1 et U_2 , à quelles conditions le produit $m'(E_1) \cdot (m''E_2)$ est-il une mesure $m(E_1 \times E_2)$ associée à $U = U_1 \times U_2$?

Il faut d'abord s'assurer que la classe $\mathcal{F}$ des sous-ensembles $E_1 \times E_2$ de U est assez riche pour satisfaire aux conditions (x).

A) Supposons par exemple que U_1 et U_2 sont représentés par les points de deux axes rectangulaires du plan et que les E_1 soient des segments de U_1 et les E_2 des segments de U_2 , chaque $E_1 \times E_2$ sera un rectangle. Par extension, E_1 et E_2 étant des ensembles *quelconques*, $E_1 \times E_2$ sera appelé un rectangle dans U .

Mais des rectangles n'ont pas en général une réunion, ni une intersection qui soit un rectangle. Dans la suite, il faudra se borner à des produits $E_1 \times E_2$; on considérera donc comme favorables uniquement de tels produits, c'est-à-dire que (x_1, x_2) sera dit favorable dans U si x_1 est favorable dans U_1 et x_2 favorable dans U_2 .

B) Supposons maintenant données les mesures $m'(E_1)$ et $m''(E_2)$ respectivement sur U_1 et U_2 . On peut démontrer que, dans les conditions précédentes, $m(E_1 \times E_2) = m'(E_1) \cdot m''(E_2)$ vérifie bien les conditions a) et b), c'est-à-dire est une mesure associée à $U_1 \times U_2$.

(Nous voyons, dans le cas particulier où E_1 et E_2 sont formés d'un nombre fini d'éléments et si l'on prend comme mesures $m'(E_1)$ et $m''(E_2)$ les nombres d'éléments, que $m(E_1 \times E_2)$ défini plus haut est le nombre des éléments de $E_1 \times E_2$).

C) Si maintenant les mesures $m'(E_1)$ et $m''(E_2)$ sont des probabilités, c'est-à-dire si $m'(U_1) = 1$ et $m''(U_2) = 1$, comme $U = U_1 \times U_2$, il en résulte $m(U) = 1$. Une loi de probabilité est ainsi définie sur $U = U_1 \times U_2$.

Exemple : reprenons l'exemple des trois pièces, mais jetons-les deux fois. Disons qu'un événement est favorable si l'on obtient la première fois deux piles et une face, la deuxième fois au moins deux piles. On voit :

$$p_1 = \frac{4}{8}, p_2 = \frac{3}{8}, p(E_1 \times E_2) = \frac{4 \times 3}{8 \times 8} = \frac{3}{16}$$

III. — EXEMPLES DE PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE :

FONCTIONS ALÉATOIRES

Donnons seulement une indication rapide. Soit U un ensemble de fonctions numériques définies sur le segment $(0,1)$, par exemple l'ensemble des fonctions continues différentiables. On dit qu'un élément de U est une fonction aléatoire lorsqu'on a défini une loi de probabilité sur U , c'est-à-dire une mesure de masse totale égale à 1.

Notions connexes. — Par exemple, choisissons un point sur le segment $(0,1)$, $x = \frac{1}{3}$. A chaque fonction $f \in U$, correspond le nombre supposé positif $f(\frac{1}{3})$. Posons $\varphi(f) = f(\frac{1}{3})$. On peut appeler l'intégrale $\int \varphi(f) dm_\varphi$, la *valeur moyenne* de f au point $\frac{1}{3}$. On obtient l'idée de *corrélation* de probabilités en considérant plusieurs points distingués x_1 et x_2 par exemple, et utilisant à la fois $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Résumé des interventions de M. Kendall

Directeur de la Division des Techniques de la Recherche,
« London School of Economics », Université de Londres

I. — *Qu'est-ce que la statistique ?* Telle qu'elle est enseignée actuellement en Angleterre, c'est plutôt une collection de sujets qu'un sujet unique. Certes, il y a une base commune, un plus grand commun diviseur, mais l'utilisation demande des méthodes si différentes les unes des autres qu'une unité d'enseignement semble impossible.

En gros, nous pouvons distinguer ce que nous nommerons :

1) *La statistique gouvernementale* : Il s'agit de documenter une administration centrale, un gouvernement, qui demande des résumés, analyses, interprétations, sur des questions telles que le revenu, le travail, les exportations, etc... Ceci est peu important pour la recherche scientifique, mais l'est pour l'enseignement, car c'est utile plus ou moins directement pour de nombreuses carrières.

2) *La statistique technologique*, qui renseigne les bureaux d'études industrielles, chimiques, biologiques, médicales, etc... (par exemple, étude de la qualité d'un produit).

3) *La statistique sociale*, qui rassemble des renseignements utilisables dans un but précis relativement à certaines populations déterminées.

4) *La statistique commerciale*, qui fournit des renseignements sur des marchés, sur le goût des consommateurs, etc... (par exemple, la B.B.C. fait des enquêtes sur ce que l'on écoute).

5) Des sujets relatifs à l'enseignement, la recherche, etc... (à l'université).

6) Il faut ajouter un sixième sujet qui contient... les autres sujets.

La distinction qui précède n'est pas absolue : certaines statistiques médicales, par exemple, participent de 1) et de 2), mais cependant les divers sujets exigent des hommes différents par leur formation, par leurs techniques. Un statisticien non spécialisé, apte à tout faire, ne peut exister, mais, à la tête du bureau de statistique d'une maison d'industrie chimique par exemple, sera un chef capable de coordonner les résultats obtenus par les statisticiens spécialistes qui ont étudié les expériences en laboratoire, les expériences agricoles, les exportations, les marchés, etc... Il devra en déduire une vue générale et des directives.

Non seulement les diverses techniques à enseigner sont très différentes, mais encore il faut tenir compte de l'extrême différence du niveau des étudiants et de leur formation antérieure : si certains ont déjà un certain bagage mathématique, d'autres sont des économistes, des médecins, des historiens, etc... Du reste, il faut distinguer, par exemple, le statisticien qui veut devenir spécialiste en statistique médicale du médecin qui veut s'initier à la statistique pour comprendre ce que fait son collègue et faire appel à lui quand c'est utile.

De tout cela résulte une grande variété dans l'organisation de l'enseignement de la statistique dans les universités, les départements, les écoles de Grande-Bretagne. Les liens entre un département de Mathématiques, un centre de statistique, des instituts spécialisés (médecine,

économie, etc...) s'organisent suivant des schémas différents, ou même sont inexistants.

Pourtant, on peut imaginer un programme de tronc commun. D'abord, une initiation utile pour tous les étudiants, même ceux qui ne seront pas des statisticiens de métier. Un programme minimum peut être précisé (fréquences et distribution, moyennes ; étude élémentaire de l'échantillonnage ; éléments de probabilité ; théorie élémentaire des relations statistiques, association, corrélation, etc...). Puis, un cours plus élevé donné dans un centre pour les futurs statisticiens et ceux qui doivent travailler avec eux. Enfin, formation professionnelle dans des instituts spécialisés, en liaison avec les organisations utilisatrices, industrie, services médicaux, économiques, etc...

II. — *Quelles sont les difficultés de l'enseignement de la statistique ?*

1) *Des difficultés d'ordre mathématique*, en particulier pour des économistes, ou autres étudiants qui n'ont pas suivi les sections scientifiques durant leurs études. Il faudrait évidemment que l'enseignement du second degré soit assez souple, assez adapté aux nécessités modernes pour permettre les études futures (initiation à la théorie des ensembles par exemple). Il n'y a pas lieu ici d'insister. Du reste, le bagage mathématique exigé par un enseignement élémentaire de la statistique est léger ; il est possible de ne pas viser au début à une trop grande généralité qui nécessite des théories mathématiques délicates.

2) L'étudiant est habitué, par ses études de Mathématiques et de Physique élémentaire, à traduire les résultats par des nombres précis. Il faut le conduire à la notion de distribution des mesures, de fréquence. Les nombres qu'il va manier servent à un contrôle d'incertitude : il faut donc détruire une partie de la croyance en la certitude apportée par l'étude de l'univers. Naturellement, l'étudiant sait déjà utiliser des ensembles de nombres : il a, plus ou moins, la notion de fonction. Mais, ici, il s'agit de variables aléatoires, dont les valeurs sont indéterminées à un certain degré, et de fonctions aléatoires de variables abstraites. Des relations d'un type nouveau s'introduisent, telles que celles d'indépendance, de corrélation. Il y a des difficultés intellectuelles pour surmonter la répugnance à émettre des assertions qui ne sont vraies qu'à telle approximation, qui ne sont valables que pour des grandes séries d'événements, bref, qui ne sont ni vraies, ni fausses absolument.

La clef est dans la perception d'une *uniformité de la nature* dans le domaine exploré. Cette attitude est active, car elle permet de délimiter ce qu'on étudie. C'est cette uniformité que l'on va tester et, pour cela, on l'étudie mathématiquement à l'aide de la théorie des probabilités.

La distinction (faite par M. KUREPA) entre la comparaison qualitative de deux probabilités qui précéderait la mesure d'une probabilité ne paraît pas essentielle : l'expérience ne donne pas avec évidence et sans calcul ces inégalités ; l'idée de probabilité est la même pour les inégalités et pour les égalités. L'expérience, l'habitude, le succès conduisent l'étudiant à la compréhension ; alors, quand les idées de fréquence, de distribution, etc... sont reconnues dans la nature, on peut préciser, voir la possibilité d'organiser des expériences qui donnent réellement des lois

simples et les étudier. Ensuite, on saura retrouver dans la nature ces lois simples et les utiliser pour discuter des lois d'action, les conditions de signification des tests, etc...

Un cours est nécessairement organisé suivant une axiomatisation présente à l'esprit du professeur. Deux tendances semblent se partager les préférences des étudiants : un exposé axiomatique à partir d'idées simples sur des objets non définis conduit à la théorie de la probabilité ; ou bien des expériences conduisent d'abord à la notion de fréquence. Il faut de toute façon faire la liaison entre les deux points de vue.

3) Les théories de la statistique et de la probabilité étant supposées comprises, il reste un troisième ordre de difficultés qui apparaît nettement lorsqu'on passe aux applications. Il faut avoir conservé, malgré l'appareil mathématique, l'idée du hasard. L'évaluation de la croyance est différente du calcul de la chance. Il est insuffisant de dire : « La statistique est la théorie de la décision. » Il reste un élément contemplatif qui entretient l'hypothèse comme telle, sans l'accepter, ni la rejeter ; nous le considérons seulement à la fin comme plus ou moins probable.

Comprendre, comme il apparaît dans l'exposé de M. CHOQUET, que la théorie de la probabilité est isomorphe à la théorie de la mesure ne résout pas la difficulté. A côté du calcul des probabilités, il y a une probabilité du jugement. Un étudiant ayant terminé ses cours doit savoir que ses études sont insuffisantes pour la formation du jugement. Seules, l'expérience, les applications pourront achever sa formation en utilisant son bon sens, ses qualités psychologiques. Il complètera son jugement probabiliste par d'autres éléments nécessaires au statisticien.

A un stade supérieur, du reste, cette partie psychologique peut elle-même être étudiée par des méthodes statistiques, mais ceci ne peut être abordé qu'à un niveau élevé.

III. — Mais que devient alors la notion de rigueur scientifique ?

Les maisons de Rotterdam sont construites sur un marais. Une construction assez petite est solide. Il n'y a pas de difficulté pour l'enseignement si nous nous adaptons au niveau de l'étudiant : une conviction, à défaut de certitude, est suffisante pour mobiliser l'activité. Naturellement, à un degré supérieur, les difficultés rencontrées conduisent à exiger de meilleures bases. (M. PUIG ADAM note que l'évolution historique de la rigueur est plus lente que celle de l'étendue des Mathématiques, comme le développement des racines d'un arbre est plus lent que celui des branches).

IV. — Comme exemple du travail statistique, M. KENDALL choisit le *test des hypothèses*.

Une hypothèse, au sens général, est ici *tout énoncé ayant un sens*. (Il n'est pas question de lui attacher une croyance). Mais une *hypothèse statistique* a un caractère particulier : elle doit permettre de dénombrer, de mesurer des événements. La première partie du travail consiste à préciser une des manifestations de l'énoncé à étudier pour formuler une hypothèse statistique.

La mesure des événements permet alors de définir une *distribution d'erreurs* que l'on représente par une courbe. Enfin, par l'échantillon-

nage, on obtient des valeurs approchées : ces nombres sont des échantillons de ce qui peut arriver. D'après ces données approximatives, on juge de l'hypothèse statistique : on peut rejeter l'hypothèse si, d'après la courbe dessinée en supposant l'hypothèse vraie, la valeur obtenue par l'échantillonnage tombe dans une région qui correspond à une probabilité faible, par exemple 5 %.

Ce bref aperçu donne une idée de la complexité du travail réel.

CONCLUSION. — Pour le professeur, savoir la statistique n'est pas tout ; il faudrait aussi savoir l'enseigner. On pense souvent à ce que l'on doit enseigner plutôt qu'à la psychologie et aux méthodes d'enseignement. Il faut se souvenir que la statistique est un sujet très neuf : la partie descriptive a cent ans, la partie théorique trente ans ! Il n'est pas étonnant qu'on n'ait pas encore trouvé le niveau convenable à son enseignement. Il faut donc que les maîtres travaillent par des rencontres de ce genre, par de la documentation, par des réflexions et des observations personnelles.

Si les Mathématiciens pensaient davantage qu'on emploie des Mathématiques en statistique et qu'il y a des recherches mathématiques à y faire, ils s'y intéresseraient et ils s'occuperaient de la formation des maîtres qui devront l'enseigner.

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE

Initiation au Calcul matriciel

Éléments de calcul matriciel, par G. CAHEN (Dunod, éditeur).

Nous avons déjà des ouvrages traitant du calcul matriciel, comme par exemple « Algèbre et analyse linéaires », de A. LICHNEROWICZ, ou les « Compléments de Mathématiques à l'usage des ingénieurs », de A. ANGOT. Le livre de G. CAHEN correspond à un besoin différent ; c'est un cours professé à l'Ecole nationale supérieure du Génie maritime, et il peut aussi être utilisé dans d'autres écoles d'ingénieurs, comme celles d'Arts et Métiers. C'est dire que c'est un ouvrage d'initiation, et qu'il est délibérément conçu et rédigé en vue des applications, surtout à l'électricité.

Sur les 94 pages de l'ouvrage, les 38 premières sont exclusivement mathématiques ; elles donnent les éléments indispensables du calcul matriciel : addition, multiplication, inversion des matrices ; valeurs propres et modes ; fonctions d'une matrice carrée. Il est fait une très courte allusion à la dérivation et à l'intégration d'une matrice, et même à sa transformée de Laplace.

Les 17 pages suivantes donnent des applications à l'électricité : quadripôles, matrice d'impédance d'un réseau, filtres ; un aperçu est donné sur la mise en équation d'un réseau selon la méthode de Kron, et sur la méthode dualistique des paires de nœuds, méthodes sur lesquelles on trouve plus de détails dans l'ouvrage de P. LE CORBEILLER : « Analyse matricielle des réseaux électriques », édité par la même maison Dunod.

Les 39 dernières pages de l'ouvrage de G. CAHEN exposent de nombreuses applications géométriques, mécaniques et électrotechniques des éléments de calcul matriciel donnés au début.

Le dosage même, adopté par l'auteur, montre la volonté d'écarter tout développement mathématique inutile, et de se borner à ce qui est immédiatement utilisé par les techniciens. Clairement présenté, imprimé avec soin, ce livre est une bonne initiation aux méthodes modernes de l'électricité, et une introduction aux ouvrages plus savants comme ceux mentionnés plus haut, ou ceux qui font une étude approfondie des réseaux de Kirchhoff.

A. HUISMAN.

Une introduction à l'algèbre moderne

L'Algèbre moderne, par M. QUEYSANNE et A. DELACHET. Collection « Que sais-je ? », P.U.F.

MM. QUEYSANNE et DELACHET ont écrit un livre d'initiation accessible à tout lecteur ayant une certaine culture mathématique (par exemple ayant suivi un cours de Mathématiques Spéciales). Le vocabulaire est, d'une façon générale, celui de N. Bourbaki, mais les termes employés sont assez peu nombreux pour que le lecteur n'ait pas l'impression d'avoir à apprendre une langue nouvelle.

Voici un résumé succinct des questions traitées.

Dans une introduction historique, les auteurs nous exposent en raccourci les idées algébriques dans l'Antiquité et au Moyen Age. Nous assistons ensuite au développement de l'algèbre classique, depuis les mathématiciens italiens du xvi^e siècle jusqu'à Viète et Descartes, ensuite jusqu'à Abel et Galois.

L'algèbre moderne proprement dite a pris naissance en 1910 avec un mémoire où Steinitz aborde pour la première fois l'étude systématique d'opérations portant sur des êtres abstraits. Cependant les savants du xix^e siècle, bien qu'ayant limité leurs études à des objets plus restreints ont dégagé un grand nombre de notions fondamentales de l'algèbre moderne : avec les groupes de substitutions nous voyons apparaître des exemples de produits non commutatifs ; l'étude des classes résiduelles nous fournit des exemples de relations d'équivalence, de correspondances isomorphes. Cauchy étudie les congruences de polynômes auxquelles il rattache la théorie des nombres complexes (1). Avec les quaternions d'Hamilton, nous trouvons un exemple de corps ; avec les matrices carrées, nous trouvons des anneaux avec véritables diviseurs de zéro.

Les exemples cités à la fin de l'introduction historique seront souvent utilisés dans la suite.

La deuxième partie du livre, comprenant trois chapitres, est consacrée à l'exposé systématique des notions fondamentales.

Dans le chapitre I, la notion d'ensemble est définie d'après N. Bourbaki. Des ensembles particuliers, souvent utilisés dans la suite, sont désignés par des majuscules dont la signification est indiquée une fois pour toutes au bas de la page 41. (Ce sont encore les notations de N. Bourbaki).

Les opérations formelles, réunion, intersection, produit, sont très clairement définies. Il en est de même des correspondances ; application d'un ensemble X sur ou dans un ensemble Y . Les produits d'applications comprennent, comme cas particuliers, les fonctions de fonctions et les produits de transformations.

(1) Nous nous permettons de signaler ici que les congruences de polynômes ont conduit à des systèmes variés de nombres complexes. Ainsi les congruences mod. y^2 ont donné naissance aux « nombres duaux ». Les « vecteurs duaux » dont les composantes scalaires sont des nombres duaux ont reçu de remarquables applications en géométrie réglée.

La suite du chapitre comprend l'étude des lois de composition interne ou externe. Une loi de composition interne peut être définie comme une application de l'ensemble-produit $E \times E$ dans E . Les ensembles munis d'une telle loi sont ceux que P. Dubreil appelle des groupoïdes. Une loi de composition externe peut être définie comme une application de l'ensemble-produit $\Omega \times E$ dans E , Ω désignant un autre ensemble dont les éléments sont appelés des opérateurs.

La fin du chapitre est consacrée à la notion de structure. Tous les ensembles munis des mêmes lois de composition sont dits appartenir à une même structure. De tels ensembles peuvent être très différents par la nature de leurs éléments.

Le chapitre II est consacré aux groupes, anneaux et corps dont nous avons déjà rencontré des exemples à la fin de l'introduction historique. Les idéaux — et les opérations sur les idéaux — sont définis dans le cas des anneaux commutatifs seulement. Les auteurs ont présenté cette notion avec une grande netteté.

Le chapitre III est intitulé : « Les méthodes de l'algèbre moderne ». Nous trouvons ici l'étude systématique des correspondances isomorphes et des relations d'équivalence, en particulier des relations d'équivalence compatibles avec une loi de composition interne (Equivalences régulières de P. DUBREIL). Un paragraphe est consacré aux homomorphismes, correspondance moins simple que l'isomorphisme, la relation entre les ensembles étant dissymétrique.

Le dernier paragraphe traite du problème de l'extension qui consiste à plonger un ensemble A , muni d'une loi interne l , dans un ensemble plus vaste E , muni d'une loi L , prolongement de l . Ce problème n'est pas toujours possible. Parmi les exemples traités nous signalerons la possibilité, établie par les auteurs, de plonger un anneau d'intégrité dans un corps commutatif.

La troisième partie comporte des indications plus sommaires sur plusieurs théories. Le lecteur trouvera les détails dans les ouvrages cités à la fin. Toutefois, le lecteur qui voudra faire l'étude approfondie de l'un des sujets évoqués (par exemple les espaces vectoriels et les systèmes hypercomplexes) aura au départ une première idée bien nette.

Dans le dernier chapitre, les auteurs exposent les grandes lignes de la théorie des équations algébriques (exposé fait d'après les principes de l'algèbre moderne et, par là-même, très différent de celui qui est fait dans les classes de Mathématiques Spéciales).

Le chapitre se termine par une intéressante démonstration du théorème de d'Alembert, due à M. COLMEZ, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (note au bas de la page 130). Cette démonstration met en évidence le caractère mixte — algébrique et topologique — du théorème de d'Alembert, et fait bien comprendre sa véritable portée.

En terminant nous dirons simplement que tout lecteur qui, voulant étudier l'algèbre moderne, prendra le livre de MM. QUEYSANNE et DELACHET comme position de départ, disposera d'une base très solide. La lecture de ce livre ne manquera pas de pousser bien des lecteurs à continuer ces très intéressantes études.

A. HERME (*Lycée Henri-IV*).

Deux livres sur les Mathématiques modernes

Deux sortes de livres éveillent actuellement notre intérêt en ce qui concerne les Mathématiques modernes : ceux qui indiquent, sous la forme aisément compréhensible d'un livre de lecture, l'esprit, les tendances des Mathématiques, telles qu'on les conçoit maintenant, — et ceux qui exposent effectivement, sous une forme assez abordable, certains chapitres dans l'esprit nouveau. Voici deux livres, un de chaque sorte.

1. — *Visage de la Mathématique*, par Pierre DEFRISE (Office de Publicité, 36, rue Neuve, Bruxelles).

Le sous-titre éclaire l'intention de ce petit livre : « Essai de semi-vulgarisation de quelques aspects fondamentaux de la pensée mathématique ».

L'ouvrage est écrit dans le même esprit que les livres bien connus et appréciés qui traitent à peu près le même sujet :

Les Géométries, par L. GODEAUX (Armand Colin).

Les Nombres et les Espaces, par G. VERRIEST (Armand Colin).

La Géométrie contemporaine, par A. DELACHET (Que sais-je ?).

La multiplicité de ces livres montre bien que chaque auteur pense avoir quelque chose à préciser, à expliciter plus nettement ou avec une nuance différente et le lecteur ne regrettera pas de retrouver des idées qu'il connaît déjà, avec d'autres qui lui paraîtront peut-être moins familières.

Dans le premier chapitre, l'auteur étudie ce qu'est une *axiomatisation* sur l'exemple de la géométrie, ce que sont des *systèmes isomorphes*, et fait comprendre ce que M. Brouwer a appelé la *causalité* en Mathématiques.

Le chapitre II est une intéressante étude de l'*invariance*, et son application à une critique de la valeur d'un énoncé qui aurait enchanté Michel CHASLES, conclusions directement utilisables dans la pratique géométrique. L'étude conduit à confronter les idées d'*invariance*, d'*équivalence* et de *groupe*. Nous apprendrons à distinguer les géométries avec ou sans *groupe principal*.

Enfin, un court chapitre intitulé *Nombres et espaces* esquisse sommairement le passage à la géométrie à n dimensions, à la géométrie différentielle, aux géométries complexes, aux espaces topologiques, à l'analyse générale et à l'algèbre moderne.

Les 126 pages nous font faire un agréable voyage à travers des territoires très étendus ! Bref, le but avoué est parfaitement atteint : « A la fin de cette ébauche de quelques visages de la Mathématique, il nous reste à souhaiter d'avoir inspiré le désir de la mieux connaître. »

2. — *A Survey of modern Algebra*, par G. BIRKHOFF et S. MAC LANE (The Macmillan Company, New-York).

Ce livre est maintenant classique à l'étranger et doit le devenir en France pour tous les professeurs qui savent, même un peu seulement, lire l'anglais. Ce n'est pas un ouvrage de vulgarisation, mais un livre d'étude destiné à des étudiants, avec de nombreux exercices d'applications, certains presque immédiats, d'autres plus difficiles et marqués comme tels.

La préface, non seulement nous éclaire sur les intentions des auteurs, mais encore indique comment utiliser l'ouvrage, car bien des chapitres sont indépendants de sorte que le livre peut convenir à des cours différents suivant le niveau et le but des étudiants.

Pour nous, professeurs, nous sentirons particulièrement les qualités pédagogiques de l'exposé. Jamais les auteurs n'oublient qu'ils s'adressent à des débutants et des remarques, des parenthèses, des formes de style, rendent la présentation vivante comme un cours oral : il semble bien que l'éditeur américain n'a pas exigé que l'on fasse des économies de papier, de sorte que l'exposé se déroule sans hâte et l'on n'a pas cette impression de résumé, d'abrégé, qui rend trop de livres français actuels pénibles à lire.

L'algèbre moderne est formelle, abstraite, mais cela ne signifie pas qu'il n'y a plus place pour l'imagination. Bien au contraire, les multiples réalisations concrètes ou géométriques des notions abstraites suggèrent chacune des voies de recherches : « Les conceptions abstraites dérivent toutes de l'analyse des situations concrètes », aussi les exemples et les applications aux résultats classiques de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire sont-ils soulignés, preuve que les Mathématiques d'autrefois sont bien contenues dans celles d'aujourd'hui !

Nous ne pouvons pas ici indiquer tout ce que contient ce livre de XV chapitres couvrant 470 pages. Comme l'indique la préface, les sujets successifs sont : du nombre entier à la notion d'anneau d'intégrité (intégral domain) et de corps (field) ; théorie des équations et systèmes de nombres réels et complexes ; groupes ; espaces vectoriels et matrices ; classes et nombres cardinaux ; introduction à l'algèbre commutative et à la théorie des nombres ; extension des corps, nombres algébriques, idéaux, groupes de Galois.

Les auteurs espèrent, d'une part, être utiles aux étudiants qui cherchent des outils pour les applications (mathématiques, physique, statistique), et aussi donner une introduction à ce « sujet fascinant, en croissance rapide, pour les étudiants qui s'intéressent à l'algèbre moderne pour elle-même ». Pour ceux-ci une bibliographie de 46 titres est donnée : tous les livres sont en anglais, sauf cinq en allemand et deux en français ; les différents livres de Bourbaki des « *Eléments de Mathématiques* » et « *L'algèbre* », de P. DUBREIL. (Le livre d'A. CHATELET n'était pas encore paru).

Enfin, comme dans tous les livres modernes, deux index terminent l'ouvrage, un pour les termes et expressions techniques, l'autre pour les symboles et abréviations utilisés. Ceci est particulièrement précieux pour le lecteur qui, après avoir étudié le début, passe directement aux chapitres qui éveillent plus particulièrement sa curiosité. Je signale tout particulièrement le chapitre XI : Algèbre des classes, avec l'application de l'algèbre de Boole, à la logique et l'introduction des treillis (lattices), — et le chapitre XII : Arithmétique du transfini. Mais chacun peut choisir !

Je crois que tout professeur qui mettra ce livre dans sa bibliothèque l'utilisera souvent pour lui-même et pour repenser son enseignement.

L. FÉLIX (*Lycée La Fontaine, Paris*).

L'Astronomie de l' "honnête homme" de 1955

L'Astronomie Populaire Camille Flammarion.

On sait quelle fut l'action de Camille FLAMMARION, continuateur d'ARAGO. L'édition de son *Astronomie Populaire*, en 1880, fut l'amorce de la constitution de la Société Astronomique de France. L'ouvrage acquit très vite et dans tous les milieux une réputation justifiée. Parce qu'il suscita nombre de vocations scientifiques cet ouvrage mérite une place spéciale dans les œuvres de FLAMMARION. Il faut encore le consulter pour avoir une idée des connaissances astronomiques de ce temps-là.

Mais le livre est devenu très rare, et, le plus souvent, on cherchera une documentation plus actuelle sur cette science en plein développement. La nouvelle édition de l'*Astronomie Populaire* répond donc à un besoin réel.

Il s'agit d'une refonte totale de l'ouvrage qui a été faite sous la direction de Mme Camille FLAMMARION et de M. André DANYON, Directeur de l'Observatoire de Paris. Le sujet est trop vaste pour qu'un seul auteur puisse le traiter. Aussi, à côté des importants chapitres sur la Terre, la Lune et les Planètes, traités par M. DANYON lui-même, on trouvera le Soleil, étudié par M. MICHARD ; les Comètes, par M. BALDET ; l'Univers sidéral, par M. FEHRENBACH, et les Instruments, par M. A. COUDER.

Mais il n'y a pas que le contenu et la rédaction qui ont été complètement refondus ; il y a aussi une illustration en tous points remarquables ; beaucoup de clichés sont ici publiés pour la première fois et font honneur aux astronomes des Observatoires de France : ils sont d'ailleurs complétés par des clichés venant de tous les Observatoires du monde, ce qui a l'avantage de bien souligner le caractère collectif des progrès de l'astronomie moderne.

Par sa présentation, voilà donc un livre qui sera à sa place dans toutes les bibliothèques. Mais il sera particulièrement utile aux professeurs qui ont à enseigner les

premiers éléments de l'astronomie et qui y trouveront une documentation de première main. Les renseignements historiques sont aussi très nombreux et c'est peut-être à ce sujet que pourra être formulé le seul regret : un index des noms propres cités aurait constitué un palmarès des astronomes qui aurait été aussi bien commode pour ceux qui aiment mettre un nom sur les découvertes et sentir par delà la grandeur des résultats acquis, la palpitation vivante de la recherche. La lecture de ce grand ouvrage nous la fait sentir et c'est bien pourquoi nous en recommandons la lecture et l'usage à nos Collègues.

Il y avait un choix difficile à faire entre le ton austère des traités scientifiques et l'ouvrage banal de vulgarisation sommaire. FLAMMARION disait déjà qu'il voulait « populariser » la science et non pas la « vulgariser ». Les savants qui ont rédigé cette nouvelle astronomie populaire ont eu le mérite de trouver le ton qu'il fallait pour donner à l'homme cultivé du milieu du xx^e siècle le livre qui fait le point de nos connaissances sur l'Univers.

L'ouvrage pourra aussi être recommandé sans inquiétude aux grands élèves curieux de dépasser les éléments de la classe de Mathématiques Élémentaires.

G. W.

Sans plus tarder, je veux signaler ici le nouveau livre de M. Paul COUDERC qui vient de sortir : *L'Univers* (collection « Que sais-je ? »). J'en rendrai compte plus en détail dans le prochain *Bulletin*. Mais il s'agit d'une sorte de somme des problèmes les plus passionnants de l'astronomie moderne et beaucoup de Collègues auront certainement envie de le connaître tout de suite et par eux-mêmes.

Des Conseils pratiques aux auteurs

Sous le titre *Conseils aux auteurs scientifiques et techniques* (Albin Michel, éditeur), M. Maurice DENIS-PAPIN donne tous les renseignements utiles sur la préparation des manuscrits, l'écriture des unités et la correction des épreuves d'imprimerie. Sous un volume réduit, une brochure de 32 pages, il sera vraiment commode pour les auteurs n'ayant pas encore une grande pratique des coutumes et usages de l'imprimerie de trouver rapidement les renseignements qui sont perdus dans les ouvrages techniques plus complets, trop complets souvent. Pour 40 F, voilà un moyen de faciliter le travail des auteurs et celui des éditeurs.

G. W.

A travers les Revues

Le signe (p) figure après les titres des revues dont les sommaires ne sont que partiellement reproduits.

L'EDUCATION NATIONALE, n° 30 (10 novembre 1955) (p), Le mathématicien et son travail, par Paul MONTEL.

SCIENTIA (p), année XLIX, série VI, IX, 1955 : F. SEVERI : Les fondements logiques de la relativité ; V. TONINI : La relativité, cinquante ans après l'énoncé d'Einstein.

REVUE D'HISTOIRE DES SCIENCES, tome VIII, n° 2 (avril-juin 1955) (p) : Viggo BRUN : Découverte d'un manuscrit d'Abel ; Pierre COSTABEL : Autour de la méthode de Galilée pour la détermination des centres de gravité ; Paul LÉVY : W. Doeblin.

LES HUMANITES SCIENTIFIQUES, 23^e année, n° 1 (octobre 1955) (p) : Sur une extension du théorème d'Yvon Villarceau, par R. DONTOT ; L'enseignement des Mathématiques en évolution, par S. MINOIS.

REVUE DE MATHEMATIQUES SPECIALES, 66^e année, n°s 3 et 4 (octobre 1955) (p) : Sur les cubiques admettant plusieurs anallagmaties quadratiques par points isogonaux, par A. BRIQUET.

LE FACTEUR X, troisième année, octobre 1955 : La vie sur les autres mondes (G. W.) ; Un automate joueur d'échecs (A. H.) ; Propos linguistiques sur robots et automates (R. G.-d'H.) ; L'histoire pittoresque du caoutchouc (E. D.) ; une curieuse observation stroboscopique (R. M.) ; comptabilité de vacances (H. M.) ; Problèmes à chercher un peu tout seul ; M. Bergeret et les Mathématiques (H. M.) ; Le coin des grands : consternation.

Rappelons que l'on aura des renseignements sur *Facteur X* en écrivant aux Editions du Levier, 15, rue du Louvre, Paris, 1^{er}. C.C.P. Paris 10.020-06 (l'abonnement 400 F).

Livres reçus

— *Géométrie*, par M. LOUBÈS, C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY, classe de Quatrième Technique (programme de 1950), Nathan, éditeur.

— *Arithmétique et algèbre*, par les mêmes auteurs et pour la même classe et les mêmes programmes.

— *Mathématiques*, par R. MAILLARD et A. MILLET, classe de Troisième des Cours Complémentaires, Hachette, éditeur.

Le calcul vivant, par L.-M. VASSORT, cours moyen première année, corrigés des exercices, Hachette, éditeur.

— *Algèbre*, par R. ORIOI, classe de Seconde Technique, Dunod, éditeur.

— *Résumés d'algèbre et de trigonométrie*, par M. DENIS-PAPIN, classe de Mathématiques Élémentaires, Albin Michel, éditeur.

— *Cours élémentaire d'électricité générale*, par P. MAURER et M. DENIS-PAPIN, classes de Seconde et Première Techniques, Albin Michel, éditeur.

— *Cours élémentaire d'électricité industrielle*, par les mêmes auteurs, pour les mêmes classes et pour les mêmes programmes.

— *Figures réelles de géométrie dans l'espace*, par M. CAQUELIN, douze planches à découper et coller pour la confection de figures réelles de géométrie dans l'espace, éditions Georges Thomas, 30, rue Solignac, Nancy (la pochette 200 F).

— *Colloque sur l'analyse statistique*, centre belge de recherches mathématiques, Bruxelles (15, 16, 17 décembre 1954).

— *Géométrie*, par C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY, classe de Mathématiques Élémentaires, Nathan, éditeur.

Second Colloque sur les EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES. Tenu à Bruxelles : 24-26 mai 1954.

Le Centre Belge de Recherches mathématiques a consacré deux Colloques à la théorie des équations aux dérivées partielles. Le premier s'est tenu à Louvain en décembre 1953, le second à Bruxelles en mai 1954. Le volume actuel contient les communications faites à ce second Colloque.

La communication de M. PICONE est relative à un problème qui s'est présenté à propos d'une question technique : l'encastrement des digues d'un barrage.

MM. SCHWARTZ et LIONS traitent des problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques.

C'est aux solutions élémentaires des équations hyperboliques qu'est consacrée la communication de M. LERAY. Il obtient, par un procédé direct, les expressions de ces solutions au moyen d'intégrales abéliennes.

MM. BRELOT et CHOQUET s'occupent des polynômes harmoniques et polyharmoniques.

M. DE RHAM traite de certaines équations qui se présentent dans la théorie des formes différentielles harmoniques.

M. GARNIER s'occupe des problèmes aux limites de l'équation des ondes.

Enfin, la dernière communication, faite par M. L. FANTAPPIÈ, est consacrée aux nouvelles méthodes d'intégration, en termes finis, des équations aux dérivées partielles, dues à ce savant géomètre, comme application de sa théorie des fonctionnelles analytiques. Signalons qu'ici aussi, il est fait usage des intégrales abéliennes.

Ce volume, et le précédent, donnent une idée d'ensemble de l'état actuel de la théorie des équations aux dérivées partielles. Nul doute qu'ils ne rendent de grands services aux mathématiciens qui s'occupent de ces questions. Un volume in-8° raisin de 132 pages. Prix en Belgique : 200 francs belges ; prix en France : 1.500 francs français (Masson, et C^{ie}, éditeurs en France).

Traité de Physique théorique et de Physique mathématique. (Ouvrages réunis par Jean-Louis DESTOUCHES).

V. *PRINCIPES DE MECANIQUE ANALYTIQUE*, par André MERCIER (Professeur à l'Université de Liège). D'après les notes recueillies et mises au point par Pierre WILKER. (Gauthier-Villars, Editeurs, 55, quai des Grands-Augustins, Paris, 6^e). Prix : 2.000 F.

La mécanique analytique a toujours constitué le noyau autour duquel se concentrent les recherches dans le développement de nouvelles théories physiques. La statistique physique et les théories quantiques en particulier, à chaque phase principale de leur développement, ont puisé dans les ressources de la mécanique analytique pour y fonder leurs bases. Il est donc désirable de fournir de ce noyau de la Théorie physique un aperçu adapté aux exigences les plus modernes et concentré sur les propositions particulièrement importantes.

L'auteur, sorti autrefois des écoles théoriques de Genève, Paris et Copenhague, actuellement titulaire de la chaire comprenant l'enseignement de la mécanique et des théories physiques à la Faculté des Sciences de Berne, a réuni dans cet ouvrage l'essentiel de leçons professées au cours de plusieurs années, dans lesquelles il s'appesantit sur les principes de cette mécanique analytique au perfectionnement de laquelle il a contribué par l'étude du formalisme homogène particulièrement apte à préparer l'introduction des théories quantiques.

Le raisonnement très concentré a permis de restreindre à un minimum la longueur d'un exposé qui aurait facilement pu prendre une ampleur double ou triple si tout le détail des calculs et des preuves avait été développé. Le lecteur aura donc à faire un effort personnel, mais il en retirera un grand profit.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : *Le formalisme de Lagrange*. Coordonnées généralisées. Les équations de Lagrange. Le principe d'Hamilton généralisé. Intégrales premières. — CHAP. II : *Le formalisme canonique*. — CHAP. III : *Les transformations canoniques et leurs invariants*. — CHAP. IV : *L'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi*. Etude générale. Systèmes ayant un seul degré de liberté. Systèmes multipériodiques. Théorème de Stäckel. — CHAP. V : *Mécanique et optique*. — CHAP. VI : *Mécanique analytique et préliminaires à la mécanique statistique*. — CHAP. VII : *Invariance quasi-statique*.

Initiation au calcul opérationnel et à ses applications techniques, par F. SALLES, professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Strasbourg (Dunod, éditeur).

L'emploi du calcul opérationnel se répand de plus en plus dans les différentes branches de la technique. Il devient notamment indispensable lorsque l'on veut comprendre une étude sur les servo-mécanismes ou s'initier au fonctionnement d'une machine analogique électronique. Malheureusement, les ouvrages qui traitent de cette méthode sont en général d'un niveau mathématique trop élevé et ne donnent pas d'exemples d'applications pratiques.

M. SALLES, dans cet ouvrage publié chez Dunod, a pour but de mettre entre les mains de tout ingénieur un exposé mathématique simple de la transformation de Laplace et de l'algébrisation des équations différentielles, ainsi que des exemples pratiques permettant d'appliquer le calcul opérationnel aux travaux les plus divers des bureaux d'études : vibrations, résistance des matériaux, circuits électriques, servo-mécanisme, etc... De nombreux exercices permettront au lecteur de se familiariser avec cette méthode.

Destiné aux élèves-ingénieurs et aux futurs professeurs de l'Enseignement Technique, cet ouvrage sera également lu avec profit par un grand nombre d'ingénieurs électriciens et mécaniciens, quelle que soit leur spécialité, ainsi que par les professeurs de Mathématiques et de Physique et les étudiants des Facultés des Sciences.

EXTRAIT DE LA TABLE DES MATIERES

Bases mathématiques du calcul opérationnel. Application du calcul opérationnel aux équations différentielles de la technique. Applications techniques : théorie des vibrations, des poutres, des circuits électriques, des servo-mécanismes. Table des formules de transformation.

Cahiers pédagogiques pour l'Enseignement du Second Degré [N° 3 (15 novembre 1955) : Les Mathématiques].

Entièrement consacré à l'enseignement des Mathématiques, le n° 3 des *Cahiers pédagogiques* revêt une importance particulière. Parmi les nombreux sujets qui seront traités, citons :

— Les Mathématiques modernes et l'Enseignement. Deux enquêtes par M. MIRABEL, professeur au Lycée Saint-Louis, et Mlle FÉLIX, professeur au Lycée La Fontaine. Réponses de très nombreux professeurs de l'Enseignement Supérieur (Sorbonne, Nancy, Grenoble, Sarrebruck...) et de l'Enseignement du Second Degré (1^{er} et 2^e cycle, classes préparatoires).

— La coordination entre les Mathématiques et la Physique. Enquête de M. CANTOUR, professeur au Lycée Jacques-Decour.

— L'enseignement des Mathématiques dans les classes de :

- Première et Seconde A et B. — M. CASSÉ.
- Philosophie. — M. MOUGENOT.
- Sciences expérimentales. — M. WALUSINSKI.
- Mathématiques et technique. — M. FLINOTS.
- Sciences économiques et humaines. — Mlle STAFFER, M. MAINGAUD.

— Pour un enseignement de la statistique dans le Second Degré, par M. DARMOIS, professeur à la Sorbonne (Conférence à la Société française de Pédagogie).

— L'initiation aux Mathématiques. Enquête de Mlle MARCHAND, professeur au Lycée de Sèvres.

— Le travail à la maison (L. VISBEQ). Club astronomique (G. WALUSINSKI). Les Mathématiques servent-elles à quelque chose ?, débat entre MM. P. GUINÉPIED et G. WALUSINSKI.

Prix spécial de souscription : 200 F.

V. ESSAIS ET VARIÉTÉS

A propos des fractions

Si notre Association peut se partager parfois sur l'opportunité d'introduire dans nos classes secondaires certains éléments dits d'algèbre moderne, il n'est pas douteux que la connaissance de ces éléments ne soit propre à nous éclairer nous-mêmes sur la nature vraie de certaines erreurs qui nous déconcertent d'abord chez nos élèves.

C'est ainsi que j'ai pu lire, par-dessus l'épaule d'un élève de Cinquième, au cours d'une interrogation écrite de contrôle sur le calcul des fractions :

$$3 + \frac{3}{4} = \frac{3}{0} + \frac{3}{4} = \frac{3 \times 4 + 3 \times 0}{0 \times 4} = \frac{12 + 3}{4} = \frac{15}{4}.$$

C'est inepte, serait-on tenté de dire aussitôt, et pourtant l'intention de l'élève est claire, il est persuadé qu'il écrit :

$$3 + \frac{3}{4} = \frac{3}{e} + \frac{3}{4} = \frac{3 \times 4 + 3 \times e}{e \times 4} = \frac{12 + 3}{4} = \frac{15}{4}$$

où e désigne, selon notre habitude d'adultes, l'élément neutre de l'opération qu'il entend faire ; son résultat est juste, mais son raisonnement ne l'est-il pas aussi ? Sans doute attendions-nous $e = 1$, mais l'élève qui écrit $e = 0$, ne se rend probablement coupable ici que d'un simple lapsus d'écriture, puisqu'il ne se laisse tromper à aucun moment dans la suite de ses calculs.

Nous serons donc amenés, pour reprendre cet élève, à ne pas le taxer de sottise, mais à lui faire exprimer avec justesse son raisonnement. « Il n'y a rien, donc c'est zéro », dira-t-il peut-être dans sa langue fruste, et nous enchaînerons : « En effet, il n'y a rien de changé par votre opération, quel est donc le nom de cette opération, quel est alors le nom du facteur qui n'y change rien ? »

On voit là quel intérêt peut présenter une mention moins épisodique, mais plus franchement explicite, de la notion d'élément neutre dans l'addition et dans la multiplication.

L. THIBERGE,

Inspecteur Général de l'Instruction Publique.

Inégalités et inéquations

Ainsi que beaucoup de collègues, je suis gêné d'entendre les élèves réciter à peu près « le signe du trinôme », alors qu'ils ignorent souvent « le signe du binôme ».

Les théorèmes pompeux permettant de passer de $A > B$ à $A + C > B + C$ et $mA > mB$ ou $nA < nB$, sont-ils à leur place, au niveau de la Troisième, par exemple ? Pour éviter ces théorèmes, voici ce que j'ai essayé, avec quelque fruit.

Partant de la définition $a > b \iff a - b > 0$ on passe de

$$\begin{array}{l} \text{à} \quad \quad \quad ax > b \\ \quad \quad \quad ax - b > 0 \\ \text{et} \quad \quad \quad a\left(x - \frac{b}{a}\right) > 0. \end{array}$$

Le signe de a et celui de $x - \frac{b}{a}$ interviennent et les élèves comprennent pourquoi.

Ensuite, le passage de $A > B$ à $A - B > 0$ permet d'éviter beaucoup de fautes, et on suit ainsi, pour les inéquations du 1^{er} degré, la même méthode que pour le second degré.

Henri MAS (*Janson*).

Grandeurs inversement proportionnelles

I. Trois personnes (un enfant, une femme et un homme) marchent à la même vitesse : 6 km/h. Ils font des pas respectivement égaux à 0,60 m ; 0,75 m et 0,80 m. Calculer le nombre de pas à l'heure que doit faire chacun d'eux.

Soit l la longueur du pas en mètres, N le nombre de pas à l'heure, V la vitesse en km/h. Etablir la relation reliant ces trois grandeurs, et vérifier les résultats précédents à l'aide de cette relation.

II. De même, les ondes radiophoniques se propagent à une vitesse sensiblement constante égale à 300 000 km/s. Elles diffèrent par la longueur d'onde qui peut être égale à 30 m. (onde courte), 300 m. (onde moyenne), 1 500 m. (grande onde). Calculer pour chacune d'elles le nombre d'oscillations ou de cycles par seconde, appelé fréquence. Exprimer ensuite cette fréquence en kilocycles par seconde

$$(1 \text{ kilocycle/s} = 1\,000 \text{ cycles})$$

Soit λ la longueur d'onde en mètres, N la fréquence en kilocycles/s,

$$V = 300\,000 \text{ km/s}$$

la vitesse. Etablir la relation reliant la longueur d'onde en mètres et la fréquence en kilocycles. Vérifier les résultats précédents.

III. En réalité, la vitesse $V = 300\,000 \text{ km/s}$ est seulement une valeur approchée. Sachant que la longueur d'onde $\lambda = \dots$ m. correspond à la fréquence $N = \dots$ kilocycles/s. (Valeurs à relever sur un journal de radio). Calculer la vitesse V en km/s.

RÉSULTATS

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{6\,000}{0,6} &= 10\,000 \text{ pas à l'heure} \\ \frac{6\,000}{0,75} &= 8\,000 \text{ pas à l'heure} \\ \frac{6\,000}{0,80} &= 7\,500 \text{ pas à l'heure} \end{aligned}$$

Les longueurs des pas, 0,6, 0,75 et 0,8 sont inversement proportionnelles aux nombres de pas à l'heure : 10 000, 8 000 et 7 500.

Relation : $l \times N = 1\,000 V$.

en mètres.
N nombre de pas à l'heure.
V = vitesse en km/h.

$$\begin{aligned} \text{II. } \frac{300\,000\,000}{30} &= 10^7 \text{ cycles/s} = 10\,000 \text{ kilocycles/s} \\ \frac{300\,000\,000}{300} &= 10^6 \text{ cycles/s} = 1\,000 \text{ kilocycles/s} \\ \frac{300\,000\,000}{1\,500} &= 2 \cdot 10^5 \text{ cycles/s} = 200 \text{ kilocycles/s} \end{aligned}$$

Relation $\lambda \cdot N = 300\,000$

λ en mètres.
N fréquence en kilocycles.

La longueur d'onde et la fréquence sont donc inversement proportionnelles.

III. $V = \lambda \times N = \dots$

λ en mètres.
N fréquence en kilocycles.
V vitesse en km/s.

Remarques. — Les cadrans de certains postes récepteurs sont gradués en kilocycles, et d'autres en mètres. La relation précédente permettra donc de passer d'une graduation à l'autre.

F. HÉRAUT (Collège de Castres).

Remarques sur le théorème de Gauss

L'article de M. THOVERT, dans le dernier *Bulletin* (n° 170, octobre 1955) suggère de comparer la démonstration originale de Gauss à celle de Niewenglowski ; elle en diffère peu quant au fond ; elle se trouve tout au début de la « section seconde » de son célèbre traité de théorie des nombres : « *Disquisitiones arithmeticae* », traduit en français par Poulet-Delisle, sous le titre : « *Recherches arithmétiques* » (cet ouvrage vient d'être réédité à la librairie A. Blanchard, 7, rue Racine, Paris).

Voici le début de la « section seconde » (dans la « section première », Gauss définit les congruences, dont il est le créateur, et donne leurs propriétés élémentaires).

« THÉORÈME. — Le produit de deux nombres positifs plus petits qu'un nombre premier donné, ne peut être divisé par ce nombre premier. »

Soit p le nombre premier et $a < p$ et > 0 ; je dis qu'on ne pourra trouver aucun nombre positif b , plus petit que p , qui rende $ab \equiv 0 \pmod{p}$.

En effet, s'il peut y en avoir, supposons que ce soient les nombres b, c, d , etc... tous plus petits que p , en sorte qu'on ait $ab \equiv 0, ac \equiv 0$, etc... (mod. p). soit b le plus petit de tous, de sorte qu'on n'en puisse supposer un plus petit que b ; on aura évidemment $b > 1$, car si $b = 1$, on aurait $ab = a < p$ et partant non divisible par p . Or p , comme nombre premier, ne peut être divisé par b , mais tombera entre deux multiples de b , mb et $(m+1)b$. Soit $p - mb = b'$, b' sera positif et $< b$. Or nous avons supposé $ab \equiv 0 \pmod{p}$, on aura donc $mab \equiv 0$, et en retranchant de $ap \equiv 0$ on aura $a(p - mb) = ab' \equiv 0$; donc b' devrait être mis au rang des nombres b, c, d , etc... et serait plus petit que le plus petit de tous, ce qui est contre la supposition.

THÉORÈME. — Si aucun des deux nombres a et b n'est divisible par un nombre premier p , le produit ab ne le sera pas non plus.

Soient α et β les résidus minima positifs des nombres a et b , suivant le module p ; aucun d'eux ne sera nul par hypothèse. Or si l'on avait $ab \equiv 0$, comme $ab \equiv \alpha\beta$ on aurait $\alpha\beta \equiv 0$, ce qui serait contraire au théorème précédent. »

Et Gauss ajoute :

« La démonstration de ce théorème a déjà été donnée par Euclide, El. VII, 32. Nous n'avons pas cependant voulu l'omettre, tant parce que plusieurs auteurs modernes ont présenté des raisonnements vagues au lieu de démonstration, ou bien ont négligé ce théorème ; que dans le but de faire mieux saisir, par ce cas très simple, l'esprit de la méthode que nous appliquerons par la suite à des points difficiles. »

On voit que le théorème cité dans l'article de M. THOVERT se déduit immédiatement du théorème précédent des « *Disquisitiones* » en raisonnant par l'absurde.

Si l'on veut « moderniser » et faire ressortir la structure des démonstrations on peut considérer la notion de « *MODULE de nombres* ».

DÉFINITION. — Un ensemble de nombres réels est appelé « module » si l'ensemble contient avec les nombres x et y les nombres : $x \pm y$.

(Notons que le nombre 0 appartient à n'importe quel module et que, par suite, un module qui contient x contient aussi $-x$ et $m.x$ (m entier positif, négatif ou nul). On a alors le :

THÉORÈME. — Si un module de nombres est tel que dans tout intervalle borné il n'y ait qu'un nombre fini d'éléments du module, ce module est l'ensemble des multiples : $m.d$ d'un nombre positif d du module ($m = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 \pm \dots$), ce nombre d est appelé LA BASE du module.

Soit un intervalle contenant zéro et des nombres positifs du module ; il n'en contient qu'un nombre fini ; soit d le plus petit d'entre eux ; si un nombre $h \neq 0$

du module n'était pas de la forme md , il existerait un nombre entier positif, négatif ou nul m_0 tel que $mod < h < (m_0 + 1)d$, d'où $0 < h - m_0d < d$, or, par définition d appartenant au module il en est de même de mod et, par suite, de $h - mod$, ce qui est en contradiction avec la définition de d ; tout nombre du module est donc de la forme $m.d$; la réciproque est immédiate.

CONSEQUENCE : Si un module de nombres est un module de nombres entiers, il admet nécessairement une base d et les nombres du module sont les multiples de d .

Démontrons alors le théorème suivant :

Si un nombre premier $p > 1$ divise un produit ab sans diviser a , alors il divise b .

On a par hypothèse p premier et $a \equiv 0 \pmod{p}$. Considérons alors l'ensemble (E), évidemment non vide, des entiers x quelconques, tels que : $ax \equiv 0 \pmod{p}$.

Il est immédiat que cet ensemble est un module d'entiers ; il admet donc une base d ($d > 0$) et on a : $x \equiv 0 \pmod{d}$. Or p appartient à (E) et par suite il existe un entier k tel que $p = k.d$.

On a certainement $d > 1$, car $d = 1$ entraînerait : $ad \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$, ce qui est contraire à l'hypothèse ; il en résulte alors, puisque p est premier : $k = 1$; $d = p$, donc $x \equiv 0 \pmod{p}$, le théorème est démontré.

Notons que la théorie du P.G.C.D. peut se déduire de la notion de module.

Soient a et b deux nombres entiers ; considérons l'ensemble (F) des nombres de la forme : $ma + nb$, où m et n sont des entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls. Il est immédiat que cet ensemble est un module d'entiers, il admet donc une base g ; tout nombre de (F) est un multiple de g ; en particulier a et b qui correspondent à : $m = 1$; $n = 0$ et $m = 0$; $n = 1$. On a donc :

$$a = ga',$$

$$b = gb'.$$

Tout diviseur de g divise a et b ; de plus, il existe deux entiers quelconques m_0 et n_0 , tels que $y = m_0a + n_0b$, donc tout diviseur commun à a et b divise g ; g est le P.G.C.D. de a et b .

En outre, on obtient immédiatement le résultat suivant :

Pour que a et b soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers quelconques u et v , tels que : $au + bv = 1$.

Jacques LEGRAND (Lycée de Biarritz).

L'approximation dans le calcul logarithmique

La table à cinq décimales, mise entre les mains des élèves, est un instrument de calcul pratique (donnant des valeurs approchées), et il serait regrettable de l'utiliser sans se soucier de l'erreur commise par cet instrument. Les manuels sont généralement muets sur ce point.

1) ENCADREMENT FONDAMENTAL. — D'abord, l'erreur due à « l'instrument » est bien connue : la partie décimale (mantisse) écrite dans la table est approchée à 0,5 en plus ou en moins sur son dernier chiffre. Si, par exemple, on lit dans la table 30 103, en face du nombre 2, c'est que l'on a :

$$0,30\ 102,5 < \log 2 < 0,30\ 103,5.$$

(Je place une seconde virgule après le 5^e chiffre de la mantisse, car toutes les évaluations d'erreur se font sur ce 5^e chiffre. Cette écriture n'entraîne aucune ambiguïté).

On peut, au lieu de la double inégalité, utiliser la valeur moyenne des deux bornes, en écrivant conventionnellement :

$$\log 2 = 0,30103 \pm 0,5$$

(il est entendu que 0,5 se rapporte au 5^e chiffre de la mantisse).

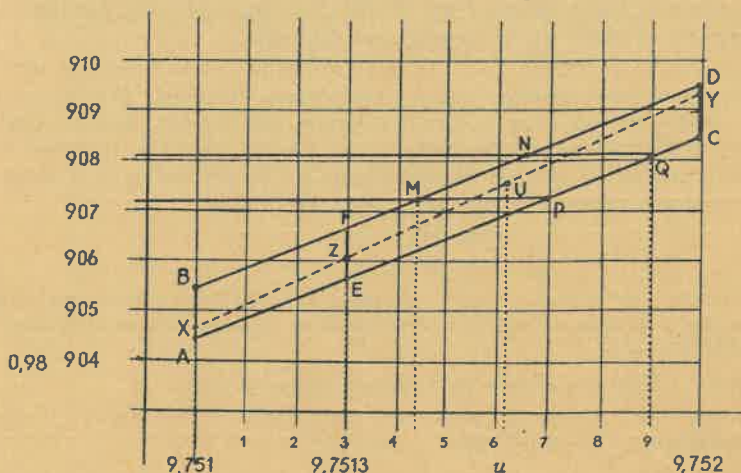
2) OPÉRATIONS. — En utilisant l'encadrement fondamental, on obtient facilement les résultats suivants :

a) La prise du cologarithme n'introduit aucune erreur.

b) Dans l'addition des logarithmes, les erreurs s'accroissent par addition.

c) En multipliant ou en divisant un log par un entier, l'erreur est multipliée ou divisée par cet entier. (Pour abrégé, je dis « erreur » pour différence entre la valeur moyenne et les bornes de l'encadrement).

Mais dans le cas de la division, les quotients peuvent ne pas être exacts. S'il ne s'agit que des erreurs, on peut les « forcer » par excès au plus près ; s'il s'agit de la mantisse elle-même, il faut ajouter l'erreur commise en prenant sa valeur approchée. C'est donc en utilisant l'encadrement fondamental (où la valeur moyenne ne figure pas) que l'on obtient toujours l'approximation la plus serrée.



3) IMAGE GRAPHIQUE. — La fonction $\log x$ ne figure qu'au programme de Sciences Expérimentales. Je crois qu'on peut sans remords affirmer en Mathématiques Élémentaires qu'une telle fonction existe (pourvu que x soit positif), qu'elle est monotone (croissante) et qu'elle se représente par une ligne, comme toutes les fonctions « honnêtes » étudiées dans le cours.

Pour faciliter le langage, j'appellerai *horizontale* la direction de l'axe des nombres, et *verticale* celle de l'axe des log. Pour que le graphique soit lisible, l'unité verticale sera plus grande que l'unité horizontale ; les valeurs seront portées sur des parallèles aux axes situées dans le voisinage de l'arc de courbe que l'on étudie.

Considérons l'encadrement :

$$0,98\ 904,5 < \log 9,751 < 0,98\ 905,5.$$

Soit A le point représentatif de la borne inférieure et B celui de la borne supérieure. Le point X représentatif de $\log 9,751$ est situé quelque part sur le segment AB.

Passons au nombre voisin de la table :

$$0,98\ 908,4 < \log 9,752 < 0,98\ 909,5.$$

Soient C et D les points représentatifs du 1^{er} et du 3^e membre, et Y celui de $\log 9,752$ (Y quelque part sur CD).

L'arc de courbe qui représente les logarithmes de tous les nombres situés entre 9,751 et 9,752 est très tendu, et *peut être confondu avec le segment XY* (on peut démontrer que l'erreur commise en remplaçant l'arc par sa corde ne porte que sur le 8^e chiffre décimal ; elle est donc complètement négligeable).

La conséquence importante est que le *log vrai* (pour un nombre situé entre 9,751 et 9,752) est toujours enfermé dans le parallélogramme ABCD. La différence d'ordonnées entre C et A (ainsi qu'entre D et B) est la différence tabulaire.

4) CALCUL DES PARTS PROPORTIONNELLES. — Soit à calculer $\log 9,7513$. Le principe du calcul consiste à augmenter $\log 9,751$ des $3/10$ de la différence entre $\log 9,752$ et $\log 9,751$. Cette différence n'est pas connue ; on lui substitue la différence tabulaire, mais dans le cas le plus défavorable, l'erreur commise peut s'approcher de $0,5 \times 2 = 1$. Il est donc important d'examiner cette question de près.

Soit Z l'image graphique de $\log 9,7513$. La verticale de Z rencontre AC en E et BD en F. Le point Z est quelque part sur EF.

Or, pour les points E et F, le calcul par les parts proportionnelles est *exact*. L'ordonnée de E, par exemple, est exactement celle de A augmentée des $3/10$ de la différence tabulaire (égale à la différence des ordonnées de C et A). *Donc, en faisant le calcul des parties proportionnelles sur les bornes de l'encadrement fondamental, on n'introduit aucune erreur et le nouvel encadrement obtenu est correct.*

Dans l'exemple choisi, la différence tabulaire est 4 ; on a $4 \times 0,3 = 1,2$. On obtient donc :

$$0,98\ 904,5 - 1,2 < \log 9,7513 < 0,98\ 905,5 + 1,2.$$

(Les bornes de cet encadrement sont les ordonnées de E et F).

5) RETOUR AU NOMBRE. — Supposons que l'on ait obtenu :

$$0,98\ 907,2 < \log u < 0,98\ 908,1.$$

L'horizontale de la borne inférieure coupe BD en M et AC en N ; l'horizontale de la borne supérieure coupe BD en N et AC en Q. Le point U représentatif de $\log u$ est quelque part dans le parallélogramme MNQP. La valeur approchée par défaut de u sera l'abscisse de M, sa valeur approchée par excès sera l'abscisse de Q. On en déduit la règle suivante :

La borne inférieure de u est le nombre tel que son logarithme par excès soit inférieurement le plus près de la borne inférieure de $\log u$.

La borne supérieure de u est le nombre tel que son logarithme par défaut soit supérieurement le plus près de la borne supérieure de $\log u$.

Appliquons cette règle. Dans la table, la mantisse immédiatement inférieure à 98 907,2 est 98 905, dont la borne supérieure est 98 905,5 (ordonnée de B). La différence est donc 1,7. La différence tabulaire est 4, et l'on a sous les yeux le tableau des parts proportionnelles ; on voit immédiatement que la différence 1,7 correspond à la part 4, à placer après le dernier chiffre significatif du nombre. On a donc :

$$9,7514 < u.$$

Cherchons maintenant l'abscisse de Q. La mantisse immédiatement inférieure à 98 908,1 est encore 98 905, dont la borne supérieure est 98 905,5, la différence est donc 3,6. Toujours dans la « table 4 », on voit que 3,6 correspond à la part 9, à placer après le dernier chiffre significatif du nombre. Finalement on a :

$$9,7514 < u < 9,7519.$$

6) REMARQUES. — Pour la clarté du graphique et des explications, l'exemple a été choisi avec une faible marge d'approximation. Lorsque cette marge est plus grande, le « couloir » du logarithme peut comprendre plusieurs parallélogrammes successifs (de même pente tant que la différence tabulaire reste la même) et les points

	4
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

MNPQ peuvent être sur des parallélogrammes différents. On constate facilement que cela ne change rien aux règles du n° 5.

J'ajouterai que le calcul du retour au nombre, en utilisant l'encadrement fondamental, ne présente pas de difficultés pour les élèves ; au début, ils auront avantage à faire, à côté de leur calcul, un croquis « pense-bête » représentant le « couloir » (qui leur rappelle les bornes supérieures et inférieures des log) coupé par les deux parallèles correspondant aux bornes de $\log u$; ils retrouveront ainsi facilement les règles du n° 5.

G. THOVERT (*Lycée Ampère, Lyon*).

Erratum et Remarques

sur l'article « Sur le signe $\equiv$ et la relation d'équivalence », de L. FÉLIX (*Bulletin* d'octobre 1955).

ERRATUM : p. 48, Définition de la relation d'équivalence, lire :

être *réflexive* (un élément est équivalent à lui-même) ;

être *symétrique* (si a est équivalent à b , b est équivalent à a) ;

être *transitive* (a équivalent à b et b à c , entraîne a équivalent à c).

I. W. SERVAIS a bien voulu envoyer quelques remarques sur la question : il distingue deux sortes de réflexivité.

1) Une relation binaire est dite *réflexive* si, pour *chacun de ses arguments* on peut l'appliquer à cet argument pris comme antécédent et comme conséquent

$$(\forall x, \arg. R) \quad xRx.$$

Une relation binaire est dite *totale* *réflexive* si *tout élément du référentiel* peut être pris comme antécédent et comme conséquent $(\forall x), xRx$.

Noter que la symétrie et la transitivité entraînent la réflexivité, mais non la réflexivité totale.

Si x est un argument antécédent, y un de ses conséquents,

$$xRy \Rightarrow yRx \quad \text{d'où } yRx,$$

$$xRy \ \& \ yRx \Rightarrow xRx \quad \text{d'où } xRx.$$

La relation *réci-proque* ou *converse* R^* de R est définie par

$$(\forall x, \forall y), xRy \Rightarrow yR^*x.$$

R est symétrique si $R \equiv R^*$.

II. Sur les fonctions (p. 49), W. SERVAIS critique avec raison la mauvaise expression de ma pensée, en contradiction même avec ce qui précède « $2x + 3$ et $2t + 3$ sont la même fonction », je voulais écrire :

$$x \xrightarrow{f} 2x + 3 \quad \text{et} \quad t \xrightarrow{f} 2t + 3$$

sont la même fonction si x et t sont éléments du même référentiel ». C'est ce qui justifie la notation $f(x) = 2x + 3$.

III. Pour les équations, W. SERVAIS écrit, utilisant le vocabulaire qu'il introduit dans son article du même numéro (octobre 1955) : « Une équation, une identité, sont des fonctions propositionnelles.

Pour une équation on peut énoncer une *question*

$$(\exists x) ? \quad 2x + 3 = 4x - 5,$$

et y répondre le cas échéant par la *proposition*

$$(\exists x) \quad 2x + 3 = 4x - 5.$$

Quant à l'identité, on énonce la *proposition*

$$(\forall x) \quad 2(x + 3) = 2x + 6.$$

Le symbolisme fait ressortir à merveille les nuances. »

L. F.

Les mathématiques et la culture

Lors d'un Congrès scientifique, qui s'est tenu à Bristol au début de septembre 1955, des appréciations diverses furent émises sur le rôle des Mathématiques dans la formation culturelle des jeunes générations. Le *Times* se fit l'écho de quelques réactions en publiant les deux lettres suivantes :

Les bases d'une éducation libérale

Le discours du Docteur BRONOWSKI, à Bristol, le 7 septembre, contenait tant de choses vraies et qui devaient être dites, qu'il est dommage que sa conclusion soit déparée par un dénigrement des mathématiques.

Le mathématicien tend à être méprisé à la fois par l'humaniste et par le scientifique ; par le premier comme un simple spécimen de scientifique, par le second comme quelqu'un tout près d'être un philosophe. Cependant, pour cette raison même, les Mathématiques offrent la meilleure chance de jeter un pont sur le fossé qui sépare les uns des autres... Sans Mathématiques, la science peut dégénérer en une simple collection de faits ; comme telle, elle est justement méprisée par l'humaniste. Il faut une pensée, qui est, au sens le plus large, mathématique pour donner à ces faits une signification. Mais il doit y avoir des Mathématiques du réel ; car les Mathématiques peuvent être utilisées pratiquement, de même que les faits scientifiques peuvent être interprétés mathématiquement.

Trop souvent, quand l'enseignement de Mathématiques « plus pratiques » est réclamé, cela est pris comme signifiant juste ceci : des formules appliquées mécaniquement et sans qu'on les comprenne, sans que l'utilisateur ait jamais vu comment elles peuvent être obtenues. Cela, ce ne sont plus des Mathématiques du tout, c'est de la science pratique et cela ne contribue en rien à une éducation libérale. Au lieu de dire que « le non-scientifique capable devrait faire moins de Mathématiques » (et sans doute plus de sciences), ne pourrait-on dire que toute éducation scientifique devrait avoir une base mathématique, de telle façon que le scientifique reçoive le bénéfice de l'élargissement de perspective qu'une telle base peut donner et, qu'en même temps l'humaniste reconnaisse que la science est quelque chose de plus qu'une collection de règles commodées ?

H.-E. THOMAS (*Times*, 10-9-1955).

Sciences et humanités

Dans sa lettre du 10 septembre, H.-E. THOMAS défend les Mathématiques comme un pont entre la science et les humanités. Je pense que la valeur des Mathématiques dans l'éducation a une signification encore plus grande. Au-dessous de beaucoup d'avis récemment exprimés sur les problèmes de communication entre les différentes parties de la communauté, demeure la supposition que les scientifiques vivent dans des univers hautement spécialisés qui leur sont propres et communiquent seulement avec difficulté, aussi bien entre eux qu'avec des esprits moins initiés. Ce peut être un sérieux problème pour certains spécialistes, principalement dans le domaine de la chimie et de la médecine qui se trouvent eux-mêmes « hors de course » quant au progrès technologique général, mais je me hasarde à suggérer que pour la plupart des scientifiques, c'est l'inverse qui se produit, actuellement.

Dans mon propre domaine de l'électronique, il serait difficile de trouver un chercheur compétent qui ne fût pas aussi et incidemment relativement capable de parler sans ambiguïté avec un scientifique ou un homme cultivé sur n'importe quel sujet étudié sous le soleil... Et la raison en est que ces hommes ont l'habitude d'utiliser et d'inventer des concepts simples et clairement définis, pour lesquels seule la précision des Mathématiques est appropriée. Ils trouvent cela aussi indispensable et aussi praticable dans la théorie de l'information, par exemple, que dans l'application de la loi

d'Ohm. Et le résultat est qu'ils tendent toujours, en quelque langage qu'ils soient appelés à s'entretenir, à le « réduire » selon leurs règles habituelles d'objectivité.

Dans la mesure où les scientifiques sont en train de « conquérir le monde », leur influence sera dominée de façon croissante par les spécialistes de la technique des communications, avec toutes ses ramifications dans l'automatisme, la radio, la télévision et le cinéma, en psychologie, en sciences économiques et sociales et inévitablement en sciences politiques aussi. Si, dans ces conditions, quelque changement dans l'éducation des enfants est réclamée, il doit sûrement être conçu pour triompher de l'aversion qu'ils peuvent nourrir, à l'égard de l'abstraction et des idées mathématiques, et pour les aider à apprécier d'un œil critique les énormes possibilités d'un monde dans lequel nous pouvons espérer façonner notre milieu social aussi bien que notre milieu physique, selon notre volonté. Qu'une telle éducation puisse gêner le développement d'une vie plus parfaite au sens humaniste est peut-être une question qui reste à débattre, mais le danger de l'ignorance est dépassé. Si la démocratie a de survivre, les enfants doivent être préparés à agir comme citoyens conscients et responsables d'un monde technologique.

G.-T. HOLLINS (*Times*, 16-9-1955).

Le Baccalauréat allemand

Voici l'épreuve de Mathématiques dans une section qui correspond à nos sections « littéraires ». Age moyen des candidats : 19-20 ans.

1) L'abeille clôt ses cellules, qui ont la forme de prismes réguliers hexagonaux, non au moyen de plans perpendiculaires à l'axe, mais en construisant un toit formé de trois losanges. Comment cette architecture peut-elle se déduire du principe de l'économie de matériaux ? Quelle forme ont les losanges pour l'économie maximum ? On fera une figure appropriée.

2) Un point P se déplace sur l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 18$. Quel est le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle formé par l'axe des x , OP, et la tangente en P ? Dessiner l'ellipse et ce lieu pour y positif.

3) Un tonneau a les dimensions intérieures suivantes : longueur 80 cm, diamètre maximum 80 cm, diamètre minimum 60 cm. Ce tonneau est de révolution avec des douves paraboliques.

Construire une section méridienne à l'échelle 1/10. Quelle est la contenance en hl ? Quelle erreur relative fait-on quand on l'évalue au moyen de la formule de Simpson sous sa forme élémentaire ? Pourquoi cette formule ne donne-t-elle pas la valeur exacte ?

4) Calculer entre 0 et 1 l'intégrale définie de $\sqrt{16 - x^4}$ au moyen d'un développement en série. Quelle valeur approchée obtient-on quand on s'arrête au 3^e terme ? Borner le reste de la série.

5) Un vapeur partant de San-Francisco ($-122^\circ, 5$; $37^\circ, 8$) dans la direction du sud-ouest suit un arc de grand cercle. En quel point et après combien de milles marins atteint-il l'équateur ? En quel point atteindrait-il l'équateur en suivant la loxodromie à 45° ?

On demande 4 de ces 5 épreuves (au choix). Tables de logarithmes avec formule autorisées. Durée : 4 heures. Wilhelms-Gymnasium, Stuttgart, Reifeprüfung, 1954.

(Document communiqué par notre Collègue J.-M. CHEVALLIER, Lycée Marcelin-Berthelot. Nous pensons que sa publication intéressera les Collègues. — N.D.L.R.).

DELAGRAVE

Nouveauté

COURS BRACHET DUMARQUÉ
ROSTOLLAND

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

classe de 1^{re} technique,
Mathématiques et Technique,
préparation aux Arts et Métiers

avec la collaboration de GENESTINE
professeur à l'Ecole Nationale
d'Enseignement technique de Clichy

un volume (14,5×20)

COURS SCHAEFFER et LEBAILLE
chaque volume 14,5×20

ARITHMÉTIQUE
cl. de 6^e, Br... 255 F., Cart... 345 F.

MATHÉMATIQUES
cl. de 5^e, Br... 390 F., Cart... 480 F.
cl. de 5^e C.C., Br. 480 F., Cart. 580 F.

Sous presse

MATHÉMATIQUES
classe de 4^e

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors, Imp. A. Coueslant (*personnel intéressé*). 88.600. — 1955
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : IV-1955

MATHÉMATIQUES

Vient de paraître :

LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Première C.M. Br. : 535 f., cart. : 645 f.

En préparation :

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Première C.M. } Parution :
LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Première A.B. } mars 1956
SPECIMENS g ratuits sur demande

Nouveautés :

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Seconde C.M.

Algèbre : 1 volume Br. : 395 f., cart. : 495 f.

Géométrie : 1 volume Br. : 565 f., cart. : 685 f.

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Seconde A.B.

Algèbre et géométrie : 1 volume Br. : 525 f., cart. : 645 f.

COURS COMPLET DU 1^{er} CYCLE

Vient de paraître :

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Cinquième, *Livre de Corrigés*.

En préparation :

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Sixième, *Livre de Corrigés*.

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Troisième.

Edition Lycées et Collèges Br. : 450 f., cart. : 550 f.

Edition Cours Complémentaires cart. : 570 f.

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Quatrième.

Edition Lycées et Collèges Br. : 420 f., cart. : 520 f.

Edition Cours Complémentaires cart. : 550 f.

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Cinquième.

Edition Lycées et Collèges Br. : 300 f., cart. : 380 f.

Edition Cours Complémentaires cart. : 410 f.

LESPINARD et PERNET. — MATHEMATIQUES, classe de Sixième.

Edition Lycées et Collèges Br. : 235 f., cart. : 330 f.

Edition Cours Complémentaires cart. : 350 f.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHEMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique et Cosmographie) Br. : 815 f., cart. : 915 f.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE Br. : 390 f., cart. : 495 f.

Classe de MATHEMATIQUES :

COURS COMPLET

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE Br. : 690 f., cart. : 790 f.

" — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTEE Br. : 275 f.

" — ARITHMETIQUE Br. : 285 f.

" — MECANIQUE Br. : 245 f., cart. : 335 f.

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE, ... Br. : 330 f., cart. : 425 f.

LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE Br. : 595 f., cart. : 695 f.

" — TRIGONOMETRIE Br. : 375 f., cart. : 470 f.

" — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES, Bac.,
2^e partie, classe de Mathématiques 335 f.

Classe de Première C. et M.

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES, Bac.,
1^{re} partie, séries C. et M. 280 f.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE
MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1955

ARITHMÉTIQUE 6° (<i>Jusqu'à épuisement</i>)	220 fr.
ARITHMÉTIQUE 6° — Nouvelle édition mise à jour	330 »
<i>Corrigé des exercices de 6°</i>	300 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5°	185 »
GÉOMÉTRIE 5° et 4°	400 »
ARITHMÉTIQUE 5°	350 »
<i>Corrigé des exercices de 5°</i>	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4°	300 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3°	350 »
GÉOMÉTRIE 3°	325 »
GÉOMÉTRIE 5°, 4°, 3°	800 »
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages cartonné).	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3° MODERNE COURT.	100 »
ALGÈBRE 2° A.B.C.M.	500 »
GÉOMÉTRIE 2° A.B.C.M.	465 »
ALGÈBRE 1 ^{re} A.B.	180 »
ALGÈBRE et TRIGONOMETRIE 1 ^{re} C.M.	550 »
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A.B.C.M.	500 »

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT,	
1 ^{re} partie, A.B.C.M.	390 »
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	410 »

Roland MAILLARD
 Professeur de Mathématiques Spéciales
 au Lycée Charlemagne
 Chargé d'un cours
 à l'École Normale Supérieure

et **Albert MILLET**
 Professeur agrégé
 au Lycée Janson-de-Sailly
 et à l'École Normale Supérieure
 de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second degré

- Classe de Sixième.** *Un volume.* + Corrigés.
Classe de Cinquième. *Un volume.* + Corrigés.
Classe de Quatrième. *Un volume.* + Corrigés.
Classe de Troisième (Nouvelle édition). *Un volume.*
 + Corrigés.
Classes de Seconde Classique A et B. *Un volume.*
Classes de Seconde Classique C et Moderne :
 Algèbre. *Un volume.*
 Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.
Classes de Première Classique A et B. *Un volume.*
Classes de Première Classique C et Moderne :
 Algèbre et Trigonométrie. *Un volume.*
 Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.
 ★ **Classe de Sciences expérimentales.** *Un volume.*
Classes de Philosophie et Sciences expérimentales :
 Cosmographie. *Un volume.*
Classe de Philosophie :
 Trigonométrie et Algèbre. *Un volume.*
 ★ **Mathématiques** (Trigonométrie, Algèbre et Cosmographie).
Un volume.
Classe de Mathématiques :
 Algèbre. *Un volume.* Géométrie descriptive.
 ★ Arithmétique. *Un volume.* *Un volume.*
 Cosmographie. *Un vol.* Trigonométrie. *Un vol.*
 Géométrie. *Un volume.* ★ Mécanique. *Un vol.*
Classe de Mathématiques (Technique) :
 ★ Algèbre. *Un volume.*
 Géométrie. *Un volume.*
 Trigonométrie. *Un volume.*

Cours Complémentaires

- ★ **Classe de Sixième.** *Un volume.* + Corrigés.
 ★ **Classe de Cinquième.** *Un volume.* + Corrigés.
 ★ **Classe de Quatrième.** *Un volume.* + Corrigés.
 ★ **Classe de Troisième.** *Un volume.*

+ Les **Corrigés**, hors commerce, sont exclusivement réservés
 à MM. les Professeurs de Mathématiques.

★ **NOUVEAUTÉS.**

