Sur le signe = et la relation d'équivalence

I. Dans un article précédent (janvier-mars 1955), je signalais la dévaluation du signe =, encore plus grave peut-être que celle du signe de parenthèse.

Dans les charmants souvenirs de Mistral, *Mes origines*, nous lisons que, pour ses parents, « écrire était vraiment un office religieux ». Et il montre bien ce respect pour le mystère de la plume, dans le début d'un récitatif usité jadis chez nous :

Monseigneur saint Anselme lisait et écrivait :

Un jour de sa sainte écriture,
Il est monté au haut du ciel.

Que reste-t-il de ce sentiment dans les gribouillis informes de nos élèves ? Les jeunes ne distinguent pas A de *a*, ni : de =, et le beau signe d'intégrale devient chez les grands un vague trait informe. Parallèlement, la valeur des signes s'estompe, de même que le sens des mots qui pénètrent le grand public (par exemple, lieu géométrique).

Voici quelques exemples d'emploi du signe =. On allongerait aisément cette liste !

a) Dans les journaux : 1 litre de lait = 1 kg. de raisin (équivalence en calories).

b) Dans un tableau généalogique, au cours d'histoire : Ferdinand V = Isabelle la catholique (marié à).

c) Dans le traité d'Halmos, intitulé *Measure Theory*, « We consider the set

$$\{t : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

(= the closed unit interval). »

Le signe = signifie ici « ce que l'on nomme ».

d) Chez nos élèves :

1. « 1.275 cm^3 = 1,275 dm^3 = 1,275 l. = 1,275 kg., car c'est de l'eau » (examen de Sixième).

2. AB = D (pour : on nomme D la droite AB).

3. D = $y = -2x + 4$ (pour : l'équation de D est). — A = $x = 2$ $y = 0$ (même emploi avec faute de ponctuation dans la pensée).

4. Direction de D = direction de D' (pour : est la même que) (Copies de B.E.P.C.).

5. AB = AC = $\hat{B} = \hat{C}$ (avec deux espaces isolant le 2e signe =).

e) 1. Chez un collègue, professeur de Mathématiques :

« A la fin de la résolution par l'algèbre, on ne peut accepter $3 = x$ à la place de $x = 3$, car $x = 3$ signifie « le nombre cherché est 3 », tandis que 3 peut être bien autre chose que le nombre cherché. »

2. A rapprocher de l'objection d'un jeune élève de Cinquième (12 ans, octobre 1953) communiquée par notre collègue Arnaudiès : Après les explications sur l'addition des nombres entiers, l'enfant demanda la parole : « Ce que je ne comprends pas, c'est le mot « égale ». Vous nous dites, par exemple que 3 + 4 égale 7, que 3 + 4 c'est 7. Mais 7 peut aussi bien être 2 + 5 ! »

Voici l'interprétation de M. Arnaudiès dans la fiche qu'il a bien voulu m'envoyer :

« Dans la définition de l'addition, nous disons aux élèves : « Additionner 3 billes et 4 billes, c'est les *réunir* en un seul tas et les *recompter*, on trouve 7 billes. » Il y a donc *deux opérations* successives ou *deux temps* dans l'addition. Or 3 + 4 = 7 s'écrit au moyen de deux signes. Il est donc naturel que pour certains élèves (+) représente la *réunion* et (=) le nouveau *décompte*. Cela se traduit d'ailleurs dans la formulation courante « 3 et 4, ça fait 7 ». Conséquence fâcheuse : persistance de la faute 3 + 4 = 7 + 2 = 9... »

Finalement, on peut sans doute distinguer dans l'*emploi usuel* du signe = plusieurs sens :

— Une correspondance plus ou moins vague, quantitative ou non, la loi de correspondance étant sous-entendue (valeur énergétique, volume et poids, parallélisme, etc.), « ce qui équivaut à » ;

— L'indication que la même pensée est exprimée différemment (exemples *c*, d_2), « c'est-à-dire » ;

— Une équivalence logique (le deuxième signe de d_5) ;

— Une déduction (e_1) « est donc », ou une action « fait donc » (e_2).

Tout ceci est valable comme pensée. Ce n'est même, ni vague, ni ambigu. Aussi nos élèves persistent à employer le signe = dans tous ces sens. Seulement, c'est une *abréviation et non pas un signe mathématique* (ceci est parfaitement net dans le livre de Halmos dont la rédaction est très soignée ; ce que nous avons cité est indiqué comme « illuminating example »).

Pour les enfants, les signes de l'arithmétique sont des abréviations. Dans l'exemple d_1, par exemple, quel est le signe le plus mauvais ? Le dernier, parce qu'il sous-entend trop de choses, mais le premier n'est-il pas choquant ? En tout cas, rien n'est fautif puisque l'enfant lit « ça fait ».

Finalement, l'essentiel est de marquer solennellement le passage de l'emploi vulgaire, et, si j'ose dire, arithmétique, du symbole (je veux dire arithmétique au sens de l'école primaire), à son emploi en *Algèbre*.

II. **Signification du signe =.**

Pourrions-nous être d'accord sur les propositions suivantes :

1° *Le signe = ne peut être employé que pour indiquer une relation d'équivalence.*

Une relation d'équivalence est (voir Conférence Choquet, *Bulletin* d'octobre 1953) une relation binaire (c'est-à-dire entre *deux* éléments) qui satisfait aux trois conditions :

être symétrique (un élément est équivalent à lui-même) ;

être réciproque (si *a* est équivalent à *b*, *b* est équivalent à *a*) ;

être transitive (*a* équivalent à *b* et *b* à *c* entraîne *a* équivalent à *c*).

Naturellement, il a fallu d'abord préciser dans quel ensemble sont choisis les éléments *a*, *b*.

A ce point de vue, les exemples *a*) et d_4) ne sont pas fautifs, tandis que *b*) est absurde.

2° *Il est conseillé d'utiliser des signes spéciaux* pour indiquer les relations d'équivalence nouvellement introduites dans le but d'éviter autant que possible les confusions : certains sont usuels, par exemple D // D' pour le parallélisme, d'autres ont été rejetés peut-être prématurément ; par exemple, pourquoi ne pas conserver $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ (avec trois traits), pour l'équipollence des vecteurs ? du moins jusqu'à ce que les élèves réclament d'eux-mêmes le signe = ? Il n'y aurait que des avantages, je trouve, pour les jeunes enfants, tant qu'ils n'ont pas la notion de nombre rationnel, à écrire $\frac{2}{3} \equiv \frac{8}{12}$, avec trois traits, pour les fractions « équivalentes ». Et comme les jeunes de Quatrième et Troisième seraient contents si nous acceptions un symbole pour les triangles « congrus », si mal nommés « égaux », ou, si vous préférez, nommés si savamment « égaux » à un stade où, pour l'enfant le mot « égal » évoque trop des nombres.

3° *Il ne faut pas indiquer par le signe égal une simple dénomination :*

« je nomme *y* la *fonction* $2x + 3$ » ; « je la nomme $f(x)$ » ;

« je nomme D la droite AB ».

Aucun emploi du signe (=) ne serait ici correct. N'écrira-t-on pas $f(x) = 2x + 3$? Non, si vous voulez dire : « parmi *toutes* (?) les fonctions $f(x)$, celle que je consi-

dère est $2x + 3$ ». Mais comment écrire : « j'associe à x le nombre $2x + 3$ » ? Il ne s'agit pas ici d'une relation d'équivalence, mais de la définition d'une fonction. Dans le cours polycopié de M. L. Schwartz (*Mathématiques générales*, 1954-55), ceci est noté

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R \\ x & \longmapsto & 2x + 3 \end{array}$$

La première ligne symbolise : f est une application de l'ensemble R des nombres réels dans ce même ensemble. La seconde ligne indique qu'au nombre x correspond le nombre $2x + 3$. On convient de poser $y = 2x + 3$, y étant *le nombre* associé à x. Alors, étant entendu qu'il s'agit de nombres, le symbole simplifié sera

$$x \longmapsto y = 2x + 3.$$

Mais la fonction n'est pas y ; c'est l'association entre x et y. La notation de fonction par $f(x)$ ne peut intervenir que lorsque l'élève est capable de comprendre que $2x + 3$ et $2t + 3$ sont la même fonction si x et t désignent des éléments du même ensemble, de même que la translation de vecteur donné est la même transformation quel que soit le nom des points ou des figures auxquels elle est appliquée. Même à ce moment, le nom de la fonction est f, et $f(x)$ est le nombre associé à x par la fonction. Sommes-nous si pressés que nous ne puissions écrire : « Soit la fonction $x \xrightarrow{f} f(x)$ » ?

Mais si nous portons notre attention sur le nombre $f(x)$ obtenu, nous écrirons : Soit $f(x) = 2x + 3 \quad \forall x$ (c'est-à-dire, quel que soit x).

III. **Equations. Identités.**

On a proposé d'écrire avec un point d'interrogation le signe égal d'une équation, car il s'agit, en quelque sorte, d'une question posée. D'accord, mais quelle question ? « Existe-t-il un nombre, ou des nombres satisfaisant à telle égalité ? » Il est clair que la question porte, non sur la *vérité* de l'égalité, mais sur l'*existence* du nombre nommé x. Ce n'est donc pas le signe $=$ qui doit porter le point d'interrogation, mais le *symbole d'existence*. Pour celui-ci on a proposé (Ex), mais la lettre E a déjà tant d'occasion d'être utilisée ! Le symbole le plus usité est $(\exists x)$ avec la lettre E renversée. Il se lit « il existe au moins un x tel que ». Avec un point d'interrogation, nous obtenons $(\exists x)$? c'est-à-dire : « Existe-t-il au moins une valeur de x telle que. »

Ainsi une équation sera $\quad (\exists x)\ ?\quad 2x + 3 = 4x - 5.$

Et une identité sera une affirmation $\quad (\forall x)\quad 2(x + 3) = 2x + 6.$

Le point d'interrogation sur le signe $=$ ne peut correspondre qu'à une vérification : « Est-il vrai que le premier membre est égal au second ? »

Les signes $\exists$ et $\forall$ se nomment des *quantificateurs*. Ils ne sont pas indispensables, pas plus que n'importe quel symbole, pas plus que n'importe quelle dénomination, et il faudra toujours appliquer la règle de Pascal : remplacer les définis par leur définition. Mais nous savons bien que l'algèbre est l'utilisation d'un formalisme ; si nous voulons faire acquérir une idée nouvelle à nos élèves, c'est les aider que de leur proposer un symbole pour la signaliser. Après avoir introduit sans précaution les symboles fondamentaux dès les premiers âges, je ne vois que des avantages à introduire, au début officiel de l'algèbre (classe de Quatrième) les deux symboles qui précisent le signe trop général d'égalité.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que l'ensemble où x prend ses valeurs est l'ensemble des nombres connus par l'enfant, ensemble qui s'étend progressivement. Mais s'il s'agit d'ouvriers, de livres ou de pigeons, il faut écrire naturellement ($\exists\, x$ entier positif) ? $2x + 3 = 4x - 5$ (avec le symbole ou en toutes lettres, comme on voudra, mais sans abréviations de fantaisie).

Quand commencent à se présenter des ensembles variés, l'ensemble de référence où x prend ses valeurs ne peut plus être sous-entendu ; le *symbole d'appartenance* devient utile pour abréger une phrase qui se répète : c'est $\in$, remplacé éventuellement pour raisons typographiques par un épsilon ε (appartient à ».

IV. Quant à l'emploi fautif de l'exemple d_5, on l'éviterait si l'on proposait franchement le signe de l'*équivalence logique* $\Longleftrightarrow$, avec, naturellement, le signe de l'*implication logique* $\Longrightarrow$. Ce serait bien plus net que les « nécessaires » et les « suffisants », même précisés par les « à », « pour que », etc...

On ne peut exiger une rédaction précise avant d'avoir obtenu une pensée précise, et c'est celle-ci qui est exprimée par les symboles.

Conclusion. — Les erreurs commises au sujet du signe $=$ proviennent du fait que l'enfant n'a pas nettement conscience de ce qu'est une relation d'équivalence, la réciprocité (pour $x = 3$ ou $3 = x$) et surtout la transitivité. De plus, le symbolisme par le signe $=$ non quantifié est imprécis et une phrase ou un symbole complémentaire est obligatoire.

De plus, on veut faire rendre à l'algèbre plus qu'elle ne peut donner : l'algèbre ne peut nous dire si 3 est un nombre de mètres ou un nombre de lapins. A partir d'un énoncé de problèmes, il faut, comme chacun sait, faire la « mise en équations », c'est-à-dire la traduction en langage algébrique d'une partie de l'énoncé ; celle qui concerne des nombres abstraits, indépendamment de ce qu'ils signifient. L'algèbre alors nous conduit à $x = 3$ ou $3 = x$; c'est la même chose. Mais, dans une troisième partie, nous répondrons dans la langue de l'énoncé, « la fermière a cassé trois œufs ».

Encore une remarque : il est scandaleux de prétendre que l'algèbre puisse donner, en sortant du moulin, autre chose que ce qu'on a mis à l'entrée. Ne voit-on pas, sous prétexte « d'interpréter le résultat », accepter « $x = -3$ » pour « il y a trois ans », alors que la mise en équation a supposé x positif par essence, faute de convention de signe et que $x = 3$ signifie « dans 3 ans » ?

Si x est un nombre non affecté de signe, $x + 3 = 0$ n'a pas de solution. Mais, naturellement, ce résultat de l'algèbre peut nous alerter : « Et si nous avions fait une convention de signe ? ». Alors on précise celle-ci et l'on regarde si la mise en équation est encore valable. La prochaine fois, on devra penser dès le départ à faire les conventions utiles pour le problème.

Le besoin actuel d'abréviations, de symboles (code de la route, signes du conducteur de voiture), l'habitude des graphiques, des schémas, tout cela, en un certain sens, facilite la tâche du professeur de Mathématiques. Cela nous permet d'enseigner à des enfants de 10, 12 ou 14 ans, ce qui était considéré, il n'y a pas tant d'années, comme des Mathématiques réservées aux spécialistes. Mais c'est à nous de proposer à l'enfant les symboles dont il a besoin et de les codifier d'une façon rigide. Faute de quoi, il utilise les quelques signes qu'il connaît sans discernement, sans avoir pour eux le respect dû à leur valeur scientifique, sans les associer à une signification précise, sans même prendre la peine de les dessiner correctement.

L. Félix (*Lycée La Fontaine, Paris*).