L'axiomatique, nos élèves et nous

Entre les mathématiques que nous enseignons dans nos classes et les livres destinés aux chercheurs comme les « Eléments », de Bourbaki, la distance est énorme. Mais, comme les mathématiciens modernes font, par l'axiomatique, un retour aux sources et invitent à une prise de conscience des structures à partir des plus simples, le professeur qui fait, en tant qu'élève, l'effort pour voir les faits habituels sous un jour nouveau, voit aussi sous un jour nouveau son enseignement. Ses habitudes étant mises à l'épreuve, il comprendra mieux les enfants qui n'ont pas nos habitudes.

Ce n'est pas un paradoxe que de rapprocher, comme nous allons tenter de le faire, des mots d'enfants et des citations de Bourbaki (prises surtout dans les introductions). On distinguera sans peine les deux sources !

L'ABSTRACTION EN ARITHMÉTIQUE.

Janot (4 ans, école maternelle) ne peut pas compter les pommes qu'il a dessinées « parce qu'il ne sait plus quelle est la quatrième ». Il n'est pas mûr pour l'axiomatique. Mais son voisin, qui se moque de lui, et lui dit : « Prends-les n'importe comment, ça revient au même », possède déjà les premiers axiomes.

A quel moment se détachent des objets, non seulement le nombre et les opérations, mais encore le raisonnement ?

Bien jeune était le petit enfant de Fouché qui, invité à ôter 5 pommes de 12 pommes, ne pouvait pas le faire et finit par s'écrier : « Mais, enfin, qu'est-ce qu'on en a fait des 5 pommes ? » Mais c'est en classe de 6e que notre collègue ARNAUDIÈS voulut expliquer le problème d'examen dont on se souvient peut-être, où un enfant et un vieillard parcouraient le périmètre d'un rectangle. Il proposa, pour arriver à la réponse demandée, de supposer que le vieillard a un frère jumeau qui part à la même heure que l'enfant, etc... Tous les élèves comprirent très bien, mais l'un d'eux s'écria : « Il fallait le savoir, qu'il avait un frère jumeau ! » Et la classe approuva.

Qu'est-ce qui compte et qu'est-ce qui ne compte pas dans un énoncé ? dans un raisonnement ? dans un texte mathématique ? A force de faire des problèmes de robinets ou de courriers, l'enfant finira par le soupçonner. Mais si nous le savons bien, nous pourrons peut-être (et même inconsciemment) l'aider. Ce qui compte, c'est la nature et les combinaisons des opérations à faire, c'est la structure du problème.

« Un même calcul algébrique peut servir à résoudre des problèmes portant sur des kilogrammes ou sur des francs, sur des paraboles ou sur des mouvements uniformément accélérés... Cette faculté de donner des contenus communs multiples aux mots et notions premières d'une théorie est une importante source d'enrichissement de l'intuition mathématique qui n'est pas nécessairement de nature spatiale ou sensible comme on le croit parfois, mais qui est plutôt une certaine connaissance du comportement des êtres mathématiques, aidée souvent par des images de nature très variée... La méthode permet, lorsqu'on a affaire à des êtres mathématiques complexes, d'en dissocier les propriétés et de les regrouper autour d'un petit nombre de notions, c'est-à-dire, de les classer suivant *les structures* auxquelles elles appartiennent. »

La reconnaissance de ces structures, que l'on peut étudier « en culture pure », suivant l'expression de J. Dieudonné, permet l'emploi d'un petit nombre de symboles suffisants. « La méthode axiomatique n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formulisation est facile à concevoir. » On notera que l'auteur n'exige pas, et, du reste, n'emploie pas de textes formalisés, et la rédaction, les explications, subsistent entre les formules.

Ainsi, ce qui compte, c'est ce que nous pouvons exprimer par des symboles. Et quelle nouveauté pour l'enfant qui prend conscience qu'il peut travailler sur des symboles ! Dans une classe de 5e, un problème concret, à données numériques, a été traduit par une équation. Pour la première fois, on résout l'équation. Un élève traduit son impression : « Oh ! Monsieur, c'est drôle de nager ainsi dans le vague ! » (Noté par R. CASSÉ).

LES OPÉRATIONS.

En arrivant en 6e, les enfants savent faire le calcul que demande une opération. En 5e, on les invite à réfléchir sur celles-ci pour prendre conscience de leur structure. Il n'y a aucune difficulté pour la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication. Il faut naturellement donner des exemples de non-commutativité : par exemple, pour faire une friture, il faut mettre l'huile avant le poisson ! Les formules, les deux mots qui symbolisent les notions nouvelles et les fixent dans la mémoire, sont très bien accueillis (même en 6e avec l'ancien programme).

Mais ensuite vient une structure beaucoup plus compliquée : on mélange les deux opérations ; il faut voir les relations qu'elles ont entre elles. Commutativité ? Distributivité ? La difficulté commence, soulignée par les erreurs des élèves. Ne passons-nous pas trop vite ? Il s'agit, non plus de changer l'ordre des termes ou facteurs (c'est-à-dire des éléments de l'ensemble qui subit l'opération), mais de changer l'ordre des actions. Par exemple, les actions (ajouter 3), (multiplier par 2), ne sont pas commutatives, pas plus que les actions (mettre son manteau), (le boutonner), ou bien (mettre deux planches l'une sur l'autre), (placer un clou sur la planche), (taper sur le clou).

Quant à la distributivité, qui ne va qu'à sens unique, avons-nous essayé de la signaliser par un bon symbolisme ? Quel signe nous crie à cet endroit : « Attention,

tournant dangereux » ? Ce n'est pas un instituteur pour ses marmots, c'est Bourbaki qui, dans sa sollicitude pédagogique, a fait passer le signal, du bord de la grand'route aux marges de son livre ! Un symbole est utile s'il traduit nettement une idée nouvelle et sert, en somme, d'avertissement. Au lieu d'écrire, dans les petites classes $a.(b+c)$ et $a+b.c$ ou $a+(b.c)$, ne pourrait-on essayer, par exemple, d'exiger le crochet (boîte ouverte) pour contenir la somme, ce qui permet de faire la distribution, et de mettre le produit dans une boîte fermée avec le droit de supprimer la boîte si on colle les facteurs. Ainsi, le crochet signifierait « distributivité permise ».

Quant à la parenthèse, j'en propose la suppression dans les petites classes, parce que c'est un symbole complètement dévalué. On s'en rend compte (facilement) par un coup d'œil sur (certains) journaux (très) répandus. Les enfants ont, des parenthèses, une conception qu'il faut leur laisser le temps d'oublier : on ne détruit pas un symbolisme habituel par la terreur, mais par l'abandon (surtout s'il est vrai que l'école primaire n'est pas entièrement innocente ici).

Ce matin encore, une bonne élève de 4e, trop consciencieuse et trop sincère, pour calculer $\overline{AM} = 3\,\overline{AB} - 4\,\overline{BC}$ dans le cas d'abscisses $a = 3$, $b = -4$, $c = -1$, m'a écrit textuellement $x(\overline{AM}) = (-21)(\overline{AB}) - (+12)(\overline{BC})$, ce qui exprime clairement une idée exacte. Je ne vois d'autre solution que l'interdiction provisoire du symbole ( ) en mathématiques.

C'est le moment de placer une citation ! « Les formules du calcul algébrique ordinaire seraient un texte formalisé si l'on avait complètement codifié les règles gouvernant l'emploi des parenthèses et qu'on s'y conformât strictement, alors qu'en fait, certaines de ces règles ne s'apprennent guère qu'à l'usage, et que l'usage autorise à y faire certaines dérogations. »

Si Bourbaki trouve notre emploi des parenthèses peu net, est-il étonnant que les enfants fassent des confusions ?

LES RELATIONS.

Inutile de parler ici de la relation d'ordre. L'enfant n'y trouve aucune difficulté, et le signe $<$ est un excellent symbole immédiatement agréé. Les inégalités en cascades plaisent beaucoup aussi.

Mais je n'en dirais pas autant de la relation d'équivalence ! Et je serais presque tentée de jeter l'interdit sur le signe $=$ comme sur le signe de parenthèse ! Sans aller jusque-là, il faut se rendre compte de la signification qu'a ce signe pour l'enfant : il n'indique pas, pour lui, une relation d'équivalence, mais une action. Dans $3+5=8$, le 8 remplace les deux termes qui *disparaissent,* d'où l'écriture naturelle

$$3+5=8+2=10.$$

J'ai trouvé, cette année, dans un devoir de Mathématiques Elémentaires une division d'entiers écrite $a/b = q + r$ qui traduit « a divisé par b *donne* un quotient q *avec* un reste r ».

Le symbolisme (=) pour (donne) et (+) pour (avec), (en outre), est du reste continuellement utilisé par les élèves quand elles écrivent pour elles, en prenant des notes ou dans leurs brouillons. L'écriture abrégée $a/b \Longrightarrow (q\ \&\ r)$ serait très acceptable.

Une relation d'équivalence n'indique pas une action ; elle est, si j'ose dire, statique. Mais nous en rencontrons tant d'exemples variés en arithmétique, algèbre et géométrie, que je crois mieux d'en réserver l'étude pour un autre article qui pourrait s'intituler : Les relations d'équivalence dans notre enseignemnt de la 6e à la 3e. Ce sera, en quelque sorte, l'exploitation pratique des notions introduites par M. CHOQUET dans sa conférence (*Bulletin,* octobre 1953).

LES FONCTIONS.

Nous introduisons sans difficulté les graphiques dès la 6e et la fonction linéaire en 3e. Je noterai seulement que les graphes sont construits d'une façon plus claire et plus logique dans les livres savants, en séparant les deux axes sans superposition des

origines. Cela éviterait toute confusion avec la géométrie analytique (voir les énoncés de B.E.P.C.). En cas de changement d'origine par la variable $x = X - a$, on ne serait pas obligé de changer l'axe des y ! et le graphe de $y = 0$ ne serait plus l'axe des x.

La création de la courbe représentative nous conduit à de nouvelles structures : « A côté des structures algébriques, interviennent des structures d'une autre sorte : celles où l'on donne un sens mathématique aux notions intuitives de limite, de continuité, de voisinage... Nous partons du concept physique d'approximation... » (Introduction à la *topologie*).

Finalement l'enfant aura connaissance des principales propriétés à partir desquelles on construit l'algèbre et l'analyse : le stade pré-axiomatique sera terminé. Il pourra concevoir la possibilité (même s'il n'est pas destiné à faire le travail) de construire les mathématiques sur une base axiomatique. Comme l'a dit M. CARTAN au début de sa conférence : « Une exposition basée sur les propriétés, c'est là l'axiomatique. Nous allons donc faire le bilan des propriétés que nous connaissons bien : il nous faudra, soit les prendre comme axiomes, soit les retrouver comme théorèmes. » Et dans les introductions de Bourbaki pour l'algèbre : « Bien entendu, les axiomes n'ont pas été choisis arbitrairement, mais ne sont autres que les propriétés appartenant à la plupart des lois de composition qui interviennent dans les applications, telles que l'associativité, la commutativité, etc... » Et, dans la topologie : « Le choix des axiomes est évidemment quelque peu arbitraire et historiquement a donné lieu à de longs tâtonnements. Le système d'axiomes auquel on s'est finalement arrêté couvre sensiblement les besoins actuels de l'analyse sans tomber dans une généralité excessive et sans objet. »

Ainsi, le choix des axiomes dépend de ce que l'on veut en faire. J'ouvre ici une parenthèse : on se montre parfois inquiet de la réapparition du suspect C.Q.F.D. accusé de souligner le dogmatisme. Mais c'est ici la justification même du bon choix des axiomes qui nous donnent ce dont nous avons besoin pour l'utilisation mathématique ou physique. Si, du point de vue logique, le choix des axiomes est arbitraire, soumis seulement à la non contradiction, au point de vue mathématique, la condition supplémentaire est que ce choix soit fécond et utilisable.

LA GÉOMÉTRIE.

L'exploration de l'espace commence avec les premiers gestes de l'enfant. Mais le champ des expériences physiques est complexe. Pour l'apprentissage des formes et du vocabulaire de base, après le jardin d'enfants, nous comptons (en France) sur quelques calculs de surface et volumes, sur les jeux, les travaux manuels, le dessin, la géographie, etc... Utilisons-nous bien la classe de 5e ?

Période pré-axiomatique (4e, 3e). — 1) Aucune construction d'ensemble de la géométrie n'est possible tant que la formation logique est insuffisante. La théorie, au début de l'année surtout, ne peut exiger que deux ou trois pas logiques à partir des faits évidents que donnent les instruments choisis. En acceptant dès le début la règle (ou le pliage) et le compas, je vois trois grands chapitres :

Le triangle ; médiatrice et cercle circonscrit ; bissectrices et cercles tangents.

Les parallèles, avec, rapidement, retour à la géométrie locale par l'outil parallélogramme.

L'angle inscrit : la circonférence intervient sans son centre ! En 3e, la possibilité d'employer l'algèbre en géométrie est une révélation.

2) Outre l'acquisition de quelques résultats fondamentaux, nous pouvons déjà atteindre l'essentiel : la valeur d'un raisonnement et la généralité d'un énoncé. Je m'explique sur un exemple vécu.

Nous avons rencontré, en exercice sur les cas d'égalité, la figure formée d'un triangle avec une médiane prolongée. Mon but est de la reprendre pour la comparaison de l'angle extérieur et d'un angle intérieur. Je propose donc d'étudier d'abord les régions du plan découpées par trois droites, et nous les colorions. Puis nous construisons la médiane, voyons dans quelle région elle passe et achevons l'étude sur la figure (1). Est-ce fini ? Non, puisque lorsque je dessine la figure (2) (sans lettres ni couleurs) on ne sait trop ce qu'on peut dire des angles marqués (*).

J'amorce en prenant les craies : « Puis-je mettre les couleurs ? » Réaction presque immédiate : « Mais nous avions bien dit que les sept régions se retrouvent dans *tous* les triangles. » (C'est l'enfant qui a souligné de la voix). Je ne colore pas, j'attends la suite. Et j'admire, sans le montrer, d'entendre : « L'angle marqué deux traits peut être pris opposé par le sommet, alors on peut prendre la médiane partant du sommet de droite, ou du sommet du bas. » « Faut pas couper l'angle intérieur ! » et, en chœur : « La médiane du sommet du bas ! » (*bis*). Alors, sans craie, ni mots, par des gestes (à défaut d'autres symboles) nous refaisons la démonstration. Cette fois, nous concluons : Dans *tout* triangle *chaque* angle extérieur, etc... Nous avons atteint la classe des triangles.

Quelques semaines plus tard, nous démontrons la propriété : « Les bissectrices d'un parallélogramme forment un rectangle. » Puis je dessine un parallélogramme ridiculement long et plat. « Est-ce encore vrai ? » On a confiance maintenant : « Oui, c'est toujours vrai. » Mais le losange nous donne un démenti. Pourtant nous avions affirmé que toutes les propriétés du parallélogramme appartiennent au losange ! « Oh ! bien, le losange donne un rectangle nul, voilà tout ! » (Nous corrigeons : de dimensions nulles, réduit à un point).

Comparer la géométrie du parallélogramme à celle du losange qui a une exigence de plus, c'est de l'axiomatique. Et l'extension au concept de rectangle-point, nous la retrouverons (cercle-point, point à l'infini, nombre irrationnel...).

Période axiomatique. — Comme professeur de Mathématiques Elémentaires, j'estime que le programme actuel de 1re fait perdre à peu près complètement la formation que l'on avait pu commencer à donner en Seconde. Il ne reste que des énoncés dans la mémoire. Une de mes élèves, assez boudeuse, m'a finalement demandé : « Mais enfin, Mademoiselle, qu'est-ce donc en géométrie qu'un couple de points ? On nous parlait de segments et de triangles ! »

Certains professeurs construisent leur cours de Seconde à partir de la métrique, par exemple, comme notre amie regrettée Mme Froment, de la symétrie par rapport à une droite. La géométrie affine apparaît comme une géométrie plus pauvre qu'on en extrait. D'autres professeurs partent de la géométrie affine : c'est plus simple, mais bien abstrait au départ, bien loin des instruments vraiment pratiques. Les observations et conclusions de ces expériences seraient bien intéressantes à connaître, et je me permets de les solliciter. J'ai trop peu d'expérience de cette classe pour en parler.

Quelle que soit la solution adoptée, cela ne peut nous gêner en Mathématiques Elémentaires, où il est normal de partir bien plus bas, puisque nous avons l'arithmétique, l'algèbre comme la géométrie à reprendre. Il nous faudra une axiomatique plus fine, bien qu'encore, naturellement, largement surabondante. La recherche d'une base axiomatique minimum et la comparaison des divers systèmes d'axiomes est évidemment du domaine des spécialistes dans l'Enseignement Supérieur.

Reculerons-nous devant l'idée qu'on pourrait peut-être rendre meilleur l'enseignement traditionnel ? « Voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité. » Les enseignants n'en diront-ils pas autant ?

L. Félix, *Lycée La Fontaine, Paris.*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure très simple.