

L'enseignement de la Statistique et de la Probabilité

9^e rencontre organisée par la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Ramsau am Dachstein (Autriche), 23-31 août 1955. Rapport de Mlle FÉLIX, membre de la Commission.

Le sujet mis à l'étude était : « L'enseignement de la Statistique et de la Probabilité ». La rencontre réunit 23 savants ou professeurs venus de sept pays : Allemagne, Autriche, Belgique, Espagne, France, Yougoslavie. Quelques défections au dernier moment, et la simultanéité d'un Congrès en Amérique, nous privèrent de la présence de spécialistes de la Probabilité sur lesquels nous comptions, de sorte qu'il a été surtout question de Statistique. Participèrent surtout aux discussions, outre notre Secrétaire général, organisateur de la rencontre, M. GATTEGNO, Profes-

seur à l'Université de Londres, et notre Président, M. G. CHOQUET, Professeur à la Sorbonne, M. M. KENDALL, Directeur des recherches à la « London School of Economics » de l'Université de Londres, M. G. KUREPA, Professeur à l'Université de Zagreb, Vice-Président de la Commission internationale de l'Enseignement Mathématique, M. PUIG ADAM, membre de l'Académie de Sciences, Professeur à Madrid. Mais chacun, suivant son expérience personnelle, intervenait, en particulier les Professeurs anglais et le D^r A. KOCH (Autriche), qui enseignent la statistique à l'université ou dans des instituts spéciaux.

Nous avons regretté l'absence de M. MONJALLON, due à son état de santé.

M. CHOQUET présenta tout d'abord le point de vue du Mathématicien pur, pour lequel la question est élucidée quand un exposé axiomatique est construit.

Mais dans un groupe qui a pour principal objet l'étude psychologique permettant de construire une pédagogie adaptée à tous les niveaux et à tous les élèves, nous ne pouvions en rester là : il fallait analyser l'attitude d'esprit du statisticien ou du probabiliste en action et dans son enseignement. Les spécialistes présents firent donc un examen de conscience. Faute de pouvoir transcrire les longues discussions polyglottes, je fais suivre ces quelques lignes d'un résumé des interventions de M. KENDALL, que celui-ci a bien voulu revoir et approuver.

M. GATTEGNO remarque qu'une machine à calculer fera des calculs de probabilité si elle est dirigée par un probabiliste ! Qu'est-ce qui est superposé à l'algèbre ? un sentiment personnel ? un mode de pensée ? Mais alors quelle sorte de rigueur atteint-on ? (La question fut aussi posée, en son temps, pour le calcul différentiel). La discussion souleva de nombreuses questions qui ne restèrent pas sans réponses : Pourquoi la pensée probabiliste apparaît-elle si tard dans l'histoire des Sciences ? Pourquoi l'étude des probabilités s'est-elle développée surtout en France, tandis que l'Angleterre est le pays de prédilection pour la statistique ? Ceci est-il en relation avec un mode de pensée caractéristique de chaque pays ?

Toutes ces questions sont évidemment importantes pour la pédagogie. Les notions de probabilité, de fréquence, n'appartiennent-elles qu'à la pensée adulte ? Revenant à une opinion souvent exprimée dans les rencontres qu'il organise, M. GATTEGNO regrette qu'on se préoccupe si peu de savoir ce que les enfants peuvent faire spontanément. L'expérience montre qu'ils peuvent faire beaucoup plus qu'on ne le croit généralement et qu'ils peuvent atteindre la maîtrise sur certains points quand on ne leur impose pas prématurément un cadre choisi par idées préconçues, qui les conditionne sans leur laisser leur chance de développement libre. L'action, la vie éveillent des pensées primitives qui s'organisent en expérience mathématique, puis se précisent par le dialogue, par la communication et deviennent des structures élaborées. Une maîtrise limitée, locale, est alors atteinte, qui s'étend peu à peu et devient une connaissance plus complète en se généralisant.

Quant aux moyens d'éveiller l'intérêt des élèves pour les questions de statistique et de probabilité, il ne semble pas que l'on ait éprouvé de

difficultés malgré la variété des exemples utilisés. Pour M. KOCH (Autriche), il suffit de submerger les enfants par un flot de documents, tableaux de nombres, graphiques, etc..., et l'habitude de les utiliser vient d'elle-même. M. PUIG ADAM intéresse les enfants en les faisant participer à l'examen de leurs résultats, et aussi à l'examen de la difficulté des questions posées. M. KENDALL remarque que les enfants sont intéressés par les jeux et que les questions de statistique élémentaire peuvent être présentées sous forme de jeux. M. DRENCKHAHN (Allemagne) souligne l'intérêt des enfants pour les paris aux courses, aux matches de foot-ball, etc... M. KUREPA note que les expériences possibles permettent à l'enfant d'agir et font jouer son individualité. Il me semble que, puisque la pensée statistique s'impose dans la vie moderne, il n'y a pas à chercher des exemples artificiels : on doit en trouver constamment au cours des études de toutes sortes (vérification en géométrie ou physique, données numériques en histoire ou sciences naturelles, etc...). L'enfant devrait donc être amené tout naturellement à l'état d'esprit qui lui permettra de comprendre à l'heure où un cours spécial, à programme imposé, lui sera fait.

Pour terminer cet aperçu très imparfait, il faut ajouter que bien des souvenirs que nous laisse cette rencontre ne sont pas d'ordre mathématique : nous avons rencontré, non des mathématiciens ou des professeurs abstraits, mais des hommes, des femmes, des enfants aussi, et des montagnes, des paysages... Il nous en reste, non des conclusions à utiliser paresseusement, mais des problèmes de toutes sortes à méditer, et aussi des amitiés nouvelles, une jolie aquarelle reçue en cadeau, des souvenirs d'agréables moments passés ensemble. De tout ceci, pourquoi d'autres collègues de France ne sont-ils pas venus profiter ?

*
**

Prochaines rencontres prévues :

Fin août 1956, en Yougoslavie : La pénurie de professeurs de Mathématiques. La formation des maîtres du premier degré.

Avril 1957, en Espagne : Les matériels d'enseignement mathématique.

Août 1957, en Norvège : Les Mathématiques modernes et l'enseignement destiné aux enfants qui ne poursuivront pas leurs études.

*
**

VIENT DE PARAÎTRE (publication de la Commission) : « L'Enseignement des Mathématiques », par MM. BETH, CHOQUET, DIEUDONNÉ, GATTIGNO, LICHNÉROVICZ, PIAGET. Un volume chez Delachaux et Niestlé (Neuchâtel), 32, rue de Grenelle, Paris, 7^e, 980 fr.

Un compte rendu paraîtra au prochain bulletin.

Probabilité et Mesure

Notes prises sur l'exposé de M. G. Choquet par Mlle L. Félix

Nous recevons de Princeton, au moment de la correction des épreuves, une lettre du professeur Choquet : « Cet exposé improvisé, convenable dans les circonstances où il a été fait, est insuffisant pour un texte écrit. Le Bulletin mérite mieux qu'une petite ébauche qui pourrait décevoir certains collègues. » Nous croyons cependant bien faire en laissant subsister dans ce compte rendu les pages qui suivent, pensant qu'elles peuvent servir déjà de base de réflexion pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec le sujet. Cela servira d'introduction à l'article que veut bien nous promettre M. Choquet pour « enrichir et préciser » ce qu'il a dit à Ramsau.

La Rédaction.

On sait que la géométrie élémentaire peut être fondée sur divers systèmes d'axiomes (par exemple à partir de la notion de déplacement ou de celle de symétrie) ; il en est de même de la théorie des probabilités. Nous étudierons ici brièvement l'un des fondements possibles de cette théorie.

I. — RAPPEL DE LA DÉFINITION D'UNE MESURE SUR UN ENSEMBLE

Exemple 1. — Sur le segment $(0,1)$, nous connaissons la *mesure naturelle dite de Lebesgue*. Elle vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Les mesures sont des nombres positifs ou nuls.
- 2) Si deux sous-ensembles E_1 et E_2 ont des mesures $m(E_1)$ et $m(E_2)$:
 - a) Si ces ensembles sont sans points communs, à leur réunion est attaché le nombre somme. Ainsi :

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

- b) Si ces deux sous-ensembles ont des points communs, on a :

$$m(E_1 \cup E_2) \leq m(E_1) + m(E_2)$$

Exemple 2. — Dans tout le plan, une mesure naturelle, l'aire, est attachée à tous les polygones.

Exemple 3. — Dans le plan, supposons définie une densité en chaque point x , soit $f(x)$, fonction positive continue de x . Nous savons définir par une intégrale double le poids $m(E)$ d'un domaine E . Ce poids est aussi une mesure.

Exemple 4. — Donnons un exemple abstrait, non lié à la géométrie élémentaire :

Considérons une suite finie d'éléments non précisés $x_1, x_2, \dots, x_n$ formant notre *système fondamental* U . A chaque élément x_i , associons un nombre positif a_i que nous nommerons son *poids*. A tout sous-ensemble E de U , attachons le nombre $m(E) = \sum a_i, x_i \in E$. Ce nombre satisfait aux propriétés énoncées et est encore nommé une mesure.

De même si la suite est infinie.

Notons que si U est un ensemble quelconque et si $a_i = 1$ pour tout i , $m(E)$ est le nombre des éléments de E . Ainsi, le nombre des éléments est une des mesures attachées au sous-ensemble.

Définition générale d'une mesure :

1) On considère un ensemble fondamental U , nommé *univers*. Aux sous-ensembles E de U , j'attache un *nombre positif ou nul*, $m(E)$ satisfaisant aux conditions $a)$, $b)$. Je dis avoir ainsi attaché une mesure à U .

En fait, on ne considère pas *tous* les sous-ensembles de U ; on ne considère qu'une classe $\mathcal{F}$ de ces sous-ensembles, qui satisfasse aux propriétés suivantes :

Si E_1 et E_2 appartiennent à $\mathcal{F}$, la réunion $E_1 \cup E_2$,
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'intersection } E_1 \cap E_2, \\ \text{le complémentaire } C_{\mathcal{F}} E_1 \end{array} \right.$

appartiennent à $\mathcal{F}$.

Il en résulte que la différence $E_1 - E_2$, définie quand E_2 est inclus dans E_1 , appartient bien à $\mathcal{F}$, puisque $E_1 - E_2 = E_1 \cap C_{\mathcal{F}} E_2$.

2) Dans le cas où c'est utile, on exigera aussi l'appartenance à $\mathcal{F}$ de la réunion d'une infinité dénombrable de sous-ensembles E de $\mathcal{F}$. On exigera dans ce cas les propriétés $a)$ et $b)$ pour les réunions dénombrables.

Nous ne parlerons pas ici de la construction effective de mesures générales : c'est de la technique mathématique hors de notre sujet.

II. — PASSAGE A LA PROBABILITÉ

On ajoute à la définition précédente de la mesure l'hypothèse $m(U) = 1$ ou, en tout cas, $m(U)$ fini. Nous allons voir pourquoi :

Chaque élément de U est considéré comme un *événement* d'une certaine nature. Si, parmi eux, on distingue un sous-ensemble E formé d'événements dits *favorables*, on nomme *probabilité associée à E* le rapport

$$p(E) = \frac{m(E)}{m(U)}$$

On voit donc la simplification apportée par l'hypothèse $m(U) = 1$.

1) Si les conditions précédentes sont réalisées, on dit que la mesure m définit sur l'ensemble U d'événements *une loi de probabilité élémentaire*.

Ainsi, une *loi de probabilité élémentaire sur un ensemble U d'événements est une mesure telle que la masse totale soit égale à 1*.

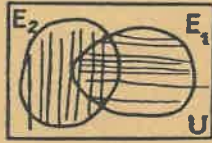
2) Supposons que, sur U , soient distinguées deux sortes d'éléments *favorables* constituant les sous-ensembles E_1 et E_2 . Dire que les éléments des deux sortes sont *incompatibles* équivaut à dire que E_1 et E_2 sont *disjoints* (c'est-à-dire sans éléments communs). Alors, d'après les propriétés de la mesure : $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$.

En introduisant la notation des probabilités, nommons p_1 et p_2 respectivement les probabilités d'un événement favorable de chaque sorte et $P_{1,2}$ la probabilité d'un événement favorable en l'un quelconque des deux sens, on a : $P_{1,2} = p_1 + p_2$.

Si les événements ne sont pas *incompatibles*, l'intersection $E_1 \cap E_2$ n'est pas vide : c'est l'ensemble des éléments favorables à la fois aux deux sens 1) et 2). Nommons $\Pi_{1,2}$ la probabilité d'un tel événement et

précisons que $P_{1,2}$ est la probabilité d'un événement favorable au moins en l'un des deux sens 1) ou 2) :

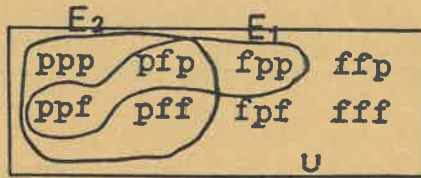
$$\Pi_{1,2} = p(E_1 \cap E_2), \quad P_{1,2} = p(E_1 \cup E_2)$$



De l'équivalence qui apparaît sur le schéma ci-contre résulte l'égalité : $P_{1,2} + \Pi_{1,2} = p_1 + p_2$.

1^{er} exemple. — On joue à pile ou face en jetant une seule fois une pièce. U est constitué par les deux événements : pile ou face. E_1 est, par exemple, l'événement pile, E_2 l'événement face. Leurs probabilités sont *a priori* quelconques positives avec $p_1 + p_2 = 1$. Quand la symétrie l'impose, on prend $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

2^e exemple. — On jette trois pièces distinctes, par exemple une d'or, une d'argent, une de bronze, et l'on distingue pile ou face. U est formé de huit événements : *ppp*, *ppf*, etc..., dont nous supposons les probabilités égales. Prenons comme événements favorables ceux de deux types :



1) Il y a deux piles et une face.

2) La pièce d'or donne pile.

Nous avons ici : $p_1 = \frac{3}{8}$, $p_2 = \frac{4}{8}$, $P_{1,2} = \frac{5}{8}$, $\Pi_{1,2} = \frac{2}{8}$.

3) *Produits* : Rappelons la définition du produit de deux ensembles. Soient U_1 et U_2 . A leurs sous-ensembles E_1 et E_2 , nous associons l'ensemble des couples ordonnés (x_1, x_2) , x_1 appartenant à E_1 et x_2 à E_2 . Cet ensemble de couples est nommé l'ensemble produit de E_1 et E_2 et se représente par $E_1 \times E_2$.

Notons que les deux ensembles U_1 et U_2 peuvent être le même ensemble considéré deux fois.

Si des mesures $m'(E_1)$ et $m''(E_2)$ sont définies respectivement sur U_1 et U_2 , à quelles conditions le produit $m'(E_1) \cdot (m''E_2)$ est-il une mesure $m(E_1 \times E_2)$ associée à $U = U_1 \times U_2$?

Il faut d'abord s'assurer que la classe $\mathcal{F}$ des sous-ensembles $E_1 \times E_2$ de U est assez riche pour satisfaire aux conditions (x).

A) Supposons par exemple que U_1 et U_2 sont représentés par les points de deux axes rectangulaires du plan et que les E_1 soient des segments de U_1 et les E_2 des segments de U_2 , chaque $E_1 \times E_2$ sera un rectangle. Par extension, E_1 et E_2 étant des ensembles *quelconques*, $E_1 \times E_2$ sera appelé un rectangle dans U .

Mais des rectangles n'ont pas en général une réunion, ni une intersection qui soit un rectangle. Dans la suite, il faudra se borner à des produits $E_1 \times E_2$; on considérera donc comme favorables uniquement de tels produits, c'est-à-dire que (x_1, x_2) sera dit favorable dans U si x_1 est favorable dans U_1 et x_2 favorable dans U_2 .

B) Supposons maintenant données les mesures $m'(E_1)$ et $m''(E_2)$ respectivement sur U_1 et U_2 . On peut démontrer que, dans les conditions précédentes, $m(E_1 \times E_2) = m'(E_1) \cdot m''(E_2)$ vérifie bien les conditions a) et b), c'est-à-dire est une mesure associée à $U_1 \times U_2$.

(Nous voyons, dans le cas particulier où E_1 et E_2 sont formés d'un nombre fini d'éléments et si l'on prend comme mesures $m'(E_1)$ et $m''(E_2)$ les nombres d'éléments, que $m(E_1 \times E_2)$ défini plus haut est le nombre des éléments de $E_1 \times E_2$).

C) Si maintenant les mesures $m'(E_1)$ et $m''(E_2)$ sont des probabilités, c'est-à-dire si $m'(U_1) = 1$ et $m''(U_2) = 1$, comme $U = U_1 \times U_2$, il en résulte $m(U) = 1$. Une loi de probabilité est ainsi définie sur $U = U_1 \times U_2$.

Exemple : reprenons l'exemple des trois pièces, mais jetons-les deux fois. Disons qu'un événement est favorable si l'on obtient la première fois deux piles et une face, la deuxième fois au moins deux piles. On voit :

$$p_1 = \frac{4}{8}, p_2 = \frac{3}{8}, p(E_1 \times E_2) = \frac{4 \times 3}{8 \times 8} = \frac{3}{16}$$

III. — EXEMPLES DE PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE :

FONCTIONS ALÉATOIRES

Donnons seulement une indication rapide. Soit U un ensemble de fonctions numériques définies sur le segment $(0,1)$, par exemple l'ensemble des fonctions continues différentiables. On dit qu'un élément de U est une fonction aléatoire lorsqu'on a défini une loi de probabilité sur U , c'est-à-dire une mesure de masse totale égale à 1.

Notions connexes. — Par exemple, choisissons un point sur le segment $(0,1)$, $x = \frac{1}{3}$. A chaque fonction $f \in U$, correspond le nombre supposé positif $f(\frac{1}{3})$. Posons $\varphi(f) = f(\frac{1}{3})$. On peut appeler l'intégrale $\int \varphi(f) dm_\varphi$, la *valeur moyenne* de f au point $\frac{1}{3}$. On obtient l'idée de *corrélation* de probabilités en considérant plusieurs points distingués x_1 et x_2 par exemple, et utilisant à la fois $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Résumé des interventions de M. Kendall

Directeur de la Division des Techniques de la Recherche,
« London School of Economics », Université de Londres

I. — *Qu'est-ce que la statistique ?* Telle qu'elle est enseignée actuellement en Angleterre, c'est plutôt une collection de sujets qu'un sujet unique. Certes, il y a une base commune, un plus grand commun diviseur, mais l'utilisation demande des méthodes si différentes les unes des autres qu'une unité d'enseignement semble impossible.

En gros, nous pouvons distinguer ce que nous nommerons :

1) *La statistique gouvernementale* : Il s'agit de documenter une administration centrale, un gouvernement, qui demande des résumés, analyses, interprétations, sur des questions telles que le revenu, le travail, les exportations, etc... Ceci est peu important pour la recherche scientifique, mais l'est pour l'enseignement, car c'est utile plus ou moins directement pour de nombreuses carrières.

2) *La statistique technologique*, qui renseigne les bureaux d'études industrielles, chimiques, biologiques, médicales, etc... (par exemple, étude de la qualité d'un produit).

3) *La statistique sociale*, qui rassemble des renseignements utilisables dans un but précis relativement à certaines populations déterminées.

4) *La statistique commerciale*, qui fournit des renseignements sur des marchés, sur le goût des consommateurs, etc... (par exemple, la B.B.C. fait des enquêtes sur ce que l'on écoute).

5) Des sujets relatifs à l'enseignement, la recherche, etc... (à l'université).

6) Il faut ajouter un sixième sujet qui contient... les autres sujets.

La distinction qui précède n'est pas absolue : certaines statistiques médicales, par exemple, participent de 1) et de 2), mais cependant les divers sujets exigent des hommes différents par leur formation, par leurs techniques. Un statisticien non spécialisé, apte à tout faire, ne peut exister, mais, à la tête du bureau de statistique d'une maison d'industrie chimique par exemple, sera un chef capable de coordonner les résultats obtenus par les statisticiens spécialistes qui ont étudié les expériences en laboratoire, les expériences agricoles, les exportations, les marchés, etc... Il devra en déduire une vue générale et des directives.

Non seulement les diverses techniques à enseigner sont très différentes, mais encore il faut tenir compte de l'extrême différence du niveau des étudiants et de leur formation antérieure : si certains ont déjà un certain bagage mathématique, d'autres sont des économistes, des médecins, des historiens, etc... Du reste, il faut distinguer, par exemple, le statisticien qui veut devenir spécialiste en statistique médicale du médecin qui veut s'initier à la statistique pour comprendre ce que fait son collègue et faire appel à lui quand c'est utile.

De tout cela résulte une grande variété dans l'organisation de l'enseignement de la statistique dans les universités, les départements, les écoles de Grande-Bretagne. Les liens entre un département de Mathématiques, un centre de statistique, des instituts spécialisés (médecine,

économie, etc...) s'organisent suivant des schémas différents, ou même sont inexistants.

Pourtant, on peut imaginer un programme de tronc commun. D'abord, une initiation utile pour tous les étudiants, même ceux qui ne seront pas des statisticiens de métier. Un programme minimum peut être précisé (fréquences et distribution, moyennes ; étude élémentaire de l'échantillonnage ; éléments de probabilité ; théorie élémentaire des relations statistiques, association, corrélation, etc...). Puis, un cours plus élevé donné dans un centre pour les futurs statisticiens et ceux qui doivent travailler avec eux. Enfin, formation professionnelle dans des instituts spécialisés, en liaison avec les organisations utilisatrices, industrie, services médicaux, économiques, etc...

II. — *Quelles sont les difficultés de l'enseignement de la statistique ?*

1) *Des difficultés d'ordre mathématique*, en particulier pour des économistes, ou autres étudiants qui n'ont pas suivi les sections scientifiques durant leurs études. Il faudrait évidemment que l'enseignement du second degré soit assez souple, assez adapté aux nécessités modernes pour permettre les études futures (initiation à la théorie des ensembles par exemple). Il n'y a pas lieu ici d'insister. Du reste, le bagage mathématique exigé par un enseignement élémentaire de la statistique est léger ; il est possible de ne pas viser au début à une trop grande généralité qui nécessite des théories mathématiques délicates.

2) L'étudiant est habitué, par ses études de Mathématiques et de Physique élémentaire, à traduire les résultats par des nombres précis. Il faut le conduire à la notion de distribution des mesures, de fréquence. Les nombres qu'il va manier servent à un contrôle d'incertitude : il faut donc détruire une partie de la croyance en la certitude apportée par l'étude de l'univers. Naturellement, l'étudiant sait déjà utiliser des ensembles de nombres : il a, plus ou moins, la notion de fonction. Mais, ici, il s'agit de variables aléatoires, dont les valeurs sont indéterminées à un certain degré, et de fonctions aléatoires de variables abstraites. Des relations d'un type nouveau s'introduisent, telles que celles d'indépendance, de corrélation. Il y a des difficultés intellectuelles pour surmonter la répugnance à émettre des assertions qui ne sont vraies qu'à telle approximation, qui ne sont valables que pour des grandes séries d'événements, bref, qui ne sont ni vraies, ni fausses absolument.

La clef est dans la perception d'une *uniformité de la nature* dans le domaine exploré. Cette attitude est active, car elle permet de délimiter ce qu'on étudie. C'est cette uniformité que l'on va tester et, pour cela, on l'étudie mathématiquement à l'aide de la théorie des probabilités.

La distinction (faite par M. KUREPA) entre la comparaison qualitative de deux probabilités qui précéderait la mesure d'une probabilité ne paraît pas essentielle : l'expérience ne donne pas avec évidence et sans calcul ces inégalités ; l'idée de probabilité est la même pour les inégalités et pour les égalités. L'expérience, l'habitude, le succès conduisent l'étudiant à la compréhension ; alors, quand les idées de fréquence, de distribution, etc... sont reconnues dans la nature, on peut préciser, voir la possibilité d'organiser des expériences qui donnent réellement des lois

simples et les étudier. Ensuite, on saura retrouver dans la nature ces lois simples et les utiliser pour discuter des lois d'action, les conditions de signification des tests, etc...

Un cours est nécessairement organisé suivant une axiomatisation présente à l'esprit du professeur. Deux tendances semblent se partager les préférences des étudiants : un exposé axiomatique à partir d'idées simples sur des objets non définis conduit à la théorie de la probabilité ; ou bien des expériences conduisent d'abord à la notion de fréquence. Il faut de toute façon faire la liaison entre les deux points de vue.

3) Les théories de la statistique et de la probabilité étant supposées comprises, il reste un troisième ordre de difficultés qui apparaît nettement lorsqu'on passe aux applications. Il faut avoir conservé, malgré l'appareil mathématique, l'idée du hasard. L'évaluation de la croyance est différente du calcul de la chance. Il est insuffisant de dire : « La statistique est la théorie de la décision. » Il reste un élément contemplatif qui entretient l'hypothèse comme telle, sans l'accepter, ni la rejeter ; nous le considérons seulement à la fin comme plus ou moins probable.

Comprendre, comme il apparaît dans l'exposé de M. CHOQUET, que la théorie de la probabilité est isomorphe à la théorie de la mesure ne résout pas la difficulté. A côté du calcul des probabilités, il y a une probabilité du jugement. Un étudiant ayant terminé ses cours doit savoir que ses études sont insuffisantes pour la formation du jugement. Seules, l'expérience, les applications pourront achever sa formation en utilisant son bon sens, ses qualités psychologiques. Il complètera son jugement probabiliste par d'autres éléments nécessaires au statisticien.

A un stade supérieur, du reste, cette partie psychologique peut elle-même être étudiée par des méthodes statistiques, mais ceci ne peut être abordé qu'à un niveau élevé.

III. — Mais que devient alors la notion de rigueur scientifique ?

Les maisons de Rotterdam sont construites sur un marais. Une construction assez petite est solide. Il n'y a pas de difficulté pour l'enseignement si nous nous adaptons au niveau de l'étudiant : une conviction, à défaut de certitude, est suffisante pour mobiliser l'activité. Naturellement, à un degré supérieur, les difficultés rencontrées conduisent à exiger de meilleures bases. (M. PUIG ADAM note que l'évolution historique de la rigueur est plus lente que celle de l'étendue des Mathématiques, comme le développement des racines d'un arbre est plus lent que celui des branches).

IV. — Comme exemple du travail statistique, M. KENDALL choisit le *test des hypothèses*.

Une hypothèse, au sens général, est ici *tout énoncé ayant un sens*. (Il n'est pas question de lui attacher une croyance). Mais une *hypothèse statistique* a un caractère particulier : elle doit permettre de dénombrer, de mesurer des événements. La première partie du travail consiste à préciser une des manifestations de l'énoncé à étudier pour formuler une hypothèse statistique.

La mesure des événements permet alors de définir une *distribution d'erreurs* que l'on représente par une courbe. Enfin, par l'échantillon-

nage, on obtient des valeurs approchées : ces nombres sont des échantillons de ce qui peut arriver. D'après ces données approximatives, on juge de l'hypothèse statistique : on peut rejeter l'hypothèse si, d'après la courbe dessinée en supposant l'hypothèse vraie, la valeur obtenue par l'échantillonnage tombe dans une région qui correspond à une probabilité faible, par exemple 5 %.

Ce bref aperçu donne une idée de la complexité du travail réel.

CONCLUSION. — Pour le professeur, savoir la statistique n'est pas tout ; il faudrait aussi savoir l'enseigner. On pense souvent à ce que l'on doit enseigner plutôt qu'à la psychologie et aux méthodes d'enseignement. Il faut se souvenir que la statistique est un sujet très neuf : la partie descriptive a cent ans, la partie théorique trente ans ! Il n'est pas étonnant qu'on n'ait pas encore trouvé le niveau convenable à son enseignement. Il faut donc que les maîtres travaillent par des rencontres de ce genre, par de la documentation, par des réflexions et des observations personnelles.

Si les Mathématiciens pensaient davantage qu'on emploie des Mathématiques en statistique et qu'il y a des recherches mathématiques à y faire, ils s'y intéresseraient et ils s'occuperaient de la formation des maîtres qui devront l'enseigner.
