
DEUXIÈME PARTIE

Sur les lieux géométriques dans le plan

C'est en Troisième qu'on aborde la notion de lieu géométrique dans le plan. Les élèves jugent assez évidents les premiers exemples qu'on peut leur donner, ils sont déconcertés par les précautions qu'on voudrait leur faire prendre et ils se laissent aller à des idées étroites et même à des idées fausses. S'il n'est pas toujours facile de les réformer à ce niveau par des « contre-exemples » suggestifs, il importe de le faire en Seconde puis en Mathématiques ; indiquons quelques possibilités en ce sens.

I

Les élèves croient volontiers qu'un lieu, correspondant à une propriété d'égalité, est toujours une *ligne* ; il peut cependant remplir une région du plan, ce qui donne plus de valeurs au mot *ensemble* qu'au mot usé de *lieu*.

Quel est alors le lieu des points M définis par la relation (2) où les angles ne sont plus astreints à garder une valeur constante comme pour le cercle Γ ci-dessus ?

Soit M un point extérieur à C (ou sur C) ; posons
 $MO = d, \quad MA = r, \quad MA' = r' ;$

soit α le demi-angle des tangentes issues de M : $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad a = d \sin \alpha ;$

soit β l'angle en M du triangle AMA' (effectif ou aplati) :

$$0 \leq \beta \leq \pi, \quad 8a^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \beta.$$

La relation (2) $\beta = 2\alpha$ équivaut strictement à $\cos \beta = \cos 2\alpha$ ou $1 - 2 \sin^2 \alpha,$

soit
$$\frac{r^2 + r'^2 - 8a^2}{2rr'} = 1 - \frac{2a^2}{d^2}$$

et en tenant compte de l'identité $r^2 + r'^2 = 2d^2 + 4a^2$, il vient

$$\frac{d^2 - 2a^2}{rr'} = \frac{d^2 - 2a^2}{d^2},$$

soit a) $d = a\sqrt{2}$, on retrouve le cercle Γ d'où l'on est parti ;

b) $rr' = d^2$, ou $(r - r')^2 = 4a^2, \quad |r - r'| = 2a,$

on obtient l'hyperbole équilatère de foyers A et A' ; elle convient tout entière, car tous ses points sont extérieurs à C (ou sur C) qui en est le cercle principal.

IV

Terminons par un exemple où l'on ne donne plus au départ l'un des éléments de décomposition du lieu, et où il ne sera plus commode de procéder d'emblée comme ci-dessus par conditions nécessaires et suffisantes, mais où il conviendra d'examiner successivement les propositions directes et leurs réciproques.

EXEMPLE V. — Etant donné un rectangle ABCD, quel est le lieu (L) des points M tels que les deux cercles ABM et CDM soient égaux ?

Nous désignerons par Γ un cercle passant en A et B et par Γ' un cercle passant en C et D : si les cercles Γ et Γ' sont égaux, on pourra passer du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au vecteur $\overrightarrow{DC}$, tantôt par la symétrie axiale, tantôt par la translation, qui font passer de Γ à Γ' , d'où deux études distinctes qui vont décomposer le lieu (L) en deux lieux partiels (L_1) et (L_2).

1° *Symétrie* par rapport à la médiatrice Δ de AD et de BC. Si les deux cercles Γ et Γ' sont égaux, sont distincts et ont au moins un point commun M, un tel point M est sur Δ ; si Γ et Γ' sont confondus suivant le cercle ABCD, M est sur ce cercle. Inversement, tout point M de Δ est commun à deux cercles ABM et CDM égaux, distincts ou non, et tout point M du cercle ABCD est commun à deux cercles ABM et CDM confondus, donc égaux.

En définitive, le lieu partiel (L_1) est constitué par la médiatrice Δ et par le cercle ABCD.

2° *Translation* d'amplitude $\overrightarrow{AD}$. Soient un cercle Γ et un cercle Γ' qu'on suppose se couper en deux points M et M', distincts ou non, symétriques par rapport à la médiatrice Δ , de AB et de CD. La droite AD coupe l'axe radical MM' en I et recoupe le cercle Γ en P ; la puissance de I pour Γ est

$$(3) \quad \overline{IM} \cdot \overline{IM'} = \overline{IA} \cdot \overline{IP}.$$

Si les cercles Γ et Γ' sont égaux, ils sont symétriques par rapport à MM' et l'on a

$$(4) \quad \overline{IP} = -\overline{ID} \quad \text{d'où} \quad (5) \quad \overline{IM} \cdot \overline{IM'} = -\overline{IA} \cdot \overline{ID},$$

qui exprime que les cercles de diamètres MM' et AD sont orthogonaux. Le cercle (μ) de diamètre MM' appartient donc au faisceau linéaire (Φ) orthogonal aux cercles de diamètres AD et BC.

Inversement, soient un cercle (μ) du faisceau linéaire (Φ), MM' son diamètre

perpendiculaire à Δ_1 , et soient Γ et Γ' les cercles ABM et CDM. La puissance de I pour Γ donne la relation (3), l'orthogonalité des cercles de diamètres MM' et AD donne la relation (5), d'où l'on déduit par comparaison la relation (4), au moins quand I n'est pas en A, et les cercles Γ et Γ' sont alors symétriques par rapport à MM', ils sont donc égaux. Si I est en A, le cercle (μ) a pour diamètre AB, Γ' est le cercle ABCD, Γ est son symétrique par rapport à AB, Γ et Γ' sont encore bien égaux.

En définitive, le lieu partiel (L_2) des points M et M' coïncide avec le lieu des points de contact des tangentes parallèles à Δ_1 pour les cercles du faisceau linéaire (Φ) ; le résultat est classique, ce lieu (L_2) est l'hyperbole équilatère ayant pour sommets les points de base du faisceau Φ [sur Δ si $AD < AB$] ou ses points limites [sur Δ_1 si $AD > AB$]. La démonstration peut d'ailleurs être adaptée directement ici, mais il suffit de rappeler que AB et CD sont deux diamètres MM' particuliers, pour dire que (L_2) est l'hyperbole équilatère passant par les quatre sommets du rectangle ABCD. Enfin, cette hyperbole équilatère se décompose en les deux droites diagonales AC et BD quand le rectangle devient un carré : si l'on se borne à ce dernier cas, cet exemple V peut être proposé complètement dès la Seconde.

L. THIBERGE,

Inspecteur général de l'Instruction publique.