

Rapport sur l'Agrégation de Mathématiques (Femmes) Session de 1953

Le Jury de l'Agrégation féminine de Mathématiques, pour la session de 1953, était composé ainsi : M. VILLAT, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, président ; M. DESFORGE, inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président ; Mlle CHARPENTIER, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes ; Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (classe de Fontenay) au Lycée Fénelon ; M. PÉTRUS, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Janson-de-Sailly.

Pour les épreuves pratiques et orales, auxquelles M. VILLAT n'a pu assister, la présidence a été assurée par M. DESFORGE, et M. VILLAT a été remplacé numériquement par M. DUGUÉ, doyen de la Faculté des Sciences de Caen.

La session du concours a duré du 1^{er} juin, date du début des épreuves écrites, au 1^{er} août. Les résultats d'admissibilité ont été donnés le lundi 6 juillet. Les épreuves pratiques et orales ont eu lieu au Lycée Fénelon, à Paris, à partir du 15 juillet.

Le nombre de candidates inscrites était quatre-vingt-un.

EPREUVES ECRITES

Soixante-huit candidates ont pris part à la première épreuve ; deux d'entre elles ont abandonné le concours après la composition de Mathématiques Élémentaires et une après la composition de Calcul Différentiel et Intégral.

Pour les soixante-cinq candidates ayant terminé les épreuves écrites, le total des notes pour l'ensemble des quatre compositions varie de 62 à 13, pour un maximum de 80 points, c'est-à-dire de 15,5 à 3 sur 20. La répartition de ces notes d'ensemble est la suivante : vingt et une sont supérieures à 10 sur 20, dix-neuf sont comprises entre 10 et 8, treize entre 8 et 6, six entre 6 et 5, six entre 5 et 3. L'échelonnement plus détaillé des notes supérieures à 8 sur 20 s'établit ainsi : en tête se détachent un 15,5 et un 15, puis viennent cinq notes à peu près régulièrement réparties entre 13,5 et 12, neuf entre 12 et 11, cinq entre 11 et 10, huit entre 10 et 9, et onze entre 9 et 8.

Les trente et une premières candidates de ce classement ont été déclarées admissibles ; la moyenne de la dernière admissible est 8,75 sur 20, sensiblement supérieure à celle de certaines des années précédentes (8,25 en 1952 ; 8 en 1951 et en 1949 ; 8,5 en 1950).

La moyenne de l'écrit pour les trente et une admissibles est 11 sur 20, dépassant de près d'un point celles de 1952 et 1951 ; elle est voisine de 6,5 pour les trente-quatre non-admissibles et de 8,7 pour les soixante-cinq candidates.

Si les notes extrêmes de l'écrit (15,5—3) sont à peu près les mêmes que l'année dernière, les résultats d'ensemble apparaissent légèrement meilleurs en 1953 ; les comptes rendus détaillés des quatre compositions montreront qu'il est difficile d'en préciser la raison, car, si les moyennes sont un peu plus élevées que l'an dernier pour les épreuves de Mathématiques Élémentaires et de Mathématiques Spéciales (et il est à souhaiter que cette tendance ne soit pas purement fortuite, et qu'elle se trouve confirmée lors des prochaines sessions), ce relèvement est partiellement compensé par un abaissement non négligeable en analyse, le niveau restant sensiblement le même en mécanique.

Le groupe des trente et une admissibles comprend : dix élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles et une ancienne élève ayant accompli une quatrième année à l'Ecole, d'ailleurs déjà titulaire du certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement du Second Degré ; quatre élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, dont l'une déjà titulaire du certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges ; deux auditrices à l'Ecole Normale Supérieure ; cinq professeurs titulaires en exercice ; deux professeurs titulaires en en congé ; une stagiaire d'en-

seignement, candidate au certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement du Second Degré (ancien régime) : six étudiantes, dont deux des Facultés d'Alger et de Poitiers.

Parmi les quatre-vingt-une candidates inscrites en 1953, dix-sept avaient été admissibles à des concours antérieurs, mais treize d'entre elles seulement ont pris part aux épreuves écrites ; sept figurent de nouveau cette année sur la liste d'admissibilité : cinq professeurs titulaires en exercice, un professeur titulaire en congé, une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure.

Il est intéressant d'ajouter ici une indication concernant les liaisons entre l'agrégation et le nouveau régime du certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement du Second Degré, entré en vigueur cette année. En dehors des élèves des deux Ecoles Normales Supérieures, les Centres pédagogiques régionaux réunissaient, en 1952-1953, vingt-huit élèves-professeurs de mathématiques ; quinze d'entre elles, sur dix-huit qui s'étaient fait inscrire comme candidates à l'agrégation, se sont effectivement présentées ; si aucune n'a été admissible, il convient de noter que six ont obtenu des notes fort honorables, dont la moyenne, pour l'ensemble des quatre épreuves, est comprise entre 8,5 et 7 sur 20.

*
**

Les compositions écrites ont donné lieu aux observations suivantes :

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ELÉMENTAIRES
(Correcteur : Mme DOMANGE)

Le problème proposait l'étude de la transformation par polaires réciproques dans l'espace, par rapport à une sphère, et plus particulièrement l'application de cette transformation aux quadriques de révolution C, dont la méridienne est une conique ayant pour axe focal l'axe de révolution. Des indications préliminaires détaillées situaient nettement les méthodes permises pour résoudre les questions posées, ainsi que les propriétés qu'il était inutile de re-démontrer. L'énoncé se décomposait en cinq parties inégales ; dans le barème utilisé finalement pour la correction, les deux premières ont compté pour la moitié de la note totale.

Dans la partie I, on demandait de montrer que tout cône ou cylindre de révolution a pour transformé, dans la transformation par polaires réciproques (Φ) définie par une sphère directrice ayant pour centre F et pour rayon ρ , une conique ; puis, l'attention ayant été attirée sur le fait que la réciproque de cette propriété n'est vraie que sous certaines conditions, il s'agissait de définir le cône ou cylindre transformé d'une conique quelconque. Enfin, la transformation (Φ) était appliquée à une sphère et faisait apparaître les quadriques de révolution C.

Bien que la figure initiale fût simple, dix-huit candidates se sont trompées sur la situation du cône de révolution, ayant pour sommet le centre F de la sphère directrice et contenant la conique dont il était question au début, en lui assignant un axe de révolution perpendiculaire à l'axe véritable et un angle au sommet complémentaire de l'angle exact. Cette faute grave, si fréquente, s'explique sans doute par la substitution hâtive à la figure de l'espace d'une coupe plane faisant intervenir des angles dont les côtés étaient respectivement perpendiculaires et qui furent qualifiés « égaux » sans examen approfondi. Cette erreur se trouve même dans la copie, assez bonne dans l'ensemble, d'une candidate déclarée admissible. Les réciproques dans cette question ont été souvent mal traitées ou complètement oubliées. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une conique se transforme en un cône ou cylindre de révolution est rarement énoncée d'une façon claire et encore plus rarement démontrée. A ce sujet, peu de candidates paraissent savoir reconnaître et utiliser la conique focale d'une conique donnée : l'une même, malgré la mise en garde contenue

dans l'énoncé, a affirmé la possibilité de cette transformation pour toute conique de l'espace.

La fin de cette première partie, concernant la transformée d'une sphère, est mieux comprise ; cependant les explications sont fréquemment insuffisantes ; des calculs bien lourds pour déterminer l'excentricité ou le paramètre de la quadrique C transformée d'une sphère montrent que beaucoup ne connaissent pas assez la figure classique relative à la transformation par polaires réciproques d'un cercle par rapport à un cercle, en géométrie plane. Plusieurs aussi interprètent mal la réciprocity de la transformation (Φ) et croient qu'une simple allusion à cette propriété constitue une démonstration de la réciproque qu'on leur demandait d'étudier.

La partie II comprenait diverses questions sur les sections planes d'une quadrique de révolution C donnée et sur les plans tangents à cette quadrique. Une transformation (Φ) permettait de se ramener à des propriétés simples des sphères et de leurs cônes ou cylindres circonscrits. Beaucoup de candidates l'ont vu et ont ainsi compris et traité l'essentiel de cette partie. Toutefois, dans la dernière question, les familles de droites que l'on considérait étaient tangentes à l'une ou à l'autre de deux quadriques qui se confondaient lorsque l'angle α , défini par l'énoncé, était égal

à $\frac{\pi}{2}$, et une seule de ces surfaces a été signalée, en général, car on ne s'est pas rendu compte que le supplément de l'angle α pouvait intervenir comme l'angle α lui-même.

Certaines candidates, négligeant l'indication pourtant claire du texte, n'ont pas utilisé la transformation (Φ) ; elles n'ont pu obtenir que quelques résultats partiels en se servant de la définition métrique des quadriques C .

Dans la partie III, on considérait la famille des quadriques C , qui ont un foyer F et un plan directeur associé D donnés. Cette famille devenait par la transformation (Φ) une famille de sphères concentriques, ce qui conduisait à une solution simple des questions posées. Si l'enveloppe E_v d'un certain ensemble de plans liés à ces quadriques a été déterminée par un assez grand nombre de candidates, la recherche est presque toujours si maladroitement conduite que l'on ne peut ensuite étudier la famille des surfaces-enveloppes E_v obtenues en faisant varier un certain plan V autour d'un point fixe ou autour d'une droite fixe : une seule copie renferme une solution complète de cette première question. Dans la seconde, si la droite qui porte le lieu cherché est mise en évidence dans beaucoup de copies, une seule contient une limitation exacte des portions de cette droite constituant le lieu, une seule autre indique qu'il y a une limitation à faire : on se contente partout ailleurs d'affirmer que le lieu est la droite trouvée, sans aucun souci de réciproque.

La partie IV mettait en présence deux quadriques C ayant un foyer commun F .

Un petit calcul, portant sur une transformation de la condition nécessaire et suffisante pour que deux sphères aient des points communs, a été, malgré sa simplicité, très souvent mal conduite, donnant l'impression que certaines candidates connaissent bien imparfaitement ces relations d'inégalité très élémentaires, et que beaucoup n'arrivent pas à dominer une bien banale question d'algèbre. Les plans tangents communs aux deux quadriques C n'ont été étudiés complètement dans aucune copie. De même, seuls, des résultats partiels ont été obtenus à propos de l'intersection de ces quadriques. Quant à la question posée sur les tangentes communes aux deux surfaces, elle n'a été abordée par personne.

Une partie V proposait enfin l'étude des quadriques C ayant un foyer donné F et tangentes à trois plans n'ayant un seul point commun. Parmi les peu nombreuses candidates qui l'ont abordée valablement, la plupart ont su mettre en évidence le cas des paraboloides, mais le lieu des centres des quadriques est très rarement trouvé. La question concernant les plans directeurs est en général comprise, mais les deux problèmes de construction sont bien mal traités : l'on voit bien, assez

souvent, qu'il s'agit en définitive de déterminer les sphères d'un faisceau linéaire qui passent par un point donné ou qui sont tangentes à un plan donné, mais il semble que l'on entre là dans un domaine peu familier ; une seule copie contient sur ce sujet des indications suffisamment précises.

La dernière question, relative à un paraboloïde de révolution défini par son foyer et par trois plans tangents formant un trièdre trirectangle, n'a été commencée que dans une seule copie, où le plan directeur D_0 a été situé convenablement par rapport au parallélépipède défini par l'énoncé ; mais la candidate, faute d'avoir vu que ce plan partage le segment FI dans un rapport simple, n'a pu exploiter ce bon début.

Une seule composition, sans être parfaite, contient des raisonnements satisfaisants et des résultats convenables sur les cinq parties ; elle a été notée 16,5. Dans les cinq suivantes, une des parties IV ou V manque totalement (et même les deux parties, dans l'une de ces compositions où se sont révélées, ailleurs, de réelles qualités) ; elles ont obtenu : deux fois 15, un 14,5, un 13,5, un 13. Viennent ensuite, comportant des lacunes de plus en plus larges, ou des fautes plus graves, des copies notées : 12,5 (trois fois) ; 12 (deux fois) ; 11,5 ; 11 ; 10,5 (quatre fois) ; 10 (trois fois). Au total, vingt compositions atteignent ou dépassent la moyenne. Viennent ensuite sept copies cotées entre 9,5 et 8, dix-neuf entre 8 et 5, et un lot, trop important, de vingt-deux ayant mérité moins de 5 ; les six dernières (trois notes 1 et trois notes 0,5) sont très faibles, leurs auteurs paraissant, en particulier, tout ignorer de la transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle, en géométrie plane.

La moyenne de l'épreuve est voisine de 7 pour l'ensemble des soixante-huit candidates, et de 10 pour les trente et une admissibles.

Le problème pouvait paraître long, mais il était facile dans son ensemble, avec quelques questions un peu délicates, particulièrement à la fin des parties IV et V. Mais beaucoup de candidates ont perdu un temps précieux en redémontrant certaines propriétés classiques que l'énoncé invitait à considérer comme acquises. Et, malgré les indications préliminaires très précises contenues dans le texte, plusieurs compositions font intervenir des éléments imaginaires, ou font appel à des résultats sur les quadriques démontrés dans les cours de géométrie analytique, alors qu'il s'agissait justement de faire une étude de propriétés, dont certaines sont classiques en Mathématiques Spéciales, à l'aide de méthodes géométriques élémentaires, susceptibles du reste de faire découvrir des aspects que le calcul ne met pas toujours en évidence. Il va sans dire que ces incursions dans un domaine interdit par la « règle du jeu », incursions par quoi l'on tentait sans doute de dissimuler quelque faiblesse regrettable dans les connaissances de base, n'ont pas été favorables aux candidates qui s'en sont rendues coupables.

*
**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (Correcteur : M. PÉTRUS)

L'énoncé proposait l'étude de certaines propriétés d'un faisceau linéaire de quadriques de révolution et de la « projection stéréographique » généralisée.

Dans une première partie, on demandait de définir la nature des quadriques de ce faisceau. Alors que, dans l'esprit des auteurs, il devait suffire d'étudier les méridiennes de ces surfaces, ce qui était immédiat, de trop nombreuses candidates se sont perdues dans le calcul de déterminants absolument inutiles, et, souvent, pour parvenir à des conclusions inexactes ou incomplètes. Il faut signaler ici le petit nombre de copies où apparaissent la préoccupation de dessiner une figure et surtout le souci d'interpréter les propriétés des quatre droites communes aux quadriques du faisceau.

La recherche de l'équation tangentielle a été souvent effectuée maladroitement, presque toujours au moyen de déterminants, et la non-homogénéité de certains résultats ne paraît pas avoir troublé les auteurs de quelques copies.

Alors qu'il suffisait de remarquer la correspondance homographique existant entre le paramètre m et le paramètre du point d'intersection d'une quadrique Q_m avec la droite OI , pour en déduire immédiatement la valeur du birapport (OIMM'), de nombreuses compositions présentent, sur ce sujet, de longs calculs, quelquefois erronés.

La construction d'une quadrique Q_m à partir d'un de ses points a été en général escamotée, la plupart des concurrentes se contentant d'évoquer la possibilité de déterminer sur chaque droite issue de O le point de la quadrique qui engendre celle-ci.

La détermination de l'enveloppe des plans tangents aux quadriques du faisceau, aux points d'intersection de ces quadriques avec une droite passant par O est souvent lourdement conduite, par des calculs dont l'interprétation manque, ou est inexacte, faute d'avoir remarqué la fixité des points de rencontre des plans tangents avec les isotropes du point A dans le plan H .

La comparaison de deux quadriques polaires réciproques a été assez peu réussie, et si elle est correcte dans certaines copies, on n'en recherche point les conséquences.

Dans la deuxième partie, l'étude de la section d'une quadrique Q_m par un cône, ayant son sommet au point O et une base circulaire C dans le plan H , a donné lieu, ici encore, à des calculs pénibles sur les faisceaux de quadriques, presque toujours faute d'avoir porté intérêt aux droites de base du faisceau linéaire donné.

La recherche de l'enveloppe du plan de la conique commune Γ_m manque en général d'élégance, et l'interprétation, ainsi que la justification par des considérations géométriques, sont presque toujours passées sous silence. Le lieu du pôle du plan de cette conique est rarement indiqué, et peu de candidates songent à jeter un regard sur le cas de $m = 1$, ce qui aurait cependant permis de retrouver des résultats classiques.

La détermination du genre de la conique commune provoque, dans maintes copies, des calculs laborieux, dont beaucoup pouvaient être évités, notamment pour la recherche des cercles : faute d'avoir dessiné une figure, même sommaire, plusieurs affirment « qu'on ne peut pas trouver de cercle », sauf dans le cas où la base circulaire donnée a son centre sur l'axe Oz . Les lieux du centre et des sommets des coniques ne sont correctement présentés que dans deux ou trois copies, les autres contenant des résultats inexacts ou des calculs inextricables, alors qu'une figure élémentaire faisait apparaître bien des propriétés demandées.

Les candidates ont en général évité la recherche de la trace sur le plan H du cône circonscrit à une quadrique Q_m le long de sa section par le plan de la conique Γ_m , et l'étude des propriétés de cette trace, dont on connaissait un foyer et un cercle directeur, n'a retenu l'attention que d'un petit nombre. Il en a été de même de la question posée sur le second cône passant par le cercle C et la conique Γ_m , et sur le sommet de ce cône ; pourtant, une figure simple aurait donné de précieuses indications.

La troisième partie concernait l'étude des coniques transformées de deux cercles orthogonaux par une projection stéréographique généralisée. Les candidates trouvent en général correctement le résultat demandé, mais deux ou trois seulement tentent une justification géométrique simple. Beaucoup de maladresses apparaissent encore pour découvrir l'enveloppe du plan et le lieu de son pôle dont la recherche est proposée dans deux cas particuliers, mais, là encore, il manque, la plupart du temps, quelques justifications élémentaires.

La quatrième question semble avoir embarrassé de nombreuses concurrentes, qui ne songent pas à discuter le résultat et à observer que le plan de la conique, donné *a priori*, ne doit pas contenir l'origine O . On trouve encore bien des calculs pénibles et souvent vains à propos du volume du cône, et l'étude des cubiques n'a pas été abordée sérieusement ; beaucoup de copies s'achèvent du reste sur cette question.

La cinquième partie, très réduite par rapport au projet primitif des auteurs, était relative à une propriété assez banale, qu'on peut du reste établir en effectuant

une inversion ayant pour pôle l'un des points doubles de la correspondance homographique (au moins dans le cas réel). Si l'on excepte une candidate dont la solution constitue un essai intéressant, quoique maladroit, les autres se contentent de calculs purement symboliques d'où tout résultat effectif est banni, les symétries de l'enveloppe demandée ne semblant même pas les préoccuper pour faire apparaître sa décomposition. Dans ces conditions, les copies un peu étoffées jusque-là tournent court, et si le correcteur a pu trouver quelques allusions aux questions finales, dans certaines d'entre elles, il a sanctionné par l'attribution de quelques points plutôt de bonnes intentions que des résultats positifs.

En résumé, la plupart des candidates n'ont pas dominé l'ensemble du problème, n'ont pas vu en quoi il consistait ; il faut sans doute en chercher la cause dans l'absence ou dans l'insuffisance d'un effort préalable de réflexion, aidé par l'exécution de quelques figures sommaires, mais suggestives. Du reste, le correcteur a cru remarquer, au cours de la surveillance de l'épreuve, à Paris, que beaucoup se jetaient bien vite dans d'interminables calculs abstraits, alors que dans un problème de géométrie analytique, comme dans un problème de géométrie, c'est en général l'examen de la figure qui suggère une idée, le calcul n'intervenant que comme une partie du raisonnement. Trop confiantes peut-être dans la toute-puissance du calcul, beaucoup paraissent considérer comme inacceptable une solution géométrique qui donne tous les résultats avec la même exactitude, et qui conduit souvent à des interprétations qui échappent au calculateur le plus exercé.

Les notes varient assez régulièrement du minimum 4,5 au maximum 16, attribués l'un et l'autre une fois. Quatre copies seulement sont cotées entre 4,5 et 6,5, leurs auteurs manquant visiblement de métier, et surtout de vues générales. On trouve ensuite neuf notes entre 7 et 8, dix entre 8 et 10, dix-neuf entre 10 et 12, seize entre 12 et 14, cinq entre 14 et 15, puis, en tête, deux 15 et un 16. La moyenne générale de l'épreuve est 10,7 pour les soixante-six candidates, et de 12,3 environ pour les trente et une admissibles. Ces résultats peuvent paraître convenables et encourageants, mais le correcteur a été quelque peu déçu, car le problème ne comportait aucune difficulté qui ne puisse être surmontée lorsque l'on possédait une connaissance suffisamment réfléchie des questions essentielles du programme.

**

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (Correcteur : M. VILLAT)

La question posée concernant l'étude d'une congruence de cercles
(C) $(X - a)^2 + (Y - b)^2 - R^2(a, b) = 0$

dans un plan xOy . Si l'on établit, entre les deux paramètres a et b , dont on les suppose dépendre, une certaine relation, ces cercles auront une enveloppe, qu'ils toucheront chacun en deux points.

On demandait d'abord de déterminer la relation, entre a et b , à établir, de manière que, en chaque point de l'enveloppe, le cercle en question fût osculateur à cette enveloppe.

Un calcul simple mettait cette condition géométrique sous la forme suivante :

$$\left[\left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial b} \right)^2 - 1 \right] \cdot (dR^2 - da^2 - db^2) = 0$$

L'existence du second facteur pouvait d'ailleurs se prévoir en songeant à la théorie des développées. Le cas où le premier facteur serait nul concerne des congruences singulières, qu'il est aisé d'interpréter, en intégrant l'équation classique

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial b} \right)^2 - 1 = 0.$$

La congruence se réduit alors à une famille de cercles, tous tangents à une même courbe fixe.

Il existe en général, d'après ce qui précède, deux familles de cercles répondant à la condition d'osculation, puisque l'équation différentielle $dR^2 - da^2 - db^2 = 0$ est du second degré en da et db . Les points de contact, sur un cercle (C) avec les enveloppes (dites : « courbes focales »), sont, — comme on demandait de le démon-

trer, — sur la droite $(X - a) \frac{\partial R}{\partial a} + (Y - b) \frac{\partial R}{\partial b} + R = 0$ dite : droite focale.

En faisant intervenir une représentation géométrique toute naturelle, on suggérerait de considérer la surface ayant pour équation $R = R(a, b)$ dans l'espace (a, b, R) (ou x, y, z), et de traduire par des propriétés géométriques les diverses étapes des raisonnements précédents. La droite focale, par exemple, est la trace du plan tangent à cette surface, sur le plan xOy .

L'étude de certains cas particuliers, qui figurait dans l'énoncé, ne présentait pas de difficultés sérieuses. On demandait notamment d'examiner le cas où les droites focales passeraient toutes par l'origine des coordonnées. Cela conduisait à la condi-

tion $a \frac{\partial R}{\partial a} + b \frac{\partial R}{\partial b} - R = 0$. Cette équation aux dérivées partielles était tout à

fait classique, et impliquait aussitôt que la congruence correspondante restait invariante dans les homothéties de centre O. Il est curieux de constater que certaines candidates, ayant observé de par l'équation ci-dessus, que $R(a, b)$ était homogène, aient omis d'ajouter que cette fonction était du premier degré d'homogénéité, avec la conséquence naturelle...

D'autres cas particuliers étaient également élémentaires, notamment le cas où les deux familles de focales sont orthogonales entre elles, et elles n'ont pas donné matière à complications. Il est étrange de vérifier ici à quel point les facultés d'attention des candidates peuvent se trouver affaiblies un jour d'examen : une candidate, désirant exprimer l'orthogonalité des courbes focales, écrit par inadvertance cette

condition sous la forme erronée $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^2 - \left(\frac{\partial R}{\partial b}\right)^2 - 2 = 0$.

poursuit son calcul et n'en aperçoit pas l'absurdité.

La question qui suivait demandait un peu plus d'attention. On considérerait une équation différentielle, de la forme $y' = \operatorname{tg} [\varphi(x, y)]$ où φ est une fonction de deux variables x et y , munie de dérivées partielles continues. Cette équation fait correspondre, à tout point M (x, y) du plan, une valeur de y' , et, — par dérivation, une valeur de y'' , — cela définit le cercle osculateur (C), en M, à celle des courbes intégrales de l'équation différentielle qui passe en M. On obtient donc ainsi une congruence de cercles (C), dépendant de deux paramètres, x et y , et dont l'une des familles de focales est constituée par les courbes intégrales de l'équation différentielle.

On prend alors ces cercles (C) pour constituer la congruence de cercles examinée au début du problème. Si l'on désigne par a, b le centre de ce cercle, et par R son rayon, on demandait de constater, — ce qui est du reste presque évident, — que ces nombres étaient reliés aux coordonnées (x, y) du point focal M, par les relations

$$(1) \quad \begin{cases} a = x - R \sin \varphi, \\ b = y + R \cos \varphi. \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{1}{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \varphi$$

l'équation de la droite focale associée au cercle (C) étant

$$(3) \quad (X - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Ce dernier point, qui a semblé difficile à la plupart des candidates, provenait très simplement de l'équation déjà obtenue

$$(4) \quad (X-a) \frac{\partial R}{\partial a} + (Y-b) \frac{\partial R}{\partial b} + R = 0$$

de la droite focale : il n'y avait qu'à effectuer le changement de variables défini par les équations (1) et (2) pour passer des variables x, y , aux variables a et b , ou réciproquement. Ce calcul mettait aussitôt l'équation (4) sous la forme (3). Dans un trop grand nombre de copies, on a seulement esquissé cette démonstration, ou bien on l'a esquivée en admettant purement et simplement le résultat en vue de pouvoir passer à l'étude de la suite du problème.

On demandait ensuite de calculer les coordonnées x_1, y_1 , du second point focal M_1 appartenant au cercle (C). Naturellement cela revenait à trouver l'intersection d'un cercle et d'une droite, alors qu'on connaît déjà l'un des deux points (x, y) de cette intersection. Cela conduisait, sans calculs compliqués, aux formules suivantes :

$$x_1 = x - 2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} \quad y_1 = y + 2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

Plus élégamment, comme l'ont vu plusieurs candidates, il était naturel d'écrire les coordonnées de M_1 , par analogie avec celles de M , sous la forme :

$$x_1 = a + R \sin \Psi, \quad y_1 = b - R \cos \Psi,$$

et le fait que le point M_1 appartenait à la droite focale se traduisait par la relation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} (\sin \varphi - \sin \Psi) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (\cos \varphi - \cos \Psi) = 0$$

En désignant par θ l'angle de MM_1 avec l'axe Ox , cela s'écrit

$$\cos(\Psi - \theta) = \cos(\varphi - \theta).$$

D'où les deux solutions : $\Psi = \varphi$, qui donne le point M , et $\Psi = 2\theta - \varphi$, qui donne le second point M_1 ; cela conduit aussitôt aux deux formules écrites plus haut pour x_1 et y_1 .

L'équation différentielle de la famille de focales décrite par les points M_1 s'écrit maintenant sous la forme

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \operatorname{tg} \Psi$$

et une élimination facile, — au moins théoriquement, — permet d'obtenir effectivement cette équation différentielle elle-même.

On demandait enfin de choisir la fonction $\varphi(x, y)$ de manière que toutes les droites focales passent par un point fixe, ou restent parallèles à une direction fixe. L'équation (3) permettait de répondre aussitôt à la question. Par exemple, la droite

focale passera par l'origine, si $x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, équation dont la solution générale est $\varphi = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Une étude particulière, rentrant justement dans ce cas, était proposée, sous les espèces de l'équation différentielle pour laquelle $\varphi = \frac{x + Ky}{Kx - y}$. Dans ce cas, les calculs se faisaient d'une manière tout à fait élémentaire, et les points focaux étaient, dans chaque position du cercle, symétriques par rapport à l'origine.

Quelques candidates ont réussi à s'adjuger des notes brillantes, deux surtout, dont les compositions ont été notées 18 et 16,5 (sur 20). Ces deux candidates ont fait preuve d'une maturité certaine et d'un acquis souhaitable.

La plus grande partie des compositions se masse, comme de coutume, aux environs de la moyenne. On espérait que la nature du sujet, par ses interprétations géo-

métriques aisées permettant de faire jouer élégamment l'intuition, inspirerait davantage les candidates, du moins en majorité. Cet espoir n'a été réalisé qu'en partie seulement.

Les rédactions laissent trop souvent beaucoup à désirer et se ressentent d'une hâte excessive. Pourtant, il serait souvent plus facile d'écrire en dix lignes bien pesées plus de résultats valables, qu'en deux pages d'improvisations incohérentes. Le correcteur verrait sans doute ainsi faciliter sa tâche, mais surtout les candidates y trouveraient bien largement leur compte !

En fait d'incohérence, et pour ne citer qu'un exemple, à quoi peut bien songer la candidate (dont, par ailleurs, la copie est bonne), quand elle écrit, à propos de la solution d'une équation aux dérivées partielles, « que toute fonction de y/x et d'une constante répond à la question » ?

Il serait donc bien souhaitable que certains fragments des compositions n'affectent pas la forme de véritables énigmes. Je confesse être resté des heures (je n'exagère pas) à chercher l'origine de certaines sottises plus ou moins voilées : car tant qu'on ne tient pas l'explication précise, on risque de ne pas donner la note tout à fait juste ; il arrive parfois que l'inexactitude provienne d'une confusion qui peut être plus ou moins pardonnable.

Soixante-six candidates ont effectivement remis une copie d'analyse. Vingt et une d'entre elles ont obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne. Voici, du reste, le détail des notes : un 18 ; un 16,5 ; deux 14,5 ; deux 13 ; deux 12 ; un 11,5 ; cinq 11 ; deux 10,5 ; cinq 10 ; trois 9,5 ; deux 9 ; un 8,5 ; cinq 8 ; cinq 7,5 ; un 7 ; un 6,5 ; quatre 6 ; deux 5,5 ; trois 5 ; six 4,5 ; cinq 4 ; un 3,5 ; deux 3 ; deux 2,5 ; un 2 et un zéro, cette dernière note correspondant à une copie blanche.

La moyenne générale de l'épreuve est un peu supérieure à 7,7 ; elle est très voisine de 10,1 pour les trente et une admissibles.

*
**

COMPOSITION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE (Correcteur : Mlle CHARPENTIER)

Le système à étudier se composait d'une sphère placée sur un plan horizontal H, la sphère étant aussi en contact avec une plaque P qui passe par une tige fixe D. P peut tourner autour de D et glisser le long de D dans la partie I du problème. Les contacts plan-sphère et plaque-sphère sont dans le 1^o parfaitement rugueux. Ceci entraîne que la plaque P doit faire un angle constant avec H ; les dérivées des autres paramètres sont données par un système d'équations linéaires à coefficients constants, le déterminant du système n'étant pas nul. Les composantes des réactions sont nulles, sauf Z_1 . Cette première partie a eu assez de succès. Seize candidates en ont traité une très grande partie, quarante-huit ont donné des conditions correctes de non-glissement ; la moitié des candidates ont trouvé le système des équations du mouvement ; la condition $\theta' = 0$ se rencontre une vingtaine de fois, mais n'est pas toujours justifiée, pas plus que l'emploi de l'intégrale des forces vives (justifiée peut-être dix fois). Le déterminant n'apparaît qu'une ou deux fois.

Dans les parties II et III, d'autres hypothèses sont faites sur les contacts.

Dès la deuxième partie, les résultats sont plus rares ; on doit obtenir une équation différentielle en θ , puis un système de deux équations différentielles linéaires

donnant $\frac{dq}{d\theta}$ et $\frac{dr}{d\theta}$ en fonction de θ , q , r ; les seconds membres contiennent en facteur $(q \sin \theta - r \cos \theta)$, de sorte que dans le cas particulier proposé r et q sont constants (et par conséquent θ aussi). Le système d'équations en q et r apparaît une dizaine de fois, mais l'équation en θ n'est signalée que deux fois, alors que beaucoup de can-

didates résolvent plus ou moins le cas particulier. Quelques copies signalent un cas particulier $q = r = 0$; θ est alors donné par l'équation des forces vives.

La troisième partie a été plus favorisée que la précédente, neuf candidates ont trouvé que r était constant, mais on trouve peu d'équations en θ .

Il faut encore signaler dans la partie I, quelques copies qui emploient l'intégrale des forces vives pour chaque solide du système séparément ! D'autres utilisent les équations de Lagrange sans s'apercevoir qu'il y a frottement, certaines même écrivent les équations de Lagrange en traitant p et q comme des dérivées de paramètres ! On trouve aussi de grosses erreurs dans des essais de calcul du moment cinétique (pris quelquefois colinéaire à la rotation instantanée en n'importe quel point de la sphère).

Dans la partie II la plaque P cesse brusquement de glisser le long de D, les percussions de liaison qui interviennent alors ne sont évidemment plus perpendiculaires à D. Deux candidates, seules, se sont aperçues de cela et n'en ont guère tiré parti !

Il fallait simplement, dans les systèmes d'équations obtenues (assez correctement une dizaine de fois), supprimer l'équation $M\Delta u' = -X$, puisque le second membre contient, en plus de $-X$, des composantes inconnues de percussions de liaison. Les systèmes proposés deviennent alors compatibles. Les résultats obtenus, après une telle erreur, sont fragmentaires et isolés. Plusieurs candidates ignorent tout de la question et dans certaines équations apparaît même la pesanteur.

La partie III est mieux réussie au début. Les forces d'inertie sont bien calculées une dizaine de fois ; à peu près autant de candidates définissent correctement la liaison, et, employant une méthode différente, six ou sept candidates calculent exactement la force vive absolue. L'intégrale de Painlevé, employée correctement trois fois, ne sert pas à grand'chose dans cette question.

Plus loin, les résultats deviennent plus rares. Une fois se trouve une condition analogue à l'une des conditions demandées pour l'équilibre relatif ; $\cos \varphi_0 = \frac{3g}{4a\omega^2}$ (à combiner avec $\sin \varphi_0 = \frac{R}{2l}$, qui était donné). Mais aucun essai d'équations des petits mouvements n'a suivi.

La meilleure copie a été notée 17,5, la première partie est presque entièrement faite, suivie de certains résultats dans II et un assez bon début de III, la copie suivante est plus soignée (16) mais présente moins de résultats achevés, la copie suivante (15,5) présente toujours une bonne partie I. On trouve ensuite trois 15, deux 14,5 et trois 13. Les candidates se tiennent de près : vingt et une notes dépassent la moyenne ; on trouve ensuite vingt notes de 8 à 10 inclus, puis dix de 6 à 7,5 et treize de 2 à 5,5, et un zéro pour une copie blanche.

La moyenne générale de l'épreuve est 9 pour l'ensemble des soixante-cinq candidates ayant remis une copie ; elle est égale à 11,5 pour le groupe des trente et une admissibles.

EPREUVES PRATIQUES

Les résultats des deux épreuves pratiques sont, quant à l'échelonnement, assez voisins, les notes variant de 2 à 13 pour l'épure et de 3 à 15 (mais un seul 15, et la note suivante est 13) pour le calcul numérique. Les moyennes des deux compositions sont donc très comparables : 6,8 et 7,4 environ pour les trente et une admissibles.

Si l'on groupe les deux épreuves, on trouve cette année un classement qui ne diffère pas énormément du classement de chacune d'elles, prise séparément, et le total des deux notes, sur 40; passe de 6,5 à 27, avec une répartition assez régulière de vingt-neuf des candidates entre 6,5 et 21, tandis que deux se détachent sensiblement avec un 24,5 et un 27.

Le rôle de ces deux épreuves a été bien souvent rappelé. Elles sont destinées l'une et l'autre à apprécier des qualités d'ordre et de méthode, ainsi qu'une certaine aptitude à réaliser effectivement une idée abstraite, à mettre en œuvre telle ou telle théorie qui risque fort de rester dans le domaine vague et obscur des connaissances apprises, mais non dominées, tant que l'on n'a pas pris la peine de traiter dans tous leurs détails quelques-unes de leurs applications.

Comme chaque année, l'influence de ces compositions sur le classement définitif des admissibles a été sensible, la quinzaine ou la vingtaine de points qui peuvent être par elles, gagnés ou perdus constituant une marge très appréciable et l'on pourrait citer deux ou trois concurrentes qui ont pu racheter une légère défaillance à l'oral — et une telle défaillance est souvent fatale — par des notes convenables en géométrie descriptive et en calcul numérique.

Une fois encore, il convient d'insister auprès des futures candidates pour que cette partie du concours leur apparaisse comme vraiment importante, aussi bien pour la valeur propre de ces épreuves qui correspondent à un aspect intéressant de la culture mathématique, que pour le rôle décisif qu'elles peuvent jouer dans l'établissement de la liste des reçus.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (M. PÉTRUS)

Enoncé du problème

La figure est rapportée à un système d'axes de coordonnées $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ trirectangle. Les axes $x'Ox$, $y'Oy$ sont placés sur les axes de la partie libre de la feuille, l'axe $z'Oz$ étant supposé perpendiculaire au plan de la feuille et orienté positivement vers le haut. Le plan ($x'Ox$, $y'Oy$) ($z = 0$) est le plan horizontal de projection, le plan ($y'Oy$, $z'Oz$) ($x = 0$) est le plan frontal de projection et l'axe $y'Oy$ est la ligne de terre. On suppose le plan frontal rabattu sur le plan $z = 0$ en prenant $y'Oy$ pour charnière, de façon que le demi-axe Oz vienne se confondre avec le demi-axe Ox' . Les données sont exprimées en millimètres et les coordonnées (x , y , z) des points sont données dans l'ordre habituel.

1° Construire la sphère S_1 ayant pour centre le point (80, — 60, 60) et pour rayon 60, ainsi que la sphère S_2 ayant pour centre le point (80, — 60, 150) et pour rayon 30.

2° Construire le cylindre de révolution C circonscrit à S_2 , ayant ses génératrices de front, tangent à S_1 en un point dont l'ordonnée « y » est inférieure à — 60.

3° Déterminer l'intersection I de S_1 et de C , et notamment :

- Le point double réel et ses tangentes.
- Les points doubles apparents et leurs tangentes.
- Les points à tangentes de profil.
- Un point courant et sa tangente.

4° La sphère S_1 étant supposée solide et opaque, représenter la portion de celle-ci qui est extérieure à C . On tracera en noir plein les portions de I et celles des contours apparents qui sont vues, en ponctué les portions non vues, en rouge les portions supprimées.

5° On considère le cône de sommet A (80, — 60, 120) admettant la courbe I comme directrice, et la section K de ce cône par le plan $z = 100$. On effectue sur K la translation ayant pour amplitude le vecteur (0, 100, — 100). Représenter la courbe ainsi obtenue en trait bleu, avec tous les éléments remarquables qui peuvent se construire par la règle et le compas.

6° Dans une notice rédigée sur feuille annexe, les candidates justifieront les constructions effectuées, les résultats obtenus et elles préciseront la nature de la courbe K .

Le sujet proposé comportait la représentation d'une « fenêtre de Viviani », courbe classique dont un grand nombre de propriétés peuvent s'établir par des considérations de géométrie pure, sans recours au moindre appareil analytique, et pouvaient être utilisées dans l'épure. Pour terminer, les candidates avaient à effectuer une projection stéréographique de la courbe sur un plan horizontal, et à identifier cette projection.

La mise en place du cylindre coupant la sphère porteuse suivant la fenêtre ne présentait aucune difficulté ; il semble cependant que plusieurs candidates aient cru devoir recourir au calcul. En fait, plusieurs mises en place comportent de graves imprécisions, dues au fait que les concurrentes ne se sont pas préoccupées de justifier certaines coïncidences qui n'avaient rien de fortuit, et qui pouvaient permettre de rectifier les imperfections des instruments utilisés.

La lecture des notices adjointes trahit des hésitations sur la nature de la projection frontale ; les candidates se bornent en général à constater que la courbe, « ayant tous ses points doubles », est une conique et à rechercher sa direction asymptotique, d'où elles concluent que cette conique est une parabole. D'autres se bornent à un vague tracé fondé sur l'intuition des faits, et les tangentes aux deux points d'arrêt prennent les directions les plus étranges : on les trouve confondues avec les tangentes au grand cercle frontal de la sphère, ou bien normales à celui-ci ! J'oserai rappeler que si l'on considère le plan de symétrie de bout commun au cylindre et à la sphère, on prouve facilement que le carré de la distance d'un point de I à ce plan est proportionnelle à la distance de ce même point au plan tangent commun, ce qui donne à la fois la nature et les éléments fondamentaux de la parabole et peut dispenser en même temps de constructions compliquées pour la détermination des tangentes aux points d'arrêt.

La même figure peut servir à montrer que si l'on considère la droite joignant un point de I au point double réel, sa direction fait avec celle des génératrices de C un angle constant égal à 45° , ce qui dispense de toute hésitation et aussi de toute détermination empirique du cône d'erreur. Quelques candidates, il est vrai, font remarquer que les quadriques du faisceau sont toutes de révolution autour d'axes parallèles à l'axe du cylindre et observent qu'elles connaissent alors deux génératrices de ce cône, mais c'est là l'exception, et les autres se soumettent à la fatalité de l'empirisme. L'une d'elles invoque à ce propos la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, sans préciser du reste ce qu'elle veut en faire !

Pour la recherche des points doubles apparents, la plupart des candidates déterminent la droite des points doubles en projection horizontale d'une manière correcte, mais elles se bornent alors à la détermination empirique traditionnelle, sans songer à utiliser le cylindre parabolique dont la directrice est demeurée incertaine et le correcteur a sévèrement pénalisé cette lacune. En dehors des deux points de I correspondant aux points d'arrêt de la projection frontale, la courbe présentait deux points à tangente de profil qui s'obtenaient en menant à la parabole frontale la tangente verticale. De nombreuses candidates, ne sachant pas ou n'osant pas aborder cette construction, ont laissé de côté cette détermination importante.

En général, les candidates ont déterminé correctement les points de I situés sur le contour apparent horizontal du cylindre, mais beaucoup ont laissé de côté les points situés sur le contour apparent horizontal de la sphère, faute toujours d'avoir raisonné sur la parabole frontale.

Pour la détermination du point courant et de sa tangente, diverses méthodes s'offraient aux concurrentes. Un bon nombre d'entre elles ont utilisé les sphères inscrites dans le cylindre, le procédé donnant du reste plusieurs des résultats demandés précédemment. D'autres ont utilisé des sphères concentriques, ce qui est moins adroit, ou encore elles ont coupé la sphère par les génératrices du cylindre, celui-ci

étant défini par une base de Monge. On trouve, hélas ! aussi des candidates qui coupent les surfaces par des plans horizontaux et ne s'effraient pas d'indiquer qu'on est ramené à l'intersection d'une ellipse et d'un cercle, sans toutefois effectuer les constructions correspondantes. On trouve même une candidate qui se risque à réaliser un changement de plan horizontal !

L'étude de la projection stéréographique n'a été abordée que dans quatre épreuves comportant d'ailleurs des erreurs graphiques qui auraient pu être corrigées aisément avec un peu d'attention. Les auteurs se bornent à soupçonner le résultat, en essayant d'utiliser les isotropes du point le plus haut de la sphère, mais sans remarquer que celles-ci sont tangentes au cylindre et par suite à l'intersection et qu'enfin les points cycliques du plan horizontal sont nécessairement des points de rebroussement de la quartique. Les propriétés caractéristiques du limaçon de Pascal échappent ainsi aux concurrentes, qui se contentent d'un tracé très approximatif de la projection de I.

En définitive, si l'on excepte un très petit nombre de candidates qui ont pris au sérieux l'épreuve et l'ont préparée avec conscience, la plupart des autres semblent avoir pris celle-ci comme une formalité d'effet négligeable sur le résultat final. La présentation matérielle est d'ailleurs en général lamentable : de nombreuses concurrentes ne dépassent pas le stade de l'étude au crayon, et chez celles qui ont abordé la mise à l'encre, le tracé de la courbe et la ponctuation sont la plupart du temps déplorable. On trouve même une ou deux épreuves dans lesquelles l'usage de l'encre rouge pour les constructions et les lignes de rappel est complètement méconnu.

Le barème adopté, pour tenir compte en principe de toutes les bonnes intentions des candidates, a fourni 31 notes échelonnées de 2 (une fois) à 13 (une fois), avec une moyenne de 6,8, dont on ne peut dire qu'elle est satisfaisante, car l'impression du correcteur est franchement mauvaise devant de semblables défaillances.

*

**

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE (M. DUGUÉ)

Enoncé du problème

On considère la série entière :

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

où $a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}$, α et β étant deux constantes réelles.

1° Calculer le rayon de convergence de cette série. On désignera par $f(z)$ sa somme dans le cercle de convergence. Quelle est la limite de a_n quand n tend vers l'infini ?

2° On prend maintenant dans la suite du problème $\alpha = 0,1$ $\beta = 10$. Calculer la valeur approchée de $f(0,9)$ à $\frac{1}{10^5}$ près par défaut.

3° Déterminer une valeur de l'entier n à partir de laquelle on a $a_n < \frac{1}{10^{20}}$. On s'efforcera de donner la plus petite valeur possible de n vérifiant l'inégalité.

4° On propose de calculer une valeur décimale approchée de $f(e^{-4})$. Expliquer comment vous organiserez ce calcul. Entreprendre effectivement les opérations que vous aurez prévues et les pousser aussi loin que possible suivant le temps dont vous disposerez, en précisant l'approximation obtenue.

(e est la base des logarithmes népériens).

*

**

Ce problème a eu peu de succès auprès de l'ensemble des candidates. Six notes seulement atteignent ou dépassent la moyenne.

Les copies révèlent des ignorances très graves, même au cours de la première question, qui, dans l'esprit du correcteur, n'avait été posée que pour permettre à tout le monde un début de solution.

Dans une copie, le calcul du rayon de convergence n'est pas correctement fait : on trouve $\frac{\alpha}{\beta}$! Dans une autre, on *identifie* l'étude de la limite de a_n à l'étude de la convergence de la série. D'ailleurs vingt-cinq candidates sur trente et une ont été incapables d'expliquer correctement comment se comporte le terme a_n quand n tend vers l'infini.

La partie concernant plus spécialement le calcul numérique et en particulier l'approximation à $\frac{1}{10^5}$ près de $f(x)$ n'a pas davantage été réussie. Trop de candidates admissibles à l'agrégation semblent ne pas savoir que, pour être un problème d'approximation, les questions posées n'en constituent pas moins un problème très précis. Je ne veux pour preuves de cette ignorance que l'inégalité suivante relevée dans une copie : $(0,9)^2 < 0,8$ et la phrase « $\frac{9,1}{19}$ est de l'ordre de 0,4 ». Puisqu'il y est forcé, le correcteur croit de son devoir de dire que, si cette expression est parfois employée par des physiciens, elle n'a en mathématiques (et même en calcul numérique) rigoureusement aucun sens.

Quant à la détermination la plus précise possible du nombre n , à partir duquel on a $a_n < \frac{1}{20^n}$, cinq candidates seulement en ont donné une approximation acceptable. Pour les autres, les mieux notées ont été celles qui ont courageusement tenté un calcul direct de a_n en le poussant aussi loin que possible (une candidate a aussi déterminé une majoration de a_{33} . Elle était encore loin du but, hélas !). Ailleurs on découvre des solutions du genre suivant : « les valeurs de n convenant sont celles

$$\text{à partir de laquelle on a : } \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{\beta}{n-1}\right)^n} < \frac{1}{20^n}$$

où « les valeurs de n seront celles à partir de laquelle $n! < 10^n$. On peut se demander si les auteurs de pareilles affirmations ont jamais su ce qu'est une exponentielle ou une factorielle.

Souhaitons que de pareilles lacunes soient comblées au plus vite.

Les notes vont de 15 à 3, mais les copies un peu convenables sont rares ; l'échelonnement se présente ainsi : un 15, puis un 13, un 12, un 11,5 et deux 10,5 ; entre 9,5 et 3 la répartition présente deux « pointes », l'une de six copies cotées entre 8 et 9, l'autre de huit copies cotées entre 6 et 7. La moyenne générale de l'épreuve est un peu inférieure à 7,4 pour l'ensemble des trente et une candidates.

EPREUVES ORALES

Suivant la coutume, les deux leçons de « Mathématiques Élémentaires » et de « Mathématiques Spéciales », que chacune des trente et une candidates admissibles a présentées devant le jury, avaient été préalablement associées avant le tirage au sort traditionnel.

Voici la liste des sujets de leçons (les numéros entre parenthèses accompagnant chacune des questions d'« Élémentaires » ou de « Spéciales » correspondent au groupement des deux leçons traitées par une même candidate) :

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Pour une classe de *Seconde C* ou *Moderne* :

- (1) Etude de la fonction linéaire ; représentation graphique.
- (2) Inégalités dans les triangles.
- (3) Positions relatives de deux cercles.
- (4) Faisceaux harmoniques de droites. Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux droites est donné.
- (5) Exemples de recherche de lieux géométriques.

Pour une classe de *Première C* ou *Moderne* :

- (6) Variations et représentation graphique de la fonction homographique.
- (7) Exemples de résolution de problèmes conduisant à des équations du premier ou du second degré.
- (8) Droite et plan perpendiculaires.
- (9) Géométrie : angle d'une droite et d'un plan. Ligne de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre. Application à la représentation du plan en géométrie cotée.

Pour une classe de *Mathématiques* :

- (10) Arithmétique : Division des nombres entiers.
- (11) Arithmétique : Diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres. Propriétés du plus grand commun diviseur.
- (12) Arithmétique : Première leçon sur les fractions.
- (13) Arithmétique : Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à une unité près.
- (14) Première leçon sur les nombres positifs et négatifs.
- (15) Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Interprétation graphique.
- (16) Cosmographie. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes.
- (17) Etude du mouvement circulaire uniforme ; projection sur un diamètre de la trajectoire. Mouvement rectiligne défini par une équation de la forme :
$$x = a \cos (\omega t + \alpha) + b \cos (\omega t + \beta).$$
- (18) Trièdres supplémentaires.
- (19) Axe radical de deux cercles. Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles. Applications.
- (20) Problèmes classiques sur les tangentes aux coniques. Théorème de Poncelet.
- (21) Equations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie. Applications.

- (22) Traiter un ou deux exemples de résolution de triangles dans des cas non classiques.

Pour une classe de *Mathématiques Supérieures* (programme de *géométrie pure*) :

- (23) Conditions pour que quatre points soient sur un cercle (leçon de révision). Applications.
- (24) Faisceaux linéaires de cercles dans le plan. Faisceaux orthogonaux.
- (25) Homothétie.
- (26) Similitude plane.
- (27) Première leçon sur l'inversion.
- (28) Ellipse et cercle déduits l'un de l'autre par affinité. Applications.
- (29) Problèmes sur l'hyperbole définie par ses asymptotes et un point.
- (30) Sections planes d'un cône de révolution.
- (31) Intersection de deux cônes circonscrits à une même sphère.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(8) Première leçon sur les nombres complexes (Classe de Mathématiques Supérieures).

(28) Division des polynômes à une variable.

(19) Première leçon sur les déterminants.

(30) Résolution d'un système d'équations linéaires, le cas des systèmes dits « de Cramer » étant supposé déjà étudié.

(27) Formes linéaires.

(20) Fonctions symétriques entières des racines d'une équation algébrique entière.

(24) Fonction inverse d'une fonction monotone et continue.

(3) Théorème de Rolle. Formule des accroissements finis.

(29) Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction. Exemples.

(18) Séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante. Exemples.

(5) Formule de Taylor pour les fonctions d'une variable réelle. Applications.

(4) Fonction exponentielle.

(25) Fonction puissance x^α (α constante réelle).

(26) Changement de variable dans une intégrale (indéfinie et définie). Exemples.

(2) Intégration des fractions rationnelles.

(16) Première leçon sur les séries numériques.

(9) Les généralités sur les séries à termes réels et à termes complexes étant supposées traitées, établir les caractères de convergence dits « de Cauchy » et de « d'Alembert » pour les séries à termes positifs et pour les séries à termes quelconques. Exemples.

(21) Multiplication de deux séries absolument convergentes. Application aux séries entières.

(31) Intégration des équations différentielles linéaires du premier ordre. Exemples.

(1) Courbe plane dont l'équation polaire est résolue par rapport au rayon vecteur : tangente, normale, concavité, courbure.

(6) Construction des courbes planes définies en coordonnées polaires. Exemples. (Les résultats généraux sur les tangentes, sur la concavité, sur les branches infinies, sont supposés connus).

(17) Première leçon sur l'enveloppe d'une famille de courbes planes.

(14) Géométrie analytique : Plan tangent en un point d'une surface.

(15) Directions principales des surfaces du second ordre.

(10) Géométrie analytique : Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.

(22) Géométrie analytique : Sections circulaires des surfaces du second ordre.

(7) Géométrie descriptive : Intersection de deux cônes du second degré ayant une génératrice commune.

(12) Cinématique du point : Vecteur-accelération. Composantes tangentielle et normale. Applications.

(13) Cinématique : Changement du repère. Composition des vitesses. Composition des accélérations lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation. Applications.

(11) Dynamique : Travail d'une force. Théorème de la force vive pour un point matériel. Applications.

(Toutes ces leçons, à l'exception de la leçon sur les nombres complexes, devaient être traitées au niveau de la classe de Mathématiques Spéciales).

Les leçons proposées correspondaient, on le voit, à des questions tout à fait classiques, et leur exposé ne manquait pas de faire intervenir, pour être valable, une connaissance correcte des théories et des résultats fondamentaux en même temps qu'une application réfléchie des méthodes générales de recherche et de raisonnement. Il arrive, trop fréquemment, que le jury éprouve quelque déception en découvrant, au cours d'une épreuve, soit des lacunes touchant à quelque point essentiel (il ne s'agit pas, bien entendu, de faits relevant d'une érudition très spécialisée dans tel ou tel domaine), soit une insuffisance manifeste dans la construction d'une solution. Il est indispensable — et cette recommandation pressante n'est pas une nouveauté — que la préparation au concours soit dominée par le double souci d'une acquisition aussi totale que possible des connaissances de base — ce qui suppose déjà un effort raisonné de classement et un choix judicieux, afin de mettre à leur juste place le fait général et le détail particulier —, et d'une réflexion approfondie, qu'il convient de pousser jusqu'aux applications pratiques dont le programme fournit d'abondants exemples, sur les éléments du raisonnement, sur les modes de développement de la pensée logique, sans oublier les moyens d'expression dont il est à peine nécessaire de souligner l'importance primordiale, surtout lorsqu'il s'agit de futurs professeurs.

Les compositions écrites, comme les leçons, donnent naturellement de précieuses indications sur les qualités et sur les défauts, dans l'ordre de l'esprit et dans l'ordre du caractère. Mais, bien entendu, ces épreuves orales, qui mettent longuement les candidates en présence du jury, apportent, par surcroît, des éléments d'appréciation dont on ne saurait méconnaître la valeur ; car, mises à part, et d'ailleurs toujours excusées, certaines réactions dues manifestement à une émotion ou une nervosité compréhensibles, le comportement devant un auditoire, une diction plus ou moins nette, un emploi plus ou moins judicieux et ordonné du tableau (et parfois de la craie et du chiffon), d'autres indices encore, viennent s'ajouter, comme des réalités non négligeables, aux impressions que suscite, sur un plan plus abstrait, l'exposé entendu, et ne manquent point d'intervenir dans le jugement et dans le classement des concurrentes.

Il convient peut-être d'insister un peu sur ces points — je ne dis pas sur ces détails, car il s'agit de faits qui jouent un rôle important dans la vie professionnelle, et surtout lors des premiers contacts du jeune professeur avec ses élèves, souvent enclins à prononcer de prime abord une sentence sans appel. Il n'est sans doute pas très difficile de faire un effort pour s'observer soi-même, pour contrôler certaines de ses habitudes, pour essayer de réformer ce qui paraît fâcheux et peu conforme à l'attitude d'un éducateur et d'un maître, qui doit donner l'exemple en toutes choses. Redisons donc, cette année encore :

— qu'une leçon ne doit pas ressembler à une récitation scolaire, voire enfantine, « débitée » à une allure parfois vertigineuse, qui provoque d'ailleurs de temps en temps de fâcheux accidents ;

— qu'il est assez pénible de voir telle candidate incapable de se séparer de la dizaine de feuilles hâtivement écrites pendant les trois ou quatre heures de préparation, et obligée de se reporter constamment à ces notes non sans laisser quelquefois s'établir un silence un peu gênant, — ou telle autre qui, tournée obstinément vers le tableau, semble ne pouvoir s'en éloigner, masquant souvent une bonne partie de ce qu'elle écrit ;

— qu'il n'est guère opportun de faire disparaître, par un hâtif « coup de chiffon », les éléments d'un calcul à peine achevé, alors que l'on a encore à en commenter ou en utiliser les résultats, et le manque de place n'est pas ici en cause, car les tableaux dont disposent les candidates sont de dimensions fort convenables ; peut-être redoute-t-on la curiosité du jury qui pourrait relever quelque lourde maladresse (plus grave souvent qu'une erreur matérielle), si elle restait longuement exposée aux regards ? Peut-être est-ce là simple geste de nervosité ? — Mais il paraît justement assez facile d'apprendre à faire un bon usage du tableau : l'idéal ne serait-il pas que,

l'exposé terminé, restent apparents, dans une disposition claire et harmonieuse, le plan de la leçon, les étapes du travail, les articulations des raisonnements avec les quelques calculs qui en forment partie intégrante, les résultats et les conclusions ?

— qu'il convient de porter grande attention à la correction du vocabulaire et de la phrase, en y comprenant, bien entendu, les représentations symboliques propres aux mathématiques. Relevons encore, pour les condamner une fois de plus : des notations telles que $f(x, y, z)$ ou (SAS'A'), qui prétendent désigner une fonction de trois variables x, y, z ou l'angle orienté de la droite SA vers la droite S'A' ; — des phrases ou des locutions telles que « l'introduction des fractions a rendu possible le quotient exact », ou bien « la forme de la fonction » (alors qu'il s'agit de la courbe représentative), « une droite de la forme $y = ax + b$ », ou bien encore « la différence est possible », « les termes d'un produit », et l'inévitable « plus grand ou égal à... », et le fâcheux « cercle de centre l'origine ». Ajoutons à cette liste fort incomplète les deux « cercles intérieurs », simplification inacceptable, car elle traduit incorrectement la propriété qu'elle prétend évoquer.

Quant à la structure d'une leçon, il importe qu'elle fasse apparaître, dans un ordre logique, satisfaisant, je dirais presque rassurant, pour l'esprit de l'auditeur supposé novice, les éléments que l'on se propose de présenter. Une accumulation de détails, exacts peut-être, mais juxtaposés plutôt que reliés, ne peut constituer un exposé utile. D'autre part, il est souvent dangereux de se livrer, à propos d'une question encore neuve pour celui qui écoute, à des anticipations qui, faites prématurément, restent presque toujours dans un vague plein de dangers, et n'ont pas d'autre effet que de troubler les débutants ou de faire naître en eux des idées fausses.

En abordant maintenant le domaine touchant plus précisément à la technique des mathématiques, il est bon de revenir sur quelques remarques bien simples, mais qui paraissent souvent mal connues, ou, du moins, mal appliquées, sur la structure de certaines solutions et de certains raisonnements.

Le mode classique de recherche et de présentation d'un problème de lieu géométrique de points constitue l'un des thèmes les plus abondamment développés dans l'enseignement, dès la classe de Troisième. On prend bien soin, sur ce sujet, de mettre en lumière l'inévitable conséquence de l'hypothèse : « Soit M un point du lieu cherché... » : toutes les découvertes faites alors ne donnent que des propriétés nécessairement vérifiées par un point du lieu, s'il existe, et il ne peut venir à l'esprit de considérer que la solution est achevée après cette simple étape ; c'est seulement après l'étude d'une réciproque que l'on peut énoncer des conclusions définitives, non sans avoir procédé, s'il y a lieu, à la discussion et à la mise au point des différents cas qui peuvent se présenter. Or, c'est ce même développement logique que l'on rencontre dans bien des questions. Comme on l'a rappelé maintes fois, les problèmes dits « de construction » sont, eux aussi, soumis à la nécessité d'une étude de réciproque, lorsqu'on a, au départ, « supposé le problème résolu ». Il en est de même — et ce rapprochement n'est pas toujours suffisamment mis en évidence — dans toute recherche où l'on est conduit à procéder à une « mise en équations » pour résoudre, par les moyens de l'algèbre, telle question de géométrie, de trigonométrie, de mécanique, où les éléments, donnés et inconnus, sont susceptibles d'être définis par des nombres (mesures algébriques ou arithmétiques de segments, de vecteurs, d'angles, coordonnées...). Très fréquemment, la « mise en équations » est faite à partir d'une hypothèse que l'on ne prend pas toujours soin d'explicitier, et qui équivaut, en fait, à « supposer le problème résolu » ; on écrit alors les relations (égalités, inégalités...) entre données et inconnues qui se trouvent réalisées dans cette hypothèse, et l'on forme ainsi un ensemble de conditions que l'on considère en général comme « les équations (et inéquations) du problème » ; or, il est bien évident que le système obtenu ainsi ne traduit, là encore, que des propriétés vérifiées sous la réserve faite initialement, et une étude de réciproque, prenant cette fois comme hypothèse l'existence d'une solution du système, est indispensable pour pouvoir décider si le problème ini-

tial peut être effectivement remplacé par le problème d'algèbre constitué par la résolution et la discussion du système formé.

Il est à peine utile de dire que c'est là notion d'équivalence de deux questions qui est en jeu ici, ce terme étant pris dans son sens précis, comportant l'idée que l'on obtiendra exactement les mêmes résultats en substituant l'une des questions à l'autre. Il est d'ailleurs bien connu que, dans certains cas, cette équivalence pourra être établie en une seule étape, lorsque la nature du problème permet d'utiliser dès le départ des conditions à la fois nécessaires et suffisantes, à condition bien entendu de ne pas faire intervenir, à un moment quelconque, et sous une forme plus ou moins dissimulée, une hypothèse analogue à celles dont il vient d'être parlé longuement.

Cette année, justement, deux candidates ont eu à traiter des leçons d'algèbre ou de trigonométrie auxquelles s'appliquent ces remarques générales : l'une concernant la résolution de problèmes conduisant à des équations du premier ou du second degré, l'autre demandant de traiter un ou deux exemples de résolution de triangles dans des cas non classiques. Le premier exposé a fait heureusement ressortir la signification exacte de la mise en équations, en mettant clairement en évidence qu'il s'agit en fait d'un véritable raisonnement que l'on doit conduire jusqu'au bout par voie logique : sans doute les excellents conseils que contenait la leçon n'ont-ils pas été toujours strictement appliqués dans les exemples traités, mais l'essentiel était dit et correctement expliqué. La deuxième question, bien qu'elle laisse une grande liberté de choix, est assez redoutable, car, en dehors des théorèmes classiques sur les relations entre les côtés et les angles d'un triangle, qui donnent précisément des propriétés caractéristiques, les résultats que l'on est amené à utiliser pour la traduction algébrique des conditions imposées par l'énoncé sont « à sens unique » (calcul d'une hauteur, d'une bissectrice..., en fonction des côtés et des angles, par exemple), et l'étude nécessaire d'une réciproque se révèle parfois assez délicate à conduire : s'ajoutent évidemment à ces difficultés de raisonnement les difficultés inhérentes au maniement des lignes trigonométriques et des fonctions circulaires, sans oublier l'embarras que l'on peut éprouver pour choisir une voie raisonnable parmi celles, parfois nombreuses, qui se présentent. L'exemple traité devant le jury comportait une discussion assez délicate, qui n'a pas toujours été heureusement menée, mais, plus grave que certaines maladresses, était l'insuffisance, au départ, du raisonnement que doit constituer la mise en équations.

Aux considérations précédentes se rattachent certaines remarques faites à propos de leçons assez diverses.

Dans l'étude qui précède la définition de l'axe radical de deux cercles, on rencontre justement un exemple de recherche de lieu géométrique où l'on peut faire jouer sans difficulté des conditions nécessaires et suffisantes, puisqu'on dispose ici d'une véritable identité, relative à la différence Δ des puissances d'un point arbitraire M du plan par rapport à deux cercles ayant respectivement pour centres A et B et pour rayons a et b : $\Delta = \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = (a^2 - b^2) = 2 \overline{AB} \cdot \overline{IM} - (a^2 - b^2)$, I étant le milieu du segment AB et M' la projection orthogonale de M sur la droite AB . Une voie naturelle paraît dès lors tracée, l'emploi méthodique de cette identité permettant de mettre en évidence à la fois l'axe radical, et l'expression classique de la différence Δ . Ajoutons, en passant, à propos de ce problème, qu'il est fort intéressant de signaler ce que sont les points de rencontre de l'axe radical de deux cercles avec les tangentes communes à ces cercles, lorsqu'elles existent, mais que la propriété simple ainsi mise en évidence ne saurait être raisonnablement utilisée pour une construction théorique de l'axe radical.

Des problèmes de lieux géométriques se rencontrent encore dans les leçons sur les transformations : homothétie, inversion..., par exemple, lorsqu'on applique ces transformations à quelques figures classiques : droite, cercles... Il est évidemment insuffisant d'avoir constaté que l'homothétie d'un point d'une droite D est situé

sur une certaine droite D' parallèle à D , pour en déduire que l'homothétique de la droite D est la droite D' . D'autre part, dans ces leçons, on voit souvent apparaître une faute qui tient à un emploi mal compris de « conditions nécessaires et suffisantes », lorsqu'on cherche, par exemple, les homothéties ou les inversions susceptibles de transformer un cercle en un autre ; le problème direct concernant la transformation d'un cercle étant déjà traité, la marche logique du raisonnement consiste à en déduire des conditions nécessairement vérifiées par les transformations que l'on cherche, et à étudier ensuite si ces conditions sont suffisantes ; or, il arrive souvent que l'étape des conditions nécessaires est omise, ou à peine indiquée, alors qu'elle est essentielle pour pouvoir affirmer qu'aucune solution n'a été oubliée.

Dans une leçon, d'ailleurs fort convenable, sur des « exemples de recherche de lieux géométriques », en Seconde, la candidate a su clairement présenter les idées générales et les aspects classiques des solutions de ces problèmes. L'un des exercices traités donne l'occasion de quelques remarques, dont la portée est du reste assez étendue, concernant l'étude des réciproques dans ces problèmes.

1° Supposons que, dans la phase « directe » de la solution, étant parti d'un point M appartenant au lieu proposé, l'on ait découvert que le point M se trouve, par exemple, sur un certain cercle fixe C dont la position est précisée en fonction des données. Très souvent l'on se contente d'annoncer cette acquisition par une phrase telle que : « Tout point du lieu est sur le cercle C », et l'on aborde aussitôt l'étude de la « réciproque », qui consiste à rechercher si un point quelconque P de C vérifie les conditions définissant le lieu. On peut alors avoir quelque peine à bâtir un raisonnement sur cette seule hypothèse : « Soit P un point du cercle C ... ». Or, au cours de la phase « directe », on a bien souvent découvert différentes propriétés au point M , telles que : le point M appartient nécessairement à telle droite, ou à tel cercle, variables, en relation très directe avec la figure fixée par les données. Il importe, pour simplifier la tâche ultérieure, de dresser, en conclusions de cette première partie de la recherche, un bilan aussi complet que possible de ce que l'on sait sur tout point M du lieu ; on aura ainsi à sa disposition, dans le nouveau problème que forme la réciproque, des renseignements qui pourront faciliter grandement la tâche et orienter le travail dans une voie plus accessible.

2° Cette étude de réciproque, quand on est amené à l'entreprendre, pourra souvent être menée à bien par une méthode d'« identification » dont l'emploi est fréquent dans nombre de démonstrations classiques : réciproque du théorème de Thalès, démonstration de l'identité d'une section plane d'un cône de révolution avec une certaine conique... Et ce mode de raisonnement est presque toujours grandement facilité lorsque l'on a pris soin, justement, de rassembler, au départ, toutes les indications susceptibles d'être utilisées.

Devrait-il être nécessaire d'ajouter que, toutes les fois qu'il s'agit d'étudier la réciproque d'une proposition, il est logiquement indispensable de mettre en évidence les nouvelles hypothèses, et, dans une question de géométrie, de faire une nouvelle figure ?

Les observations précédentes s'appliquent, bien entendu, aux problèmes de « construction ». A diverses reprises, le sujet de la leçon posait incidemment de tels problèmes, et, trop fréquemment, les raisonnements présentés laissaient apparaître quelque lacune ou quelque maladresse.

Ainsi, n'est-ce pas se compliquer inutilement la tâche que de traiter la recherche des tangentes à une conique passant par un point donné sans utiliser méthodiquement les propriétés *caractéristiques* de ces tangentes qui ont été établies auparavant ? On a là une bonne occasion de montrer comment on peut conduire un raisonnement lorsqu'il est possible de transformer, par étapes successives, le problème posé en problèmes toujours équivalents. Au sujet de cette leçon, remarquons en passant que les théorèmes de Poncelet sur les tangentes aux coniques se découvrent très directement par une étude attentive des éléments de la figure que l'on est amené à construire pour

la détermination des tangentes passant par un point : il s'agit au fond, lorsque l'on a adopté la définition bifocale pour l'ellipse et l'hyperbole, d'exploiter méthodiquement quelques propriétés évidentes d'un système de deux cercles et de leur diamètre commun (de l'axe de symétrie commun à un cercle et à une droite quelconque, dans le cas de la parabole). On peut signaler, à ce propos, que la mise en évidence des propriétés énoncées dans les théorèmes de Poncelet peut se faire aussi facilement en utilisant le cercle principal (ou la tangente au sommet de la parabole) que l'un des cercles directeurs (ou la direction de la parabole).

On retrouve encore, en algèbre, des observations du même type, concernant les modes de raisonnement, par exemple dans la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues (classe de Mathématiques) : il est très naturel d'aborder ce problème par la méthode « de substitution », qui, bien présentée, lorsqu'elle a été précédée par la détermination de toutes les solutions d'une équation linéaire à deux inconnues, permet justement de raisonner par conditions à la fois nécessaires et suffisantes, et d'arriver à la résolution et à la discussion complètes, sans avoir à procéder à une lourde vérification qui forme l'étape nécessaire de la réciproque si l'on a commencé l'étude en partant d'une solution « supposée connue ».

A ces observations, qui portent surtout sur la structure des raisonnements, il convient d'ajouter différentes remarques suggérées par quelques-unes des leçons.

Dans l'étude du lieu des points, dont le rapport des distances à deux droites est donné, il est bien fâcheux de voir intervenir des considérations de triangles semblables, mettant en jeu des éléments non orientés, et ne définissant pas de façon satisfaisante les positions relatives de certains éléments. De même, il est bien évident que la condition métrique qui permet d'exprimer que quatre points sont sur un même cercle doit être formulée à l'aide de mesures algébriques de vecteurs, et non de longueurs de segments.

Lorsque la définition d'un élément nouveau intervient, il est bon que cette définition soit constructive ou qu'elle corresponde à un être dont l'existence est déjà prouvée. Ainsi, il n'est pas très logique de parler, de prime abord, d'un tétraèdre ayant deux couples d'arêtes opposées, formés d'arêtes orthogonales, alors qu'il n'est pas évident que cette double condition peut être effectivement réalisée ; or, il est bien facile de présenter la question en proposant au début la détermination de tétraèdres ayant deux arêtes opposées orthogonales, cette étude conduit tout naturellement à la construction effective des tétraèdres qui seront appelés ensuite « orthocentriques ».

Deux leçons de géométrie, du niveau de la classe de Seconde, méritent d'être mentionnées : « Positions relatives de deux cercles » et « Inégalités dans les triangles ». La première avait été déjà traitée l'an dernier, et il en a été longuement question dans le rapport sur la session de 1952. Ces deux sujets ont paru surprendre les candidates à qui le tirage au sort les a attribués ; ils sont sans aucun doute délicats, sinon difficiles, mais on ne saurait trop insister sur l'intérêt que présente, lors de la préparation du concours, une réflexion sérieuse et personnelle sur de telles notions qui touchent aux fondements de la géométrie, réflexion poussée jusqu'à la mise au point d'un exposé clair et logiquement construit.

Une leçon sur la similitude plane, devait être faite pour une classe de Mathématiques Supérieures. Le point de vue adopté par la candidate était fort acceptable : partir des résultats déjà acquis sur cette question dans la classe de Mathématiques, et traiter surtout des applications nouvelles. Mais, dans ces conditions, il eût fallu rappeler en détail, avec précision, toutes les propriétés supposées connues, et exposer avec netteté les problèmes que l'on désirait présenter. Malheureusement, l'étude de figures « semblablement variables », qui a pris une grande partie du temps, a été bien souvent fort confuse. Faut-il rappeler, à ce sujet, qu'en géométrie plane le produit d'une homothétie négative et d'un déplacement est également le produit d'une homothétie positive et d'un déplacement ?

Cette année encore, le jury a entendu trois « premières leçons » : sur les nom-

bres fractionnaires, sur les nombres positifs et négatifs, sur les nombres complexes. Il a été souvent parlé de ces questions, dans les rapports antérieurs, et il n'est pas utile d'y revenir longuement. Si l'exposé sur les nombres complexes a paru assez satisfaisant, malgré quelques imperfections sur des points maintes fois signalés, les deux autres, abordés d'ailleurs avec des conceptions différentes, manifestaient de graves défauts. Un essai de construction de l'ensemble des nombres positifs et négatifs, à partir de couples de nombres arithmétiques ordonnés, contenait des indications intéressantes, mais les difficultés profondes n'étaient pas dominées, et les faits essentiels, concernant la présentation progressive et méthodique des nouveaux symboles et de leurs liaisons avec les nombres antérieurement connus n'ont été expliqués que d'une façon confuse. Quant à la leçon sur les nombres fractionnaires, dans la classe de Mathématiques, elle a été rattachée systématiquement à la mesure des grandeurs, ce qui n'est pas du tout interdit à ce niveau, mais à condition que l'on arrive peu à peu à faire apparaître, solidement bâti et indépendant de son support concret, un édifice arithmétique net, dont il convient de montrer la valeur, puisqu'il va servir de base aux développements ultérieurs de l'algèbre et de l'analyse ; des problèmes tels que celui de la division exacte d'un nombre par un autre, sont parmi ceux dont on doit, dans cet exposé, souligner l'importance.

Au sujet des leçons de Mathématiques Spéciales, nous donnerons les indications suivantes.

En Analyse, à propos de la formule des accroissements finis, déduite sous sa forme classique du théorème de Rolle, il est tout à fait naturel de faire apparaître, pour la dérivée du premier ordre, une autre formule qui sera généralisée, plus tard, sous le nom de formule de Taylor-Young (avec le reste dit « de Young »), mais il est bon, sinon indispensable, de faire remarquer qu'il s'agit tout simplement d'une relation traduisant la définition de la dérivée d'une fonction $f(x)$ pour une valeur a de la variable, et que l'énoncé du « théorème » exprime que, si cette dérivée existe, la fonction $\varepsilon(x)$ définie par la relation $f(x) - f(a) = (x - a) [f'(a) + \varepsilon(x)]$ a une limite égale à zéro quand x tend vers a .

Le texte de la leçon sur la « fonction inverse » donnait une indication dont la candidate n'a pas su tenir compte ; il portait en effet « fonction inverse d'une fonction monotone et continue » cherchant ainsi à attirer l'attention sur le fait que la « monotonie » a le pas sur la continuité dans cette théorie.

Dans la présentation de la fonction exponentielle construite à partir de la définition de a^r pour r rationnel, il est évidemment indispensable d'obtenir une définition générale du symbole a^x valable pour x réel quelconque, et de prouver la coïncidence des nombres obtenus par l'une et l'autre des définitions successivement données lorsque x est rationnel.

Les leçons classiques sur l'emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction, et sur la séparation des racines réelles d'une équation algébrique ou transcendante, ont été assez souvent commentées à l'occasion des précédents concours. Il n'est pas mauvais de revenir sur un point. Dans ces deux problèmes, il convient de montrer comment s'appliquent les résultats généraux, du reste très simples, sur les fonctions ; en particulier, une étude des variations, quand elle doit faire intervenir la dérivée, se ramène à l'étude du signe d'une fonction, et ce nouveau problème doit être évoqué puisqu'il comporte, à son tour, en général, une étude de variations, mais il s'agit maintenant d'une fonction que l'on n'est plus obligé de garder sous la forme où elle se présente d'abord, et que l'on peut remplacer par une autre, dont le signe est lié, simplement au signe de la première ; d'ailleurs, ce problème du signe d'une fonction se rattache d'une façon évidente à celui de la séparation des racines d'une équation. Faut-il rappeler, sur ce sujet, que les « méthodes graphiques » doivent, bien entendu, être signalées, mais qu'elles doivent également être situées à leur vraie place, en montrant le rôle indispensable du raisonnement et du calcul dans la résolution de ces questions.

A propos des règles de convergence dites « de Cauchy » et « de d'Alembert », il est important de montrer que les théorèmes faisant intervenir des inégalités sont plus généraux que les théorèmes concernant les limites des expressions $n\sqrt[n]{|u_n|}$ ou $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ (les seconds sont du reste des conséquences des premiers) ; il est utile de marquer cette « hiérarchie », ne serait-ce que pour attirer l'attention sur les possibilités d'emploi, assez fréquentes en pratique, des critères relatifs aux inégalités.

Dans la démonstration du théorème sur la multiplication des séries absolument convergentes, une fois établi le résultat classique pour les séries à termes positifs, il est bien maladroit de distinguer ensuite les séries à termes réels des séries à termes complexes, puisqu'on est conduit ainsi à répéter deux fois la même chose.

Comme il est déjà arrivé à plusieurs reprises, une leçon sur le changement de variable dans une intégrale a été bien insuffisante. Il s'agit pourtant d'une question tout à fait fondamentale, tant pour la compréhension de la notion d'intégrale que pour la justification du symbole utilisé dans cette théorie. Il est fâcheux qu'une candidate puisse donner l'impression qu'elle n'a pas saisi la véritable portée du problème, même si elle montre qu'elle manie à peu près correctement, au moins sur des exemples simples, les règles pratiques d'application.

En géométrie analytique, deux exposés sur les coordonnées polaires planes ont été, cette année encore, bien décevants. Il ne s'agit pourtant que d'avoir bien compris la nature de la correspondance que l'on établit entre un point et les couples de nombres (angle polaire, rayon vecteur) qui permettent de le repérer dans le plan, pour dominer convenablement ces questions, et, lorsqu'il s'agit, par exemple, de la construction des courbes, pour arriver à mettre raisonnablement en ordre les faits algébriques qui correspondent à des transformations géométriques qui jouent un rôle important en coordonnées polaires : rotations autour du pôle (y compris, naturellement, la symétrie par rapport à ce point, symétries par rapport à des droites passant par le pôle, homothéties, similitudes et inversions ayant pour centre le pôle. Il est assez étonnant, dans une telle leçon, de voir la candidate limiter systématiquement la variation de l'angle polaire à l'intervalle $(0, +\infty)$, alors que les fonctions étudiées ne présentaient rien de particulier pour des valeurs opposées de cet angle. Dans un autre ordre d'idées, à propos de la courbure, il convient d'éviter de parler du signe d'un produit vectoriel, ce qui n'a pas de sens, et, si l'on veut utiliser la mesure algébrique de ce vecteur, il importe d'avoir précisé d'abord l'axe qui permet de la définir.

Une leçon sur les directions principales des surfaces du second ordre nous conduit à redire, une fois de plus, que l'on risque fort de compliquer singulièrement le problème si l'on ne met pas à leur place régulière les deux idées d'orthogonalité et de conjugaison qui interviennent dans cette question. La recherche d'une direction conjuguée de toutes les directions qui lui sont perpendiculaires ne soulève aucune difficulté et donne toutes les solutions du problème, alors que, si l'on inverse les deux termes : perpendiculaire et conjugué, des difficultés logiques apparaissent, qui ne peuvent être levées qu'en modifiant, ou en complétant, plus ou moins tardivement, l'énoncé adopté d'abord.

Dans un exposé sur les sections circulaires des surfaces du second ordre, il n'y a pas lieu évidemment de reprendre en détail la discussion de l'équation en S et la démonstration des propriétés de ses racines, et il importe d'établir une distinction entre les plans coupant une quadrique suivant des cercles proprement dits, réels ou imaginaires, et les plans donnant une section qui passe par les points cycliques.

Dans l'étude générale des génératrices rectilignes des quadriques sans point double, il est très naturel d'utiliser, en coordonnées homogènes, l'équation $P.Q=R.S$, où P, Q, R, S sont des formes linéaires indépendantes, valable pour toutes ces surfaces ; il convient alors de remarquer, avant tout, que l'on a ainsi en évidence quatre droites situées sur la surface, telles que la droite définie par le système $P=0, R=0$.

La recherche méthodique des génératrices rectilignes trouve ainsi un point de départ simple et logique, puisque la section de la surface par un plan arbitraire passant par l'une de ces droites fera apparaître une famille de droites toutes situées sur la surface. Il restera ensuite à établir qu'il existe effectivement deux systèmes distincts de génératrices rectilignes et qu'il n'existe aucune autre droite sur la surface.

En mécanique, le jury a constaté avec regret que l'exposé sur le travail d'une force et sur le théorème « de la force vive » n'était pas mieux dominé que les années précédentes, et qu'une fâcheuse confusion entre différence et différentielle continuait à sévir, au grand détriment d'une présentation claire et raisonnable de ces notions.

Quant au théorème sur la composition des vitesses, présenté d'ailleurs correctement — bien que les définitions fondamentales concernant les éléments cinématiques attachés aux différents mouvements aient été données tardivement, créant ainsi quelque confusion —, sa démonstration a encore laissé dans l'ombre l'explication du fait

que la formule $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO_1}}{dt} + \frac{d\vec{O_1M}}{dt}$ ne doit pas être interprétée — comme un élève pourrait être tenté de le faire, lorsque aucune indication n'est donnée sur le rôle que joue l'espace de référence dans l'opération de dérivation vectorielle —, en considérant que le premier membre et le premier terme du second membre représentent les vecteurs-vitesses « absolues » du point M et de l'origine O₁ du trièdre mobile par rapport au trièdre « absolu », et que le troisième vecteur représente la vitesse relative du point M : le débutant peut trouver surprenant que cette dernière affirmation soit inexacte, alors que les deux autres sont exactes... Ne serait-il pas intéressant d'éclaircir cette question, qui touche au fond même du problème, quitte, peut-être, à recourir incidemment à l'appareil algébrique des coordonnées pour faire mieux comprendre le sens des opérations vectorielles ?

**

Les notes attribuées pour les différentes épreuves orales se répartissent comme suit :

En Mathématiques Élémentaires, les meilleures leçons fort convenables n'ont pourtant pas présenté le caractère un peu exceptionnel qui entraîne l'adhésion totale de l'auditoire ; on trouve en tête : trois 16, deux 15, un 14,5 et deux 14. Viennent ensuite cinq notes entre 13 et 12, sept entre 11 et 10, six entre 9 et 8, et, enfin, deux 7 et trois 6, mérités par des exposés qui révélaient, soit de fâcheuses lacunes, soit une insuffisance regrettable dans l'effort de compréhension et de clarification de quelques notions essentielles. La moyenne pour l'ensemble des trente et une admissibles est à peine supérieure à 11, inférieure d'un point à celle de 1952 (les notes s'échelonnaient l'an dernier entre 19 et 8). Il est extrêmement souhaitable que les années à venir permettent d'enregistrer une amélioration sensible du niveau de cette épreuve, qui met les futurs professeurs en présence des théories qui constitueront plus tard la matière de leur enseignement, et qui touchent d'ailleurs aux fondements des Mathématiques.

En Mathématiques Spéciales, une bonne leçon sur les fonctions homogènes, où la candidate a su montrer, malgré quelques maladresses, de réelles qualités d'esprit, a mérité la note 18. On trouve après : un 16 et quatre 15, puis neuf notes comprises entre 14 et 12, et, plus loin, trois 10, trois 9, un 8,5 et deux 8 et un groupe de queue, trop important, avec deux 6, un 4, un 3,5 et deux 3. La moyenne pour l'ensemble des admissibles est 10,5, également inférieure (de plus d'un demi-point) à celle de l'an dernier.

En groupant les deux épreuves orales, les notes sur 20 varient de 15,5 à 5, avec une répartition assez classique ; après la candidate qui vient en tête (15,5), on rencontre les groupes suivants : cinq entre 14,5 et 14, cinq entre 13 et 12, sept entre

12 et 10, neuf entre 10 et 8 et trois entre 8 et 5. La moyenne générale de l'oral pour les trente et une candidates est 10,8, en baisse assez sensible par rapport à celle de 1952 (11,6), mais très comparable à celle des années antérieures (11 — 10,6).

RESULTATS GENERAUX

La somme de toutes les notes correspondant aux épreuves écrites, pratiques et orales, pour chacune des trente et une admissibles, varie de 287 à 128,5, pour un maximum de 400 points ; la moyenne générale de chacune de ces candidates est donc comprise entre 14,3 et 6,4 sur 20, et la moyenne générale pour l'ensemble des admissibles est 10,5 sur 20, très voisine de celle de la précédente session (10,7).

Si le classement de l'écrit n'a pas été modifié par les épreuves pratiques et orales pour le groupe des cinq premières (l'ordre à l'intérieur du groupe ayant cependant varié), on trouve ensuite plusieurs candidates qui, mal et même très mal placées à l'écrit (la trente-et-unième, par exemple), se sont trouvées en bonne situation à la fin, grâce à leurs leçons et parfois à l'épure ou au calcul.

Le jury a proposé pour l'admission définitive les vingt-deux premières du classement, avec deux *ex-aequo* en queue de liste.

Les notes d'ensemble des vingt-deux reçues sont échelonnées entre 287 et 200 (sur 400), soit de 14,3 à 10 sur 20, la moyenne générale étant voisine de 11,3, cette moyenne étant 8,6 pour le groupe des neuf admissibles non reçues. Ces résultats sont très voisins de ceux de 1952 (moyennes 11,6 et 8,8). Il est intéressant de noter que les moyennes générales correspondant aux trois groupes d'épreuves écrites, pratiques et orales sont respectivement :

pour les vingt-deux candidates reçues : 11,4 — 7,8 — 11,9,
et pour les neuf admissibles non reçues : 9,9 — 5,6 — 8,1.

La promotion des agrégées de 1953 comprend dix élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles (dont les cinq premières du classement, les cinq autres se plaçant entre le 15^e et le 21^e rangs), et une ancienne élève ayant accompli une quatrième année à l'Ecole, une élève de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, quatre étudiantes ayant préparé l'agrégation à Paris, une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure, cinq professeurs titulaires, dont trois en exercice dans des collèges pendant l'année 1952-1953, et deux en congé. Cinq des nouvelles reçues avaient été admissibles à des concours antérieurs.

Dans le groupe des neuf admissibles non reçues se trouvent trois élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, dont l'une était déjà titulaire du certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges, une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure, deux étudiantes, l'une de la Faculté d'Alger, l'autre de la Faculté de Poitiers, deux professeurs titulaires en exercice, et une stagiaire d'enseignement, qui a du reste passé avec succès, pendant l'oral de l'agrégation, les épreuves finales du certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S. ancien régime). (Il est à noter que cette candidate aurait pu se dispenser de passer ces épreuves terminales du certificat, l'admissibilité à l'agrégation lui conférant automatiquement le titre de certifiée — C.A.P.E.S. ancien régime — du moment qu'elle avait été reçue antérieurement aux épreuves pratiques de ce concours).

Le jury a décidé, suivant la nouvelle législation en vigueur à partir de 1953, de proposer l'attribution de l'équivalence du C.A.P.E.S. (nouveau régime) aux cinq candidates admissibles qui n'étaient pas encore titulaires de l'un des certificats d'aptitude. D'autre part, les deux professeurs titulaires, déjà admissibles à une session antérieure, obtenaient, par leur nouveau succès à l'écrit, le titre de bi-admissible.

Les chaires vacantes dans les établissements du Second Degré de la Métropole et de l'Union Française ont permis, cette année encore, compte tenu des candidates autorisées à ne pas prendre de poste en cas de succès, de donner aux listes d'admissibilité et d'admission la même importance qu'à la session précédente (trente et une admissibles et vingt et une reçues en 1952).

Il va de soi que le jury a pris en considération le niveau des épreuves, et les indications statistiques données dans ce rapport montrent que les moyennes correspondant aux dernières années sont, en définitive, comparables.

Notons, comme une particularité de ce concours, le succès, dans des rangs très honorables, entre le 6^e et le 15^e, de quatre candidates, étudiantes à Paris, dont trois se présentaient au concours pour la première fois. Notons aussi que sur vingt-deux professeurs titulaires qui ont eu le mérite de poursuivre leur préparation à l'agrégation, dans des conditions souvent difficiles, sept ont été récompensées, soit par le succès définitif, soit en devenant bi-admissibles. On ne saurait trop encourager semblable effort qui, de toutes façons, même s'il ne procure pas immédiatement quelque avantage de carrière, apporte un enrichissement certain à celles qui l'ont entrepris et qui ont la volonté de persévérer.

S'il est difficile de prévoir ce que seront, dans les prochaines années, les perspectives ouvertes par le concours, on peut être certain que le travail qu'impose aux candidates une préparation valable aux différentes épreuves, s'il est bien compris, s'il est orienté vers l'acquisition d'une plus vaste culture, liée à une connaissance plus approfondie et plus méthodique des techniques propres à la discipline étudiée, n'est en aucun cas perdu. Et les nécessités sociales de l'époque actuelle rendent souhaitable un accroissement sensible du nombre des jeunes attirés, par vraie vocation, vers l'enseignement des disciplines scientifiques, afin que soient maintenues, dans l'avenir, la valeur et la qualité du recrutement de nos professeurs.

J. DESFORGE,

Inspecteur général, vice-président du Jury.