

Rapport sur le Concours général de Mathématiques pour les classes de Première en 1953

Le Jury était ainsi composé : M. DESFORGE, inspecteur général, président ; Mlle BRULARD, professeur au Lycée Camille-Sée ; Mme DUBOIS-VIOLETTE, professeur au Lycée de Sèvres ; M. LEROSSE, professeur au Lycée Claude-Bernard ; M. MAGNIER, professeur au Lycée Saint-Louis ; M. POUGNAND, professeur au Lycée Buffon.

La figure, dont l'étude faisait l'objet du problème du Concours général de Première en 1953, se construit à partir de trois couples de points A et A' , B et B' , C et C' , pris respectivement sur trois droites $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$, concourantes en un point O et non situées dans un même plan. En joignant chacun des points, tels que A et A' , de l'un quelconque des couples, aux quatre points des deux autres couples, on détermine douze segments formant les côtés de huit triangles qu'il est commode de classer dès le début, par exemple, en citant d'abord les triangles ABC , $AB'C$, ABC' , $AB'C'$ ayant tous quatre le point A comme sommet, puis les triangles ayant pour sommet commun A' , c'est-à-dire $A'B'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, $A'BC$; l'ordre d'énumération ainsi indiqué met en évidence la propriété essentielle de symétrie par rapport au point O de ces triangles convenablement associés deux à deux. De là résulte le parallélisme des plans tels que ABC et $A'B'C'$, ABC' et $A'B'C$..., les notations choisies facilitant le repérage de ces plans parallèles, puisque deux points symétriques par rapport à O sont désignés par la même lettre affectée ou non d'un accent. Ces huit triangles forment les faces d'un octaèdre Ω , admettant le point O comme centre

de symétrie, et dont on peut facilement démontrer qu'il est convexe (la justification de cette propriété n'était d'ailleurs pas demandée).

Un plan W , parallèle aux plans ABC et $A'B'C'$, coupe les droites $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ en des points P , Q , R , et la valeur commune u des rapports $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$, $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}}$, $\frac{\overline{OR}}{\overline{OC}}$,

définit la position de ce plan. On construit alors les points d'intersection du plan W avec les six arêtes de l'octaèdre qui ne lui sont pas parallèles, ces arêtes étant rangées dans l'ordre où elles forment les côtés successifs d'un hexagone gauche : BC' , $C'A$, AB' , $B'C$, CA' , $A'B$. Les six points ainsi obtenus, notés respectivement P_1 , Q_2 , R_1 , P_2 , Q_1 , R_2 , joints dans cet ordre, forment les sommets d'un hexagone H , non nécessairement convexe.

Tout naturellement, la première question invitait les candidats à procéder à un examen détaillé de la figure formée, dans un plan W quelconque, par les côtés du triangle PQR et par les côtés de l'hexagone H , et leur attention était attirée sur quelques points : positions relatives des segments tels que P_1P_2 et QR , longueurs des segments tels que P_1P_2 , différentes dispositions suivant les valeurs du paramètre u .

S'il est aisé de se représenter l'octaèdre Ω , il est plus difficile de concevoir clairement l'ensemble des droites et des plans indéfinis portant les arêtes et les faces de ce polyèdre, et une observation attentive sera nécessaire pour arriver à une description correcte de la section de la figure par un plan W quelconque.

Il paraît utile de préciser d'abord certaines relations entre les arêtes de Ω qui sont coupées par le plan W . Deux arêtes « consécutives », telles que BC' et $C'A$ sont deux côtés d'un triangle dont le troisième côté AB est parallèle à W : on aura donc, dans l'ordre de jonction des sommets de l'hexagone H , à envisager des triangles, tels que $BC'A$, $C'AB'$..., ayant comme côtés parallèles à W , tantôt des côtés du triangle ABC , tantôt des côtés du triangle $A'B'C'$: BA , $C'B'$, AC , $B'A'$... D'autre part, en considérant de trois en trois les arêtes de Ω (ou plutôt de l'hexagone gauche défini plus haut) on obtient des couples, tels que AB' et $A'B$, formés de deux arêtes symétriques par rapport à O , définissant un parallélogramme ayant pour sommets successifs $AB'A'B$ et dont les diagonales sont AA' et BB' .

La section par un plan W quelconque de ces six droites et des plans qu'elles déterminent présente donc les particularités suivantes :

— deux arêtes « consécutives », BC' et $C'A$ par exemple, sont coupées en des points P_1 et Q_2 tels que la droite P_1Q_2 est parallèle à AB : les deux arêtes symétriques par rapport à O , $B'C$ et CA' , sont coupées de même en des points P_2 et Q_1 tels que P_2Q_1 est parallèle à $A'B'$, donc à AB ;

— un plan « diagonal » tel que $AB'A'B$ est coupé par le plan W suivant une parallèle aux côtés AB , $A'B'$ du parallélogramme $AB'A'B$, parallèle qui porte les quatre points R_1 , R_2 (sur les côtés AB' et $A'B$) et P , Q (sur les diagonales AA' et BB').

On voit apparaître alors, dans ce plan « diagonal », une figure très simple de géométrie plane formée par les quatre points d'intersection de deux côtés opposés d'un parallélogramme et de ses deux diagonales par une parallèle aux deux autres côtés opposés. On en déduit, d'une part, que le segment R_1R_2 est constamment égal à AB (plus précisément que le vecteur $\overrightarrow{R_1R_2}$ est équipollent au vecteur $\overrightarrow{AB}$), et que les deux segments R_1R_2 et PQ ont le même milieu, puisque la parallèle menée par le centre O aux côtés AB' et $A'B$ passe par le milieu des segments AB , R_1R_2 , et se confond avec la médiane issue de O des triangles OAB , OPQ .

On remarque aussi qu'il existe manifestement trois positions particulières du plan W correspondant aux valeurs 0, 1 et (-1) du paramètre u , et que l'on peut, sans nuire à la généralité des conclusions, se borner au cas où u est positif ou nul.

Une description de la figure située dans un plan W se déduit de ces observa-

tions : en supposant u différent de 0 et de 1, on voit d'abord un triangle PQR homothétique du triangle ABC par rapport au point O, le rapport étant u ; les six sommets de l'hexagone H sont deux à deux situés sur les côtés de PQR, R_1 et R_2 sur le côté PQ..., de telle sorte que les points R_1 et R_2 sont symétriques par rapport au milieu du segment PQ ; d'autre part, les segments tels que P_1Q_2 et P_2Q_1 , formant deux côtés « opposés » (de trois en trois) de l'hexagone H, sont parallèles à AB donc à PQ ; enfin, les longueurs des trois segments « diagonaux » tels que P_1P_2 , Q_1Q_2 , R_1R_2 sont respectivement égales à celles des côtés BC, CA, AB du triangle ABC.

On obtient évidemment ainsi des conditions surabondantes pour construire l'hexagone H une fois placé le triangle PQR. On pourra prendre, par exemple, sur le côté QR du triangle PQR l'un des points, soit P_1 , situé à la distance $\frac{BC}{2}$ du milieu

du segment QR, en remarquant d'ailleurs que, si u est positif, le point P_1 est situé du même côté que le point Q par rapport au milieu de QR ; la parallèle à PQ, menée par P_1 est alors le support du côté P_1Q_2 , le point Q_2 étant sur PR, puis la parallèle à QR menée par Q_2 coupe PQ au point R_1 , et ainsi de suite, la chaîne se fermant par la parallèle, menée par R_2 au segment PR, et qui passe par le point initial P_1 . Il n'y aurait pas grande difficulté à vérifier directement, sur cette figure de géométrie plane, que cette série de constructions conduit effectivement à une ligne hexagonale « fermée » et que les trois segments diagonaux P_1P_2 , Q_1Q_2 , R_1R_2 ont bien les propriétés signalées précédemment (mêmes milieux que les côtés du triangle PQR, mêmes longueurs que les côtés du triangle ABC) ; cette vérification n'était d'ailleurs pas demandée, la justification à partir de la figure de l'espace étant naturellement suffisante.

La configuration obtenue n'est pas la même suivant que le rapport u est inférieur ou supérieur à 1. Dans la première hypothèse, les côtés du triangle PQR sont inférieurs aux côtés qui leur correspondent par homothétie dans le triangle ABC ; les sommets de H sont extérieurs au triangle PQR ; l'hexagone H est alors convexe et contient le triangle PQR à son intérieur. Lorsque u est supérieur à 1, les côtés du triangle PQR sont plus grands que les côtés correspondants du triangle ABC ; les sommets de H sont intérieurs aux côtés du triangle PQR et l'hexagone H apparaît alors comme un pylone « croisé » inscrit dans ce triangle.

Il est utile d'étudier les cas particuliers. Pour $u = 0$, le plan sécant, soit W_0 , passe par O ; les trois points P, Q, R sont confondus avec O ; les segments « diagonaux » P_1P_2 , Q_1Q_2 , R_1R_2 , de l'hexagone (H_0) ont tous trois comme milieu le point O, les longueurs de ces segments étant respectivement égales aux côtés BC, CA, AB ; les côtés de H_0 s'associent par couples, deux côtés associés, tels que P_1Q_2 et P_2Q_1 , étant symétriques par rapport au point O, et, de plus, parallèles à la diagonale R_1R_2 et égaux à la moitié du segment R_1R_2 , cette dernière propriété particularise l'hexagone H_0 parmi les hexagones admettant un centre de symétrie) ; l'hexagone H_0 est évidemment convexe, et les six triangles formés par ses côtés et ses diagonales passant par O sont tous égaux. Lorsque $u = 1$, le triangle PQR se confond avec le triangle ABC ; les sommets de l'hexagone sont alors deux à deux confondus avec les points P, Q, R : P_1 et R_2 avec Q, Q_2 et R_1 avec P, P_2 et Q_1 avec R ; l'hexagone se réduit en apparence au triangle PQR, mais la construction donnée tout à l'heure conduit à considérer que les supports des six côtés sont : d'une part, QP, PR, RQ, pour les côtés P_1Q_2 , R_1P_2 , Q_1R_2 (côtés de l'hexagone puis de deux en deux), et, d'autre part, les parallèles menées par les points P, Q, R respectivement aux côtés opposés QR, RP, PQ, pour les trois autres « côtés » de l'hexagone (réduits en fait à zéro) Q_2R_1 , R_2P_1 , P_2Q_1 .

Cette étude, qui a été développée bien plus longuement que s'il s'agissait de la rédaction d'une solution présentée sans commentaires, exige une observation atten-

tive des données et une mise en ordre méthodique des propriétés très simples qui entrent en jeu. Bon nombre de candidats ont « vu » l'essentiel des résultats, mais sans donner toujours des justifications satisfaisantes. En particulier, le fait que les segments tels que P_1P_2 et QR ont le même milieu a été assez souvent oublié ; il était pourtant en évidence, lorsqu'on prenait la peine de contrôler une indication donnée à dessein par l'énoncé (les points P_1 et P_2 sont sur la droite $QR...$), indication qui devait suggérer l'examen de la figure dans un plan « diagonal » tel que $BC'B'C$.

Cette première partie du problème se prolongeait par une question destinée surtout à compléter la connaissance de la figure proposée, en faisant manier quelques intersections de droites et de plans. On demandait de considérer les sommets du triangle formé, dans un plan W , par trois côtés tels que P_1Q_2 , R_1P_2 , Q_1R_2 de l'hexagone H (côtés pris de deux en deux), et de rechercher les lieux géométriques de ces trois sommets quand W varie. L'analyse des données est simple : les droites P_1Q_2 et R_1P_2 sont les intersections par W des plans $BC'A$ et $AB'C$; ces deux droites, respectivement parallèles à BA et à AC , ont donc en commun le point où le plan W coupe la droite d'intersection des plans $BC'A$ et $AB'C$; le lieu du point de rencontre de P_1Q_2 et R_1P_2 est donc porté par la droite commune à ces deux derniers plans, et il est évident que ce lieu est précisément la droite tout entière, puisque par chaque point de cette droite (qui n'est pas parallèle au plan ABC) passe un plan parallèle à ABC , c'est-à-dire une position du plan W portant un hexagone H . Une remarque faite précédemment sur les supports des côtés « nuls » de l'hexagone, lorsque W est confondu avec ABC ou $A'B'C$, permet de ne pas écarter ces deux positions particulières de W dans l'étude du lieu.

Il restait à situer exactement la droite d'intersection de deux plans tels que $BC'A$ et $AB'C$: cette droite passe par A ; ou en déterminer un autre point en faisant appel à un plan simplement placé et les coupant tous deux ; il est indiqué de prendre comme plan auxiliaire le plan $A'B'C'$, qui rencontre le plan $BC'A$ suivant la parallèle menée par C' à AB (ou $A'B'$) et le plan $AB'C$ suivant la parallèle menée par B' à $A'C$. On voit ainsi apparaître dans le plan $A'B'C'$ les parallèles aux côtés $A'B'$ et $A'C'$ menées respectivement par les sommets opposés C' et B' , qui ont en commun le point A'_1 , symétrique de A' par rapport au milieu de $B'C'$. La droite cherchée est donc AA'_1 , dont on peut définir la situation en considérant le plan $AA'A'_1$: ce plan coupe ABC et $A'B'C'$, suivant les droites portant les médianes AI et $A'I'$ des triangles ABC et $A'B'C'$, I et I' étant les milieux symétriques par rapport à O , des côtés BC et $B'C'$; les vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{I'A'}$, $\vec{A'_1I'}$ sont équipollents et la droite AA'_1 est donc parallèle à II' ; plus précisément, AA'_1 est l'homothétique de la droite II' dans l'homothétie qui a pour centre A' et pour rapport 2 ; dans cette homothétie, l'homologue du point I est le point S symétrique de A'_1 par rapport à A , et l'on voit immédiatement que l'homothétie ayant pour centre S et pour rapport 2, transforme le point A en A'_1 , les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ en deux vecteurs $\vec{A'_1B'_1}$ et $\vec{A'_1C'_1}$ qui ne sont autres que deux côtés du triangle formé par les parallèles aux trois côtés du triangle $A'B'C'$ menées par les sommets opposés à chacun d'eux.

On voit ainsi se compléter le résultat : les lieux géométriques des trois sommets du triangle formé dans le plan W par les droites P_1Q_2 , R_1P_2 , Q_1R_2 sont : la droite AA'_1 que l'on vient d'étudier, et les deux droites analogues BB'_1 et CC'_1 ; ces trois droites concourent au point S défini plus haut, et le triangle envisagé se présente alors comme section par le plan W de la pyramide ayant pour sommet le point S et pour base le triangle ABC , ou encore le triangle $A'_1B'_1C'_1$. Le plan parallèle à ABC mené par S est une position du plan W pour laquelle les droites P_1Q_2 , R_1P_2 , Q_1R_2 sont concourantes (le point commun étant, du reste, le point S), et c'est évidemment la seule vérifiant cette condition.

Naturellement, l'étude précédente peut être conduite de différentes façons, en restant dans le domaine des connaissances du programme de Première. On peut, par

exemple, après avoir constaté que les lieux géométriques proposés sont les droites AA' , BB' , CC' , étudier, dans le plan ABC' , les deux droites AA'_1 et BB'_1 , et démontrer ainsi élémentairement que le point commun à ces deux droites, qui est le centre de l'homothétie transformant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec le vecteur $\overrightarrow{A'_1B'_1}$, appartient aussi à la droite CC'_1 . On voit aussi que AA'_1 est parallèle à BC' et CB' , que BB'_1 est parallèle à CA' et AC' , etc... Il est également intéressant de remarquer que le point S est sur la droite qui joint les centres de gravité des deux triangles ABC et $A'B'C'$, droite qui passe par O , et qui est aussi le lieu des centres de gravité du triangle PQR et des deux triangles formés par les côtés, puis de deux en deux, de l'hexagone H .

Le tracé de la figure formée par le triangle PQR et l'hexagone H dans celui des plans W qui passe par le point S est facile à réaliser : cette position de W correspond à la valeur 3 du paramètre u ; sur chacun des côtés (QR , par exemple) du triangle PQR , les sommets (P_1 et P_2 pour QR) de l'hexagone H partagent le côté (QR) en trois parties égales, et le point de concours S des trois côtés Q_1Q_2 , R_1R_2 , Q_1R_2 de H n'est autre que le centre de gravité du triangle PQR .

Bien entendu, les trois autres côtés de H , puis de deux en deux, donnent des résultats analogues, faisant intervenir le point S' symétrique du point S par rapport à O .

L'étude de ces lieux géométriques a été très fréquemment abordée, et beaucoup de résultats valables, sinon toujours clairement démontrés, ont été indiqués, mais assez rares sont les copies donnant une solution suffisamment complète.

La deuxième partie du problème propose l'étude du périmètre de l'hexagone H , en se bornant au cas où u est positif, ou, plus exactement, la comparaison de ce périmètre à ceux du triangle PQR et du triangle ABC .

L'examen de la figure précédemment construite dans un plan W quelconque conduit assez facilement à une solution de cette question. Les tracés indiqués plus haut pour déterminer les sommets successifs de l'hexagone H font apparaître plusieurs parallélogrammes simplement placés, et, si l'on considère deux côtés opposés de H , par exemple Q_2R_1 et Q_1R_2 , on établit immédiatement les relations, qu'il est commode d'écrire sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_2R_1} &= \overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{RP_2}, \\ \overrightarrow{Q_1R_2} &= \overrightarrow{RP_1} = \overrightarrow{P_2Q}.\end{aligned}$$

On déduit de là une expression de la somme des longueurs des deux côtés opposés de H , tels que Q_2R_1 et Q_1R_2 , en prenant la précaution de préciser le sens relatif des vecteurs $\overrightarrow{Q_2R_1}$ et $\overrightarrow{Q_1R_2}$, ou, ce qui revient au même, de vecteurs équipollents tels que $\overrightarrow{P_1Q}$ et $\overrightarrow{RP_1}$ par exemple ; il s'agit donc, en définitive, de placer le point P_1 par rapport au segment QR , et l'on a vu que le résultat dépend de la valeur de u .

Lorsque $0 < u < 1$, le point P_1 est extérieur au segment QR , les vecteurs $\overrightarrow{P_1Q}$ et $\overrightarrow{RP_1}$ sont de sens contraires, et l'on a alors, pour les longueurs :

$$Q_2R_1 + Q_1R_2 = P_1Q + P_1R = P_1Q + QP_2 = P_1P_2,$$

et, comme P_1P_2 est égal à BC , le périmètre de l'hexagone H est, dans ce cas, égal au périmètre du triangle ABC .

Lorsque $u > 1$, le point P_1 est entre Q et R , et l'on a

$$Q_2R_1 + Q_1R_2 = P_1Q + P_1R = QR,$$

de sorte que le périmètre de H est égal à celui du triangle PQR .

On obtient ainsi un résultat remarquable : le périmètre de l'hexagone H reste constant et égal au périmètre de ABC tant que W reste entre les plans ABC et $A'B'C'$, puis il devient égal à celui du triangle PQR lorsque W est à l'extérieur de ces deux plans.

Comme le rapport du périmètre du triangle PQR à celui de ABC est évidemment égal à u , il en résulte que les rapports γ et ε du périmètre de H au périmètre

de PQR, d'une part, et à celui de ABC, d'autre part, sont définis par les relations :

pour $0 < u \leq 1$: $y = \frac{1}{u}, \quad z = 1$;

pour $u \geq 1$: $y = 1, \quad z = u$.

Ces résultats pouvaient être obtenus de bien des façons différentes. Par exemple, en restant toujours dans le plan W, on peut remarquer que, pour $u > 1$, le quadrilatère $R_1Q_2Q_1R_2$ est un trapèze convexe dont les côtés non parallèles Q_2Q_1 et R_1R_2 ont les mêmes milieux que les côtés PR et PQ du triangle PQR : la somme des bases R_1Q_2 et Q_1R_2 est égale au double du segment joignant les milieux des côtés non parallèles, c'est-à-dire au segment QR ; pour $0 < u < 1$, le trapèze convexe $R_1Q_2R_2Q_1$ a pour côtés non parallèles Q_2R_2 et Q_1R_1 , qui sont respectivement diagonales de deux parallélogrammes $Q_2PR_2P_1$ et $Q_1PR_1P_2$ dont les deux autres diagonales sont PP_1 et PP_2 : les milieux des côtés non parallèles Q_2R_2 et Q_1R_1 sont donc les mêmes que ceux des segments PP_1 et PP_2 , et, par suite, la somme des bases R_1Q_2 et Q_1R_2 est égale au segment P_1P_2 , c'est-à-dire à BC. On retrouve ainsi les résultats précédents par une voie qui ne diffère qu'en apparence de celle qui a été suivie d'abord.

Il était également très naturel de calculer les différents côtés de l'hexagone H en utilisant des propriétés résultant de certaines homothéties évidentes. Par exemple, le segment P_1Q_2 est homothétique du segment BA par rapport au point C', le rap-

port étant $\frac{C'P_1}{C'B}$. Or les plans parallèles W, ABC, A'B'C' déterminent sur les différentes sécantes AA', BB', ..., BC', C'A, ... des segments proportionnels, et l'on a

$$\frac{C'P_1}{C'B} = \frac{A'P}{A'A} = \frac{OP - OA'}{OA - OA'} = \frac{u+1}{2}.$$

C'est ce rapport qui intervient pour le calcul des trois segments P_1Q_2 , R_1P_2 , Q_1R_2 , comparés respectivement à BA, AC, CB, c'est-à-dire que l'on a, d'une façon

précise :

$$\frac{P_1Q_2}{BA} = \frac{R_1P_2}{AC} = \frac{Q_1R_2}{CB} = \frac{u+1}{2}.$$

Les trois autres segments Q_2R_1 , P_2Q_1 , R_2P_1 se calculent de même, en les considérant comme homothétiques des segments C'B', B'A', A'C' dans des homothéties ayant pour centres respectivement A, C, B, le rapport commun de ces homo-

théties étant :

$$\frac{AQ_2}{AC'} = \frac{AP}{AA'} = \frac{OP - OA}{OA' - OA} = \frac{1-u}{1}.$$

Comme il ne s'agit que de calculer les longueurs des côtés de l'hexagone H, il convient de prendre les valeurs absolues des rapports précédents, et, en supposant u positif, on voit que le rapport de la somme des trois côtés non consécutifs

P_1Q_2 , R_1P_2 , Q_1R_2 de l'hexagone H au périmètre du triangle ABC est égal à $\frac{u+1}{2}$, tandis que le rapport de la somme des trois autres côtés de H au périmètre du triangle A'B'C' (ou ABC) est égal à $\left| \frac{1-u}{2} \right|$. On obtient ainsi, quel que soit u positif :

$$z = \frac{1+u}{2} + \left| \frac{1-u}{2} \right|,$$

d'où l'on déduit y puisque $z = u \cdot y$. On retrouve ainsi les résultats déjà obtenus :

pour $0 < u \leq 1$ $z = 1, \quad y = \frac{1}{u}$;

pour $u \geq 1$ $z = u, \quad y = 1$.

Cette question demandait un peu d'attention, pour bien se rendre compte que la détermination du périmètre de H pouvait comporter la considération de deux cas de figure. Ensuite, le fait que les fonctions y et z ne sont pas définies par une seule « formule », pour toutes les valeurs de leur domaine d'existence, peut surprendre les débutants encore peu familiarisés avec la notion générale de fonction. La représentation graphique ne présentait évidemment aucune difficulté.

Cette partie du problème a été abordée dans de nombreuses copies, mais les fautes sont également nombreuses ; la plupart du temps, on se borne à tracer une figure, en la considérant plus ou moins implicitement comme toujours valable, et sans préciser si la valeur de u correspondante est soumise à certaines restrictions ; ou bien, ce qui revient pratiquement au même, quand on a constaté que les rapports

d'homothétie étaient $\frac{1+u}{2}$ et $\frac{1-u}{2}$, on ne voit pas que ce sont en réalité les valeurs

absolues qui sont en cause. D'ailleurs, la signification exacte du symbole de valeur absolue est généralement mal connue à ce niveau, et beaucoup hésitent à remplacer $|1-u|$ par $(1-u)$ ou bien par $(u-1)$, suivant que u est inférieur ou supérieur à 1.

La troisième partie, très brève, comportait la comparaison des volumes des huit tétraèdres ayant pour sommet O et pour bases les triangles formant les faces de l'octaèdre. Ces huit tétraèdres étant deux à deux symétriques par rapport à O, il suffit de considérer par exemple le tétraèdre OABC et les trois tétraèdres OA'BC..., qui ont avec lui une face commune. Or, OABC et OA'BC sont deux pyramides ayant pour base le triangle OBC et dont les sommets A et A', symétriques par rapport à un point du plan de la base commune, sont équidistants de ce plan ; ces deux tétraèdres sont équivalents ; il en est de même pour deux quelconques des huit tétraèdres. Il en résulte que, si l'on désigne par σ l'aire du triangle ABC et par d la distance

du point O au plan ABC, le volume de l'octaèdre est égal à $\frac{8}{3} \sigma d$.

Dans la question suivante, on suppose $0 \leq u \leq 1$, pour ne faire intervenir que des figures de forme simple, et l'on demande d'abord de calculer, en fonction de σ et de u , l'aire de l'hexagone H, qui est alors convexe. Il s'agit donc de choisir un mode de décomposition de l'aire de l'hexagone en éléments faciles à comparer à des éléments connus. Il paraît naturel de porter son attention sur les couples de triangles tels que PR_1Q_2 et PR_2Q_1 , homothétiques des triangles PQR, ABC et A'B'C'. Ces deux triangles PR_1Q_2 et PR_2Q_1 n'empiètent pas l'un sur l'autre et la somme de leurs aires comprend l'aire de PQR ; si l'on considère les deux autres couples analogues, correspondant aux sommets Q et R, on voit que la somme des aires des six triangles des trois couples recouvre trois fois l'aire PQR et une fois la portion de l'aire de l'hexagone H extérieure au triangle PQR, car les aires de deux quelconques des couples n'ont en commun que l'aire PQR. L'aire de l'hexagone H est donc égale à la somme des aires des six triangles tels que PR_1Q_2 ..., diminuée du double de l'aire du triangle PQR.

Reste à calculer les aires des triangles tels que PR_1Q_2 et PR_2Q_1 . On peut se placer dans le plan W et les considérer comme homothétiques de l'aire PQR dans

des homothéties ayant pour centre P et dont les rapports $\frac{R_1Q_2}{QR}$, $\frac{R_2Q_1}{QR}$ sont aisés à

calculer, puisque l'on a déjà, à propos du périmètre de H, calculé les rapports des segments R_1Q_2 et R_2Q_1 au côté BC ; il suffit d'ailleurs ici de prendre les valeurs absolues de ces rapports.

Mais il est intéressant, et aussi simple, de revenir à la figure de l'espace : le triangle PR_1Q_2 est homothétique du triangle A'B'C', par rapport au point A, le

rapport d'homothétie étant $\frac{AP}{AA'} = \frac{1-u}{2}$; de même le triangle PR_2Q_1 est homo-

thétique du triangle ABC par rapport au point A', le rapport étant $\frac{\overline{A'P}}{A'A} = \frac{u+1}{2}$.

On déduit de là les aires de ces deux triangles PR_1Q_2 et PR_2Q_1 en fonction de l'aire σ du triangle ABC (ou $A'B'C'$) ; elles sont respectivement égales à

$$\left(\frac{1-u}{2}\right)^2 \cdot \sigma \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+u}{2}\right)^2 \cdot \sigma.$$

Ce calcul vaut naturellement pour les deux autres couples de triangles ; d'ailleurs les trois triangles PR_1Q_2 , R_2QP_1 , Q_1P_2R sont égaux (ils se déduisent les uns des autres par des translations évidentes), et il en est de même des triangles PR_2Q_1 , R_1QP_2 , Q_2P_1R . Comme l'aire du triangle PQR est égale à $\sigma \cdot u^2$, on voit que l'aire

de l'hexagone est $3\sigma \left[\left(\frac{1-u}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+u}{2}\right)^2 \right] - 2\sigma \cdot u^2 = \frac{\sigma}{2}(3-u^2)$. Il est prudent, naturellement, d'opérer un contrôle rapide, en prenant, par exemple, les valeurs extrêmes $u=0$ et $u=1$, qui correspondent à des aires faciles à évaluer directement.

Cette étude prépare celle du volume dont le calcul est ensuite demandé : il s'agit de la partie Σ du volume de l'octaèdre qui est comprise entre les plans W_0 et W , et qui est extérieure à la pyramide OPQR. La détermination de ce volume présente une grande analogie avec celle de l'aire de l'hexagone.

Si l'on désigne par $P'_1Q'_2R'_1P'_2Q'_1R'_2$ les sommets consécutifs de l'hexagone H_0 situé dans le plan W_0 (P'_1 sur BC' , Q'_1 sur CA' , ...), on peut considérer d'abord les deux troncs de pyramide triangulaires $OR'_1Q'_2 - PR_1Q_2$ et $OR'_2Q'_1 - PR_2Q_1$; si l'on retranche de la somme de leurs volumes le volume du tétraèdre OPQR, qui est justement inclus dans le deuxième de ces troncs, il reste la portion du volume cherché Σ comprise à l'intérieur des deux dièdres opposés ayant pour arête commune AOA' , limités par les plans $AA'B'B'$ et $AA'C'C'$, et contenant à leur intérieur les segments $B'C'$ et BC .

On obtient de la même façon deux autres portions de Σ comprises à l'intérieur des dièdres de deux couples ayant respectivement pour arêtes BOB' et COC' et définis comme vient de l'être le couple ayant pour arête AOA' . Il n'y a ni empiètement de ces différentes parties de Σ les unes sur les autres, ni « lacune » entre certaines d'entre elles, et le volume Σ apparaît comme la somme des trois portions de volume ainsi mises en évidence.

On est ainsi conduit à calculer d'abord le volume des deux troncs de pyramides triangulaires $OR'_1Q'_2 - PR_1Q_2$ et $OR'_2Q'_1 - PR_2Q_1$. Le premier est la différence des volumes de deux pyramides ayant pour sommet A et pour bases $OR'_1Q'_2$ et PR_1Q_2 . Ces deux pyramides sont homothétiques de la pyramide $AA'B'C'$, par rap-

port au point A, les rapports d'homothétie étant $\frac{1}{2}$ et $\frac{1-u}{2}$ (déjà calculé) ; le volume du premier tronc est donc, en remarquant que le volume du tétraèdre $AA'B'C'$ est le double de celui du tétraèdre OABC :

$$\frac{2}{3}\sigma d \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-u}{2}\right)^3 \right] = \frac{1}{12}\sigma d [1 - (1-u)^3].$$

On calcule de même le volume du second tronc, à partir de la pyramide $A'ABC$, les rapports d'homothétie étant ici $\frac{1+u}{2}$ et $\frac{1}{2}$. On obtient donc $\frac{1}{12}\sigma d [(1+u)^3 - 1]$.

En retranchant de la somme des volumes de ces deux troncs le volume du tétraèdre OPQR, homothétique de OABC, avec le rapport u , on obtient l'une des trois parties en lesquelles on a décomposé Σ :

$$\frac{1}{12}\sigma d [(1+u)^3 - (1-u)^3] - \frac{1}{3}\sigma d u^3 = \frac{\sigma d}{6} u (3-u^2).$$

Les deux autres portions de Σ , définies tout à l'heure, sont équivalentes à celle qui vient d'être calculée : le résultat précédent le prouve, mais les remarques déjà faites sur les égalités entre triangles formant les bases, dans les plans W_0 et W , des troncs de pyramide envisagés justifient facilement le fait. Le volume cherché Σ est donc égal à $\frac{\sigma d}{2} \cdot u (3 - u^2)$. A titre de vérification, pour $u = 1$, on retrouve bien la différence entre la moitié du volume de l'octaèdre, et le volume de la pyramide $OABC$, c'est-à-dire σd .

La comparaison du volume Σ à celui d'un prisme ayant pour base l'hexagone H , et compris entre les plans W_0 et W , est facile : puisque la hauteur de ce prisme est $d \cdot u$, son volume est précisément égal à celui de Σ .

Cette partie du problème a été assez fréquemment abordée, et le calcul de l'aire de l'hexagone H a été, en général, correctement conduit. Par contre, la recherche du volume Σ a été rarement menée à bien, soit par suite d'erreurs de calcul, soit, presque toujours du fait d'une mauvaise ou d'une insuffisante conception de la décomposition en volumes partiels.

Sur ce point, quelques candidats ont appliqué, ou voulu appliquer la « formule des trois niveaux », qui ne figure pas au programme de la classe, mais qui est parfois enseignée par certains maîtres et qui est démontrée dans quelques manuels classiques. Bien entendu, rien ne s'oppose à la mise en œuvre, dans la solution d'un problème de concours. — surtout lorsqu'il s'agit du Concours général —, de connaissances ou de résultats qui ne font pas strictement partie du « programme » ; cependant, il convient que le candidat qui prend une telle initiative sache expliquer clairement son point de vue, et donne les justifications montrant qu'il domine effectivement la question (il ne s'agit point de reprendre la démonstration complète du théorème ou de la formule invoqués, mais d'en rappeler avec précision l'énoncé ou la structure, et d'établir que les conditions d'application sont effectivement réalisées).

La partie suivante du problème proposait la recherche des formes du triangle ABC pour lesquelles les hexagones H , correspondant à toutes les positions possibles du plan W , sont incritibles dans un cercle.

Dans un plan W quelconque, on retrouve la figure formée par le triangle PQR et l'hexagone H . Il est naturel, ici, de porter son attention sur les segments parallèles R_1Q_2 , R_2Q_1 , P_1P_2 ; les deux premiers sont homothétiques de QR par rapport au point P , et par conséquent les milieux des segments R_1Q_2 et R_2Q_1 sont situés sur la médiane PP' du triangle PQR , P' étant le milieu de QR , et par conséquent aussi celui de P_1P_2 . Donc, s'il existe un cercle circonscrit à l'hexagone H , les trois segments R_1Q_2 , R_2Q_1 et P_1P_2 sont trois cordes parallèles d'un cercle, leurs milieux sont alignés sur le diamètre perpendiculaire à leur direction, et, par suite, la médiane PP' , qui porte les milieux des trois cordes, est perpendiculaire à QR ; le triangle PQR est donc isocèle ($PQ = PR$). Le même raisonnement s'applique aux deux autres côtés et l'on voit ainsi que : si H est inscritible dans un cercle, le triangle PQR , et, par conséquent, le triangle ABC est équilatéral.

La réciproque se démontre aisément : si le triangle ABC est équilatéral, il en est de même de PQR et de tous les triangles tels que PR_1Q_2 , ... , qui sont homothétiques de PQR par rapport à l'un ou l'autre des sommets P , ... Les segments R_1Q_2 , R_2Q_1 et P_1P_2 ont pour médiatrice commune celle de QR , les segments P_1R_2 , P_2R_1 , Q_1Q_2 ont pour médiatrice celle de RP , ... Le centre ω du cercle circonscrit au triangle PQR , qui est le point commun à ces médiatrices, est donc équidistant de P_1 et de P_2 , de P_1 et de R_2 , de R_2 et de R_1 et ainsi de suite : le point ω est donc également centre d'un cercle circonscrit à l'hexagone H .

Cette hypothèse étant supposée réalisée, le triangle $\omega P_1 P'$ est rectangle en P' (milieu de QR et de $P_1 P_2$) et l'on a, puisque $P_1 P_2$ est égal à BC :

$$\overline{\omega P_1}^2 - \overline{\omega P'}^2 = \frac{a^2}{4},$$

en désignant par a la longueur du côté BC. Or ωP_1 est le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone H et $\omega P'$ est le rayon du cercle inscrit dans le triangle PQR : la différence entre les aires de ces deux cercles est donc bien indépendante du plan W. Quant à l'aire s comprise entre les cercles circonscrits au triangle PQR et à l'hexagone H, elle est égale à $s = \pi |\overline{\omega Q^2} - \overline{\omega P_1^2}|$, la valeur absolue devant intervenir puisque P_1 peut être intérieur ou extérieur au segment QR. Or

$$\overline{\omega Q^2} - \overline{\omega P_1^2} = \overline{\omega Q^2} - \overline{\omega P'^2} - \frac{a^2}{4} = \overline{QP'^2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} (u^2 - 1).$$

Comme l'aire du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC est égale à $\frac{\pi a^2}{3}$, le rapport de l'aire s à celle de ce cercle est $\frac{3}{4} |1 - u^2|$. L'étude de cette fonction, et sa représentation graphique, ne présentent pas de difficulté, une fois comprise la signification du symbole de valeur absolue.

La question de l'existence d'un hexagone H circonscriptible à un cercle peut être abordée en portant son attention sur le fait que les côtés de H sont deux à deux parallèles : s'il existe un cercle tangent aux six côtés de H, son centre est sur la parallèle aux deux côtés Q_1R_2 et R_1Q_2 , équidistante de ces deux côtés, c'est-à-dire sur la droite qui joint les milieux des segments PQ et PR, puisque Q_1Q_2 et PR ont le même milieu, ainsi que R_1R_2 et PQ ; de même, le centre de ce cercle, s'il existe, se trouve sur les droites joignant les milieux de QR et QP, et de RP et RQ. Or, tant que le triangle PQR est un véritable triangle, ces trois droites forment aussi un véritable triangle et ne sont pas concourantes ; il n'y a exception que pour $u=0$, les points P, Q, R, sont alors confondus avec le point O, qui est centre de symétrie de l'hexagone H_0 correspondant. Cet hexagone particulier H_0 est donc le seul, parmi les hexagones H, qui puisse être circonscrit à un cercle ; mais il ne s'est agi, jusqu'ici, que de conditions nécessaires, et il convient maintenant d'étudier si H_0 est effectivement circonscriptible. Pour cet hexagone, le centre de symétrie O est le point commun aux droites P_1P_2 , Q_1Q_2 , R_1R_2 , qui sont respectivement équidistantes de Q_1R_2 et R_1Q_2 , etc... S'il existe un cercle inscrit, son centre est nécessairement O : la droite P_1O est bissectrice de l'angle formé par les deux côtés P_1Q_2 , P_1R_2 tangents au cercle, c'est-à-dire que le parallélogramme $OR_2P_1O_2$ est un losange et la diagonale OP, fait des angles égaux avec les diagonales OQ_2 et OR_2 de l'hexagone : le raisonnement est valable pour chacune des diagonales passant par O : les angles formés autour de O par les trois diagonales P_1P_2 , Q_1Q_2 , R_1R_2 sont donc égaux, et, par conséquent, égaux à $\frac{\pi}{3}$ et le triangle ABC est nécessairement

équilatéral. La réciproque est évidente, puisque l'hexagone H_0 est alors un hexagone régulier. On voit donc que l'existence d'un cercle inscrit dans un hexagone H n'est acquise que lorsque le triangle ABC est équilatéral et lorsque l'on prend, dans cette hypothèse, l'hexagone H_0 situé dans le plan W passant par O.

La deuxième partie du problème pose des questions analogues pour l'octaèdre Ω . L'octaèdre peut-il être inscrit dans une sphère ? Peut-il admettre une sphère inscrite ?

Pour la première question, on remarque que, s'il existe une sphère passant par les six sommets de l'octaèdre, son centre est nécessairement dans les plans médiateurs des segments AA' , BB' , CC' ; or ces trois plans n'ont en commun que le point O, puisque les trois droites $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ ne sont pas dans un même plan ; le point O est donc le seul point pouvant être le centre d'une sphère circonscrite à l'octaèdre. Il est alors évident que, pour qu'une telle sphère existe, il faut et il suffit que les trois segments OA' , OB , OC soient égaux.

Pour la deuxième question, il est naturel de porter d'abord son attention, comme on l'a fait pour l'hexagone H, sur les couples de plans parallèles portant des faces de l'octaèdre : s'il existe une sphère tangente aux huit plans, son centre est situé

dans le plan parallèle aux deux plans ABC et $A'B'C'$ et équidistant de ces deux plans, et dans les trois plans analogues correspondant aux faces parallèles telles que ABC' et $A'B'C$, ... Or, ces quatre plans « équidistants », qui passent par O , n'ont en commun que le point O , comme on le voit, par exemple, en prenant les traces sur le plan W_0 , qui est l'un d'eux, des trois autres. Donc, s'il existe une sphère inscrite dans l'octaèdre, son centre est nécessairement le point O .

Il reste à étudier à quelles conditions le point O est équidistant des huit plans des faces de l'octaèdre. Du fait des symétries par rapport à O , il suffit de considérer quatre de ces plans, convenablement choisis, par exemple, ceux qui portent les quatre triangles ayant en commun le sommet A . On peut, ici, utiliser une propriété démontrée dans la troisième partie : l'équivalence des volumes des huit tétraèdres ayant pour sommet O et pour bases les faces de l'octaèdre ; dès lors, pour que le point O soit équidistant des quatre plans ABC , ABC' , $AB'C$, $AB'C'$, il faut et il suffit que les aires de ces quatre triangles soient égales.

Or, ces quatre triangles forment les faces latérales d'une pyramide ayant A comme sommet et dont la base est le parallélogramme $BCB'C'$. Si les aires ABC et $AB'C'$, correspondant à deux triangles dont les côtés BC et $B'C'$ sont égaux, sont elles-mêmes égales, c'est que le point A est équidistant des deux droites BC et $B'C'$ symétriques par rapport à O , et le point A se trouve nécessairement dans le plan perpendiculaire au plan $BCB'C'$ mené par la parallèle à BC passant par O . Le même raisonnement s'applique aux deux triangles ABC' et $AB'C$; si leurs aires sont égales, le point A se trouve nécessairement dans le plan perpendiculaire au plan $BCB'C'$ mené par la parallèle à BC' passant par O . Donc, si les aires ABC et $AB'C'$ d'une part, ABC' et $AB'C$ d'autre part, sont égales, le point A est sur la droite d'intersection des deux plans, perpendiculaires à $BCB'C'$, que l'on vient de définir, et cette droite n'est autre que la perpendiculaire menée par O au plan $BCB'C'$; autrement dit, la droite OX , qui porte le point A , est perpendiculaire au plan YOZ . On pourrait évidemment poursuivre l'analyse avec deux faces telles que ACB et ACB' , mais il est plus simple de remarquer que le résultat qui vient d'être acquis pour le point A , ou la droite OX , en supposant qu'il existe une sphère inscrite dans l'octaèdre, est également valable pour les sommets tels que B et C , c'est-à-dire pour les droites OY et OZ . Donc, s'il existe une sphère inscrite, le trièdre formé par OX , OY , OZ est nécessairement un trièdre trirectangle.

C'est là une condition nécessaire ; l'étude de la réciproque est facile, car si l'on part de trois droites $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ deux à deux perpendiculaires, quelles que soient les longueurs de OA , de OB et de OC , l'octaèdre obtenu admet comme plans de symétrie les trois plans YOZ , ZOX , XOY (et comme axes de symétrie les droites $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$), et l'égalité des distances du point O aux plans des faces de l'octaèdre est évidente.

Il est à remarquer que lorsque l'octaèdre est circonscriptible à une sphère, il n'admet pas en général de sphère circonscrite, puisque les distances OA , OB , OC peuvent être quelconques. L'octaèdre Ω n'est à la fois inscriptible et circonscriptible que s'il est régulier (le trièdre $OXYZ$ étant trirectangle, avec $OA = OB = OC$).

Les deux dernières parties du problème relatives à l'hexagone H et à l'octaèdre Ω pouvaient faire intervenir des idées ou des modes de raisonnement présentant certaines analogies : d'ailleurs la recherche pouvait être orientée de façons diverses. Un quart environ des candidats a obtenu sur ces questions quelques résultats exacts, sinon correctement démontrés, mais les solutions complètes sont extrêmement peu nombreuses. La plupart des fautes commises proviennent de la confusion entre conditions nécessaires et conditions suffisantes, confusion qui n'existe pas seulement dans le vocabulaire, mais dans l'esprit de certains élèves. Il est fréquent, par exemple, que l'on ne paraisse pas se rendre compte que le fait d'avoir établi que le triangle ABC est équilatéral, si l'hexagone H est inscrit dans un cercle, n'entraîne pas du tout qu'inversement l'hexagone H est certainement inscriptible si le triangle ABC est

équilatéral. En ce qui concerne l'octaèdre, on oublie très généralement de démontrer que s'il existe une sphère circonscrite, ou bien une sphère inscrite, son centre ne peut être que le point O, ce qui n'est pas évident. Quant à la toute dernière question, elle n'a été abordée d'une façon suffisante que dans deux ou trois compositions.

Dans l'ensemble, ce problème ne dépassait pas les possibilités d'un élève de Première. Le début exigeait un effort sérieux pour bien saisir la disposition relative des différents éléments et pour en comprendre les aspects divers, facilitant ainsi la tâche ultérieure, mais il est arrivé que cet effort a quelque peu essoufflé certains, qui n'ont pu poursuivre très longtemps la recherche.

Dans les parties plus proprement géométriques, les principales difficultés provenaient des exigences logiques des raisonnements qui font intervenir, plus ou moins explicitement, des propriétés caractéristiques de certaines figures. Comme on l'a déjà signalé, il n'est pas rare de constater que des élèves ne paraissent pas sentir la nécessité de justifier certaines affirmations, et ne paraissent pas saisir que la solution de questions, analogues à celles des deux dernières parties de ce problème, doit être conduite comme celle d'une recherche du lieu géométrique, à partir d'une analyse aboutissant à des conditions « nécessaires », complétée obligatoirement par l'étude d'une réciproque, à moins que l'on ne puisse faire intervenir, à chaque étape, des conditions certainement équivalentes aux conditions proposées.

Les questions d'algèbre étaient relativement faciles. Le point le plus délicat concernait la mise en jeu des valeurs absolues de certaines expressions, et l'expérience a confirmé, même avec ce groupe d'élèves représentant une sélection, la méconnaissance, souvent constatée, de cette notion pourtant fondamentale et du maniement du symbole qui lui correspond. Sans doute l'idée de valeur absolue intervient-elle, dans la première initiation à l'algèbre, d'une façon un peu trop discrète — la valeur absolue étant l'un des deux éléments constituant un nombre « algébrique » —, et on oublie parfois de présenter en même temps le symbole représentatif ; plus tard, la théorie élémentaire des opérations sur les nombres positifs et négatifs fait rarement la place qu'elles méritent aux propriétés des valeurs absolues des résultats de ces opérations (sommes, différences...) ; cependant, dans la suite, tout en restant dans le domaine des débuts, des occasions se présentent pour mettre en évidence la signification et l'importance de cette notion : définition de la racine carrée arithmétique d'un nombre positif, calcul de la longueur d'un segment dont on sait déterminer la mesure algébrique sur un axe, par exemple. Peut-être l'ignorance fréquemment constatée sur ce sujet, même dans les classes terminales et au delà, tendrait-elle à s'atténuer ou à disparaître, si dès les débuts de l'algèbre, l'idée de valeur absolue était présentée à sa vraie place et systématiquement utilisée partout où elle doit intervenir.

Une sensible amélioration, par rapport aux années antérieures, a été constatée avec plaisir par le jury, en ce qui concerne la rédaction, la présentation du raisonnement, la disposition matérielle. Bien sûr, la longueur et les difficultés d'une telle épreuve ne laissent pas toujours aux candidats, même aux meilleurs, le loisir de procéder aux mises au point complètes qu'ils désireraient peut-être entreprendre, et de s'attacher à rendre tout à fait ordonnées et impeccables les solutions qu'ils ont d'abord ébauchées. Mais il est certain qu'un effort très louable a été fait dans ce sens et il faut en attribuer le mérite aux professeurs, qui savent bien que l'un des bénéfices les plus sûrs, d'ailleurs accessible à tous les élèves, que l'on peut retirer d'une étude, même modeste, des mathématiques, est justement ce goût et ce désir de parfaire un travail entrepris, une œuvre commencée et déjà débrouillée, mais dont on sent bien qu'elle n'est pas encore sans bavures.



Les résultats d'ensemble sont très comparables à ceux des années précédentes. L'épreuve a réuni, en 1953, cent cinquante concurrents ; après examen de chacune

des copies par deux correcteurs, vingt-huit ont été retenues et soumises à tous les membres du jury. Neuf récompenses ont été décernées : deux premiers prix *ex-æquo*, attribués à deux candidats qui l'emportent assez nettement sur leurs camarades, et dont le succès n'est pas dû aux mêmes causes, chacun d'eux compensant une défaillance ou une insuffisance dans quelque partie du problème par une nette réussite dans d'autres ; puis deux compositions, assez dissemblables aussi dans le détail, mais équivalentes au total, et d'une bonne tenue, ont valu à leurs auteurs un troisième prix *ex-æquo*. Cinq accessits correspondent ensuite à des copies d'une fort honnête moyenne, et assez régulièrement échelonnées pour que le classement n'ait pas soulevé de difficultés particulières.

Si l'on veut, suivant la coutume, traduire par des notes des appréciations dont la valeur réside dans des nuances impossibles, par essence, à chiffrer, on peut dire que les copies des lauréats seraient cotées entre 15 et 10 : 14,5 pour les deux premiers prix ; 13 pour les troisièmes prix ; 12, 11, 10,5 et 10 pour les accessits.

Quant au lot des dix-neuf compositions retenues après la première sélection, mais ne figurant pas au palmarès, il comprend des travaux encore honorables, la plupart du temps trop incomplets. Les notes seraient, pour elles, comprises entre 10 et 7,5. Pour les autres candidats, la répartition est approximativement la suivante : une trentaine de copies, dont certaines fort convenables, se situent entre 7 et 6, une soixantaine entre 6 et 4, et une trentaine enfin au-dessous de 4, le nombre des compositions jugées tout à fait nulles se réduisant à trois ou quatre.

Mis à part un élève de Première A' du Lycée de Londres, qui a obtenu un troisième accessit, la répartition géographique des lauréats est, cette année, entièrement provinciale et va de l'Ouest, avec Le Mans, La Roche-sur-Yon (les deux premiers prix), Rouen (un accessit), à l'Est, avec Longwy (un troisième prix), puis s'infléchit vers Lyon (un prix, un accessit) pour aboutir à Toulouse et Bayonne (accessits). La Section Moderne a à son actif les deux premiers prix et un quatrième accessit, la Section C, un troisième prix et trois accessits et la Section A' un troisième prix et un accessit.

Notons enfin que, parmi les lauréats du Concours Général de Première en 1952, trois figurent de nouveau au palmarès en 1953, dans la classe de Mathématiques, soit pour la composition de mathématiques (les deux premiers prix), soit pour la composition de sciences physiques (un prix et un accessit).

J. DESFORGE,
Inspecteur général de l'Instruction publique.