

Définition de la longueur d'un arc

I. Soient $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ trois fonctions de la variable u définies et continues dans l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, ($\alpha < \beta$), dérivables dans l'intervalle ouvert $] \alpha, \beta [$. Soit K le nombre défini par l'égalité

$$[x(\beta) - x(\alpha)]^2 + [y(\beta) - y(\alpha)]^2 + [z(\beta) - z(\alpha)]^2 - K(\beta - \alpha)^2 = 0.$$

La fonction $\varphi(u)$

$\varphi(u) = [x(u) - x(\alpha)]^2 + [y(u) - y(\alpha)]^2 + [z(u) - z(\alpha)]^2 - K(u - \alpha)^2$ remplissant dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ les conditions du théorème de Rolle, il existe un nombre β_1 au moins tel que l'on ait

$$\varphi'(\beta_1) = 0, \quad \alpha < \beta_1 < \beta,$$

c'est-à-dire :

$$x'(\beta_1)[x(\beta_1) - x(\alpha)] + y'(\beta_1)[y(\beta_1) - y(\alpha)] + z'(\beta_1)[z(\beta_1) - z(\alpha)] - K(\beta_1 - \alpha) = 0, \\ \alpha < \beta_1 < \beta.$$

La fonction $\psi(u)$,

$\psi(u) = x'(\beta_1)[x(\beta_1) - x(u)] + y'(\beta_1)[y(\beta_1) - y(u)] + z'(\beta_1)[z(\beta_1) - z(u)] - K(\beta_1 - u)$, remplit alors dans l'intervalle $[\alpha, \beta_1]$ les conditions du théorème de Rolle ; il existe donc un nombre α_1 au moins tel que l'on ait $\psi'(\alpha_1) = 0$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1$, c'est-à-dire tel que

$$x'(\beta_1)x'(\alpha_1) + y'(\beta_1)y'(\alpha_1) + z'(\beta_1)z'(\alpha_1) - K = 0, \\ \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta.$$

Autrement dit, il existe deux nombres au moins α_1 , β_1 de l'intervalle ouvert $] \alpha, \beta [$ tels que l'on ait

$$(I) \quad [x(\beta) - x(\alpha)]^2 + [y(\beta) - y(\alpha)]^2 + [z(\beta) - z(\alpha)]^2 = \\ (\beta - \alpha)^2 [x'(\alpha_1)x'(\beta_1) + y'(\alpha_1)y'(\beta_1) + z'(\alpha_1)z'(\beta_1)].$$

II. Soient x , y , z trois fonctions de la variable t définies, continues, dérivables dans un intervalle fermé $[a, b]$, $a < b$. A une valeur t de cet intervalle correspond un point M de coordonnées x , y , z par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$ et un vecteur $\vec{V}$ de coordonnées x' , y' , z' ; aux valeurs a et b correspondent les points A et B . Nous supposons en outre que le vecteur V n'est nul en aucun point M , sauf peut-être en A et B ; nous admettrons, comme on le fait dans les classes où sont

enseignées les applications du calcul intégral, que le point M décrit dans ces conditions un arc AB d'une courbe dans un sens précisé par le vecteur V et comme on dit, le parcourt toujours dans le même sens.

Soit $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ une suite croissante de nombres distincts (et distincts de a et b) arbitrairement choisis dans l'intervalle $]a, b[$. Il correspond à cette suite une ligne polygonale $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ que nous appellerons régulièrement inscrite dans l'arc AB.

Le problème est d'étudier l'ensemble (L) des nombres L égaux aux longueurs des lignes polygonales régulièrement inscrites dans l'arc AB.

Soit u une fonction définie, continue, croissante de la variable t ayant une dérivée dans l'intervalle $[a, b]$. Soient u_0 et u_n les valeurs de cette fonction correspondantes aux valeurs a et b de t ; t est une fonction définie, continue, croissante de la variable u dans l'intervalle $[u_0, u_n]$, ayant une dérivée dans cet intervalle. Nous appellerons cette fonction $f(u)$. Un point M de l'arc de courbe AB est défini par ses coordonnées x, y, z , mais celles-ci, ou bien sont des fonctions données de t , ou bien sont des fonctions de u définies comme fonctions de fonctions par $t = f(u)$. Le remplacement de t par u et des valeurs $a, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, b$ par les valeurs correspondantes $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$ ne change pas les sommets A, $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, B$ de la ligne polygonale et par conséquent sa longueur L. Par contre, ce changement de variable conduit à remplacer le vecteur $\vec{V}$ par un vecteur $\vec{W}$ défini par

$$\vec{W} = \frac{du}{dt} \vec{V}.$$

III. On néglige, en général, dans les études classiques des nombres L, ce changement de variable. Nous désirons indiquer, en publiant cette note, qu'on pourrait l'utiliser dans l'espoir de simplifier les exposés traditionnels. Reprenons, en effet, le résultat établi à la fin du paragraphe I. Donnons α et β deux valeurs $\alpha = t_i, \beta = t_{i+1}$ choisies parmi les valeurs de t qui définissent deux sommets consécutifs M_i, M_{i+1} de la ligne polygonale. L'égalité (1) s'écrit

$$(M_i M_{i+1})^2 = (t_{i+1} - t_i)^2 [x'(\alpha_1)x'(\beta_1) + y'(\alpha_1)y'(\beta_1) + z'(\alpha_1)z'(\beta_1)].$$

Les nombres α_1 et β_1 sont des nombres de l'intervalle t_i, t_{i+1} et par suite de l'intervalle (a, b) ; les vecteurs $x'(\alpha_1), y'(\alpha_1), z'(\alpha_1)$ et $x'(\beta_1), y'(\beta_1), z'(\beta_1)$ sont donc des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ et la quantité entre crochets est le produit scalaire de ces vecteurs. Il en résulte que si nous remplaçons la variable t par la variable u , ce produit scalaire sera remplacé par le produit scalaire $\vec{W}_1 \cdot \vec{W}_2$. Si donc il était possible de choisir la fonction $f(u)$ de telle sorte que les vecteurs $\vec{W}$ aient, quel que soit t dans l'intervalle $[a, b]$, la longueur 1, ce produit scalaire serait inférieur ou égal à 1 et nous pourrions écrire

$$M_i M_{i+1} \leq U_{i+1} - U_i.$$

Ce choix de u est évidemment possible, par exemple en posant

$$u = \int_t^a \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

IV. Effectuons donc sur la variable t le changement de variable défini par l'égalité précédente; x, y, z sont désormais des fonctions de u et les vecteurs W ont pour longueur 1. Les inégalités $M_i M_{i+1}, U_{i+1} - U_i$ entraînent $L \leq u_n - u_0$.

L'ensemble (L) des nombres L égaux aux longueurs des lignes polygonales inscrites régulièrement dans l'arc AB est donc borné; il admet une borne supérieure précise l que nous appellerons longueur de l'arc AB. Le symbole : arc AB, quand aucune confusion n'est possible, représente ce nombre. Ainsi, par exemple, nous écrirons

$$\text{arc AB} \leq u_n - u_0.$$

V. Il reste à calculer le nombre ainsi défini. Nous n'allongerons pas cette note destinée seulement à appeler l'attention sur un mode d'exposition de la définition de la longueur d'un arc de courbe assez différent des expositions traditionnelles en effectuant ce calcul. Soit un point de l'arc AB ; la démonstration de l'égalité

$$\text{arc } AB = \text{arc } AM + \text{arc } MB$$

est encore un peu délicate, mais n'exige que du soin ; lorsqu'elle est faite, le calcul de arc AM, en fonction de u , est sans difficultés.

R. DONTOT,

Inspecteur général de l'Instruction publique.