

DEUXIÈME PARTIE

A propos de la notion de grandeur (1)

Sous le nom de *grandeurs*, on se propose ici de définir axiomatiquement certains symboles, en s'inspirant du contenu intuitif et des propriétés que la notion de grandeur paraît présenter en physique classique.

Nous concevons immédiatement l'existence de diverses *espèces* de grandeurs. La construction projetée s'annonce donc comme une construction à deux étages : l'*intraspécifique* et l'*interspécifique*. Dans le cadre de l'espèce, une distinction primordiale entre grandeurs *orientées* et grandeurs *inorientées* s'impose spontanément. Ces données préalables tracent le plan de notre étude.

I. Structure intraspécifique

Nous visons directement la notion de grandeur *mesurable*, sans nous assigner, par exemple, le *repérable* comme objectif intermédiaire. La lettre U désigne l'espèce envisagée : un indice distingue chaque échantillon qu'on y prélève.

A) GRANDEURS SPECIFIQUES ORIENTÉES MESURABLES (G.S.O.M)

Ces grandeurs sont notées $\tilde{U}_i, \tilde{U}_j, \tilde{U}_k, \dots$

(1) Cette conférence a été faite au groupe d'Axiomatique et de Redécouverte dirigé par M. CROZES, dans une séance tenue le 26 novembre 1953 au Lycée Henri-IV.

AXIOMES DE L'ÉGALITÉ GRANDORIELLE. — On pose une relation d'équivalence grandorielle

I-1	$\tilde{U}_i = \tilde{U}_i$	réflexivité
I-2	$\tilde{U}_i = \tilde{U}_j \rightarrow \tilde{U}_j = \tilde{U}_i$	symétrie
I-3	$\tilde{U}_i = \tilde{U}_j \text{ et } \tilde{U}_j = \tilde{U}_k \rightarrow \tilde{U}_i = \tilde{U}_k$	transitivité
I-4	$\exists \tilde{U}_i \exists \tilde{U}_j \quad \tilde{U}_i \neq \tilde{U}_j$	discernabilité

$\exists$ figure le signe d'existence ; affecté d'un astérisque il signifiera l'existence univoque.

AXIOMES DE L'ADDITION GRANDORIELLE. --- On pose une opération d'addition grandorielle ; la somme grandorielle de deux symboles est notée $\tilde{U}_i + \tilde{U}_j$; la somme grandorielle de plusieurs symboles est définie par récurrence.

II-1	$\exists^* \tilde{U}_k \quad \tilde{U}_k = \tilde{U}_i + \tilde{U}_j$	additivité
II-2	$\exists^* \tilde{U}_k \quad \tilde{U}_i = \tilde{U}_j + \tilde{U}_k$	soustractivité
II-3	$\tilde{U}_i + \tilde{U}_j = \tilde{U}_j + \tilde{U}_i$	commutativité
II-4	$(\tilde{U}_i + \tilde{U}_j) + \tilde{U}_k = \tilde{U}_i + (\tilde{U}_j + \tilde{U}_k)$	associativité

Le II-2 permet d'introduire la grandeur orientée nulle d'espèce U , notée $\tilde{O}_u$, qui vérifie $\tilde{U}_i = \tilde{U}_i + \tilde{O}_u$ et la grandeur orientée opposée à $\tilde{U}_i$, notée $(-\tilde{U}_i)$, qui vérifie

$$\tilde{O}_u = \tilde{U}_i + (-\tilde{U}_i).$$

A noter que $(-(-\tilde{U}_i)) = \tilde{U}_i$ $\tilde{O}_u = (-\tilde{O}_u)$

La différence grandorielle $\tilde{U}_i - \tilde{U}_j$ étant définie par $\tilde{U}_k = \tilde{U}_i - \tilde{U}_j \leftrightarrow \tilde{U}_i = \tilde{U}_j + \tilde{U}_k$ la soustraction se ramène à l'opposition et l'addition suivant la règle

$$\tilde{U}_i - \tilde{U}_j = \tilde{U}_i + (-\tilde{U}_j).$$

On introduit alors la somme grandorielle généralisée, par exemple

$$\tilde{U}_i - \tilde{U}_j - \tilde{U}_k + \tilde{U}_h.$$

AXIOMES DE LA MULTIPLICATION MIXTE. — On pose une opération de multiplication mixte entre nombres algébriques et grandeurs orientées ; le produit mixte d'un nombre et d'un symbole est noté, soit $a\tilde{U}_i$, soit $\tilde{U}_i a$ (commutativité conventionnelle).

III-1	$\exists^* \tilde{U}_j \quad \tilde{U}_j = a\tilde{U}_i$	multiplicativité
III-2	$\tilde{U}_i \neq \tilde{O}_u \rightarrow \exists^* a \quad \tilde{U}_j = a\tilde{U}_i$	mesurabilité
III-3	$a \neq 0 \rightarrow \exists \tilde{U}_i \quad \tilde{U}_j = a\tilde{U}_i$	divisibilité
III-4	$(ab)\tilde{U}_i = a(b\tilde{U}_i)$	associativité
III-5	$(a+b)\tilde{U}_i = a\tilde{U}_i + b\tilde{U}_i$	distributivité-1

On tire de là les premières propriétés du produit mixte

$$\begin{aligned} 0\tilde{U}_i &= \tilde{O}_u & a\tilde{O}_u &= \tilde{O}_u \\ \tilde{U}_i &= 1\tilde{U}_i & (-\tilde{U}_i) &= (-1)\tilde{U}_i \end{aligned}$$

et la relation importante (3-6) $a(\tilde{U}_i + \tilde{U}_j) = a\tilde{U}_i + a\tilde{U}_j$ distributivité-2.

La mesure de $\tilde{U}_j$ avec $\tilde{U}_i$, notée $\frac{\tilde{U}_j}{\tilde{U}_i}$, étant définie par

$$\frac{\tilde{U}_j}{\tilde{U}_i} = a \leftrightarrow \tilde{U}_j = a\tilde{U}_i \quad \text{et} \quad \tilde{U}_i \neq \tilde{O}_a$$

on obtient sans peine les propriétés classiques des mesures.

S'agissant des multiplicateurs entiers algébriques, la multiplication mixte se ramène à l'addition de termes U_i ou $(-U_j)$. A partir de cette remarque, on pourra chercher à introduire la multiplication mixte comme opération définie, avec le secours d'un axiome de *bipartitivité additive* $\exists^* \tilde{U}_j \quad \tilde{U}_i = \tilde{U}_j + \tilde{U}_j$ qu'on exploitera en donnant une portée suffisante au principe d'induction mathématique.

COHÉRENCE DE L'AXIOMATIQUE. — Le système d'axiomes I, II, III, qu'on vient d'utiliser est vérifié par les *nombre algébriques*, ce qui fournit une garantie satisfaisante de sa cohérence.

STRUCTURE DES G.S.O.M. — On peut faire fonctionner la loi de composition externe III :

— soit sur l'ensemble des *algébriques*, d'où les G.S.O. *mesurables* (G.S.O.M.) ;
— soit sur l'ensemble des *rationnels algébriques*, d'où les G.S.O. *rationnellement mesurables* (G.S.O.M^r) ; cette seconde hypothèse signifie qu'on se borne à construire les grandeurs orientées commensurables entre elles.

On voit que l'espace grandoriel spécifique des grandeurs orientées est un espace vectoriel unidimensionnel. Il apparaît même comme l'ancêtre naturel de tous les espaces vectoriels. Pour obtenir la structure d'espace vectoriel sous sa forme accomplie, il suffira de dialectiser l'unidimensionnalité III-2 en une *n-dimensionnalité* ; toutefois, on devra alors poser axiomatiquement le (3-6), dont la déduction ne sera plus assurée.

B) GRANDEURS SPECIFIQUES INORIENTÉES MESURABLES (G.S.I.M.)

Ces grandeurs sont notées $U_i, U_j, U_k, \dots$

AXIOMES DE L'ÉGALITÉ GRANDORIELLE. — On pose, comme plus haut, une relation d'équivalence grandorielle

I'-1	$U_i = U_j$	réflexivité
I'-2	$U_i = U_j \rightarrow U_j = U_i$	symétrie
I'-3	$U_i = U_j \quad \text{et} \quad U_j = U_k \rightarrow U_i = U_k$	transitivité
I'-4	$\exists U_i \exists U_j \quad U_i \neq U_j$	discernabilité

AXIOMES DE L'ADDITION GRANDORIELLE. — On pose, comme plus haut une opération d'addition grandorielle : la *somme grandorielle* de deux symboles est notée $U_i + U_j$; la somme de plusieurs symboles est définie par récurrence. Mais l'opération inverse présente cette fois une alternative, qu'on écrit ci-dessous en adoptant *ex* comme digne d'exclusion réciproque

II'-1	$\exists^* U_k \quad U_k = U_i + U_j$	additivité
II'-2a	$\exists^* U_j \quad U_i = U_i + U_j$	semi-soustractivité
II'-2b	$U_i \neq U_j \rightarrow \exists^* U_k \quad U_i = U_j + U_k \text{ ex } U_j = U_i + U_k$	
II'-3	$U_i + U_j = U_i + U_j$	commutativité
II'-4	$(U_i + U_j) + U_k = U_i + (U_j + U_k)$	associativité

Les II'-2 permettent d'introduire la *grandeur inorientée nulle d'espèce U*, notée O_u , qui vérifie $U_i = U_i + O_u$ et de définir une relation d'ordination grandorielle

$$\begin{aligned} U_i > U_j &\leftrightarrow \exists U_k \quad U_k \neq O_u \quad \text{et} \quad U_i = U_j + U_k \\ U_i > U_j &\leftrightarrow \exists U_k \quad U_k \neq O_u \quad \text{et} \quad U_i = U + U_k \end{aligned}$$

dont on établit la *transitivité* ; on définit aussi une relation d'*ordination grandorielle élargie*, soit $U_i \geq U_j$, soit $U_i \leq U_j$, également transitive. Dès lors, la *différence grandorielle* $U_i - U_j$ est définie conditionnellement par

$$U_k = U_i - U_j \leftrightarrow U_i = U_j + U_k \text{ et } U_i \geq U_j.$$

Notons les propriétés $U_i = U_j \text{ ex } U_i > U_j \text{ ex } U_i < U_j$
 $U_i \geq O_u \quad U_i \geq U_j \leftrightarrow U_i - U_j \geq O_u.$

AXIOMES DE LA MULTIPLICATION MIXTE. — On pose, comme plus haut, une opération de *multiplication mixte* entre nombres arithmétiques et grandeurs inorientées ; le *produit mixte* d'un nombre et d'un symbole est noté, soit aU , soit Ua (commutativité conventionnelle).

III'-1	$\exists^* U_j$	$U_j = aU_i$	multiplicativité
III'-2	$U_i \neq O_u \rightarrow \exists^* a$	$U_j = aU_i$	mesurabilité
III'-3	$a \neq 0 \rightarrow \exists U_i$	$U_j = aU_i$	divisibilité
III'-4		$(ab)U_i = a(bU_i)$	associativité
III'-5		$(a+b)U_i = aU_i + bU_i$	distributivité-1

On tire de là les premières propriétés du produit mixte

$$OU_i = O_u \quad aO_u = O_u \quad U_i = 1U_i$$

et la relation importante (3'-6) $a(U_i + U_j) = aU_i + aU_j$ distributivité-2.

La *mesure* de U_j avec U_i , notée $\frac{u_j}{u_i}$, étant définie par

$$\frac{u_j}{u_i} = a \leftrightarrow U_j = aU_i \text{ et } U_i \neq O_u$$

on obtient sans peine les propriétés classiques des mesures.

S'agissant des multiplicateurs entiers arithmétiques, la multiplication mixte se ramène à l'addition de termes U_i . A partir de cette remarque, on pourra chercher à introduire la multiplication mixte comme opération définie, avec le secours d'un axiome de *bipartitivité additive* $\exists^* U_j \quad U_i = U_j + U_j$ exploitée comme précédemment ; on en déduira toutes les propriétés primitives du produit mixte, à l'exception de III'-2 ; mais le III'-2, à son tour, deviendra déductible à l'aide d'un axiome d'*encadrabilité supérieure*. $U_i \neq O_u \rightarrow \exists n \quad nU_i > U_j$ où n désigne un entier arithmétique ; cette dernière proposition signifie que les grandeurs envisagées sont *archimédiennes*.

COHÉRENCE DE L'AXIOMATIQUE. — Le système d'axiomes I', II', III' qu'on vient d'utiliser est vérifié par les *nombres arithmétiques*, ce qui fournit une garantie satisfaisante de sa cohérence.

STRUCTURE DES G.S.I.M. — On peut faire fonctionner la loi de composition externe III' :

— soit sur l'ensemble des *arithmétiques*, d'où les G.S.I. *mesurables* (G.S.I.M.) ;

— soit sur l'ensemble des *rationnels arithmétiques* d'où les G.S.I. *rationnellement mesurables* (G.S.I.M.*) ; cette seconde hypothèse signifie qu'on se borne à construire les grandeurs inorientées commensurables entre elles.

C) CORRESPONDANCE ENTRE G.S.O.M. et G.S.I.M.

Si l'on choisit arbitrairement dans l'ensemble des $\tilde{U}_i$ une *grandeur orientée de base* $\tilde{U}_0 \neq \tilde{O}_u$ et dans l'ensemble des U_i une *grandeur inorientée de base* $U_0 \neq O_u$, III-2 et III'-2 permettent d'établir une *correspondance biunivoque* entre le sous-

ensemble des $\tilde{U}_i$, coorientées à $\tilde{U}_0$, c'est-à-dire telles que $\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{U}_0} \geq 0$, et l'ensemble

des U_i ; dans une telle correspondance, qu'on définit en posant $\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{U}_0} = \frac{U_i}{U_0}$

les éléments nuls d'une part, les éléments de base d'autre part, sont homologues.

Dès lors, un couple $\tilde{U}_0, U_0$, de grandeurs de base étant choisi, on appelle *module* de la G.S.O.M. U_i la G.S.I.M. U_i définie par $\left| \frac{\tilde{U}_i}{\tilde{U}_0} \right| = \frac{U_i}{U_0}$

Le module de $\tilde{O}_u$ est O_u ; celui de U_0 est $\tilde{U}_0$.

II. Structure interspécifique

Nous allons présenter deux prolongements axiomatiques qui englobent diversement la structure intraspécifique précédemment décrite. La première construction combinera entre elles des grandeurs qui, toutes, seront orientées ; la seconde portera, plus généralement, sur des grandeurs pourvues ou démunies à volonté du caractère d'orientation. Les lettres $U, V, W, \dots$ désignent les diverses espèces soumises au calcul.

A) GRANDEURS ORIENTÉES MESURABLES NATURELLEMENT n -DIMENSIONNÉES (G.O.M.D *_n)

La construction porte sur les symboles $\tilde{U}_i, \tilde{V}_j, \tilde{W}_k, \dots$

AXIOMES DE LA MULTIPLICATION GRANDORIELLE. — On pose une opération de *multiplication grandorielle* ; le *produit grandoriel* de deux symboles est noté $\tilde{U}_i \tilde{V}_j$, le produit grandoriel de plusieurs symboles est défini par récurrence.

IV-1	$\tilde{V}_i \neq \tilde{O}_v \rightarrow \exists^* \tilde{W}_k \quad \tilde{W}_k = \tilde{U}_i \tilde{V}_j$	multiplicativité
IV-2	$\tilde{V}_i \neq \tilde{O}_v \rightarrow \exists^* \tilde{W}_k \quad \tilde{U}_i = \tilde{V}_j \tilde{W}_k$	divisibilité
IV-3	$\tilde{U}_i \tilde{V}_j = \tilde{V}_j \tilde{U}_i$	commutativité
IV-4	$(a \tilde{U}_i) \tilde{V}_j = (a \tilde{U}_i) \tilde{V}_j$	associativité mixte
IV-5	$(\tilde{U}_i \tilde{V}_j) \tilde{W}_k = \tilde{U}_i (\tilde{V}_j \tilde{W}_k)$	associativité

On tire de là les premières propriétés du produit grandoriel

$$\tilde{O}_u \tilde{V}_j = \tilde{U}_i \tilde{O}_v = \tilde{O}_{uv}$$

$$\tilde{U}_i \neq \tilde{O}_u \quad \text{et} \quad \tilde{V}_j \neq \tilde{O}_v \rightarrow \tilde{U}_i \tilde{V}_j \neq \tilde{O}_{uv}$$

et la relation importante (4-6) $\tilde{U}_i (\tilde{V}_j + \tilde{V}_k) = \tilde{U}_i \tilde{V}_j + \tilde{U}_i \tilde{V}_k$ distributivité
dont la déduction utilise aussi III-2 et III-5.

Le IV-2 permet d'introduire l'*espèce neutre*, notée 1 , telle que $\tilde{U}_i = \tilde{U}_j \tilde{1}_k$
et en particulier $\tilde{1}_i = \tilde{1}_j \tilde{1}_k$, puis la *grandeur orientée unitaire d'espèce neutre*, notée $\tilde{1}_0$, telle que $\tilde{U}_i = \tilde{U}_i \tilde{1}_0$ et en particulier $\tilde{1}_i = \tilde{1}_i \tilde{1}_0 \quad \tilde{1}_0 = \tilde{1}_0 \tilde{1}_0$.

A noter que $\tilde{1}_0 \neq \tilde{1}_1$.

Le IV-2 permet aussi d'introduire la *grandeur orientée inverse* de $\tilde{U}_i \neq \tilde{O}_u$, notée $(\tilde{U}_i^{-1})$ ou plus simplement $\tilde{U}^i$, qui vérifie $\tilde{1}_0 = \tilde{U}_i \tilde{U}^i$.

On a en particulier, si $\tilde{1}_i \neq \tilde{O}_1 \quad \tilde{1}_0 = \tilde{1}_i \tilde{1}^i \quad \tilde{1}_0 = \tilde{1}_0 \tilde{1}^0$.

A noter que $((\tilde{U}_i^{-1})^{-1}) = \tilde{U}_i \quad \tilde{1}_0 = \tilde{1}^0$.

Les deux espèces U et U^{-1} sont dites *espèces inverses* ou *espèces duales*.

Le quotient grandoriel $\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{V}_j}$ étant défini par

$$\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{V}_j} = \tilde{W}_k \leftrightarrow \tilde{U}_i = \tilde{V}_j \tilde{W}_k \quad \text{e} \quad \tilde{V}_j \neq \tilde{O}_0$$

la division se ramène à l'inversion et à la multiplication suivant la règle

$$\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{V}_j} = \tilde{U}_i \tilde{V}_j$$

On introduit alors le produit grandoriel généralisé, par exemple

$$\tilde{U}_i \tilde{V}^i \tilde{V}_j \tilde{W}_k \tilde{S}^m.$$

PROPRIÉTÉS DES PRODUITS GRANDORIELS GÉNÉRALISÉS. — On définit notamment les produits grandoriels généralisés construits sur une espèce U (ou son espèce duale U^{-1}), par exemple $\tilde{U}_{ij}^{khlm} = \tilde{U}_i \tilde{U}_j \tilde{U}^k \tilde{U}^h \tilde{U}^l \tilde{U}^m$ qui

sera dit produit mixte d'ordre 6, deux fois covariant et quatre fois contravariant.

$\tilde{U}_{ijh} = \tilde{U}_i \tilde{U}_j \tilde{U}_k$ sera un produit covariant d'ordre 3 ;

$\tilde{U}^{ij} = \tilde{U}_i \tilde{U}_j$ sera un produit contravariant d'ordre 2.

En identifiant haut et bas un ou plusieurs indices d'un produit généralisé mixte, on introduit une opération de contraction, dont la répétition saturante fournit finalement un produit généralisé, soit covariant, soit contravariant, ou bien un résidu

$$\tilde{I}_0 = \tilde{I}^0 \quad \tilde{U}_{ij}^{khj} = \tilde{U}_i^{khl} \quad \tilde{U}^{khij} = \tilde{U}^{kh}$$

La notion de multiplication contractée en découle.

Plus généralement, on définit les produits grandoriels généralisés construits sur plusieurs espèces $U, V, W, \dots$ (ou leurs espèces duales $U^{-1}, V^{-1}, W^{-1}, \dots$) comme produits généralisés de produits généralisés respectivement construits sur U (ou U^{-1}), sur V (ou V^{-1}), sur W (ou W^{-1}),... ; les notions d'ordre, de covariance, de contravariance, de contraction, de multiplication contractée, s'étendent sans peine.

PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES GRANDORIELLES GÉNÉRALISÉES. — On définit les puissances grandorielles généralisées construites sur une espèce U (ou son espèce duale U^{-1}), notée $(\tilde{U}_i)^p$ où p désigne un entier algébrique, en posant

$$(\tilde{U}_i)^p = \tilde{U}_{i \dots i} \quad \text{avec } p \text{ indices inférieurs lorsque } p > 0,$$

$$(\tilde{U}_i)^p = \tilde{U}^{i \dots i} \quad \text{avec } -p \text{ indices supérieurs lorsque } p < 0$$

et lorsque $p = 0$ $(\tilde{U}_i)^0 = \tilde{I}_0 = \tilde{I}^0$.

De là résultent les premières propriétés des puissances généralisées

$$\tilde{U}_i = (\tilde{U}_i)^1 = (\tilde{U}^i)^{-1} \quad \tilde{U}^i = (\tilde{U}^i)^1 = (\tilde{U}_i)^{-1},$$

$$(\tilde{U}_i)^p = (\tilde{U}^i)^{-p} \quad (\tilde{U}^i)^p = (\tilde{U}_i)^{-p}$$

$$(\tilde{I}_0)^p = (\tilde{I}^0)^p = \tilde{I}_0 = \tilde{I}^0,$$

$$(\tilde{U}_i)^p (\tilde{U}_i)^{-p} = \tilde{I}_0 = \tilde{I}^0$$

et les lois générales de l'exponentiation entière,

$$(5-3) \quad (a \tilde{U}_i)^p = a^p (\tilde{U}_i)^p$$

$$(5-4) \quad (\tilde{U}_i)^{pq} = ((\tilde{U}_i)^p)^q$$

$$(5-5) \quad (\tilde{U}_i)^{p+q} = (\tilde{U}_i)^p (\tilde{U}_i)^q$$

$$(5-6) \quad (\tilde{U}_i \tilde{V}_j)^p = (\tilde{U}_i)^p (\tilde{V}_j)^p$$

associativité mixte

associativité

distributivité-1

distributivité-2

AXIOME DE LA n -DIMENSIONNALITÉ NATURELLE. — On dit que m grandeurs orientées non nulles d'espèces non neutres $\tilde{U}_i, \tilde{V}_j, \dots, \tilde{S}_h$ sont *dépendantes* (ou encore qu'elles forment un *système lié* d'ordre m), lorsqu'il existe m entiers algébriques non tous nuls $p_1 p_2 p_3 \dots p_m$ et une grandeur orientée d'espèce neutre $\tilde{I}_z$ tels que $(\tilde{U}_i)^{p_1} (\tilde{V}_j)^{p_2} \dots (\tilde{S}_h)^{p_m} = (\tilde{I}_z)$.

Puisque aucune des m grandeurs n'est nulle, $\tilde{I}_z \neq 0_r$.

Dans le cas contraire, on dit que ces m grandeurs sont *indépendantes* (ou encore qu'elles forment un *système libre* d'ordre m).

Grâce au (5-3), la notion de dépendance ou d'indépendance s'étend aisément à un système de m espèces non neutres $U, V, \dots, S$.

On pose alors l'axiome suivant :

VI_n

Il existe n espèces non neutres indépendantes telles que toute grandeur orientée soit un produit grandoriel généralisé construit sur ces n espèces.

Cela signifie que l'espace grandoriel général des grandeurs orientées a n dimensions naturelles.

Les n espèces non neutres qui se trouvent ainsi privilégiées sont dites *espèces fondamentales*. Tout système (libre) de n grandeurs orientées non nulles $U, V, \dots, S$, respectivement choisies dans ces espèces, constitue un *repère grandoriel*, qu'on note $\{\tilde{U}_i \tilde{V}_j \dots \tilde{S}_h\}$.

DÉCOMPOSITION D'UNE GRANDEUR ORIENTÉE $\tilde{T}_l$ DANS UN REPÈRE GRANDORIEL $\{\tilde{U}_i \tilde{V}_j \dots \tilde{S}_h\}$. — Tout produit grandoriel généralisé construit sur U (ou U^{-1}), si l'on exprime ses facteurs au moyen de $\tilde{U}_i$ en utilisant le III-2, se met sous la forme $a(\tilde{U}_i)^{p_1}$, où a algébrique et p_1 entier algébrique. Il en va de même pour tout produit généralisé construit sur les autres espèces fondamentales (ou leurs espèces duales). Compte tenu de VI_n, il en résulte que toute grandeur orientée $\tilde{T}_l$ se met sous la forme $\tilde{T}_l = t^{(ij\dots h)} (\tilde{U}_i)^{p_1} (\tilde{V}_j)^{p_2} \dots (\tilde{S}_h)^{p_n}$ où $t^{(ij\dots h)}$ algébrique et $p_1 p_2 \dots p_n$ entiers algébriques.

Il est aisé de montrer par l'absurde que cette décomposition (quant aux exposants d'abord, quant au coefficient ensuite) est unique.

$\tilde{T}_l$ est d'espèce neutre ou non neutre suivant que les p_k sont tous nuls ou non tous nuls : elle est nulle ou non nulle suivant que $t^{(ij\dots h)}$ l'est ou ne l'est pas.

$p_1 p_2 \dots p_n$ sont dits *exposants spécifiques* de $\tilde{T}_l$ (ou de T) dans le repère $t^{(ij\dots h)}$ est dit *mesure algébrique* de $\tilde{T}_l$ avec le repère.

SYSTÈMES D'UNITÉS COHÉRENTS. — La grandeur orientée d'espèce T , qui a pour mesure algébrique l'unité, s'appelle *grandeur dérivée d'espèce T associée au repère* ; on la note $\tilde{T}_{(ij\dots h)}$ $\tilde{T}_{(ij\dots h)} = (\tilde{U}_i)^{p_1} (\tilde{V}_j)^{p_2} \dots (\tilde{S}_h)^{p_n}$.

Ainsi $\tilde{T}_l = t^{(ij\dots h)} \tilde{T}_{(ij\dots h)}$

ce qui montre que la mesure algébrique de $\tilde{T}_l$ avec des grandeurs fondamentales $\tilde{U}_i \tilde{V}_j \dots \tilde{S}_h$ est égale à la mesure algébrique de $\tilde{T}_l$ avec la grandeur dérivée de sa propre espèce $\tilde{T}_{(ij\dots h)}$.

On est donc amené à faire une *convention de cohérence des mesures*, en décidant que les grandeurs orientées seront mesurées avec des unités fondamentales choisies dans les espèces de repérage et les unités dérivées qui leur sont associées dans les

autres espèces. L'expression « mesure algébrique » garde alors le même sens dans l'espèce et dans l'ensemble des espèces.

Un tel système d'unités est dit *système d'unités cohérent*.

EQUATION AUX DIMENSIONS D'UNE ESPÈCE T. — Imaginons deux systèmes d'unités cohérents

$$\bar{U}_0 \bar{V}_0 \dots \bar{S}_0 \bar{T}_0 \dots \quad \text{avec} \quad \bar{T}_0 = (\bar{U}_0)^{p^1} (\bar{V}_0)^{p^2} \dots (\bar{S}_0)^{p^n} \dots$$

$$\bar{U}'_0 \bar{V}'_0 \dots \bar{S}'_0 \bar{T}'_0 \dots \quad \text{avec} \quad \bar{T}'_0 = (\bar{U}'_0)^{p^1} (\bar{V}'_0)^{p^2} \dots (\bar{S}'_0)^{p^n} \dots$$

et introduisons les *facteurs de changement*, soit sous leur aspect *matériel*, soit sous leur aspect *formel*.

$$\mathcal{U} \frac{\bar{U}'_0}{\bar{U}_0} = \frac{u'}{u}, \quad \mathcal{V} = \frac{\bar{V}'_0}{\bar{V}_0} = \frac{v'}{v}, \quad \dots \quad \mathcal{S} = \frac{\bar{S}'_0}{\bar{S}_0} = \frac{s'}{s}, \quad \mathcal{T} = \frac{\bar{T}'_0}{\bar{T}_0} = \frac{t'}{t}, \dots$$

u et u' désignant ici les mesures algébriques d'une même grandeur orientée d'espèce U avec $\bar{U}_0$ et $\bar{U}'_0$, etc... On obtient immédiatement

$$\mathcal{T} = \mathcal{U}^{p^1} \mathcal{V}^{p^2} \dots \mathcal{S}^{p^n}.$$

Cette relation numérique entre les facteurs de changement s'appelle *équation aux dimensions* de l'espèce T relativement aux espèces fondamentales $U, V, \dots, S$.

CHANGEMENT DE REPIÈRE GRANDORIEL. — Le problème du *changement de repère grandoriel*, sous sa forme générale, à partir de

$$\bar{U}_i = \mathcal{U}_i^i \bar{U}_i \quad \bar{V}_j = \mathcal{V}_j^j \bar{V}_j \dots \bar{S}_h = \mathcal{S}_h^h \bar{S}_h$$

conduit aux *formules de transformation* des grandeurs dérivées ou des mesures algébriques, qui illustrent les notions de covariance et de contravariance. Si, par exemple,

$$\bar{T}_{(ijk)} = (\bar{U}_i)^3 (\bar{V}_j)^{-2} (\bar{W}_k)^1$$

$$\text{on aura} \quad \bar{T}_{(ijk)} = (\mathcal{U}_i^i)^3 (\mathcal{V}_j^j)^{-2} (\mathcal{W}_k^k)^1 \bar{T}_{(ijk)}$$

$$t_{(ijk)} = (\mathcal{U}_i^i)^{-3} (\mathcal{V}_j^j)^{-2} (\mathcal{W}_k^k)^1 t_{(ijk)}$$

et $T_{(ijk)}$ sera un symbole quatre fois covariant et deux fois contravariant, tandis que $t_{(ijk)}$ sera un symbole deux fois covariant et quatre fois contravariant.

COHÉRENCE DE L'AXIOMATIQUE. — Le système d'axiomes Π_v (I, II, III)_v, IV, VI_n qu'on vient d'utiliser est vérifié par les *fonctions de n variables algébriques* x_i du type $a x^{p^1}_1 x^{p^2}_2 \dots x^{p^n}_n$ où les paramètres sont assujettis aux conditions *a algébrique, p_i entiers algébriques*; cette remarque fournit une garantie satisfaisante de sa cohérence.

STRUCTURE DES G.O.M.D.*_n. — On voit que l'espace grandoriel général des grandeurs orientées est un espace tensoriel construit sur des espaces vectoriels unidimensionnels, à savoir ceux que constituent certains espaces grandoriels spécifiques privilégiés. Il apparaît même comme l'ancêtre naturel de tous les espaces tensoriels. Toutefois, le produit grandoriel n'introduit ici qu'une structure de produit tensoriel commutatif.

Nous allons reprendre cette construction avec le double dessein :

- de ne plus nous en tenir aux seules grandeurs orientées ;
- d'abolir le privilège des espèces fondamentales.

B) GRANDEURS MESURABLES n -DIMENSIONNÉES (G.M.D._n)

La construction porte sur les symboles $U_i, V_j, W_k, \dots$ qui peuvent s'interpréter à volonté, soit comme des G.S.I.M., soit comme des modules de G.S.O.M., déterminés à l'aide de couples de base d'ailleurs quelconques.

AXIOMES DE LA MULTIPLICATION GRANDORIELLE. — On pose une opération de *multiplication grandorielle* ; le *produit grandoriel* de deux symboles est noté $U_i V_j$; le produit grandoriel de plusieurs symboles est défini par récurrence.

IV'-1	$\exists^* W_k \quad W_k = U_i V_j$	multiplicativité
IV'-2	$V_j \neq O_v \rightarrow \exists^* W_k \quad U_i = V_j W_k$	divisibilité
IV'-3	$U_i V_j = V_j U_i$	commutativité
IV'-4	$(a U_i) V_j = a(U_i V_j)$	associativité mixte
IV'-5	$(U_i V_j) W_k = U_i (V_j W_k)$	associativité

On tire de là les premières propriétés du produit grandoriel

$$O_v V_j = U_i O_v = O_{uv}$$

$$U_i \neq O_v \text{ et } V_j \neq O_v \rightarrow U_i V_j \neq O_v$$

et la relation importante

$$(4'-6) \quad U_i (V_j + V_k) = U_i V_j + U_i V_k \quad \text{distributivité}$$

dont la déduction utilise aussi III'-2 et III'5.

Le IV'-2 permet d'introduire l'*espèce neutre*, notée I , telle que

$$U_i = U_j I_k$$

et en particulier

$$I_i = I_j I_k$$

puis la *grandeur unitaire d'espèce neutre*, notée I_0 telle que

$$U_i = U_i I_0$$

et en particulier

$$I_i = I_i I_0 \quad I_0 = I_0 I_0$$

A noter que

$$I_0 \neq O_i$$

Le IV'-2 permet aussi d'introduire la *grandeur inverse* de $U_i \neq O_v$, notée (U_i^{-1}) , qui vérifie

$$I_0 = U_i (U_i^{-1}).$$

On a en particulier si $I_i \neq O_i \quad I_0 = I_i (I_i^{-1}) \quad I = I_0 (I^{-1}_0)$.

A noter que $((U_i^{-1})^{-1}) = U_i \quad I_0 = (I^{-1}_0)$

Les deux espèces U et U^{-1} sont dites *espèces inverses*.

Le *quotient grandoriel* $\frac{U_i}{V_j}$ étant défini par

$$\frac{U_i}{V_j} = W_k \leftrightarrow U_i = V_j W_k \text{ et } V_j \neq O_v$$

la division se ramène à l'inversion et à la multiplication suivant la règle

$$\frac{U_i}{V_j} = U_i (V^{-1}_j)$$

On introduit alors le *produit grandoriel généralisé*.

AXIOMES DE L'EXPONENTIATION. — On pose une opération d'*exponentiation* entre nombres algébriques et grandeurs ; la *puissance* ayant pour exposant le nombre algébrique p d'un symbole U_i est notée U_i^p .

V'-1	$\exists^* V_j \quad V_j = U_i^p$	exponentialité
V'-2	$p \neq 0 \rightarrow \exists V_j \quad V_j = U_i^p$	extractivité
V'-3	$(a U_i)^p = a^p U_i^p$	associativité mixte
V'-4	$U_i^{pq} = U_i^p U_i^q$	associativité
V'-5	$U_i^{p+q} = U_i^p U_i^q$	distributivité-1
V'-6	$(U_i V_j)^p = U_i^p V_j^p$	distributivité-2

On tire de là les premières propriétés des puissances

$$\begin{aligned} U_i^0 &= I_0 \\ U_i &= U_i^1 & (U_i^{-1}) &= (U_i)^{-1} \\ U_i^p &= (U_i^{-1})^{-p} & (U_i^{-1})^p &= U_i^{-p} \\ I_0^p &= I_0 & U_i^p U_i^{-p} &= I_0 \end{aligned}$$

S'agissant des exposants entiers algébriques l'exponentialité se ramène à la multiplication de facteurs U_i ou (U_i^{-1}) . A partir de cette remarque, on pourra chercher à introduire l'exponentiation comme opération définie, avec le secours d'un axiome de *bipartitivité multiplicative* $\exists^* V_i U_i = V_i V_i$ qu'on exploitera en donnant une portée suffisante au principe d'induction mathématique ; on en déduira toutes les propriétés primitives des puissances.

AXIOME DE LA n -DIMENSIONNALITÉ. — On dit que m grandeurs non nulles d'espèces non neutres $U_i, V_j, \dots, S_h$, sont *dépendantes* (ou encore qu'elles forment un *système lié* d'ordre m) lorsqu'il existe m nombres algébriques non tous nuls $p_1 p_2 p_3 \dots p_m$ et une grandeur d'espèce neutre I_α tels que $U_i^{p_1} V_j^{p_2} \dots S_h^{p_m} = I_\alpha$. Puisque aucune des m grandeurs n'est nulle, $I_\alpha \neq O_i$.

Dans le cas contraire, on dit que ces m grandeurs sont *indépendantes* (ou encore qu'elles forment un *système libre* d'ordre m).

Dès lors, deux cas sont possibles :

- ou bien il existe des systèmes libres d'ordre aussi grand qu'on voudra ;
- ou bien l'ordre des systèmes libres est borné.

Posons alors un axiome qui nous place dans ce second cas :

VI' n Il existe un système de n grandeurs non nulles d'espèces non neutres indépendantes, et il n'existe pas de système de $n + 1$ grandeurs non nulles d'espèces non neutres indépendantes.

Cela signifie que *l'espace grandoriel général a n dimensions*. (En adoptant, au contraire, la première hypothèse, nous construirions un espace grandoriel général doué d'un nombre infini de dimensions).

Tout système (libre) de n grandeurs non nulles d'espèces non neutres indépendantes $U_i, V_j, \dots, S_h$, constitue un *repère grandoriel*, qu'on note $\{U_i V_j \dots S_h\}$.

DÉCOMPOSITION D'UNE GRANDEUR T_l DANS UN REPÈRE GRANDORIEL $\{U_i V_j \dots S_h\}$ — Soit d'abord T_l une grandeur non nulle d'espèce non neutre ; les $n + 1$ grandeurs $U_i, V_j, \dots, S_h, T_l$ formant un système lié, il existe $q_1 q_2 \dots q_n q$ non tous nuls et a arithmétique non nul tels que $U_i^{q_1} V_j^{q_2} \dots S_h^{q_n} T_l^q = a$, où $q \neq 0$, puisque $U_i, V_j, \dots, S_h$ forment un système libre.

Si T_l est une grandeur non nulle d'espèce neutre, cette relation est encore vérifiée avec $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ et $q = 1$.

On peut donc écrire dans les deux cas

$$T_l^q = a U_i^{-q_1} V_j^{-q_2} \dots S_h^{-q_n}$$

et, puisque $q \neq 0$,

$$T_l = a^{\frac{1}{q}} U_i^{-\frac{q_1}{q}} V_j^{-\frac{q_2}{q}} \dots S_h^{-\frac{q_n}{q}}$$

c'est-à-dire enfin, en posant $t = a^{\frac{1}{q}}$, $p_1 = -\frac{q_1}{q}$, $p_2 = -\frac{q_2}{q}$, ..., $p_n = -\frac{q_n}{q}$

$$T_l = t U_i^{p_1} V_j^{p_2} \dots S_h^{p_n}$$

où $t > 0$.

Si maintenant T est la grandeur nulle 0 , cette relation est encore vérifiée avec $t = 0$.

En résumé, toute grandeur T se met sous la forme

$$T_l = t^{(ij\dots h)} U_i^{p_1} V_j^{p_2} \dots S_h^{p_n}$$

où $t^{(ij\dots h)}$ arithmétique et $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ algébriques.

Il est aisé de montrer par l'absurde que cette décomposition (quant aux exposants d'abord, quant au coefficient ensuite) est unique.

T_l est d'espèce neutre ou non neutre suivant que les p_k sont tous nuls ou non tous nuls ; elle est nulle ou non nulle suivant que $t^{(ij\dots h)}$ l'est ou ne l'est pas.

$p_1 p_2 \dots p_n$ sont dits *exposants spécifiques* de T_l (ou de T) dans le repère $t^{(ij\dots h)}$ est dit *mesure* de T_l avec le repère.

SYSTÈMES D'UNITÉS COHÉRENTS. — La grandeur d'espèce T qui a pour mesure l'unité s'appelle *grandeur dérivée d'espèce T associée au repère* ; on la note $T^{(ij\dots h)}$

$$T^{(ij\dots h)} = U_i^{p_1} V_j^{p_2} \dots S_h^{p_n}$$

Ainsi

$$T_l = t^{(ij\dots h)} T^{(ij\dots h)}$$

et l'on est amené, comme plus haut, à la *convention de cohérence des mesures*, qui assure la stabilité de la signification du mot « mesure » et fonde la notion de *systèmes d'unités cohérents*.

EQUATION AUX DIMENSIONS D'UNE ESPÈCE T . — Les *facteurs de changement* (matériels ou formels) étant définis comme précédemment, lorsqu'on passe d'un système d'unités cohérent à un autre

$$U = \frac{U_0}{U_0} = \frac{u}{u}, \quad V = \frac{V_0}{V_0} = \frac{v}{v}, \quad \dots, \quad S = \frac{S_0}{S_0} = \frac{s}{s}, \quad T = \frac{T_0}{T_0} = \frac{t}{t}$$

on aboutit de la même manière à l'équation aux dimensions de l'espèce T relativement aux espèces de repérage choisies $U, V, \dots, S$

$$T = U^{p_1} V^{p_2} S^{p_n}$$

COHÉRENCE DE L'AXIOMATIQUE. — Le système d'axiomes

$$\Pi \quad (I' \ II' \ III')_U \ IV' \ V' \ VI'_n$$

qu'on vient d'utiliser est vérifié par les *fonctions de n variables arithmétiques* X_i du type $AX^{p_1}_1 X^{p_2}_2 \dots X^{p_n}_{p_n}$ où les paramètres sont assujettis aux conditions *A arithmétique, p_i algébriques* ; cette remarque fournit une garantie satisfaisante de sa cohérence.

STRUCTURE DES G.M.D._n. — On peut faire fonctionner la loi de composition externe V'

— soit sur l'ensemble des *algébriques*, d'où les G.M. *n-dimensionnées* (G.M.D._n),

— soit sur l'ensemble des *rationnels algébriques*, en définissant ensuite une indépendance rationnelle entre m grandeurs (exposants p *rationnels algébriques*), qui prend place dans le VI'_n ; la rationalité des exposants se conserve dans les démonstrations ultérieures (exposants spécifiques $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ *rationnels algébriques*) : on obtient alors les G.M. *rationnellement n-dimensionnées* (G.M.D._n^r).

Les grandeurs mesurables, auxquelles nous avons ordinairement affaire, sont toujours rationnellement dimensionnées ; mais, suivant le cas, on combinera entre elles des grandeurs toutes inorientées, ou des grandeurs toutes orientées, ou des grandeurs dont les unes seront inorientées et les autres orientées ; on rencontrera donc les trois types généraux suivants

$$G.I.M.D._n^r \quad G.O.M.D._n^r \quad G.(IO).M.D._n^r$$

UTILISATION DES G.M.D._n^r. — C'est un fait que la géométrie, la mécanique et la physique ont coutume de se développer sans dégager explicitement aucune structure grandorielle *interspécifique*. Une fois la structure *intraspécifique* acquise, il suffit, en effet, pour fonder un *calcul général des mesures des grandeurs*, d'introduire une combinatoire qui porte sur un *système particulier de grandeurs unitaires* $U_0, V_0, W_0, \dots$, choisies respectivement dans chacune des espèces $U, V, W, \dots$ qu'on envisage. Un

corps de définitions préalables, *purement grandorielles*, y pourvoit. L'introduction systématique de la multiplication grandorielle généralisée permet d'abord d'*organiser* l'écriture symbolique de ces définitions liminaires (ainsi la relation grandorielle $V_0 = L_0 T^{-1}_0$ intègre au formalisme la définition d'une vitesse unitaire V_0 en fonction d'une longueur unitaire L_0 et d'une durée unitaire T_0) ; on reconnaît ensuite qu'elle transforme le calcul général des mesures des grandeurs en un *calcul général des grandeurs*, qui s'y trouvait implicitement contenu.

Si l'on met fin à l'occultation accoutumée des opérations grandorielles, on aboutit aux conclusions suivantes :

- 1° En *géométrie*, on utilise des G.O.M.D^r₁ construites sur la longueur L.
- 2° En *cinématique*, on utilise des G.O.M.D^r₂ construites sur la longueur L et le temps T.
- 3° En *dynamique*, on utilise des G.(1c)M.D^r₃ construites sur la longueur L, le temps T et la masse M.
- 4° En *physique*, on utilise habituellement ces mêmes G.(1c)M.D^r₃. Il est naturel de le faire, si l'on adopte la perspective cartésienne, qui traite la physique comme une promotion de la mécanique. Cependant, la question se pose de savoir si l'on doit ici attribuer à *n* une valeur *à priori*, et, dans le cas de l'affirmative, si 3 s'impose ou est la plus commode (on sait que les valeurs 1, 2, 4 ont été proposées).

Jean CHAUVINEAU,
professeur au Lycée Henri-IV.