

Rapport Hugué
longueur d'un arc

Van

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

—♦♦♦—

Publication trimestrielle

—○—

Administration : Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

I. Assemblée générale ordinaire de 1954	75
II. Avis important	76
III. Réunion du Comité : 18 février 1953	76
IV. Préparation de l'Assemblée générale, Pâques 1954 :	
Commission Châtelet (M. CHAZAL)	78
Sujets de mathématiques au Baccalauréat en 1953 (M. ROSTOLLAND) ..	80
Travaux dirigés en Sixième et en Cinquième (Mlle MASSON)	82
Examen d'entrée en Sixième (Mme JAEGER)	83
Définition des mots et notations mathématiques (M. CROZES)	86
V. Commémoration du centenaire de la naissance d'Henri Poincaré	87
VI. Documents officiels : Agrégation de Mathématiques (Hommes).	
Rapport de M. l'Inspecteur général DONTOT, président du Jury, sur le concours de 1953	88
Concours d'admission dans les Centres Pédagogiques Régionaux. Rap- port de MM. les Inspecteurs généraux DEDRON et THIBERGE, pré- sidents des jurys sur le concours en 1953	114

DEUXIÈME PARTIE

J. CHAUVINEAU : A propos de la notion de grandeur	137
R. DONTOT : Définition de la longueur d'un arc	148

Cotisations : 400 fr.

Abonnements : 800 fr.

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris 5^e

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France **800 fr.**

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. **200 fr.**

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5°).
Vice-Présidents : Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14°).
M. BENOIST, Collège Diderot, 60, bd de La Villette, Paris (19°).
M. CAGNAC, 53, rue de Babylone, Paris (7°).
M. GIRAULT, 5, rue Isabey, Paris (16°).
Secrétaires : M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16°).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité :

Membres élus

Sortants en 1954 : Mlle BARBIER (*Victor-Duruy*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. GIRAULT (*J.-B. Say*) ; M. JACQUEMART (*Pasteur*) ; M. MINOIS (*Lakanal*) ; M. RUFF (*Voltaire*).

Sortants en 1955 : M. CAGNAC (*Louis-le-Grand*) ; M. DURRANDE (*St-Louis*) ; M. HUISMAN (*Montaigne*) ; M. MARVILLET (*Strasbourg, Kléber*) ; M. MONJALLON (*St-Louis*).

Sortants en 1956 : Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (*Fac. Sc. Toulouse*) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (*Condorcet*) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (*Lyon, Ampère*).

Membres de droit

Mme NICOD (*Lyon, Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (*Castres*) ; Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. GIRAULT ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. GIRAULT ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, M. MINOIS, Mlle PROTIN (S.Ex.) ; *Mathématiques Supérieures :* M. DURRANDE ; *Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques : Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — Concours général : M. — ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (*Montpellier*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (*Casablanca, Lyautéy*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

du dimanche 11 Avril 1954

Votes par correspondance

(Voir les Bulletins de vote aux deux pages suivantes)

Tous les membres de l'Association qui ne pourront assister à l'Assemblée générale du 11 avril 1954 sont instamment priés de bien vouloir voter par correspondance.

Pour la régularité des opérations de scrutin, prière de se conformer aux indications suivantes :

1° Détacher la partie inférieure de la page suivante (Bulletin de vote) et l'introduire, après inscription du vote, dans une petite enveloppe cachetée ;

2° Détacher le feuillet suivant, répondre aux questions, et l'insérer, avec la petite enveloppe contenant le Bulletin de vote, dans une seconde enveloppe portant extérieurement, avec le nom et l'adresse de l'expéditeur, la mention : « Association des Professeurs de Mathématiques, Bulletin de vote ».

Adresser ce pli à :

M. MONJALLON

23, boulevard Saint-Germain, Paris, 5°

Il paraît indispensable que les votes par correspondance parviennent, au plus tard, le 10 avril 1954.

Le dépouillement du scrutin pour les élections au Comité se fera à la fin de l'Assemblée générale.

Assemblée générale du

Pour les votes par correspondance se conformer

8. Election de 7 membres au Comité

Pour éviter une trop grande dispersion des suffrages, le Comité a établi la liste suivante formée avec les noms des anciens membres du Comité rééligibles maintenant et de membres de l'Association ayant obtenu des suffrages à l'élection de 1953 :

- M^{lle} AFFRE, Lycée Fénélon, Paris (ancien membre du Comité).
- MM. BERTRAND, Lycée Thiers, Marseille (ancien membre du Comité).
BIGUENET, E.N.P. de Saint-Ouen (ancien membre du Comité).
CHAZAL, Lycée Saint-Louis, Paris (ancien membre du Comité).
DUVAL, Collège Dorian, Paris.
EDDE, E.N. d'Instituteurs d'Auteuil (ancien membre du Comité).
- M^{lle} FÉLIX, Lycée La Fontaine, Paris.
- M^{me} FLAMANT, Lycée Fénélon, Paris.
- MM. GIRARD, Collège Arago, Paris (ancien membre du Comité, Secrétaire).
GUITTON, Lycée St-Louis, Paris (ancien membre du Comité).
LEGRAND, Lycée de Compiègne (ancien membre du Comité, Trésorier).
- M^{lle} PROTIN, Lycée Jules-Ferry, Paris (ancien membre du Comité).
- MM. SIROS, Lycée Lakanal, Sceaux.
WALUSINSKI, Lycée Voltaire, Paris.

Mais ces indications ne limitent en aucune façon la liberté de vote des membres de l'Association. Toutefois, il n'y a pas lieu de voter pour les membres faisant actuellement partie du Comité, ni pour les membres sortants, non immédiatement rééligibles (art. 3 des Statuts) : Mlle BARBIER ; MM. BENOIST, GIRAULT, JACQUEMART, MINOIS, RUFF.

Election au Comité 1954. — Bulletin de vote

Prière, pour faciliter le dépouillement du scrutin, d'inscrire les sept noms par ordre alphabétique.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.

dimanche 11 Avril 1954

aux indications données à la page précédente

Feuillet de réponses aux questions posées

Détacher cette page et la déposer en séance après avoir répondu lisiblement aux différentes questions.

Les membres de l'Association qui ne pourraient assister à l'Assemblée sont invités à envoyer ce feuillet, **avant le 10 avril 1954**, au Président : M. MONJALLON, 23, boulevard St-Germain, Paris (5°), ou à le remettre à un délégué de leur choix, membre de l'Association. [Si le nom du délégué est laissé en blanc, il sera choisi par le président]. Rayer l'alinéa *a* pour donner au délégué le mandat impératif constitué par l'alinéa *b*).

Nom et prénom :

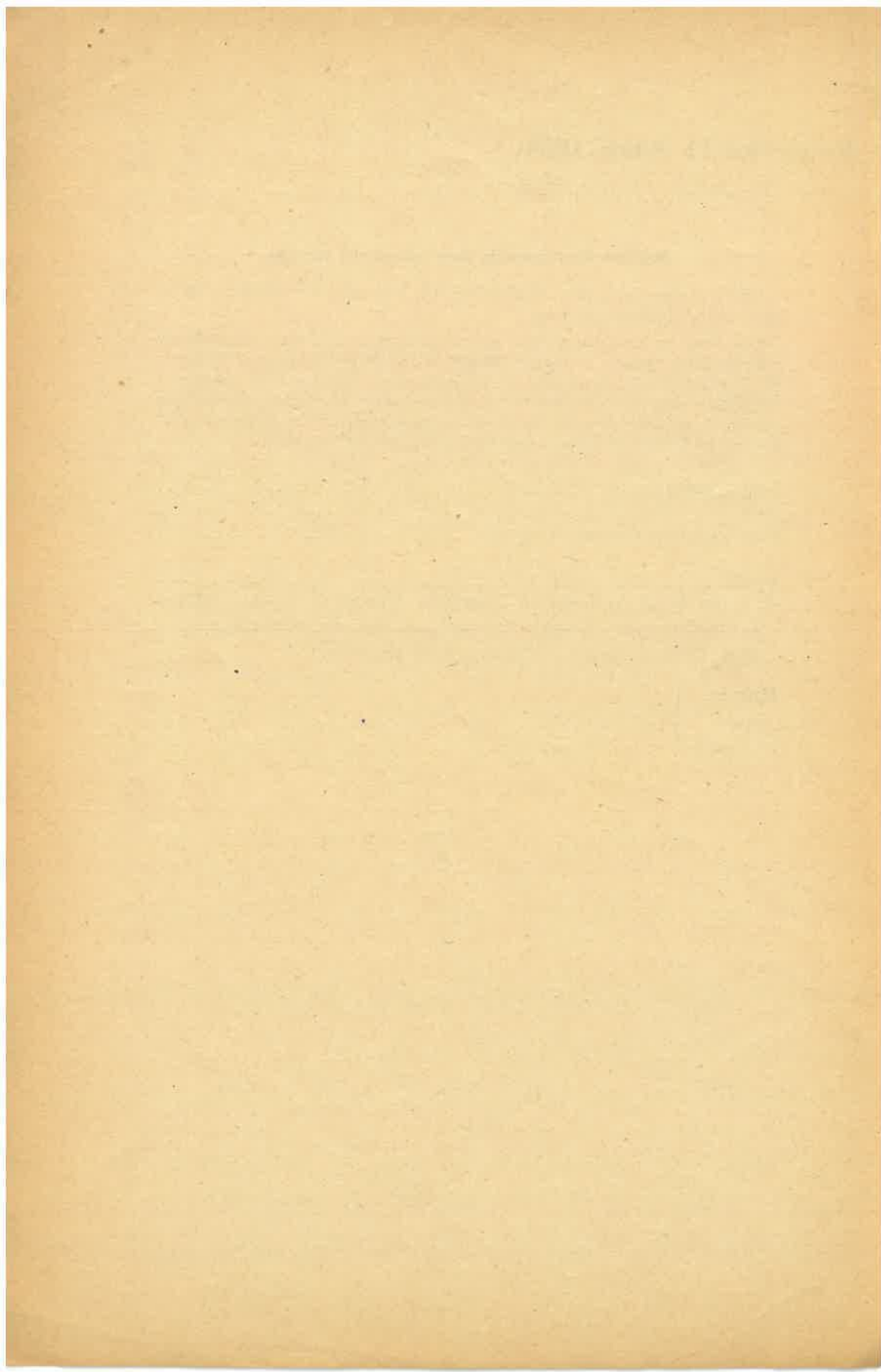
Etablissement et fonction en 1953-54 :

prie M.
de le (ou de la) représenter à l'Assemblée générale du 11 avril 1954, et

a) l'invite à voter à sa place, en s'inspirant des indications ci-après :

b) lui donne le mandat impératif de voter comme suit :

Dater et {
signer {
ci-contre : {



Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

I. Assemblée générale ordinaire de 1954

Convocation

Conformément à l'article V des statuts, l'Assemblée générale aura lieu le

**Dimanche 11 avril 1954, à huit heures et demie
au Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris 5^e**

Le présent avis tient lieu de convocation. Les membres de l'Association sont priés d'apporter le présent *Bulletin*, ainsi que les *Bulletins* précédents. Ils voudront bien remettre en séance, ou faire parvenir pour le 25 avril 1954 au plus tard, un résumé de leurs interventions, s'ils veulent être sûrs qu'il en sera fait état.

Ordre du jour

- 1^o Rapport moral du Président.
- 2^o Compte rendu financier de l'exercice 1953-54.
- 3^o Les sujets de compositions de mathématiques et les épreuves orales aux divers examens et concours.
- 4^o Commission Châtelet.
- 5^o Classes-pilotes et travaux dirigés en Sixième et Cinquième.
- 6^o Examen d'entrée en Sixième.
- 7^o Elections au Comité : dépouillement du scrutin.

Préparation de l'Assemblée générale

Les membres de l'Association qui désireraient envoyer leur contribution à l'étude des questions inscrites ou non à l'ordre du jour, dont ils trouveront les rapports dans le présent *Bulletin*, sont priés de vouloir bien les faire parvenir, soit au Président M. MONJALON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris 5^e soit aux Rapporteurs.

Ils trouveront encartés, au milieu de ce *Bulletin*, les feuillets de réponse et bulletin de vote nécessaires.

II. Avis important

Nous nous excusons auprès des membres de l'Association de certaines irrégularités constatées dans la distribution du *Bulletin*. Elles ne sont pas le fait des membres du Bureau chargés de l'expédition du *Bulletin*. Certaines d'entre elles sont dues à des membres ayant oublié de signaler en temps opportun leur changement d'adresse ou ayant omis de verser leur cotisation avant le 31 décembre, comme nous l'avions expressément demandé.

Cependant certaines erreurs ont eu pour cause le jeu de plaques servant à imprimer les adresses sur les bandes d'envoi. Nous avons en effet relevé l'absence de plaque pour quelques membres nouvellement inscrits, inconvénient qui n'était malheureusement pas compensé par l'existence de deux plaques au nom d'anciens adhérents dont quelques-uns n'ont d'ailleurs pas encore payé leur cotisation pour 1953-54.

Nous signalons, à toutes fins utiles, que depuis octobre 1953, il a été publié trois *Bulletins*, le n° 158, le n° 159 (fascicule d'énoncés B.E.P.C.) et le n° 160. Etant donné que nous sommes obligés de fixer chaque fois un chiffre de tirage n'excédant que de peu le nombre réel des adhérents, certains numéros se trouvent épuisés. Nous demandons instamment aux membres de l'A.P.M. ayant reçu des *Bulletins* en double exemplaire de vouloir bien retourner le second exemplaire au 29, rue d'Ulm, Paris, 5°, afin de nous permettre de les distribuer à ceux qui ne les ont pas reçus. Nous leur adressons nos remerciements anticipés.

Le Président.

III. Réunion du Comité

18 février 1954

Présents : Mlles AFFRE, DIONOT, MASSON ; MM. GIRARD, GIRAULT, ITARD, JACQUEMART, LEGRAND, MINOIS, MONJALLON, PÉTRUS, ROSTOLLAND.

Excusés : Mlle BARBIER ; MM. BENOIST, CROZES, DURRANDE, MAILLARD, THOVERT.

La séance est ouverte à 16 h. 45.

Questions diverses. — Le Président fait part du décès de deux collègues : M. SINGIER, membre du Comité, professeur au Lycée Saint-Louis, et Mme FROMENT, professeur au Lycée La Fontaine, qui a participé à de nombreuses études pédagogiques organisées par l'A.P.M. Il a transmis à leurs familles les condoléances de l'Association.

— Une société belge des Professeurs de Mathématiques vient de se former tout récemment. Son Président, M. W. SERVAIS, a fait adresser à M. MONJALLON le premier numéro du *Bulletin* de la Société et lui a exprimé le désir de faire partie de l'A.P.M. Bien que le cas ne soit pas prévu par nos statuts, le Comité, sur la proposition de son Président, estime qu'il est possible d'admettre M. SERVAIS à titre personnel comme « membre correspondant » de l'A.P.M.

— Le centenaire de la naissance de l'illustre mathématicien Henri POINCARÉ sera commémoré officiellement en mai prochain. Le Président, estimant que nous devons nous associer aux manifestations qui auront lieu, s'est mis en rapport avec M. JULIA, professeur à la Sorbonne, Président du Comité d'organisation, et M. l'Inspecteur général DESFORGE. M. MONJALLON a le dessein d'organiser au Musée Pédagogique une réunion des membres de l'A.P.M. Une conférence serait prononcée par M. GARNIER, professeur de Géométrie supérieure à la Sorbonne. Une exposition sera organisée dans l'une des salles du Musée Pédagogique. Le Président signale que la commémoration officielle est prévue pour le samedi 15 mai, dans le grand amphithéâtre de la Sorbonne, sous la présidence de M. le Président de la République.

— Le Président fait part des diverses activités de l'Association et notamment du groupe qui se réunit à Sèvres chaque mois ; les sujets les plus importants sont : l'examen d'entrée en Sixième et la coordination entre Mathématiques et Physique. Il est demandé, à cette occasion, de voir les collègues réagir un peu plus vivement. M. MONJALLON, qui a assisté à l'Assemblée de la Régionale de Paris de l'Union des Physiciens, a constaté que nos collègues physiciens débattent avec ardeur les questions de programmes. Des journées d'études auront lieu cette année à Toulouse et en Sarre et il est question pour les Physiciens de préparer des journées d'études à Paris pour Pâques 1955.

— Une lettre de M. THOVERT — un exemple à suivre — lui est parvenue pour demander justement un surcroît d'activité sous la forme d'un *Bulletin* mensuel plus étoffé. Ceux qui s'occupent actuellement du *Bulletin* savent ce que cela coûte de temps et d'efforts, on ne peut leur demander raisonnablement davantage. D'autre part, est-on sûr de trouver des articles assez nombreux et intéressants. Enfin, il faut envisager aussi le coût d'une telle publication.

Préparation de l'Assemblée générale. — Tout d'abord, il y a la question du renouvellement du Comité : sept membres sont à élire en remplacement des six membres sortants : Mlle BARBIER ; MM. BENOIST, GIRAULT, JACQUEMART, MINOIS, RUFF et de M. SINGIER, décédé.

Le Président souhaite les candidatures de personnes dévouées, voulant bien consacrer quelques instants de loisir à notre Association, et demande à tous les collègues de vouloir bien lui proposer des noms.

Puis l'on parle des rapports à présenter à l'Assemblée générale. M. MONJALLON a déjà reçu de M. CROZES son rapport sur le groupe d'Axiomatique et de Redécouverte. Mlle MASSON accepte de présenter un rapport sur les classes-pilotes et les travaux dirigés en classes de Sixième et Cinquième. M. ROSTOLLAND fera le rapport sur les sujets de mathématiques au Baccalauréat 1953.

Un rapport sur les travaux de la Commission Châtelet sera demandé à M. CHAZAL, représentant l'A.P.M. au sein de cette Commission. L'Assemblée générale sera consultée sur les travaux de cette Commission.

Examen d'entrée en Sixième. — A la demande du Président, Mlle DIONOT a préparé un rapport détaillé sur les travaux du groupe des mathématiciens de Sèvres au sujet de cet examen. Quelques améliorations souhaitées par l'A.P.M. prendront peut-être corps cette année.

1° Il a été demandé de remettre à l'après-midi l'épreuve de calcul qui avait lieu en fin d'une matinée allant de 8 heures à 12 h. 30, ce qui est trop pour des enfants dont l'âge moyen est 10 ans.

2° Les sujets seront imprimés et distribués aux élèves ; ils leur seront lus au lieu d'être dictés.

3° On souhaite le remplacement du premier problème par trois ou quatre opérations indépendantes données sur une feuille à part, laquelle sera relevée au bout de 20 minutes. A la suite d'une enquête sur 18 classes, malgré une notation brutale, les résultats ont été satisfaisants. Le second problème, destiné à déceler la connaissance du sens des opérations et les qualités de réflexion et de raisonnement, doit avoir une rédaction accessible à des enfants de 10 ans et ne porter que sur des sujets familiers. Puis il est proposé un programme limitatif ne comportant, ni règle de trois, ni problèmes de rencontre entre deux ou plusieurs mobiles, ni des fractions compliquées.

Ce rapport provoque quelques observations : M. MINOIS voudrait que les opérations destinées à vérifier l'acquisition des mécanismes soient assez nombreuses si la notation devait en être brutale. M. JACQUEMART signale le grand inconvénient présenté par le manuel, généralement utilisé dans les classes de Septième et Huitième : il comporte le même texte explicatif et ne diffère que par les exercices. C'est là une erreur pédagogique considérable à un âge où l'esprit des enfants évolue très rapidement.

Enfin M. LEGRAND signale que l'état des finances de l'Association est satisfaisant.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée à 19 heures.

P.-S. — On pourra lire dans ce *Bulletin* les rapports de Mlle DIONOR sur l'examen d'entrée en Sixième, celui de Mlle MASSON sur les travaux dirigés en Cinquième et Sixième, et celui de M. CROZES sur le groupe Axiomatique et Redécouverte.

IV. Préparation de l'Assemblée générale Pâques 1954

Commission Châtelet

La Commission interministérielle d'étude des programmes scientifiques s'est réunie le 28 février 1952 pour créer plusieurs Sous-Commissions, notamment :

— une Sous-Commission A, chargée d'élaborer les programmes des classes A1 et A2 (à dominante mathématique) pour les mathématiques, la physique et la chimie ;

Une Sous-Commission B, pour les classes B1 et B2 (à dominante physique).

Les Sous-Commissions A et B, réunies le 3 mai 1952, ont effectué un travail préliminaire ayant pour but de mettre en lumière les idées générales qui doivent diriger la rédaction des programmes. Deux nouvelles Sous-Commissions ont alors été créées, l'une pour l'examen des programmes de mathématiques, l'autre pour l'étude des programmes de physique et chimie.

La Sous-Commission mathématique a commencé ses travaux le 17 mai 1952 et les a poursuivis durant les différentes périodes scolaires, à raison d'une séance par quinzaine.

Les deux premières réunions ont été consacrées à la fixation approximative du nombre de classes de deux heures, prévues pour l'enseignement des diverses parties du programme.

La Sous-Commission a pris comme base de discussion le projet établi par la Société Mathématique de France, qui, dans ses grandes lignes, est celui établi par la Commission de Propédeutique de l'A.P.M.E.P.

La rédaction provisoire des programmes est presque achevée. Il n'est pas possible dans ce rapport de reproduire le détail des programmes.

Par ailleurs, il reste entendu que l'ordre adopté dans la suite des chapitres, et à l'intérieur de chacun d'eux, n'implique en rien une obligation pour les professeurs de suivre cet ordre. Voici quelques nouveautés proposées :

I. *Algèbre et analyse.*

1) Introduction de la notion de corps à propos des corps des nombres rationnels, des nombres réels, des nombres complexes.

2) Identité de Bezout.

3) Etude des suites.

4) Emploi possible de la notion de fonction convexe.

5) Notion de fonction multiforme d'une variable.

6) Condition pour que $Pdx + Qdy + Rdz$ soit une différentielle totale.

7) Définition précise de l'intégrale définie (au sens de Riemann).

8) Equations de Bernoulli, de Riccati, dont on donne une intégrale particulière, $f(x, y, y') = 0$, lorsque la surface $f(x, y, z) = 0$ peut être représentée paramétriquement ; équations de Clairaut, équations du deuxième ordre se ramenant au premier ordre, équations à coefficients constants dont le deuxième membre est de la forme $P(x)e^{ax}$.

9) Usage des tables de fonction, du papier millimétrique.

10) Espace vectoriel ; — notation des matrices ; — matrice carrée régulière ; — matrice rectangulaire.

En B seulement :

1) Valeur efficace, intégrales doubles et triples.

2) Champ de vecteurs — angle solide — transformation d'une intégrale curviligne en intégrale double, d'une intégrale de surface en intégrale triple.

3) Calcul des coefficients d'une série de Fourier.

4) Arrangements et combinaisons avec répétition. Probabilités.

II. *Géométrie.*

1) Produit mixte ; axe central ; equiprojectivité d'un champ de moments.

2) Vecteurs fonction d'une variable.

3) Torsion ; formules de Frenet.

4) Notion de dualité : équation tangentielle ; classe.

5) L'étude des centres, diamètres, plans diamétraux dans les courbes et surfaces du deuxième ordre, sera faite par application des propriétés projectives générales.

Les théorèmes d'Apollonius, le problème des normalismes d'un point, les sections circulaires ne figurent pas au programme.

III. *Descriptive.*

Dans sa séance du 3 mai 1952, la Sous-Commission avait admis que l'enseignement de la géométrie descriptive devait être considéré comme un complément de l'enseignement de la géométrie analytique, et que, dans ces conditions, rien ne s'opposait à l'indication, dans le programme, des questions à étudier.

Ont été supprimés du programme actuel :

les problèmes sur la droite et le plan ;

plans tangents à une sphère issus d'une droite ; droites réciproques ; intersection des prismes et pyramides ;

problèmes d'ombres ;
surfaces de révolution d'ordre > 2 dont l'axe n'est pas perpendiculaire à un plan de projection ;
intersection d'une droite et d'une surface de révolution ;
plans tangents issus d'une droite ;
paraboloïde hyperbolique à plans directeurs quelconques ;
intersection avec une droite ;
tore à axe incliné ;
développement des cônes et cylindres.
Il n'y a pas de géométrie descriptive dans la section B.

IV. Mécanique.

La nouvelle rédaction comporte :

- 1) Centre instantané de rotation.
- 2) Théorème du centre d'inertie.
- 3) Théorème du moment cinétique dans un mouvement de rotation.
- 4) mouvement d'un point matériel dans un champ uniforme avec résistance proportionnelle à la vitesse.
- 5) Mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe, sans frottement dans les cas d'intégration élémentaire ; pendule simple.
- 6) Exercices d'équilibre d'un solide ou d'un système de solides dans le cas de liaisons simples et sans frottement (axe fixe, poutre sur deux appuis, pont-levis, arc à trois rotules).

En B seulement :

- 1) Ellipsoïde d'inertie.
- 2) Distribution des vitesses dans le cas général.

Les opérations élémentaires sont supprimées.

Les programmes sont rédigés de la façon la plus explicite, en précisant aussi exactement que possible leurs limites, et en indiquant dans certains cas, les questions qui doivent être exclues de ces programmes. Pour ne pas surcharger la rédaction, certaines questions feront l'objet de commentaires (exemples : segment, intervalle...). Certaines questions figureront uniquement dans les classes A1 et B1, mais il est entendu que les élèves devront savoir utiliser les résultats relatifs à ces questions ; exemples : analyse combinatoire, notions affines sur les vecteurs...

La coordination entre classes préparant aux Grandes Ecoles et Propédeutique sera examinée par la Commission.

Il va de soi que les indications sommaires précédentes pourront être complétées au cours de l'Assemblée générale de l'A.P.M. Mais, dès maintenant, j'invite tous les collègues que la question intéresse à m'adresser leurs remarques et vœux.

CHAZAL.

Ecrire à : M. CHAZAL, professeur au Lycée St-Louis, 44, boulevard St-Michel, Paris (6^e).

Rapport sur les Epreuves de Mathématiques au Baccalauréat en 1953

Le « sujet unique » a sans doute un avantage : le travail du « Rapporteur » est simplifié ! Et si « le » sujet (qui comporte cependant divers membres) était bon, ce serait vite dit. Mais, comme chacun sait, il y a au moins un sujet qui n'était pas bon, qui a alimenté pas mal de conversations, provoqué quelques articles (trop peu à mon gré), et, ce qui est plus grave, a causé bien des déceptions aux candidats et à leurs professeurs. C'est le problème proposé en juin à la 2^e partie. Cinq textes

avaient été retenus par une Commission ministérielle. Quelques heures seulement furent laissées à un collègue pour les examiner. Puis « on » choisit au hasard l'un des cinq : le sort fut peu favorable.

De l'avis unanime, ce sujet était mal posé et trop difficile. Il provenait semble-t-il d'un ancien problème proposé au concours des Arts et Métiers ; on a voulu le défigurer sans doute, d'où un manque total d'harmonie et des prolongements possibles que l'on devine, mais qui, ayant été supprimés, ne peuvent conduire qu'à des impasses. Ainsi, dès le début, les cercles passant par O et tangents à D' font penser à une parabole qui ne conduit à rien. De même, dans la 2^e partie, la figure est celle des théorèmes de Dandelin, mais ce point de vue est sans intérêt ; on consultera à ce sujet l'article de M. MOURON, dans le *Bulletin* n° 160.

M. QUEYANNE a fait des observations très intéressantes : « Dans les deux premières parties, sauf pour le lieu de B et de P, le point A et les deux cercles n'interviennent pas, il suffisait de poser les questions pour un cercle passant par O et tangent à D' et de demander de montrer que MN passe par un point fixe et que MT enveloppe un cercle fixe. » Il remarque, à un autre point de vue, que le lieu de P résulte d'une involution sur D : la division (MM'A ∞) étant harmonique, si l'on désigne par m, m', a, I' , les tangentes issues de ces points au cercle de centre I passant par O, la polaire mm' de P passe par le pôle de I'a. Or, cette propriété est vraie si on remplace le cercle par une conique quelconque. Elle se retrouve d'ailleurs dans la 3^e partie. On peut dire évidemment que les élèves ayant quelques souvenirs sur le quadrilatère harmonique pouvaient y penser..., et qu'on pouvait faire autrement, mais avouons franchement qu'une solution plus élémentaire était difficile à trouver.

J'ajouterai pour finir que, ce qui semble paradoxal, on pouvait, à part l'inversion du 3^e, n'utiliser que des connaissances du programme de Seconde : puissances, axes radicaux, angles inscrits, et quelques notions sur l'homothétie. Les meilleurs élèves ont été déroutés : tout leur savoir était inutile.

En ce qui concerne les autres sujets, il y a, heureusement, moins à dire :

Pour la 2^e Partie : le problème proposé à la Martinique en septembre comporte une troisième question enfantine : H est le centre d'un carré de diagonale AO, on

demande de calculer $\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AH}}$, puis de construire O connaissant H. Cela en vue de la quatrième question où l'on indique une méthode qui n'apparaît pas clairement et dont on peut se passer. Je crois que le problème aurait paru plus facile si l'on avait supprimé la 3^e partie et laissé le candidat libre de trouver sa méthode.

La deuxième question de cours est à rapprocher de la première de la Réunion, à la même session, où l'on demande seulement de résoudre l'équation :

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

c'est trop court.

Pour la 1^{re} Partie : je suis heureux de signaler l'excellent problème proposé à la Martinique (juin, série C.M.) : il porte à peu près uniquement sur les droites et plans perpendiculaires, il est intéressant et surtout de difficulté bien graduée.

Celui de la Martinique (septembre, série C.M.) est moins heureux ; il est long, relatif à une famille de paraboles, et me semble calqué sur bien des problèmes qui sont mieux à leur place en 2^e Partie.

Au sujet des questions de cours, je relèverai seulement la deuxième question posée, pour la France Métropolitaine, en septembre (série B). On demande de définir la longueur de la perpendiculaire OA et de l'oblique OB menées de O à un plan. S'agit-il de définir la longueur d'un segment, ou de dire seulement qu'il s'agit des segments OA et OB ?

R. ROSTOLLAND.

Rapport sur les classes pilotes et le travail dirigé en 5^e et 6^e traditionnelles

Les classes-pilotes prolongent dans une certaine mesure l'expérience des classes nouvelles. J'attends actuellement quelques lettres de collègues enseignant dans ces classes ; mais elles ne me sont point parvenues à temps pour satisfaire aux exigences de l'impression de ce *Bulletin*. J'espère d'ailleurs que de nombreux membres de l'A.P.M. voudront bien faire part de leurs impressions sur ces classes et qu'un échange de vues s'établira ultérieurement sur l'enseignement des mathématiques dans ces sections.

Les collègues que j'ai pu consulter, actuellement, estiment que le travail dirigé est l'intérêt essentiel de ces classes pour l'enseignement des mathématiques.

En Sixième, Cinquième, Quatrième, Troisième, l'horaire est le suivant : deux heures hebdomadaires de cours et une heure hebdomadaire de travail dirigé par demi-classe. Obtenir la possibilité d'effectuer au moins, dans les classes du Premier Cycle, du travail dirigé, c'est un but que l'A.P.M. s'est assigné depuis plusieurs années déjà. Le témoignage des collègues ayant enseigné dans les classes nouvelles et dans les classes-pilotes nous encourage dans cette direction.

Or, depuis deux ans dans les classes traditionnelles de Sixième et de Cinquième, une très modeste possibilité nous est offerte. En attendant mieux, il serait utile :

1° de documenter exactement les collègues sur ce qu'ils peuvent obtenir au point de vue horaire en ce sens ;

2° de savoir avec précision ce qui a été réalisé pratiquement dans un assez grand nombre d'établissements.

D'après une circulaire parue dans le *B.O.*, n° 25, du 5 juin 1952, l'ensemble des professeurs d'une équipe de Cinquième ou de Sixième dispose de 20 heures de travail dirigé par an. C'est fort peu.

Mais une circulaire (*B.O.*, n° 44, du jeudi 4 décembre 1952) élargit en fait les possibilités d'une façon appréciable. Huit conseils de classe, en plus des quatre tenus obligatoirement dans toutes les sections, sont maintenant prévus en Sixième et Cinquième traditionnelle. Or quatre seulement sur huit sont obligatoires. Si les quatre autres n'ont pas lieu, une demi-heure par professeur, plus une heure pour le chef d'équipe, sont ainsi économisées ; il est possible de les convertir en travail dirigé.

D'autre part, si une économie est réalisée sur les 18 heures prévues pour l'étude du milieu, elle peut aussi être portée au compte du travail dirigé.

C'est ainsi un total de plus de 50 heures qui est en fait à la disposition d'une équipe et pour diverses raisons les collègues ne désirent pas tous participer à la répartition de ces heures.

Le fait d'ailleurs que leur place n'est pas prévue à l'emploi du temps au début de l'année ne rend pas toujours leur utilisation facile.

Pour les élèves, le travail dirigé risque d'être relégué en fin d'après-midi à une heure peu propice aux mathématiques, et pour les collègues, ces heures risquent de menacer fâcheusement les libertés que leur laissait l'emploi du temps.

L'A.P.M. désirerait faire une enquête parmi les collègues enseignant en Sixième et Cinquième sur les points suivants :

1° Combien d'heures de travail dirigé avez-vous pu effectuer pendant le premier semestre dans vos classes de Sixième et de Cinquième ?

2° Combien espérez-vous en faire au deuxième semestre ?

3° Que vous manquera-t-il alors pour réaliser ce que vous auriez estimé souhaitable dans ce domaine ?

M. MASSON.

Prière d'adresser les réponses à Mlle M. MASSON, Vice-Présidente de l'A.P.M., E.P., 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris, XIV^e.

Examen d'entrée en Sixième

CENTRE INTERNATIONAL D'ÉTUDES PÉDAGOGIQUES DE SÈVRES

GROUPES D'ÉTUDES DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES

Des entretiens, groupant des maîtres de Cours moyen, des professeurs de Septième, des professeurs de l'Enseignement du Second Degré, et une enquête organisée par eux dans dix-huit classes de Septième et Cours moyen deuxième année, comprenant 608 élèves, ont fait apparaître la nécessité de proposer quelques modifications au régime de l'examen d'entrée en Sixième, sans toucher, pour le moment, au programme des classes et au règlement général de l'examen.

A) CONDITIONS MATÉRIELLES.

Il est impossible d'imaginer que des enfants de dix ans, levés tôt et dépayés, puissent faire un effort d'attention efficace pendant toute une matinée (1).

Il en résulte, en particulier, que la dernière épreuve, celle de calcul, est sacrifiée. Il est souhaitable que cet effort soit allégé :

1° *en reportant à l'après-midi l'épreuve de calcul*, ce qui permettra de commencer plus tard la séance du matin, évitant aux enfants éloignés un lever trop matinal et certaines difficultés de transport. La nécessité, pour eux, de déjeuner sur place n'est pas une objection valable, puisque, dans l'organisation actuelle, la fin tardive des épreuves les y oblige ;

2° *en distribuant à chaque candidat les textes de problèmes imprimés ou dactylographiés*, ce qui gagnera du temps, diminuera la fatigue et évitera des erreurs.

B) CHOIX ET DURÉE DES ÉPREUVES.

Les professeurs qui préparent à l'examen d'entrée en Sixième et ceux qui enseignent dans cette classe sont d'accord sur les buts de l'épreuve de calcul : contrôler les mécanismes de calcul et la connaissance du sens des opérations ; déceler les capacités d'attention et de réflexion nécessaires pour les études ultérieures, qu'on peut attendre d'un enfant de dix ans.

Ils pensent qu'il y a intérêt à dissocier ces trois points pour donner à chaque candidat le moyen de révéler le mieux possible ses connaissances et ses aptitudes.

PREMIER PROBLÈME. — A l'unanimité, on propose de *remplacer le premier problème par une série de trois ou quatre opérations indépendantes*.

Il n'est guère possible, en effet, de donner dans un problème des opérations qui soient, à la fois, indépendantes les unes des autres et assez difficiles pour permettre de contrôler l'acquisition des mécanismes.

Ces opérations seront données, à chaque candidat, sur une première feuille, qui sera relevée au bout de 20 minutes. L'enquête portant sur l'exemple suivant :

Effectuer les opérations suivantes :

$$382 + 48,5 + 3,04 + 0,072 + 52 + 71,2 + 145,$$

$$39,47 \times 230,7,$$

$$18,985,58 : 592 \text{ (à un centième près),}$$

a montré que ce nombre d'opérations et cette durée sont satisfaisants.

En majorité, les maîtres estiment que la notation ne peut pas être nuancée, et qu'un résultat faux, quelle que soit la nature de la faute, doit être noté zéro.

(1) Arrêté du 8 septembre 1947 :

1° Dictée et questions : 40 minutes *non compris* le temps de la dictée.

2° Compte rendu de lecture et questions : 40 minutes *non compris* le temps de la dictée.

3° Problèmes : 40 minutes.

DEUXIÈME PROBLÈME. — L'épreuve précédente permet alors de dégager le second problème de tout souci opératoire, grâce à des données numériques simples, et de l'utiliser uniquement pour mettre en évidence la connaissance du sens des opérations et les qualités de bon sens et de réflexion.

Une durée de 40 minutes pourrait être attribuée à ce problème, grâce à l'économie de temps faite en ne dictant pas l'énoncé, qui sera donné sur une deuxième feuille.

L'enquête, citée plus haut, a porté sur un choix de six problèmes, volontairement assez classiques, de types variés.

N° 1. — On recouvre avec des carreaux de faïence de forme carrée, une partie de mur rectangulaire de 1 m. 35 sur 90 cm. Chaque carreau mesure 15 cm. de côté.

- 1) Calculer le nombre de carreaux nécessaires.
- 2) Les carreaux du pourtour sont bleus, les autres blancs. Calculer le nombre de carreaux bleus.
- 3) Les carreaux bleus valent 60 fr. pièce, les blancs 32 fr. pièce. Quelle sera la dépense totale ?

*
**

N° 2. — La surface d'un tapis rectangulaire est de 12 m² 60. On enlève, dans le sens de la largeur une bande de 1 m. 45 de large et la surface n'est plus que les 9/10 de ce qu'elle était auparavant. Quelles étaient les dimensions primitives du tapis ?

*
**

N° 3. — Parti de chez lui à 9 h. 30 mn., un automobiliste roule à la vitesse de 56 km. à l'heure. Lorsqu'il s'arrête, à 11 h. 45 mn. pour déjeuner, il a parcouru les 3/5 de sa route.

- 1) Quelle distance a-t-il parcourue ?
- 2) Quelle est la longueur totale de son trajet ?
- 3) Dites à quelle heure il arrivera à destination s'il se remet en route à 14 h. 45 mn., et conserve la même vitesse horaire que le matin.

*
**

N° 4. — J'ai acheté un poulet et un lapin pour 1.296 fr. Le prix du poulet étant le double de celui du lapin, quel est le prix de chaque bête ?

Je pèse le poulet et je constate qu'en mettant à côté de lui, sur le plateau de la balance un poids de demi-kg., un de 10 gr. et un de 5 gr., il y a équilibre avec le poids de 2 kg. placé dans l'autre plateau. Quel est le prix d'un kilogramme de poulet ?

*
**

N° 5. — Un marchand achète pour 68.400 fr. deux pièces de drap de même qualité.

- 1) Calculer le prix de chaque pièce sachant que le prix de l'une est le triple du prix de l'autre.
- 2) Il revend 12 m. de ce drap pour 13.680 fr. en gagnant 190 fr. par mètre. Quel était le prix d'achat d'un mètre de ce drap ?
- 3) Quel nombre de mètres de drap le marchand avait-il acheté en tout et quelle était la longueur de chaque pièce ?

*

N° 6. — Un avion va de Paris à Dakar avec arrêt à Casablanca. Il parcourt de Paris à Casablanca 1.925 km., et de Casablanca à Dakar 2.600 km.

1) A Paris 40 voyageurs ont pris l'avion. A Casablanca 15 d'entre eux sont descendus et ne sont pas repartis et 7 nouveaux passagers ont pris l'avion. Chaque passager paie 15 fr. par km. parcouru. Quelle est la somme totale reçue par la Compagnie ?

2) L'avion part de Paris à 8 h. 15 min. et arrive à Casablanca à 11 heures. Quel est le nombre de kilomètres parcourus en une minute ? Quelle est la vitesse horaire moyenne ?

Les résultats ont été les suivants :

Problème n° 1	réussi par	23 %	des élèves,
» n° 2	»	35 %	»
» n° 4	»	54 %	»
» n° 5	»	54 %	»
» n° 6	»	45 %	»

Pour le n° 3, le trop petit nombre de résultats ne rend pas valable un calcul de pourcentage.

Après une étude des résultats, et des difficultés rencontrées par les candidats conduisant à une critique des énoncés proposés, il apparaît qu'un texte de problème doit, avant tout, remplir les conditions suivantes :

- 1) ne faire appel qu'à des faits de la vie pratique connus des enfants ;
- 2) poser des questions successives pour ne laisser au candidat qu'un petit nombre de liaisons à trouver seul ;
- 3) introduire les données au fur et à mesure des besoins ;
- 4) ne comporter que des données numériques simples ;
- 5) être rédigé en langage simple, familier à l'enfant ;
- 6) conseiller, s'il y a lieu, de faire un dessin.

D'autres exercices seront composés d'après ces indications, et l'enquête se poursuivra jusqu'à la fin de l'année.

PROGRAMME LIMITATIF. — Les problèmes proposés dans les livres de Septième et Cours moyen montrent que le programme peut être développé avec excès et qu'il y aurait intérêt, pour éviter le surmenage et laisser plus de temps à l'acquisition des mécanismes du calcul, à préciser les limites dans lesquelles seront choisis les sujets d'examen.

En conséquence, nous proposons :

- 1) que les problèmes n'exigent pas la connaissance de la règle de trois, ce qui supprime automatiquement : pourcentages, intérêts, placements à court terme ;
- 2) que les problèmes de surfaces et volumes se bornent aux applications immédiates des formules de surfaces et volumes indiquées explicitement au programme ;
- 3) que les problèmes de mobiles ne fassent intervenir qu'un seul mobile ;
- 4) que, seule, à l'exclusion de toute règle d'opération, la notion des fractions simples, énumérées au programme, puisse être utilisée.

Pour le groupe :

Mme JAEGER (chef de groupe) et Mlle HUET,
professeurs au Lycée de Sèvres.

Définitions des mots et notations mathématiques

SYMBOLES D'UNITÉS. — La question reste posée, ainsi qu'en témoigne l'article de F. HÉRAUT paru au *Bulletin* de janvier 1954. Nous mènerons volontiers l'enquête suggérée par notre collègue. Rappelons, à ce sujet, la référence signalée par notre dernier rapport : Fascicule FD. X, n° 02 005 : Principes d'écriture, — Unités de mesure, — Symboles de grandeurs. Bureau de vente des normes, 19, rue du 4-Septembre, Paris, 2^e.

GRANDEURS. — La très vivante conférence de J. CHIAUVINEAU et la discussion très animée qui l'a suivie nous en révèle, dans toute son ampleur, la difficulté de l'étude des lois de composition grandorielles. Nous avons l'intention de poursuivre ce travail, mais en ce qui concerne nos classes de niveau moyen, nous rappelons la position prudente adoptée par notre dernier rapport : traduire le problème grandoriel par un problème numérique, traiter celui-ci en nombres abstraits, puis, au prix d'une nouvelle traduction, revenir au problème grandoriel proposé.

LONGUEURS. — Nos échanges de vue nous ont montré que des termes très familiers donnent cependant lieu à des interprétations différentes. Une brève enquête, faite au sujet du concept « longueur », nous en a révélé divers aspects.

1) *Longueur-segment* : Il était encore courant vers 1920 de tenir pour synonymes les mots « longueur » et « segment ». On préfère aujourd'hui les conceptions suivantes.

2) *Longueur-classe* : Le fait, pour deux segments, d'être superposables, est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive). Cette relation définit donc sur l'ensemble des segments une classification, on appelle « longueur » chaque classe d'équivalence.

3) *Longueur-nombre arithmétique* : On appelle « longueur » d'un segment l'opérateur qu'il faut appliquer au segment unité pour obtenir un segment égal au segment donné. Ce point de vue figure à la norme A.F.O.N.O.R. : NF. X, 02-102, où le terme (longueur) est accolé au terme « mesure arithmétique ».

Les diverses conceptions qui précèdent étant compatibles, leur pluralité ne présente aucun caractère dramatique, il convient cependant, lorsqu'on emploie le terme « longueur » de préciser le point de vue adopté. Une égalité telle que la suivante :

$$2,5 \text{ m.} = 2,5 \times 100 \text{ cm.}$$

montre en effet qu'un changement d'unité laisse invariante la longueur-classe, tandis qu'il modifie la longueur-nombre.

RAPPEL DES QUESTIONS À L'ÉTUDE. — Restent à l'étude les questions suivantes : le langage des symétries et transpositions, la définition du vecteur, la notion d'intersection sous sa forme la plus générale.

Ecrire à M. Y. CROZES, professeur au Lycée Henri-IV.

V. Commémoration du centenaire de la naissance d'Henri Poincaré

Le Gouvernement a décidé de commémorer solennellement, en mai prochain, le centenaire de la naissance du grand mathématicien français Henri POINCARÉ. M. Gaston JULIA, membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, a accepté la présidence du Comité d'organisation. Parmi les manifestations prévues, l'une des plus importantes est une cérémonie solennelle qui aura lieu dans le Grand Amphithéâtre de la Sorbonne, sous la présidence du Président de la République, le samedi 15 mai, à 15 heures. Une autre cérémonie aura lieu à Nancy, ville natale d'Henri Poincaré, le 22 mai.

M. JULIA désire vivement que la cérémonie solennelle réunisse le plus grand nombre de maîtres et de grands élèves (classes de Mathématiques, de Sciences expérimentales, de Philosophie, de Mathématiques Supérieures et classes préparatoires aux Grandes Ecoles). Des circulaires seront envoyées en temps utile par le Ministère et le Rectorat de Paris.

M. JULIA ayant exprimé le désir de voir les professeurs de mathématiques s'associer de façon étroite aux fêtes officielles. M. l'Inspecteur général DESFORGE a demandé au Président de l'A.P.M.E.P. de vouloir bien prendre contact avec le Président du Comité d'organisation. Nous avons rencontré M. JULIA le mardi 16 février. Il nous a dit qu'il souhaitait que les professeurs de mathématiques parlent à leurs grands élèves de l'œuvre d'H. POINCARÉ, dans la semaine officielle des cérémonies.

Voici les thèmes d'exercices qu'il nous a suggérés pour les classes de Mathématiques Spéciales :

I. Les transformations fuchsienues $Z = \frac{az + b}{cz + d}$, qui conservent l'intérieur d'un cercle (ou demi-plan). Classification : elliptiques, hyperboliques, paraboliques.

Notions élémentaires sur la géométrie non euclidienne de Poincaré-Lobatchefsky.

Projection stéréographique du plan Z sur une sphère pour que les points doubles, supposés distincts, viennent aux extrémités d'un diamètre.

Rotations de la sphère correspondant aux transformations elliptiques. Utilisation en physique (optique) de ces rotations.

II. Présentation, sur des exemples simples, des nœuds, des cols, des foyers, des centres des équations différentielles $dy/dx = f(x, y)$.

Pour répondre à l'invitation ainsi faite de nous associer aux solennités envisagées, le Président de l'A.P.M. projette de faire, avec l'aide du Musée Pédagogique, une exposition des œuvres et des souvenirs d'H. POINCARÉ. M. le Directeur du Musée Pédagogique nous a promis le concours le plus efficace de ses services. Une salle nous a été réservée, du jeudi 13 mai au jeudi 20 mai. A l'occasion de l'ouverture de cette exposition aurait lieu une réunion de l'A.P.M.E.P. M. R. GARNIER, membre de l'Institut, professeur de Géométrie supérieure à la Sorbonne, a bien voulu accepter de faire aux membres de l'A.P.M. une conférence sur la géométrie de Poincaré-Lobatchefsky.

Nous tiendrons les membres de l'A.P.M. au courant des cérémonies projetées et nous serions heureux de recevoir toutes suggestions les concernant. Adresser la correspondance à : A. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5^e).

VI. Documents officiels

Agrégation de Mathématiques (Hommes)

Rapport de M. l'Inspecteur général DONTOT, Président du jury (SESSION 1953)

Le jury était composé de M. DONTOT, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. MILLOUX, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, vice-président ; M. GAUTHIER, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy ; M. CAGNAC, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; M. DOLLON, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Louis-le-Grand.

EPREUVES ECRITES

Elles ont eu lieu les 1^{er}, 2, 4 et 6 juin.

Sur cent soixante-treize candidats inscrits, cent quarante-huit ont composé le premier jour, cent quarante-cinq le deuxième, cent trente-neuf le troisième, cent trente-six le quatrième et dernier jour.

Le jury, réuni le 1^{er} juillet, a proposé pour l'admissibilité les candidats ayant obtenu un total au moins égal à 32 (sur 80) pour l'ensemble des quatre épreuves. La liste des admissibles a compris 49 candidats, soit trois de plus qu'en 1952. La comparaison des épreuves avec celles de 1952 montre que la moyenne inférieure 8/20 est supérieure de 1 point à celle des épreuves de 1950, anormalement basse. Le nombre des candidats ayant effectivement remis quatre compositions a cessé de décroître ; il est de 136 en 1953, 137 en 1952, 167 en 1951, 170 en 1950. La diminution du nombre des candidats, sensible entre 1951 et 1952, semble due, comme l'indiquait M. ROBERT, Inspecteur général de l'Instruction publique, dans le rapport de l'année dernière, à la multiplication des concours de recrutement qui, de deux en 1950, sont passés à quatre en 1952. Le pourcentage des admissibles, pourcentage de candidats ayant subi les épreuves écrites en totalité, est passé de 25 % en 1950, à 36 % en 1953.

Cette augmentation du nombre des admissibles, en prolongeant la durée des épreuves orales, rend plus accablante encore la lourde charge du jury ; mais elle est la seule solution possible au problème du recrutement d'agrégés de Mathématiques en nombre d'ailleurs à peine suffisant pour pourvoir les seules chaires de Mathématiques Élémentaires et de classes préparatoires de nos établissements du Second Degré. Nul n'ignore les besoins dévorants de la recherche scientifique et de l'Enseignement Supérieur ; sur 11 élèves de l'Ecole Normale Supérieure reçus agrégés, un seul a demandé et obtenu un poste en 1953 ; il est donc indispensable, pour avoir des agrégés en nombre suffisant, d'allonger les listes de reçus, et ceci sans abaisser le niveau du concours ; il n'a paru possible de réaliser cette double condition qu'en permettant à un plus grand nombre de candidats d'affronter les épreuves orales, dans l'espoir qui s'est trouvé justifié que certains d'entre eux, placés dans de moins bonnes conditions de préparation que les élèves de nos Grandes Ecoles ou que les étudiants, soit parce qu'ils sont éloignés d'un centre, soit parce que professeurs déjà en exercice, instituteurs ou adjoints d'enseignement, ils poursuivent cette préparation en accomplissant leur tâche journalière, retrouveraient à l'oral une supériorité relative sur les autres candidats, due à leur expérience de l'enseignement et à des qualités pédagogiques brillantes.

La liste des admissibles en 1953 a compris sept professeurs des lycées, huit des collèges, quatre des établissements techniques, un des écoles normales, deux assistants des facultés, cinq stagiaires d'enseignement, un adjoint d'enseignement, un instituteur, soit au total vingt-neuf candidats participant à des charges d'enseignement ou de surveillance. Du côté des étudiants, onze élèves de l'Ecole Normale Supérieure de la

rue d'Ulm, un auditeur, cinq élèves de l'Ecole Normale Supérieure de St-Cloud, trois étudiants libres.

Parmi les quarante-neuf admissibles figuraient onze admissibles des sessions antérieures.

Les compositions écrites ont donné lieu aux observations qui suivent :

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Correcteur : M. DOLLON

I. — 1° Une tangente mobile à une conique à centre (Γ) rencontre en M et N deux tangentes fixes SA et SB touchant (Γ) en A et B, G et H sont les positions limites respectives de M quand N s'éloigne indéfiniment et de N quand M s'éloigne indéfiniment. Enfin F est l'un des deux foyers de (Γ).

Le théorème de Poncelet montrait sans peine que les triangles FGM et FNH sont directement semblables. Ayant choisi sur SG une direction d'axe quelconque, on sait ainsi lui associer sur SH une direction d'axe telle que $\overrightarrow{GM} > 0$ corresponde à $\overrightarrow{HN} > 0$ d'où la constance de $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{HN}$ (et même de $GM \cdot HN$) et occasionnellement le parallélisme de AB et GH.

Ainsi apparaît entre M et N une correspondance qui sera étendue à tout le plan.

Cette question fut traitée par la quasi-totalité des candidats avec des développements d'ailleurs plus ou moins opportuns.

2° Par contre, bien des candidats, et non des moins sérieux, furent arrêtés par cette question.

Nous adoptons les notations de l'énoncé. L désignant le point de rencontre autre que J de la droite JO avec le cercle (C), les points I, L, G, H formant sur ce cercle une division harmonique. Toute la suite découle de cette remarque.

Le théorème qu'on demandait d'établir n'est autre que le théorème de Faure : pour qu'un cercle soit harmoniquement circonscrit à une conique à centre, il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à un cercle fixe concentrique à la conique, lieu des points de rencontre de deux tangentes rectangulaires à cette conique. Nous en donnerons plus loin une raison simple.

II. — 1° La recherche des invariants signalés par l'énoncé était du domaine le plus scolaire. Il est navrant de constater qu'au niveau de l'agrégation les connaissances les plus répandues sur les angles de droites et les angles de vecteurs soient aussi méconnues. Il serait au moins d'une probité élémentaire de ne pas escamoter les difficultés, ce qui a été le cas dans un trop grand nombre de copies.

2° La transformation ponctuelle ($\mathcal{C}$) se décomposait aisément en le produit d'une inversion de pôle G par une rotation bien déterminée. Bien des candidats ont alourdi cette décomposition de ($\mathcal{C}$) d'une similitude hors de propos.

($\mathcal{C}$) conserve les angles de cercles ou droites, mais change leur orientation : cela vient du fait que l'inversion positive utilisée possède cette propriété et que la rotation conserve simultanément les angles et leur orientation.

L'énoncé ne précisant rien sur l'angle de deux cercles sécants donnés, le correcteur acceptait à l'avance les hypothèses adoptées par les candidats pourvu qu'elles soient clairement formulées.

($\mathcal{C}$) transforme la droite GS en la droite HS. Le cercle (C) circonscrit au triangle SGH et la droite AB s'échangent mutuellement dans la transformation ($\mathcal{C}$). La réduction de ($\mathcal{C}$) à laquelle il est fait allusion plus haut met facilement en évidence ce résultat.

Rarement cette étude a été menée à bien pour l'excellente raison que l'analyse initiale de ($\mathcal{C}$) avait été faite très superficiellement.

3° La droite AB est supposée couper le cercle (C) en deux points distincts I et J.

Deux cas de figures à examiner, selon que GH et SI (ou SJ) se coupent à l'extérieur du cercle (C) ou non. Le retour à la définition de $(\mathcal{C})$ montre que I et J sont deux points doubles de cette transformation, et les seuls, les conditions écrites pour leur existence étant nécessaires et suffisantes.

Nous savons que dans $(\mathcal{C})$ la rotation ne modifie pas les relations angulaires et métriques imposées par l'inversion (cf. II, 1°) ; ainsi, choisissant le groupe des quatre points I, J, m, m₁, dont les transformés sont les points I, J, n, n₁ par $(\mathcal{C})$, m₁

étant donné et m arbitraire, la constance de $(\overrightarrow{mI}, \overrightarrow{mJ}) + (\overrightarrow{nI}, \overrightarrow{nJ})$ et $\frac{\overrightarrow{mI}}{\overrightarrow{mJ}} : \frac{\overrightarrow{nI}}{\overrightarrow{nJ}}$ apparaît immédiatement.

Signalons maintenant que les points M et N (I, 1°) situés sur la tangente mobile à (Γ) sont tels que $GM.HN = GI.HJ$ et $(\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GI}) = (\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HN})$.

Les triangles GHI, NHI sont indirectement semblables. Les bissectrices des couples de côtés homologues ont même direction et les bissectrices de (IM, IN) restent invariables. Quand IM a la direction d'une telle bissectrice elle est confondue avec une tangente IMN à (Γ). Donc, dans le cas actuel, il existe deux tangentes réelles et rectangulaires à (Γ) issues de I (ou de J) et I, J sont deux points du cercle orthoptique de (Γ).

Revenant maintenant à l'énoncé on proposait l'étude du transformé par $(\mathcal{C})$ d'un cercle (U) passant par I et J.

Il était commode de repérer le cercle (U) par l'angle polaire de sa tangente par rapport à l'axe IJ. La réduction canonique de $(\mathcal{C})$ fait apparaître le cercle de diamètre ΩΩ' (Ω, Ω' extrémités sur (C) du diamètre perpendiculaire à IJ). Le rôle de ces tangentes a été vu par bien peu de candidats.

Les cercles de centres respectifs Ω et Ω' passant par I et J sont globalement invariants ; les cercles (U) et (V) sont échangés par chacune des inversions positives ayant les deux cercles invariants comme cercles d'inversion.

Une figure correcte montrait que la transmuée de $(\mathcal{C})$ par l'inversion de pôle I et de puissance IJ² est une similitude indirecte, produit d'une symétrie par rapport à un axe fixe par une homothétie positive de point double J.

4° La droite AB n'est désormais, ni sécante, ni tangente au cercle (C).

$(\mathcal{C})$ transforme la droite AS en la droite BS, change A en S, change la droite AB en un cercle passant par G et S : en précisant la tangente en S à ce cercle on constate qu'elle coïncide avec la tangente en S au cercle (C). Ainsi $(\mathcal{C})$ change la droite AB en le cercle (C). On peut de même appliquer $(\mathcal{C})^{-1}$ au cercle (C).

Envisageons le faisceau de cercles déterminé par (C) et AB : l'opération $(\mathcal{C})$ le conserve globalement. Les points limites I₁ et J₁ de ce faisceau sont, ou bien invariants, ou bien échangés. Un raisonnement direct, fondé sur des considérations angulaires, montre qu'il faut écarter l'invariance et les points I₁ et J₁ sont échangés.

La vérification directe de cette propriété, à partir des relations démontrées au II, 2°, est assez pénible, mais accessible.

Ces mêmes relations, appliquées au groupe de points I₁, J₁, m, m₁ et J₁, I₁, n, n₁, fournissent une construction du transformé n d'un point m donné connaissant I₁, J₁, m₁, n₁.

Enfin, par une inversion de pôle I₁ et de puissance I₁J₁² la transmuée de $(\mathcal{C})$ est le produit d'une rotation de centre J₁ par une inversion de même pôle J₁ (on peut d'ailleurs généraliser en envisageant une inversion de pôle I₁ et de puissance quelconque). Inversion et rotation sont permutable.

L'inversion de pôle J₁ peut être supposée positive en augmentant au besoin de π l'angle de la rotation. Il n'y a qu'un cercle invariant, donc dans $(\mathcal{C})$ également :

en effet, l'inversion de pôle I_1 remplace tous les cercles du faisceau de points limites I_1 et J_1 par des cercles concentriques de centre J_1 ; le cercle invariant dans la transmuée est l'un des cercles de centre J_1 et par suite dans $(\mathcal{C})$ un des cercles du faisceau de points limites I_1 et J_1 .

III. — 1° Nous avons signalé (I, 1°) la constance du produit scalaire $\vec{GM} \cdot \vec{HN}$ quand MN enveloppe (I') .

Reprenant la construction des tangentes à (I') issues de G au moyen du cercle directeur de centre F' et du cercle de centre G passant par F, φ désignant le symétrique de F par rapport à l'une de ces tangentes, on a : $\vec{GM} \cdot \vec{HN} = -\vec{G\varphi} \cdot \vec{GF'}$, et comme :

$$F'\varphi^2 = 4a^2 = G\varphi^2 + GF'^2 - 2\vec{G\varphi} \cdot \vec{GF'},$$

$$\text{ou} \quad -\vec{G\varphi} \cdot \vec{GF'} = 2a^2 - \frac{GF^2 + GF'^2}{2} = 2a^2 - \frac{2GO^2 + 2c^2}{2}.$$

La puissance de G par rapport au cercle orthoptique étant : $\vec{w} = GO^2 - R^2$ la propriété demandée est établie en prenant, soit $R^2 = a^2 + b^2$ (ellipse), soit $R^2 = a^2 - b^2$ (hyperbole).

2° Il suffit ici de construire la figure et d'utiliser par exemple le fait que la puissance d'un point M par rapport à un cercle de diamètre EF est égale à $\vec{ME} \cdot \vec{MF}$ pour établir rapidement la relation demandée.

Dès II, 3°, la plupart des candidats se sont trouvés à bout de souffle, aussi II, 3° et III n'ont-elles été traitées que par un nombre restreint de candidats. Dans l'ensemble cependant cette composition a donné une impression satisfaisante et a joué son rôle sélectif ; l'échelle des notes allant de 2 à 18.

Cependant, en dépit des observations déjà formulées dans les précédents rapports l'écriture est trop souvent négligée, l'orthographe scandaleusement méprisée ; il est nécessaire qu'une rédaction soit claire, intelligible, illustrée de figures soigneusement exécutées. Hélas ! les figures, ou bien ont été systématiquement supprimées, ou bien tracées à la hâte et sans aucun soin. Trop de copies sont, à proprement parler, si négligées qu'il est difficile d'admettre qu'elles sont l'œuvre de professeurs en exercice ou de candidats professeurs. Les notes se répartissent ainsi : 61 notes égales ou supérieures à la moyenne 10 ; 27 notes inférieures ou égales à 5,5. Les meilleures copies ont obtenu 18, 17, 16, 14, 14, 14.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Correcteur : M. CAGNAC

Une droite Δ coupant un cercle $\mathcal{C}$ en deux points P et Q, on demandait d'étudier la correspondance entre la droite Δ et l'orthocentre M du triangle OPQ (O non situé sur $\mathcal{C}$, ni confondu avec le centre Ω de $\mathcal{C}$).

**

1° L'existence de M, évidemment acquise par voie élémentaire, lorsque Δ est sécante à $\mathcal{C}$, demandait à être justifiée dans les autres cas, soit que Δ soit une droite réelle non sécante, soit que Δ soit tangente à $\mathcal{C}$, soit que Δ soit imaginaire. C'était l'occasion de rappeler que tout calcul élémentaire effectué sur des variables réelles représentant des éléments géométriques réels conserve sa validité lorsque ces variables prennent des valeurs imaginaires, et qu'elles représentent des éléments géométriques imaginaires.

Deux droites imaginaires conjuguées se coupent en un point réel ; quelques candidats croient que, réciproquement, si deux droites imaginaires se coupent en un point réel, elles sont conjuguées : qu'ils songent aux droites $y = ix$ et $y = 2ix$.

2° En déterminant Δ par l'équation normale $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ et

posant $\overline{OM} = r$, dans la direction orientée par θ , on obtenait aisément, en utilisant le symétrique M' de M par rapport à Δ , situé sur le cercle OPQ ,

$$(1) \quad r = \frac{h}{p} + 2p - 2a \cos \theta.$$

24 candidats seulement ont, d'emblée, défini Δ de la façon précédente ; 12 y sont arrivés plus ou moins tardivement. Ceux qui se sont donné Δ sous la forme $ux + vy + w = 0$ sont encore arrivés à des formules utilisables, mais que dire de ceux qui se sont donné $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$?

12 candidats ont calculé les coordonnées de P et Q à grand renfort de radicaux ; n'auraient-ils jamais encore médité sur l'usage des fonctions symétriques des racines d'une équation du second degré ?

32 candidats (sur 145 copies corrigées, soit 22 %) ont donné des valeurs inexactes pour les coordonnées de M et ont ainsi compromis tous leurs calculs ultérieurs : quand un problème de 7 heures repose sur le calcul initial des coordonnées d'un point, ce n'est pas « perdre son temps » que de contrôler l'exactitude de ces coordonnées, dans un cas numérique simple par exemple ; les 5 ou 10 minutes ainsi employées par le candidat sont « perdues » pour lui exactement comme les primes d'assurance contre l'incendie sont « perdues » par le propriétaire d'un immeuble.

Si, inversement, on donne $M(r, \theta)$, la formule (1) donne

$$F(p) = 2p^2 - (r + 2a \cos \theta)p + k = 0 \quad (2),$$

d'où deux droites $\Delta(p')$ et $\delta(p'')$ associées par $p'p'' = \frac{k}{2}$, droites réelles seulement si

$$(r + 2a \cos \theta)^2 - 8k \geq 0,$$

si $k < 0$, Δ et δ sont réelles,

si $k > 0$, Δ et δ ne sont réelles que si $|r + 2a \cos \theta| \geq 2\sqrt{2k}$ (3).

La majorité des candidats ayant défini M par ses coordonnées cartésiennes x_0, y_0 et Δ par l'équation $ux + vy + w = 0$, on pouvait obtenir Δ en posant $u = x_0, v = y_0$; w est alors racine de

$$2w^2 + w(2ax_0 + x_0^2 + y_0^2 + k(x_0^2 + y_0^2)) = 0 ;$$

la condition de réalité s'écrit ainsi :

$$(x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0)^2 - 8k(x_0^2 + y_0^2) \geq 0 \quad (4).$$

Parmi les candidats qui ont obtenu la condition (4), la moitié seulement a constaté que la ligne $\mathcal{L}$ visée par l'énoncé ($k > 0$) s'obtenait aisément en coordonnées polaires ; les autres ont renoncé en général à construire $\mathcal{L}$, les plus courageux ont considéré un trinôme bicarré en y_0 et ont discuté ses racines...

57 candidats seulement ont écrit la condition (3). Malgré les indications de l'énoncé, un tiers seulement de ces candidats a fait un effort pour dessiner les trois formes possibles que pouvait prendre $\mathcal{L}$.

Aucun candidat n'a fait observer que si $\mathcal{L}$ n'a pas de boucle ($R < \frac{d}{\sqrt{2}}$), $\mathcal{L}$ a nécessairement deux points d'inflexion.

16 candidats ont vu que si M est donné en O , Δ est une corde de $\odot$ vue de O sous un angle droit ; un seul d'entre eux a discuté la nature de la conique enveloppe Δ de ces droites Δ .

3° Supposons Δ tangente à $C(\Omega, b)$; $|a \cos \theta - p| = b$,

$$p = a \cos \theta + \varepsilon b \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$d'où \quad r = \frac{k}{a \cos \theta + \varepsilon b} + 2\varepsilon b \quad (5).$$

Trop peu de candidats ont eu l'occasion de réfléchir sur les coordonnées polaires et d'apprendre que chacune des équations

$r = -2a \cos \theta + 2\sqrt{2k}$ et $r = -2a \cos \theta - 2\sqrt{2k}$ représente la même courbe. De même, chacune des équations (5), avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, représente la même courbe C_1 , conchoïde d'une conique de foyer O.

Si l et i sont les projections de O sur les droites Δ et δ homologues de M, $\overline{Ol} \cdot \overline{Oi} = \frac{k}{2}$; par suite, lorsque $k > 0$, les points M, tels que Δ et δ soient confondues

sont homologues des tangentes au cercle $O \left(O, \sqrt{\frac{k}{2}} \right)$. Lorsque Δ enveloppe C, les positions pour lesquelles Δ est en outre tangente à O ont pour homologues les points de contact de $\mathcal{Q}$ et de C_1 (aucun candidat ne l'a vu).

Un seul candidat a observé qu'un point double de C_1 est homologue de deux tangentes à C, associées par la transformation $\mathcal{C}$.

4° M étant choisi de façon que Δ et δ soient réelles, on demandait si ces droites étaient sécantes à C. Elles ne le sont que si, p étant une racine de (2),

$$|a \cos \theta - p| < R, \quad \text{ou} \quad a \cos \theta - R < p < a \cos \theta + R.$$

On devait placer les racines de l'équation (2) par rapport aux nombres

$$\alpha = a \cos \theta + R, \quad \beta = a \cos \theta - R.$$

Aucun candidat n'a résolu cette question ; la plupart ne l'ont même pas abordée, s'avançant ainsi incapables de la traiter.

Un seul candidat a fait un effort sérieux pour aboutir : il a étudié correctement le signe de $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ suivant la position de M dans le plan. Mais dans les régions où $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ étaient positifs, il s'est borné à placer α et β par rapport à la demi-somme des racines, sans se soucier de la réalité des racines, nullement acquise pour

tout M, dans les hypothèses $R = \frac{a}{2}$ ou $R = \frac{a}{4}$; rappelons donc que la demi-somme des racines ne joue qu'un rôle épisodique, qu'elle n'est qu'un moyen de contrôle, qu'on peut la remplacer par tout nombre compris entre les racines, et que sa considération n'amène jamais la subdivision des régions déjà mises en évidence par l'étude du signe du discriminant, de $F(\alpha)$, de $F(\beta)$.

Quelques rares candidats ont signalé que $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ étaient nuls sur la courbe C, transformée de C comme C_1 l'est de C au I. 3° : C_1 est une conchoïde de conique. $\mathcal{Q}$ étant l'enveloppe des C et C étant l'un des C, l'étude du contact de C_1 et de $\mathcal{Q}$ était immédiate : pour $R = \frac{a}{2}$, C_1 et $\mathcal{Q}$ ont deux contacts réels ; pour $R = \frac{a}{4}$, C_1 et $\mathcal{Q}$ ont quatre contacts réels ; aucun candidat n'en a parlé.

La partie II a été abordée par la plupart des candidats. En appelant ρ et α les coordonnées polaires de μ , le lieu Σ de M a pour équation polaire

$$r = 2\rho \cos(\theta - \alpha) - 2a \cos \theta + \frac{k}{\rho \cos(\theta - \alpha)},$$

et on y a reconnu souvent la génération classique des cubiques circulaires à point double.

Aux tangentes issues de μ à Δ correspondent deux positions de M confondues avec O ; à la droite $O\mu$ correspond M à l'infini dans la direction perpendiculaire ; aux tangentes issues de μ à O correspondent les contacts de Σ avec $\mathcal{Q}$.

Félicitons les quatre candidats qui, pour trouver le lieu G, n'ont pas hésité à prendre pour nouvel axe OX la droite issue de O, d'angle polaire α , que décrivait μ .

Une dizaine de candidats ont obtenu correctement les coordonnées du point M, homologue du plan donné II, dans la partie III.

Quatorze candidats ont obtenu des notes égales ou supérieures à la moyenne ; les meilleures sont 16,5 ; 16 ; 15 ; 15 ; 14,5 ; 14 ; 13 ; 13 ; 12 ; 12 ; 11. Elles récompensent des solutions certes incomplètes, mais bien présentées ; résultats établis avec un minimum de calculs, rédactions convenables. Les auteurs de ces copies ont témoigné d'une connaissance très suffisante des coordonnées polaires.

Un candidat s'est signalé, et par l'ingéniosité des méthodes qu'il a mises en œuvre, et par la désinvolture avec laquelle il les a exposées (si l'on peut dire) ; souhaitons que les mémoires qu'il rédigera, tôt ou tard, soient d'un autre style.

Trop de copies malheureusement attestent l'ignorance de leurs auteurs en Géométrie analytique ; la moyenne générale de l'épreuve est 4,47 et quatre-vingt-onze candidats ont des notes inférieures ou égales à 5,5.

La faiblesse de ces résultats est certes due en grande partie au fait que de nombreux candidats n'ont fréquenté, ni les classes de Mathématiques Supérieures, ni les classes de Spéciales, mais elle est aussi la conséquence de singulières méthodes de travail. Nous avons signalé déjà que de très nombreux candidats négligent de vérifier leurs calculs, et en particulier les calculs préliminaires qui commandent ceux qui vont suivre ; une formule générale doit être exacte dans les cas particuliers et on devrait prendre soin de la vérifier dans un ou deux de ces cas. Ajoutons encore que les fautes d'homogénéité, parce qu'elles sont visibles, sont inadmissibles dans une copie de candidat ; elles révèlent une erreur comme un signal d'alarme prévient d'un accident ; elles devraient être corrigées ; or nous avons trouvé dans les copies nom-

bre de $1 + 16a^2$, $1 - 2a$, $k < \frac{a}{\sqrt{2}}$, $2x^2 - \frac{x^2}{y}$.. etc.).

Notons encore que les candidats négligent d'ordonner et de simplifier leurs calculs avant de les interpréter ; il en résulte des affirmations contradictoires et étonnantes ; un candidat ayant obtenu l'équation tangentielle

$$(2h^2 + r^2k)(u^2 + v^2) + 2uh(av^2 - uh) = 0,$$

déclare : « L'enveloppe de 4^e classe définie ci-dessus est une conique de foyer O. »

Un autre parle de deux limaçons de Pascal « qui ne forment qu'une seule et même courbe, car on a, dans l'un et l'autre cas, $r = -2(a \cos \theta \pm \sqrt{2k})$.

Un troisième venant d'obtenir ce même résultat écrit : « Equations de deux conchoïdes confondues car $r_2(\theta + \pi) = -r_1(\theta)$. »

Faut-il rappeler à des candidats professeurs, qui sont déjà en très grand nombre des professeurs, qu'un texte est fait pour être lu et qu'à la première lecture il doit être compris ? Qu'il est indispensable de rédiger très clairement un document écrit quel qu'il soit, parce que, justement, il est un document qui sera, non seulement lu, mais relu ? Faut-il leur rappeler aussi le principe cartésien ; ne rien affirmer comme certain qui n'ait été démontré tel. Dans trop de copies, le résultat est affirmé d'abord ; on tente ensuite de le justifier (en abusant de la conjonction : *car*) ; mais la tentative de justification met très souvent en évidence la fausseté de l'affirmation initiale ; celle-ci était donc prématurée. Mieux aurait valu ne conclure qu'après avoir démontré.

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL Correcteur : M. MILLOUX

Le problème consiste essentiellement dans l'étude de l'approximation d'une fonction réelle $g(x)$ de la variable réelle x , définie pour toutes les valeurs de cette variable, continue ou plus généralement intégrable au sens de Riemann, par une fonction

interpolatoire coïncidant avec $g(x)$ en des points de plus en plus resserrés sur l'axe des x . C'est donc avant tout un problème de la théorie des fonctions d'une variable réelle. Cependant, dans le but d'élargir le champ d'investigation des connaissances des candidats, la méthode proposée dans les deux premiers paragraphes ressort de la théorie des fonctions d'une variable complexe z : il s'agit de trouver le développement de la fonction $\frac{1}{\sin^2 z}$ en série de fractions rationnelles.

La rédaction de l'énoncé a été conçue de façon à rendre le problème progressif, et, dans ses trois premiers paragraphes, abordable par tout licencié de force moyenne. En fait, il n'y a eu qu'une copie blanche ; sauf rares exceptions, les candidats ont traité ces trois paragraphes avec plus ou moins de bonheur. Une cinquantaine d'entre eux ont abordé le quatrième ; cinq sur une dizaine ont écrit des choses raisonnables sur le cinquième ; enfin, un seul candidat a traité le sixième et dernier paragraphe.

Il a paru au correcteur que les connaissances en analyse sont plus étendues et plus solides cette année que l'an dernier. Cependant, dès le début du problème, on trouve de graves lacunes relatives à des notions simples et importantes : convergence, convergence uniforme. Les plus typiques et les plus fréquentes des erreurs sont les suivantes :

Une série à termes positifs converge quand son terme général tend vers 0. Dans une série à termes complexes ou réels, il est licite d'associer ces termes deux à deux avant d'étudier la nature de la série. La convergence d'une série dépendant d'un paramètre, lorsque celui-ci appartient à un intervalle fermé ou à un domaine fermé, est de nature uniforme, etc...

Une autre erreur vaut d'être soulignée : comme on s'en rendra compte, il est inconcevable que son auteur ait pu acquérir le titre de licencié. Le problème qui se

pose à lui est d'établir la convergence de la série dont le terme général est $\frac{1}{n^2 + k}$ (n entier positif, k constante positive). Il applique la règle de Cauchy, mais non pas en extrayant la racine n^e du terme général ; il multiplie n par la racine carrée de ce terme. Il est probable que la règle de Cauchy s'est trouvée déformée dans son esprit par la chute de l'indice n du radical ; l'indice a pu ainsi devenir facteur. Mais ce n'est pas tout : la quantité obtenue par le candidat tend vers 1 lorsque n augmente indéfiniment. Il n'y a pas de quoi s'embarrasser pour si peu, et appliquer des règles compliquées ; il suffit, pour le candidat, de noter que la quantité étudiée tend vers 1 par valeurs inférieures : la convergence en résulte !

Certaines erreurs sur les fonctions méromorphes ou entières, sans être aussi grossières que les précédentes, sont cependant assez choquantes. Ainsi, et à de trop nombreux exemplaires, on trouve le théorème suivant : une fonction entière est identiquement nulle si elle tend vers 0 sur un rayon issu de l'origine. Pour d'autres candidats, dans les mêmes conditions, la fonction se contente plus modestement d'avoir un zéro à l'infini. Enfin, pour l'un des agrégés de cette année, une fonction méromorphe, dépourvue de pôles, ne peut être qu'une constante.

Dans les deux premiers paragraphes, plus des deux tiers des candidats ont buté sur les questions un peu délicates, notamment sur l'étude de la convergence de la série très simple proposée au début du problème. Le troisième paragraphe contient une étude de continuité où l'on retrouve les mêmes faiblesses ; cependant, il a été un peu mieux traité que les précédents.

L'énoncé du quatrième paragraphe débute par une charitable majoration, permettant à tout candidat un peu averti de traiter les questions de continuité qui suivent : un certain nombre en ont profité. La fin, plus délicate, n'a été réussie que par cinq candidats.

Les cinquième et sixième paragraphes étaient réservés aux candidats brillants, ayant pu traiter convenablement et rapidement les quatre premières parties.

Les renseignements qui suivent résument les impressions du correcteur sur les valeurs des compositions et sur l'efficacité du problème ; deux copies, cotées 20 et 19, sont excellentes ; la première contient la solution totale et convenable du problème ; la seconde, meilleure que la première sur certains points, s'arrête pratiquement à la fin du cinquième paragraphe.

Après ces deux têtes, l'on trouve encore de très bonnes et de bonnes copies, cotées 16,5 ; 15,5 ; 15 ; 14,5 ; 14 ; 13,5 ; 13. En rangeant les candidats par ordre de notes décroissantes, le dixième a 11,5 ; le vingtième a 9 ; le trentième a 8 ; le quarantième a 7 ; le cinquantième a 6,5, etc...

La moyenne des notes est 5,82 ; elle est supérieure de plus d'un point à celle de l'an dernier.

Ceux des candidats refusés qui ont l'intention de se présenter à nouveau l'an prochain devront faire de gros efforts pour améliorer leurs connaissances en Analyse, s'ils ont obtenu moins de 6 ou 7 points cette année.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

Correcteur : M. GAUTHIER

Le problème proposé en Mécanique rationnelle était de la conception la plus traditionnelle : mouvement d'un solide pesant, de révolution, évoluant en contact avec un plan horizontal fixe.

Il s'agissait d'une petite toupie, nommée Tippe-Top, qui a fait récemment son apparition chez les marchands de jouets, et qui a eu un gros succès, à cause de l'aspect paradoxal de son mouvement : la toupie lancée s'obstine à « culbuter » et achever son mouvement en tournant sur « sa queue ». Il y a là un effet du frottement, associé à un choix convenable de l'emplacement du centre de gravité et de la forme de l'ellipsoïde d'inertie.

Le problème comportait une étude d'ensemble du phénomène : il était, de ce fait, un peu long. La dernière question, d'ailleurs difficile, étude d'un choc avec frottement engageant deux liaisons unilatérales, n'a été abordée par aucun candidat. Le correcteur n'a pas tenu compte de cette question finale.

Le problème commençait par un préambule géométrique destiné à faciliter la mise en équations du problème mécanique : la caractérisation de la méridienne par sa définition tangentielle au moyen d'une équation normale d'Euler permettait d'éviter l'introduction de paramètres inessentiels. Certains candidats, qui, par ailleurs, semblent connaître les lois de la mécanique, n'ont pas compris que la caractérisation de la méridienne n'exige la connaissance que d'une seule fonction. La fonction $h(\theta)$ de l'énoncé y suffisait. Ces candidats n'avaient-ils donc pas étudié la théorie des enveloppes de droites ?

Le fait que $h(\theta)$ caractérisait, non pas la forme géométrique précise de la méridienne, mais plutôt son enveloppe convexe, qui, seule, importe d'ailleurs au mécanicien, n'a été clairement conçu que par un très petit nombre de candidats, ceux qui, au cours des autres épreuves, ont également affirmé leur qualité de mathématicien.

C'est sans doute la raison pour laquelle la fonction $h(\theta)$ du Tippe-Top, continue, mais dont les dérivées première et seconde ont une discontinuité, n'a été étudiée correctement que dans moins de la moitié des copies. Cette fonction, dont l'étude n'exigeait pas de compétence supérieure à celle d'un candidat au baccalauréat, aurait cependant dû aider les candidats qui manquaient d'intuition, s'ils avaient eu la conscience de la poursuivre avec soin. Ceci montre l'inaptitude d'un grand nombre de candidats à utiliser dans un cas précis, les théories acquises en géométrie infinitésimale et en analyse.

La première partie, étude du mouvement sans frottement, très classique et très facile, n'a arrêté que les candidats d'une insuffisance indiscutable. Aucun candidat,

cependant, n'a approfondi l'étude des quadratures suffisamment pour avoir constaté que l'intégration peut être achevée au moyen des fonctions elliptiques.

La seconde et la troisième partie, étudiées simultanément par certains candidats, séparément par d'autres, ont suffi à classer la grosse majorité des copies.

La mise en équations n'est pas toujours correcte : on utilise les théorèmes généraux dans un repère mobile sans associer à ce fait les précautions indispensables ; ou bien, on utilise des multiplicateurs de Lagrange sans leur donner de signification mécanique : il en résulte d'inévitables fautes de calcul que l'on ne voit pas.

La réduction aux quadratures dans certains cas particuliers suggérés par l'énoncé n'est pas toujours conduite très honnêtement : on contorsionne les raisonnements, et au besoin affirme ce qui est nécessaire pour aboutir coûte que coûte à la conclusion contenue dans l'énoncé, alors que le point de départ, inexistant ou insuffisamment précisé, ne permettrait pas de conclure. Les candidats qui se comportent ainsi pensent-ils que le professeur qu'ils espèrent devenir aura le droit de mystifier ses élèves ? Croient-ils simplement tromper l'attention vigilante de leur examinateur ?

Certains candidats semblent ignorer que dans le cas d'un mouvement sans glissement l'intégrale des forces vives est valable. Aucun candidat n'a poursuivi l'étude des quadratures, dans ce cas, jusqu'à montrer que l'intégration peut être achevée au moyen de fonctions hypergéométriques.

L'existence de l'intégrale première J , qui fournit la clef, dans l'étude de l'évolution mystérieuse du Tippo-Top, intégrale qui résulte de l'élimination de la composante transversale de la réaction entre l'équation du mouvement transversal du centre de gravité et celle du moment cinétique par rapport à l'axe de révolution (transversal signifiant : perpendiculaire au plan méridien de contact) a été mise en évidence par 18 candidats dont 12 ont obtenu une expression correcte.

Plusieurs candidats ont essayé d'interpréter mécaniquement leur résultat : un seul a su manifester, par un calcul vectoriel simple, le rôle joué par l'axe instantané GK.

D'une manière générale, on peut noter dans la quasi-totalité des copies un aspect négligé, des fautes sottes, une orthographe déplorable. Devrait-on trouver dans la copie d'un futur professeur des mots tels que : cecie, dinamique, oscilatoire, indication, contacte... Que dire même de ce candidat qui parle des travaux de L'Agrange ?

On rencontre aussi un curieux manque de bon sens : dans des calculs cinématiques on obtient comme expressions d'une vitesse des formules qui font intervenir des dérivées secondes. Un tel résultat n'est-il donc pas suffisamment choquant pour arrêter l'élan de nos imperturbables calculateurs ?

Il y a eu 136 copies soumises à la correction. Les meilleures notes ont été 19, 18 (deux fois), 17 (deux fois), 16 (deux fois) et 15 (deux fois). Les plus mauvaises notes ont été 2 (quatre fois), 1, et $1/2$. La moyenne des notes est de 8,31. Il y a 44 copies qui atteignent ou dépassent 10 ; quinze copies entre 8 et 10 ; cinquante et une copies entre 5 et 8 ; vingt-six copies qui ne dépassent pas 5.

ÉPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au Lycée Saint-Louis pour les quarante-neuf admissibles. Ceux-ci ont été groupés en deux séries de manière à réduire au minimum la durée du séjour à Paris de chaque candidat : l'appel de la première série a eu lieu le dimanche 5 juillet, celui de la seconde le mercredi 15. Les épreuves pratiques, communes aux deux séries, ont été subies le jeudi 16 juillet ; à cette date, les 27 candidats de la 1^{re} série avaient terminé leurs épreuves orales et les 22 candidats de la 2^e série s'apprêtaient à les subir à leur tour.

Chacun des admissibles avait à traiter une leçon de Mathématiques Élémentaires et une leçon de Mathématiques Spéciales, après préparation de 3 ou 4 heures. Les

sujets de ces leçons sont tirés au sort le jour de l'appel des candidats, en leur présence ; elles sont jumelées. Voici la liste de ces leçons ; les leçons jumelées portent le même numéro.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(Textes)

Le texte de la leçon est précédé de l'indication de la classe à laquelle elle est destinée.

1. *Sc. exp.* Fonction logarithme népérien de x . Formule $\text{La} + \text{Lb} = \text{Lab}$. Logarithme vulgaire.
2. *Math.* Première leçon sur la résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques à une inconnue. L'étude de l'équation : $a \cos x + b \sin x = c$ n'est pas comprise dans la leçon.
3. *Première.* Volume des parallélépipèdes et des prismes.
4. *Math.* La théorie de l'inversion dans le plan et dans l'espace est supposée faite. Traiter des applications.
5. *Math. Sup.* Ellipse et cercle déduits l'un de l'autre par affinité. Diamètre. Diamètres conjugués.
6. *Première.* Problèmes du second degré. (Les théories relatives au signe du trinôme du second degré, à sa représentation graphique, ont fait l'objet d'études antérieures).
7. *Math.* Diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres. Propriétés du P.G.C.D. Nombres premiers entre eux. Propriétés. (La leçon sur la définition et les propriétés des nombres premiers sera faite ultérieurement).
8. *Première.* Rabattement d'un plan sur un plan horizontal, angle de deux droites, distance d'un point à une droite.
N.-B. — On rappelle que le programme de Première ne comporte que l'emploi d'une projection cotée.
9. *Math.* Conique définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité : tangente en un point ; lieu de la projection orthogonale du foyer sur la tangente.
10. *Math.* Trièdres. Inégalités entre les faces, entre les dièdres. Trièdres supplémentaires.
11. *Math.* Définition de l'homothétie. Propriété caractéristique. Produit d'homothéties.
12. *Math.* La définition et les propriétés de l'inversion dans le plan ont été étudiées. Première leçon sur l'inversion dans l'espace.
13. *Math.* Exemples de fonctions de la forme : $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, $a' \neq 0$
à coefficients numériques. (En ce qui concerne les limites et la continuité on admettra les règles opératoires. On admettra aussi les théorèmes qui permettent de déduire le sens de variation du signe de la dérivée).
14. *Math. Sup.* Géométrie. Hyperbole définie par ses asymptotes et un point.
15. *Math. Sup.* Géométrie. Une tangente variable à une parabole détermine sur deux tangentes fixe des divisions semblables. Réciproque. Applications.
16. *Math.* Mouvement diurne du soleil. Inégalité des jours et des nuits aux différentes latitudes.
17. *Seconde.* Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
18. *Math.* Equivalence des deux définitions suivantes : 1° Lieu des centres des cercles passant par un point, tangents à un cercle ou à une droite. —

- 2° Lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant.
19. *Math. Sup.* Géométrie. Etude des tangentes et des asymptotes de l'hyperbole définie : 1° à partir de ses deux foyers ; 2° à partir d'un foyer et de la directrice correspondante.
20. *Seconde.* Etude des fonctions $\frac{1}{x}$ et $\frac{a}{x}$. Représentation graphique.
21. *Première.* Parallélisme des droites et des plans.
22. *Première.* Plans perpendiculaires à une droite. Droites perpendiculaires à un plan.
23. *Math.* Définition et propriétés des nombres premiers. Application aux diviseurs et aux multiples.
24. *Sc. exp.* Combinaisons. Probabilités simples.
25. *Première.* Angles dièdres. Plans perpendiculaires. La mesure des dièdres ne fait pas partie de la leçon.
26. *Math.* Similitude plane en tant que transformation ponctuelle.
27. *Math.* Exemples simples de détermination de coniques par la donnée d'éléments réels tels que : points, tangentes, foyers, directrices, etc...
28. *Seconde.* Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. On étudiera les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$; le signe de $f(x)$; le sens de variation de $f(x)$.
29. *Math. Sup.* Existence et construction du centre de rotation de deux figures directement égales. Exercices.
30. *Première.* Géométrie. Surface cylindrique à directrice circulaire et surface conique à directrice circulaire. Définition ; section par un plan parallèle au plan de la directrice ; plan tangent.
31. *Math.* Première leçon sur les fractions.
32. *Math.* Géométrie descriptive. Exemples de représentation de prismes et de pyramides.
33. *Seconde.* Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
34. *Math.* Première leçon sur les nombres positifs et négatifs.
35. *Seconde.* Division harmonique. Faisceau harmonique. Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant.
36. *Math. Sup.* Géométrie. Etude en géométrie plane des cercles tangents à un cercle et à une droite donnés.
37. *Math. Sup.* Ellipse et cercle déduits l'un de l'autre par affinité. Applications (en particulier génération de l'ellipse par le procédé dit « de la bande de papier »).
38. *Première.* Variation de la fonction : $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$. Représentation graphique.
(On suppose étudiée la fonction $\frac{a}{x}$).
39. *Math.* Géométrie plane. Cercles passant par deux points donnés tangents à un cercle donné. Intersection d'une droite avec une ellipse et une hyperbole définies par un foyer et le cercle directeur ayant pour centre l'autre foyer.
40. *Math.* Similitude plane définie comme le produit d'une homothétie et d'un déplacement. Forme canonique.
41. *Math. Sup.* Géométrie pure. Etude des déplacements dans l'espace : 1° dans le cas où un point est invariant ; 2° dans le cas général. (On suppose connues les définitions et les propriétés fondamentales élémentaires de la translation, de la rotation, et, au besoin, des symétries).

42. *Math.* Définition et extraction de la racine carrée arithmétique d'un nombre entier à une unité près.
43. *Math.* Cinématique. Vecteur vitesse et vecteur accélération. Application au cas du mouvement circulaire uniforme.
44. *Math. Sup.* (Les notions de pôle et polaire par rapport au cercle sont supposées connues). Transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle. Applications.
45. *Math.* Géométrie et géométrie cotée. (Les changements de plan, rotations et rabattements ont été étudiés). Problèmes de distances et d'angles. (Le candidat traitera chaque problème par la méthode de son choix).
46. *Math.* Justification des règles pratiques pour obtenir le quotient et le reste de la division de deux nombres naturels (entiers positifs).
47. *Math. Sup.* Les translations et rotations de l'espace ont été étudiées. Etudier la symétrie par rapport à une droite (demi-tour ou transposition) et le produit de deux transpositions. Cas particuliers.
48. *Seconde.* Etude de la fonction linéaire. Représentation graphique (les vecteurs unitaires des axes étant ou non de même longueur). Association à une droite d'une fonction linéaire. Coefficient angulaire d'une droite. Pente.
49. *Math.* Sphère céleste. Coordonnées horizontales. Sphère terrestre. Coordonnées géographiques. Écliptique. Coordonnées écliptiques.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Textes)

Les leçons précédées de l'indication *Sup.* sont supposées faites en classes de Math. Supérieures, les autres en Spéciales.

1. *Spéc.* Surfaces du second ordre ; points conjugués ; plan polaire d'un point ; droites conjuguées.
2. *Spéc.* Enveloppe d'une famille de courbes planes, représentées par $f(x, y, \lambda) = 0$.
3. *Spéc.* Etude de la fonction $\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ étant positive et décroissante pour $x \geq x_0$; exemples. Application aux séries.
4. *Sup.* Division de deux polynômes suivant les puissances croissantes de la variable. Quotient à un ordre donné de deux développements limités.
5. *Spéc.* Extension au domaine complexe des notions de limite d'une suite convergente ; convergence d'une série, absolue convergence. Multiplication de deux séries absolument convergentes.
6. *Spéc.* Travail d'une force ; définition ; exemples ; cas d'une fonction de forces.
7. *Sup.* Exposer sur des exemples simples l'application de la variation des fonctions à la séparation des racines d'une équation.
8. *Spéc.* Fonction inverse d'une fonction continue monotone. Représentation graphique. Exemples.
9. *Spéc.* Théorème de Rolle et formule des accroissements finis. Représentation graphique. Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction (on se bornera aux théorèmes généraux sans traiter aucun exemple).
10. *Spéc.* Intégration d'une expression de la forme $f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, $a \neq 0$, dans laquelle la fonction $f(x, y)$ est une fraction rationnelle.
11. *Spéc.* Géométrie analytique. Lieux géométriques dans le plan.

12. *Spéc.* Exemples simples de développements en séries entières de fonctions à l'aide d'une équation différentielle.
13. *Spéc.* Géométrie descriptive. Intersection de deux cônes du second ordre ayant une génératrice commune. On donnera, comme application, une épure comportant deux projections.
14. *Spéc.* Les premières notions sur les séries étant acquises, exposer les méthodes d'étude de la convergence des séries à termes positifs.
15. *Spéc.* Application des principes de la Mécanique à l'étude du mouvement curviligne d'un point M dont l'accélération passe constamment par un point fixe O, est dirigée vers O, et est inversement proportionnelle au carré de la distance OM. Après avoir obtenu les formules générales on se bornera à étudier complètement un cas de mouvement parabolique défini par des conditions initiales numériques.
16. *Sup.* Correspondance homographique entre deux points sur deux bases rectilignes fixes, ou deux rayons de deux faisceaux linéaires fixes de droites.
17. *Sup.* Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples de la forme $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$. A et a complexes, α entier. Exemples et applications.
18. *Spéc.* Résolution d'un système d'équations linéaires au moyen des déterminants.
19. *Spéc.* Première leçon sur les courbes gauches. Tangente. Plan osculateur.
20. *Spéc.* Géométrie analytique : génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.
21. *Sup.* L'étude des développements limités étant supposée faite, on montrera le parti qu'on peut en tirer pour des recherches de limites, ou des études de fonctions infiniment petites ou infiniment grandes.
22. *Sup.* Définition des coordonnées polaires. Equations, en coordonnées polaires, de la droite, du cercle, d'une conique dont le pôle est un foyer.
23. *Sup.* Définition ponctuelle et tangentielle des coniques par l'homographie (l'étude des correspondances homographiques entre points de deux droites ou entre droites de deux faisceaux est supposée faite).
24. *Sup.* Enveloppe, définie paramétriquement, d'une droite dont l'équation dépend d'un seul paramètre. Point caractéristique.
25. *Spéc.* Courbure d'une courbe plane. Développée d'une courbe plane.
26. *Spéc.* Mécanique. Mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale attractive proportionnelle à la distance.
27. *Sup.* Construction des courbes en coordonnées polaires (les théories relatives aux tangentes et aux branches infinies sont supposées acquises).
28. *Spéc.* Sections circulaires réelles des surfaces du second ordre.
29. *Spéc.* Fonctions de plusieurs variables réelles indépendantes. Dérivées partielles. Dérivée d'une fonction composée. (La formule de Taylor n'est pas demandée).
30. *Spéc.* L'étude des exposants rationnels est supposée faite. Définition de la fonction a^x pour x réel quelconque. Etude de ses propriétés (on ne parlera pas de la dérivation). On ne considère pas comme connue la fonction $\log Lx$ et on n'en parlera pas.
31. *Sup.* Systèmes de vecteurs glissants. Moment résultant. Axe central. (La théorie du moment d'un vecteur par rapport à un point est supposée connue).
32. *Spéc.* Séries entières, à coefficients réels, d'une variable réelle. Intervalle de convergence ; à l'intérieur de l'intervalle de convergence on obtient

- la dérivée ou une primitive de la fonction définie par la série en dérivant ou en intégrant terme à terme.
33. *Spéc.* Foyers et directrices dans les coniques.
34. *Spéc.* L'intégration des fractions rationnelles en x ainsi que des polynômes entiers en $\sin x$ et $\cos x$ ayant été traitée, on exposera les méthodes qui permettent d'intégrer une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.
35. *Spéc.* Application du calcul des intégrales simples à la rectification des courbes (planes et gauches). Exemples.
36. *Spéc.* Fonctions symétriques entières de n variables.
37. *Spéc.* Intégration des fractions rationnelles.
38. *Sup.* Géométrie et géométrie descriptive. Intersection de deux cônes circonscrits à une même sphère.
39. *Spéc.* Etude du mouvement rectiligne sous l'action d'une force dépendant seulement de la distance x du point mobile à un point fixe de sa trajectoire ; choisir un exemple où l'on peut pousser jusqu'au bout le calcul de x en fonction du temps, et un exemple où l'intégrale des forces vives permet de déterminer l'allure du mouvement.
40. *Sup.* Emploi de la dérivée pour l'étude de la variation d'une fonction. Exemples.
41. *Sup.* Courbes en coordonnées polaires [$\rho = f(\omega)$]. Détermination de la tangente en un point. Disposition par rapport à cette tangente. Application à des exemples simples.
42. *Sup.* Etude des branches infinies des courbes définies, en coordonnées polaires, par une équation $\rho = f(\omega)$. Exemples numériques.
43. *Spéc.* Séries absolument convergentes. Multiplication de deux séries absolument convergentes.
44. *Spéc.* Formes linéaires. Rang d'un système de formes. Notion d'indépendance. On pourra, ou non, supposer acquise la théorie des équations linéaires.
45. *Spéc.* Division des polynômes entiers suivant les puissances décroissantes de la variable. P.G.C.D. de deux polynômes.
46. *Sup.* Construction des courbes planes définies par les expressions des coordonnées cartésiennes du point courant en fonction d'un paramètre. Tracé. Exemples numériques. (Les théories relatives aux tangentes et aux branches infinies sont supposées acquises).
47. *Spéc.* Intégrale définie d'une fonction continue $f(x)$. Propriétés de la fonction $\int_a^x f(t)dt$.
48. *Spéc.* Géométrie analytique. Plan tangent à une surface.
49. *Sup.* Première leçon sur les nombres complexes.

Il avait été rappelé aux candidats, avant les épreuves orales, que l'agrégation est un concours de recrutement et qu'en conséquence les leçons s'adressent, en théorie, à un auditoire d'élèves d'une classe déterminée, indiquée aux candidats par une mention inscrite en tête du texte de la leçon. Elles doivent être composées de manière à dégager les idées essentielles, équilibrées de manière à pouvoir être exposées en totalité et sans hâte en 45 minutes, au maximum, et intelligibles à l'auditoire supposé avec, de sa part, un effort raisonnable. Ces recommandations ont été entendues de la presque totalité des candidats qui ont mis de l'application à s'en inspirer ; elles ont été comprises assez différemment. Les professeurs et adjoints d'enseignement, qui ont effectivement eu la charge de classes d'élèves du Second Degré et plus géné-

ralement les candidats qui ont enseigné à un titre quelconque, savent en général équilibrer une leçon et adapter l'enseignement au niveau des élèves. Les candidats, élèves des Ecoles Normales Supérieures et étudiants, n'ont fait comme professeurs qu'un bref séjour au cours de leur stage dans les établissements du Second Degré ; il n'est donc pas surprenant qu'ils soient moins habiles, sinon à équilibrer une leçon, du moins à l'adapter au niveau d'une classe déterminée. Aussi le jury s'est-il montré très tolérant sur les erreurs d'appréciation de certains candidats, qui préjugent un peu trop de l'aptitude des élèves, dans la période d'initiation, à suivre des raisonnements abstraits et au maniement de la logique. Mais ce qui surprend, c'est de constater que ces candidats, ou bien n'ont pas lu et médité les Instructions de 1938, ou bien ont renoncé à profiter de la longue expérience qu'elles traduisent en conseils. Ils montrent un goût très vif pour les grandes constructions abstraites qui couvrent les problèmes dans leur généralité ; ils négligent de les éclairer par des exemples, et quand il s'agit de géométrie, de les illustrer par des figures. Ils oublient en somme que « le professeur va du connu à l'inconnu ; or c'est en associant celui-ci à celui-là, c'est en faisant entrer les acquisitions nouvelles dans les systèmes de connaissances, d'idées, qu'il les installe fermement dans l'esprit et qu'il prépare l'esprit à les accueillir, à assimiler dans la somme de ses expériences passées les apports incessants de son expérience à venir. C'est là le principe même de tout enseignement de culture ». Nous avons écouté de solides leçons, de très belles leçons parfois d'axiomatique pure sur la définition des fractions ou des nombres algébriques ; il est nécessaire de rappeler qu'elles seraient inintelligibles si l'esprit n'était préparé à les accueillir, s'il n'existait pas déjà une somme d'expériences passées, c'est-à-dire une initiation à cet enrichissement par une étude préalable modeste, incomplète sans doute, mais efficace.

Un certain nombre de candidats semble redouter de se servir du chiffon, cependant tout neuf, mis à leur disposition pour effacer le tableau ; comme ils ont d'autre part le souci de noter, avec un symbolisme qu'il conviendrait d'ailleurs de préciser, une partie importante de leur exposé, les trois grands tableaux mis à leur disposition sont remplis au bout de trente minutes. On constate alors avec surprise qu'ils montrent un grand embarras, sans se résoudre à effacer.

Il est également frappant de constater que, même lorsque la leçon est une leçon de géométrie, certains candidats répugnent à faire des figures : lorsqu'ils en font — et l'un d'eux a eu l'air de s'en excuser après avoir étudié pendant vingt minutes le cône à base circulaire en 1^{re} sans rien dessiner, en disant : « Il faut bien que je fasse une figure » — elles sont toutes petites et bâclées. Est-il possible que le candidat qui s'est excusé de faire un mauvais dessin pour illustrer la démonstration de l'existence d'un plan tangent à un cône à base circulaire ait pensé qu'il aurait été écouté et suivi par ses élèves de Première ? Il est regrettable d'avoir à se demander si la géométrie n'est pas considérée par certains candidats comme un genre mineur : l'auteur d'une solide leçon sur l'homothétie (Mathématiques Élémentaires), impeccable logicien tant qu'il s'agit de l'étude générale de la transformation, ignore les cas d'exception et expédie les applications sans démontrer aucune réciproque. Il ne s'agit, en l'espèce, ni d'une ignorance, ni d'une négligence, mais d'une dangereuse illusion ; il n'est pas vrai qu'au stade de l'initiation le maître peut donner un enseignement incomplet et s'en remettre sur les élèves du soin de sa mise au point.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Il n'est pas recommandé (1) de dire : logue a , logue b pour logarithme de a , logarithme de b , pas plus que P.G.C.D. ou P.P.C.M. (7) pour plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple ; le temps qu'on gagne ainsi se paye d'un mauvais exemple donné aux élèves qui n'ont que trop tendance à généraliser ces négligences.

Dans la leçon sur la définition de $\text{Log } x$, en Sciences Expérimentales, le candidat

a profité des conseils donnés dans le rapport de l'année dernière par M. l'Inspecteur général ROBERT ; ceci prouve que ces rapports sont lus. Il a donc défini $\text{Log } x$ comme la mesure d'une aire orientée ; on peut, à la rigueur, admettre, en invoquant un théorème déjà démontré, que la dérivée de $\text{Log } x$ est $\frac{1}{x}$; mais alors, il ne faut pas

placer à la fin de la leçon une démonstration du fait que cette fonction est continue et surtout il ne faut pas, à cette occasion, substituer à la définition par les aires une définition par les intégrales définies.

Très bonne leçon (2) sur la résolution des équations et inéquations trigonométriques sagement limitée aux exemples $\cos x = \cos a$, $\sin x = \sin a$, $\text{tg } x = \text{tg } a$ et $j(\cos x) = 0$. Ne pas omettre de démontrer l'équivalence des systèmes $f(\cos x) = 0$ et $f(u) = 0$, $u = \cos x$, premier exemple de transformation d'une équation par changement de variable. L'indication du nombre d'extrémités d'arcs AM solutions est insuffisante pour préciser le nombre des solutions ; les arcs $\alpha + 2k\pi$, $\alpha + 12k\pi$ ont les mêmes extrémités.

Le candidat qui a traité la leçon 4 sur les applications de l'inversion n'avait pas, lui, lu le rapport de l'an dernier ; aussi les observations qu'il contient demeurent-elles valables. Signalons en outre qu'un problème de construction se décompose en un problème d'existence et un problème de construction proprement dit ; le problème de la construction de la figure (F) par celui d'une figure (F') inverse de (F). Il est exact que, pour certains problèmes de la géométrie des cercles et des droites, il est plus aisé de construire (F') que (F), on peut alors déduire de l'existence de (F') l'existence de (F) et même du dénombrement de (F') le dénombrement de (F), mais il est bien rare que la construction de (F) se déduise de la construction de (F'). Il est donc aventureux d'affirmer que l'inversion est un procédé de recherche des constructions géométriques, sans préciser quel service exact on peut attendre du dit procédé : savoir, le dénombrement des solutions.

La leçon (6), sur la mise en équations des problèmes du second degré manque de vigueur parce que le problème que se pose le candidat est mal défini ; il y a un problème proposé, un problème d'arithmétique ou un problème de géométrie, dont l'inconnue est un entier n ou un point M, et puis il y a d'autre part un système (S) d'équations ou d'inéquations dont l'inconnue, par exemple, est x . Il s'agit d'expliquer clairement si à une solution du problème (qui peut être un point M) correspond une solution x du système (S) et une seule et d'étudier la réciproque. Cette correspondance n'est pas toujours mise en relief avec la vigueur qu'on souhaiterait.

Très bonne leçon (10) sur les trièdres, trop didactique. Lorsqu'on déplace les arêtes d'un trièdre (T) de manière à le rendre trirectangle, son supplémentaire (T') subit un déplacement de même nature. Est-il si évident que l'hypothèse : (T) n'a pas changé de sens pendant l'opération entraîne la conclusion : (T') n'a pas changé de sens ? Il faudrait le vérifier et non l'admettre.

D'une leçon sur l'inversion dans l'espace (12), uniformément imprécise, nous ne retiendrons que la recherche de la tangente A'T' à la courbe inverse (C') d'une courbe (C) ayant une tangente AT en A. Le candidat utilise les angles de droites dans le plan variable AA'MM', non orienté d'ailleurs. On aimerait savoir ce qu'il entend par l'expression : x tend vers a modulo 2π . La démonstration traditionnelle de l'existence de A'T' et de la symétrie de A'T' et AT par rapport au plan médiateur de AA' est rarement rigoureuse et utilise, sans bien souvent qu'on l'avoue, des théorèmes qui n'ont pas été démontrés. Ne serait-il pas sage de se contenter, en Mathématiques Élémentaires, de démontrer seulement que les plans tangents à deux sphères inverses et les tangentes à deux cercles inverses en des points inverses A_i et A' sont symétriques par rapport à la médiatrice de AA' et de laisser au professeur de Mathématiques Supérieures le soin de préciser si l'inverse d'une courbe a des tangentes et de déterminer, dans ce cas, leur position ?

La résolution (17) d'un système de deux équations à deux inconnues du premier degré passe pour une question délicate ; il faut bien constater qu'elle est, cette fois encore, médiocrement résolue par le candidat. Nous ne croyons pas cependant qu'il soit difficile de faire sur ce sujet une excellente leçon, à condition, bien entendu, de poser correctement le problème. Démontrer que le système a une solution et calculer, lorsqu'elle existe, cette solution, sont deux problèmes distincts et de difficultés très différentes ; il convient de les séparer nettement et en particulier de conclure avec précision lorsqu'on a résolu le premier. Le cas $ab' - ba'$ nul n'exige pas en Seconde de commentaires avec discussion littérale et formation de $ac' - ca'$.

A propos des représentations graphiques en algèbre (leçons 20 et 48), peu de candidats s'émeuvent, constate le rapport de l'an dernier, de la possibilité d'adopter des unités différentes pour les deux axes de coordonnées, comme en physique ; constatons avec regret que, lorsqu'on ne leur signale pas cette possibilité (20), ils se gardent de se « compliquer » le problème et lorsqu'on la leur signale explicitement (48), ils l'esquivent jusqu'au moment où il faut bien définir la pente. Souhaitons, en passant, qu'on distingue le coefficient angulaire de la pente et que lorsqu'on définit la pente comme une tangente on se souvienne qu'elle est, en axes rectangulaires, l'unité étant la même sur les deux axes, la tangente d'un angle *orienté*.

Le texte de la leçon 22 suggérerait l'étude d'abord des plans perpendiculaires à une droite et ensuite des droites perpendiculaires à un plan. Le candidat a préféré traiter les deux problèmes à la fois dans une leçon qu'il a lui-même intitulée : parallélisme et perpendicularité ; l'essentiel est alors de ne pas donner à entendre qu'on a défini la perpendiculaire à un plan *quelconque*, parce qu'on a défini un plan perpendiculaire à une droite *quelconque*. Notons à propos de cette leçon qu'il est préférable dans un exposé de ne pas placer les réciproques trop loin des propositions directes.

L'auteur de la leçon sur les probabilités simples (24) s'est très heureusement attaché à illustrer son exposé de bons exemples témoignant de lectures nombreuses et de réflexions personnelles sur le sujet. Il est regrettable que la partie théorique de l'exposé n'ait pas été plus rigoureux ; il est difficile de dénombrer des combinaisons, par exemple, si l'on ne définit pas préalablement deux combinaisons *distinctes*.

Les leçons ayant pour objet l'étude des transformations connaissent naturellement des sorts différents suivant qu'il s'agit du plan ou de l'espace. Lorsqu'il s'agit de transformations planes, il arrive que la terminologie ne soit pas au point, que l'exposé manque de relief, mais, en général, il ne manque pas de rigueur et les réciproques ne sont pas oubliées. L'imprécision du langage est parfois lourde de conséquences : un candidat définit une transformation par la condition qu'elle transforme un triangle $M_1M_2M_3$ en un triangle directement semblable $M'_1M'_2M'_3$; il ajoute très vite et sans insister que $M_1M_2M_3$ sont quelconques, sans préciser quels sont les éléments fixes et les éléments variables de sa figure. Prétendre que l'on a, dans ces conditions, défini une similitude, c'est faire un trop large crédit à l'intelligence de l'auditeur. Un exposé magistral doit être clair et précis et n'exiger de l'auditeur qu'un effort raisonnable ; celui-ci peut rectifier un lapsus, une faute de calcul, une erreur de notation : dans une classe normale les méthodes de contrôle dites de la classe active permettent au professeur de faire ces rectifications lui-même ; dans une leçon d'agrégation il est logique que le jury ne tienne pas rigueur au candidat de ce qui n'est qu'un accident sans conséquences, encore faut-il que ce ne soit qu'un accident et non le résultat d'une négligence systématique. Laisser à l'auditeur le soin de mettre au point un exposé dont on se borne à tracer les grandes lignes, c'est méconnaître une des tâches essentielles de l'enseignant, une de celles qu'il ne peut confier à des élèves parce que neuf sur dix d'entre eux ne pourraient la mener correctement à sa fin.

Les leçons ayant pour objet l'étude des transformations dans l'espace embarrassent bien des candidats. On y relève plus que des omissions.

Les leçons (5, 9, 14, 15, 18, 19, 27, 37) sur les coniques sont, en général, favo-

rables aux candidats ; l'une d'elles (27), remarquablement conçue et présentée, a obtenu la meilleure note de leçons d'oral. Les exposés relatifs à l'équivalence des deux définitions des coniques données par le programme, à l'étude de celles-ci, lorsqu'on donne un foyer et une directrice, trahissent leurs origines et sont plus récitées que pensées ; les procédés d'étude de ces problèmes sont artificiels. Signalons que certains candidats traitent le problème de l'existence de la tangente à une conique après avoir traité celui de l'intersection d'une droite et d'une conique ; le premier problème est cependant indépendant du second ; on se donne pour le résoudre un point fixe (on oublie une fois sur deux de le préciser) et un point mobile, il ne se pose donc aucun problème d'intersection de droite avec la courbe comportant la recherche de *tous* les points d'intersection. Signalons qu'un candidat traitant le problème de la tangente à l'hyperbole, coupe cette hyperbole par une droite, détermine les points d'intersection situés sur deux branches distinctes de celles-ci et annonce qu'il va supposer l'un d'eux fixe et faire tendre le second vers le premier ; un autre déclare que les tangentes à l'hyperbole sont les seules droites qui coupent cette courbe en un seul point. Notons aussi que l'affinité est une transformation ponctuelle du groupe linéaire et qu'il est maladroit de la définir par l'intermédiaire d'une rotation.

Deux candidats ont fait des exposés soignés, et, dans l'ensemble, satisfaisants à caractère axiomatique (33. Fractions ; 34. Nombres algébriques) ; dans l'un et l'autre l'être algébrique à étudier est susceptible d'une infinité de définitions ; il est nécessaire de vérifier que les définitions des opérations élémentaires sur ces êtres, données ultérieurement, sont indépendantes de leur mode de définition ; un candidat y a songé, l'autre pas. Les exposés exigent plus de 45 minutes, aussi conviendrait-il de les limiter en se bornant, par exemple, à définir les nombres et à étudier une, au maximum, deux opérations ; ainsi pourrait-on éviter les omissions, les obscurités dues à un débit trop rapide et le manque total d'exemples et de règles pratiques de calcul. Dans la forme où ils nous ont été présentés ces exposés lourds, encombrés, sont peu accessibles à des élèves de Mathématiques.

Les leçons de géométrie descriptive (8, 32, 45) devraient être illustrées d'épures exécutées avec soin ; ce n'a pas été le cas au moins une fois. Il n'est pas indispensable de définir systématiquement tous les plans par leurs traces. La recherche de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite, ou sur un plan, de l'angle de deux plans, ou d'une droite et d'un plan d'une part, et la mesure de la distance de deux points ou de l'angle de deux droites définis par leurs projections d'autre part, sont des problèmes distincts et les méthodes qui permettent de résoudre aisément l'un des premiers, ne sont pas toujours celles qui permettent de résoudre les derniers. Il faudrait au moins le signaler.

Deux leçons étaient extraites du programme de cosmographie. Il est clair que les candidats ne se désintéressent pas de cette partie du programme ; leurs connaissances ne sont cependant pas toujours très fermes. Les coordonnées géographiques, par exemple, sont solidaires des coordonnées célestes équatoriales de même nom, ces dernières étant liées à l'étude du mouvement diurne. La question des sens conventionnels pour la mesure des dites coordonnées est liée à la position de l'observateur sur l'un ou l'autre des hémisphères qui, dans la leçon 49, n'a pas été précisée. L'importance de la mesure de la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon, égale à la latitude, n'a pas été signalée et la détermination effective des coordonnées géographiques n'a pas été abordée.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Quatre notes : 18, 17, 16, ont récompensé les meilleures leçons ; une de celles-ci était la leçon 13 de géométrie descriptive, illustrée d'une excellente épure. Les notes des seize leçons suivantes, dans l'ordre de mérite, s'échelonnent de 14 à 10, mais les vingt-neuf dernières sont cotées de 9 à 1.

Deux ou trois leçons seulement témoignent, soit d'une ignorance complète du sujet, soit de son incompréhension ; la faiblesse trop générale des autres leçons paraît due, non à l'ignorance ou à l'incompréhension, mais à l'insuffisante familiarité des candidats avec les théories qu'ils exposent. Tel, par exemple, qui fait un exposé correct de la théorie des développements limités est incapable de l'appliquer à des exemples choisis par lui ; le choix même de ces exemples est révélateur de cette incapacité. Le candidat ignore non seulement le maniement de l'outil qu'il a entre ses mains, mais surtout ses limites et ses possibilités.

Nous savons que certains candidats sont des autodidactes, qu'ils n'ont pu, pour des raisons très respectables, fréquenter les classes de Spéciales, de Mathématiques Supérieures ou les classes préparatoires à une Grande Ecole ; le jury en tient compte et fait preuve, à l'égard de tous, d'une grande indulgence. Ce qui frappe, c'est que, malgré cette indulgence, plus de la moitié des leçons de Spéciales est cotée au-dessous de la moyenne et que cette faiblesse générale est due, non à l'ignorance des théories, mais à l'incapacité de les appliquer à des exemples, à choisir même ces exemples.

Et ceci est grave. L'un des soucis d'un jury d'agrégation de Mathématiques est de découvrir, parmi les candidats, les futurs professeurs de Mathématiques Supérieures, de Spéciales ou de préparation aux Grandes Ecoles. Les élèves de ces classes ne sont pas tous destinés à devenir des professeurs ou des chercheurs ; la presque totalité de ceux-ci deviendront des praticiens ; il est certes important qu'un futur ingénieur ait reçu une formation solide, qu'il connaisse la genèse et les développements théoriques du calcul intégral, mais il est non moins important qu'il soit capable de dégager des théories générales les méthodes pratiques qui permettent de calculer et de traduire en symboles et en nombres les résultats du calcul. Les élèves brillants, les mathématiciens-nés, n'ont qu'à peine besoin d'être guidés dans ce passage de la théorie à la pratique ; mais ces élèves sont une minorité et la foule des autres attend des professeurs des classes préparatoires qu'ils leur apprennent à résoudre les problèmes, c'est-à-dire, la théorie une fois faite, à choisir les méthodes, à les appliquer correctement et à conduire la recherche jusqu'au bout. C'est pourquoi nous nous inquiétons de la tendance des candidats à se borner à exposer — en répétant une leçon apprise, trop souvent, — une théorie générale sans l'appliquer à aucun exemple. Cette observation, rapprochée de celles que présentait le correcteur de la composition écrite de Mathématiques Spéciales, donne à penser qu'une majorité de candidats n'a plus du programme de Spéciales qu'une connaissance superficielle fautive d'avoir traité suffisamment d'exercices et de problèmes.

Les exposés, qu'ils soient aisés ou laborieux, ont souvent le caractère d'une récitation et non celui d'une leçon méditée et composée ; les exemples et les applications manquent ; ou bien leur choix est arbitraire ou naïf, ou bien ils n'illustrent pas en la complétant la théorie générale. Nous n'oublions pas que le temps de l'exposé est limité à 45 minutes, mais il y a quatre heures de préparation au cours desquelles le candidat a pu choisir à loisir ce qu'il entend enseigner ; nous l'avons même averti qu'il pouvait, sous la seule réserve d'en informer le jury, limiter son exposé en réservant certaines questions pour la classe à venir. Ce choix est indispensable : il appartient au professeur ; il a pour objet de mettre en lumière l'essentiel ; l'illusion est de croire que la théorie générale seule est l'essentiel ; les applications et les exemples jouent le rôle des projecteurs dans l'étude des monuments ; leur rôle est modeste, il est indispensable.

Huit leçons sont tirées de la partie du programme relative aux fonctions d'une variable réelle ; elles ont été traitées de façon assez satisfaisante sauf celles qui comportaient surtout des exemples (6, 7). Nous nous bornerons à faire quelques observations d'un caractère général les concernant.

Pour effectuer avec sécurité des opérations sur les développements limités, il faut préciser à quel ordre on opère et justifier, lorsque cela est possible, le choix de cet ordre. Donner comme exemple d'application des développements limités, la

recherche des limites $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x - 1}{x}$, etc... est une naïveté. Regrettons au passage que la définition des équivalents et leur utilisation soient, en général, ignorées.

C'est une faute grave, bien que classique, d'oublier de démontrer que si r et r' appartiennent à deux ensembles adjacents de nombres rationnels, les ensembles a' et a'' sont aussi adjacents.

La leçon 4 : division puissances croissantes, développement limité d'un quotient, a été lourdement, mais correctement traitée. Les deux opérations : division de A par B et recherche du développement limité de $\frac{A}{B}$ ne sont pas identiques ; dans le premier cas, les inconnues sont le quotient et le reste, et dans le second le quotient seulement. Or, la seconde est plus simple que la première puisqu'on peut négliger en la faisant les termes d'ordre supérieur à l'ordre n .

Les deux leçons sur les équations et formes linéaires sont, l'une bonne, l'autre assez bonne ; signalons que la précision de la langue, toujours nécessaire, l'est particulièrement pour ces exposés ; il ne revient pas au même de dire : si tous les caractéristiques ne sont pas nuls, au lieu de : s'il existe un caractéristique ou plusieurs non nuls, par exemple, et l'emploi de quelconque (solution quelconque) doit être surveillé ; le terme est employé en général avec le sens de « arbitrairement choisi », dans certains cas, avec une autre acception ; il serait prudent de préciser son sens exact dans une leçon déterminée.

Des cinq leçons consacrées aux séries, deux révèlent des ignorances qui ont été fatales aux candidats. L'un d'eux ignore quel parti il peut tirer (leçon 12) d'une équation différentielle pour obtenir le développement en série de l'une des solutions et après bien des hésitations, renonce à reconnaître dans e^x et

$$1 + \frac{x}{1} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

deux solutions de $y' = y$, qui, ayant la même valeur pour O , sont identiques.

L'unique leçon sur les nombres complexes (49) mal équilibrée, trop longue, alourdie d'une axiomatique tâtilonne et incomplète, a dérouter son propre auteur qui a fini par omettre de définir les nombres réels. O en particulier, et de vérifier que $ss' = s's$, ce qui est ici particulièrement important, étant donné le rôle que joue le second facteur dans l'opération.

Six leçons portaient sur le calcul intégral et ses applications ; aucune n'est vraiment satisfaisante. Dans la définition de l'intégrale définie, les notations s_n et S_n sont périlleuses : l'indice n ne caractérise pas un mode de partage de l'intervalle (a, b) ; le candidat qui superpose à un partage (I) , un nouveau partage (I') obtient bien un partage (I'') dont il désigne les sommes par s_n'' et S_n'' , mais ce partage (I'') n'est pas arbitrairement choisi et les inégalités $s_n \leq s_n'' \leq S_n' \leq S_n$ ne sont pas établies en toute généralité.

Dans le rapport de 1952, M. l'Inspecteur général ROBERT a pris la peine d'énumérer certaines leçons touchant à des questions fondamentales de géométrie analytique ou de mécanique que les étudiants ont tendance à concevoir comme des questions de licence ; cette prétention, disait-il, n'est pas soutenable. Nous sommes de cet avis.

La leçon 36 : définition d'un arc de courbe, pouvait être exposée beaucoup plus brièvement et plus simplement, ce qui aurait permis au candidat, d'une part, d'être moins esclave de ses notes, de ne pas s'embrouiller dans ses ε et d'autre part de consacrer plus de soins et d'attention aux applications.

Notons, en passant, qu'il est assez curieux de constater qu'aucun des exposés classiques relatifs à la définition de l'arc d'une courbe (C) définie par x, y, z , fonctions de t remplissant certaines conditions, ne cherche à profiter du fait qu'il est possible de changer de variable. Si, par exemple, on choisit pour t une fonction de u telle que $dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2$, il n'est pas très difficile de démontrer que la

longueur d'une corde $M_L M_{L+1}$ est inférieure ou égale à $(u_{L+1} - u_L)$ et par conséquent de définir, sans ϵ , la longueur de l'arc comme borne supérieure d'un ensemble borné.

Les leçons 10, 17, 34, 37, illustrent tristement le peu d'intérêt que les candidats portent aux applications des théories générales ; les méthodes d'intégration proposées paraissent, sinon désuètes, du moins vénérables et pour cette raison, intouchables. Serait-il si révolutionnaire, pour intégrer une fraction rationnelle de la décomposer seulement en éléments simples dits de première espèce et de chercher d'abord les primi-

tives de $\frac{1}{(x-a)^p}$, si a est réel, et de $\frac{x+\beta i}{(x-a-bi)^q} + \frac{x+\beta i}{(x-a+bi)^q}$, lorsque q est supérieur à 1, de terminer ensuite suivant la méthode classique ? Ne pourrait-on même envisager, dans certains cas au moins, de déterminer *a priori* ce qu'on peut appeler la partie rationnelle de la primitive ?

La leçon 29 : fonctions de plusieurs variables, dérivées partielles, ne présente de difficultés que dans la démonstration de l'égalité de $f''_{xy}(x, y)$ et $f''_{yx}(x, y)$, mais cette difficulté embarrasse encore les candidats.

Des douze leçons du programme de géométrie analytique plane, deux ont été jugées excellentes ; ce ne sont pas les plus faciles (2. Enveloppe de $f(x, y, \lambda)$; 27. Construction des courbes en coordonnées polaires). Les plus mal traitées sont les leçons d'exemples : courbes en coordonnées polaires, définies paramétriquement, branches infinies en coordonnées polaires ; les exemples sont mal choisis, puérils ou pauvres : on applique mécaniquement des règles sans rappeler leur origine, ce qui conduit à compliquer les recherches les plus simples, celles, par exemple, des asymptotes parallèles aux axes. La leçon la plus étrange est celle d'un candidat, classé parmi les tout premiers à l'écrit, sur la recherche des lieux géométriques dans le plan : le problème n'est pas défini ; la leçon est une énumération d'exemples simples, disparates, qui paraissent fabriqués spécialement pour l'application d'un procédé de recherche arbitrairement choisi ; le mot « élimination » n'est pas prononcé ; les considérations générales abondantes et vagues signalent avec insistance la nécessité de ne pas mépriser le soutien géométrique, idée juste à condition d'expliquer en quoi la recherche par les méthodes de la géométrie analytique, domaine des conditions nécessaires et suffisantes, diffère de la recherche par les méthodes de la géométrie. L'auteur de la leçon 33 : recherche des foyers et directrices des coniques, pose nettement le problème, mais incomplètement : l'étude géométrique montre qu'il existe un ou deux points F , associés à des droites Δ , qui sont tels que pour tout point de la conique $MF = e MH$. Il ne s'agit pas seulement de retrouver par les méthodes de la géométrie analytique ces couples F, Δ , mais *tous* les couples jouissant de cette propriété et la question se pose alors de savoir si l'on se borne ou non au cas où F et Δ sont réels.

Presque toutes les leçons (il y en a cinq) du programme de géométrie dans l'espace sont gâchées par des fautes qu'il vaudrait mieux ne pas commettre. Un point M , dont les coordonnées dépendent de deux paramètres indépendants u et v , ne décrit pas nécessairement une surface : une équation $ux + vy + wz + h = 0$ n'est l'équation d'un plan que si u, v, w, h , ne sont pas tous nuls ; deux points distincts M_1 et M_2 peuvent avoir le même plan polaire et il peut arriver qu'un point M , décrivant une droite D , son plan polaire ne pivote pas autour d'une droite D' . L'existence de la tangente en un point M d'une courbe gauche doit être démontrée ; la démonstration n'exige pas la continuité des dérivées premières. Il est indispensable de souligner que les définitions de la tangente, du plan osculateur, du plan tangent, sont indépendantes de la représentation paramétrique et lorsqu'on suppose que les axes sont rectangulaires, il faut le dire. Un candidat scrupuleux s'est borné à étudier les sections circulaires des quadriques sur les seules équations réduites, comme l'y invite le programme de la classe de Spéciales ; nous ne pouvons l'en blâmer ; le programme de l'agrégation n'impose pas cette restriction, mais la leçon est supposée faite

à des élèves de Spéciales, donc le candidat a raison. Il aurait pu cependant, sans dépasser le niveau de cette classe, dégager de cette multitude de cas particuliers la règle générale : $\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv PQ$, et même, s'il en avait le temps, l'étendre au cas des équations non réduites.

Enfin, les leçons du programme de mécanique, à l'exception d'une seule très mauvaise et d'une autre à peine moyenne, sont bonnes. Le candidat qui a étudié le mouvement des planètes a utilisé correctement les deux intégrales premières ; il sait qu'elles ne sont pas toujours distinctes, mais trop pressé d'affronter les calculs qui mènent à la détermination de la trajectoire, il néglige d'en tirer une conclusion précise : ou bien le mouvement est circulaire, ou bien les deux intégrales premières suffisent à caractériser le mouvement. Il a manqué d'ailleurs à cette leçon l'indication — au moins — de la marche à suivre pour étudier ce mouvement, une fois la trajectoire déterminée.

EPREUVES PRATIQUES

Elles ont été effectuées le 16 juillet au Lycée Saint-Louis.

COMPOSITION D'ÉPURE : *Sujet*. — L'unité de longueur est le mm.

La ligne de terre $y'y$ est à 20 mm. au-dessus du petit axe de la feuille. xOz est le grand axe de la feuille.

Un paraboloïde de révolution P a pour sommet le point (130, 55, 150) et pour foyer le point (130, 55, 140).

Un paraboloïde hyperbolique Q a pour génératrices les droites :

$$G_1 \begin{cases} x + y - 145 = 0 \\ y - z + 75 = 0 \end{cases}$$

$$G_2 \begin{cases} x + y - 185 = 0 \\ y + z - 145 = 0 \end{cases}$$

et pour plan directeur le plan $x = y$.

1° Construire les projections de la courbe Γ commune à P et Q .

2° On fait tourner autour de l'axe Δ ($x = 130$; $y = 0$) les points réels de Γ . Construire la méridienne principale de la surface R ainsi engendrée.

3° Q et R ont en commun, outre Γ une courbe L dont on construira les projections.

4° On appelle S le solide opaque formé par les points M de l'espace jouissant simultanément des deux propriétés suivantes :

1) la demi-droite verticale ascendante d'origine M rencontre R en un point réel et un seul ;

2) la demi-droite verticale descendante d'origine M rencontre Q en un point réel et un seul.

Représenter la portion de S dont les points ont une cote positive ou nulle.

N.-B. — On expliquera les résultats obtenus sur une notice jointe à l'épure.

RAPPORT DE M. CAGNAC, *correcteur*. — Un paraboloïde de révolution P et un paraboloïde hyperbolique équilatère Q , ont, chacun, leur axe vertical, et le plan de front F qui contient l'axe de P est un plan principal pour Q . Dans F , la méridienne principale p de P , et la parabole principale q de Q sont égales, tournent leur concavité vers le bas ; la projection frontale γ' de l'intersection Γ de P et Q est donc une parabole osculatrice à l'infini à p' et q' , donc égale à p' et q' ; on n'en gardait que l'arc situé à droite du point a' commun à p' et q' ; à défaut d'une construction précise, un calcul simple précisait les coordonnées de ce point.

Trois candidats ont observé que les sections de P et Q par des plans de profil sont des paraboles égales, de même axe, tournant leur concavité en sens contraires ; leur corde commune est donc la médiatrice du segment des sommets ; autrement dit, une verticale rencontrant p' et q' respectivement en α' et β' , le milieu m' de $\alpha'\beta'$ est un point courant de γ' .

La projection horizontale γ de Γ est une conique puisque le point Z à l'infini dans la direction verticale est un point de contact pour P et Q ; γ est une parabole ayant pour axe la trace f de F , et pour sommet le point a , projection horizontale du point A commun à p et q . Ces résultats ont été obtenus par une vingtaine de candidats ; mais peu d'entre eux ont songé au parti qu'on pouvait tirer des points communs à P et aux génératrices horizontales de Q pour préciser l'axe de γ et le paramètre de γ (propriété de la sous-médiatrice), d'où l'on déduisait que l'axe Δ de R passait au foyer de γ .

Quelques candidats ont étudié analytiquement l'intersection de P et Q : rappelons qu'il n'est pas nécessaire de garder les axes $Oxyz$ indiqués dans l'énoncé ; on pouvait ici choisir comme axe des z , soit l'axe de P , soit l'axe de Q .

m étant un point de γ , μ le point où la normale en m coupe f , $\delta m = \delta \mu$; par suite, la méridienne de droite r' , de R se déduit de γ' par translation vers la droite de 10 mm. : R est ainsi ce qu'un candidat a appelé un « tore parabolique ».

M étant un point de Γ , le plan horizontal de M coupe Q suivant une hyperbole H , de projection horizontale h ; toutes les hyperboles h ont mêmes asymptotes, issues de σ , projection du sommet de Q . Le cercle $(\delta, \delta m)$ recoupe h en m_1 , symétrique de m par rapport à f , et en deux points n et n_1 : les cordes mm_1 et nn_1 sont symétriques par rapport à la médiatrice λ de $\delta\sigma$ (les cordes communes de bout à h et à un cercle quelconque centré en δ sont homologues dans une involution dont les éléments doubles sont la droite de l'infini et la corde des contacts du cercle focal centré en δ).

On en déduit que l' est symétrique de γ' par rapport à λ' , et que l est une parabole de foyer δ .

Les seules courbes à tracer étant des paraboles dont on mettait en évidence les éléments de grandeur et de symétrie, il n'était demandé aucune construction de point courant et de tangente courante pour les courbes γ , γ' , r' , l , l' : 13 candidats ont tenu néanmoins à faire de telles constructions. Rappelons-leur qu'une parabole, dont on a déterminé le sommet et le foyer, est une courbe aussi bien connue qu'un cercle dont on a déterminé le centre et le rayon ?

Un seul candidat a démontré correctement — et élégamment — la nature des diverses courbes de l'épure, mais n'a pas représenté le solide demandé. Deux candidats ont fait une ponctuation correcte, mais leurs tracés manquent de précision.

Les meilleures notes sont : 17 ; 15 ; 15 ; 14 ; 13 ; 13 ; 12 ; 11 ; la moyenne générale de l'épreuve est 6,26 ; 10 notes inférieures ou égales à 2 ont dû être données à des candidats ne sachant tracer aucune des paraboles γ ou γ' ; 3 candidats peuvent attribuer leur succès au fait que leur épure a atteint ou dépassé la moyenne : 3 candidats auraient été reçus si leur épure avait dépassé la moyenne.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE : *Sujet*. — R étant un nombre compris entre 0 et 1, on pose : $w = n - R^2$, et

$$(1) \quad \varphi(w) = R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n+1}}{(n+1)(n+2)} \quad (n \text{ entier positif ou nul}).$$

1° Calculer, avec l'approximation que permet l'usage des tables de logarithmes à cinq décimales, les six premiers termes de la série $\varphi(w)$ pour $w = 0,72$. Déduire de ce calcul une valeur approchée de $\varphi(w)$ à 0,001 près pour $w = 0,72$.

2° Démontrer que la somme $\alpha(w) = \frac{Rw}{2} + \frac{Rw^3}{6}$ des deux premiers termes de la série $\varphi(w)$ est maximum pour une valeur w_0 de w et une seule, supérieure à 0,72. Calculer une valeur approchée de w_0 , par excès, aussi petite que possible.

3° Démontrer que $\varphi(w)$ admet son maximum absolu B dans l'intervalle (0,72, 1). Sans chercher à calculer B , trouver une constante numérique A , aussi petite que possible, qui satisfasse à l'inégalité $B < A$.

RAPPORT DE M. MILLOUX, *correcteur*. — Cette épreuve est inspirée par une méthode de démonstration du théorème de Bloch (surfaces recouvertes par les valeurs des fonctions holomorphes dans un cercle), mais rien ne transparaît de son origine. Elle est divisée en trois paragraphes, dont les deux premiers sont faciles et classiques.

Il s'agit en premier lieu de calculer la somme d'une série entière pour une valeur donnée de la variable ; en général, les résultats sont acceptables.

Le deuxième paragraphe consiste dans la recherche du maximum d'une certaine expression dépendant d'une variable, et dont la dérivée est simple ; cette question élémentaire a mis en échec un certain nombre de candidats.

Enfin, le troisième paragraphe, beaucoup plus difficile, exige à la fois de l'imagination et de la dextérité dans les calculs. Seuls, deux ou trois candidats ont entrevu, sous forme d'ébauches, des possibilités d'étude.

Grâce à de généreux coefficients, la moyenne des notes est proche de 9 sur 20. Mais il ne faut pas se faire d'illusion : l'ensemble, comme l'an dernier, est médiocre, et la présentation souvent négligée.

Vingt et une notes sont supérieures ou égales à 10 : ce sont 15, 14, 13, 8 fois 12, 3 fois 11 et 7 fois 10. Rappelons, comme l'an dernier, qu'il n'est pas douteux que, dans quelques cas, la note obtenue, malgré son modeste coefficient, est décisive dans le résultat final et qu'il est souhaitable que les candidats préparent avec soin cette épreuve abordable.

RESULTATS GENERAUX

Les totaux des notes obtenues par les admissibles pour l'ensemble des épreuves en 1953 s'échelonnent entre 124 et 334 sur 400, soit en moyenne, sur 20, entre 6,2 et 16,7 ; résultats comparables à ceux du concours de 1952 (121 à 356).

Le jury a proposé pour l'admission définitive les 28 candidats ayant totalisé 190 points au moins, c'est-à-dire ceux dont la moyenne dépasse 9,5. L'un de ceux-ci étant un sujet étranger, élève de l'Ecole Normale Supérieure (Ulm), a été classé conformément à la loi avec un numéro *bis*, soit 8 *bis* ; les candidats français ont reçu les numéros de 1 à 27 dans l'ordre de mérite. En outre, le jury a décidé de proposer pour l'admission définitive les trois candidats classés après le 27^e dont les totaux dépassaient 187, sous réserve qu'ils occuperaient au 1^{er} octobre un poste dans l'Union Française. Deux d'entre eux ont accepté une nomination, l'un au Maroc, le second en A.O.F. Le nombre total des agrégés est donc de 30, se répartissant ainsi : dix élèves de l'Ecole Normale Supérieure (Ulm), un élève de cette école non sujet français, deux élèves de l'Ecole Normale Supérieure (St-Cloud), un étudiant libre, un auditeur à l'E.N.S. (Ulm), six professeurs de lycée, trois de collège, un de collège technique, un d'une E.N.P., un d'une école normale, deux stagiaires d'enseignement, un adjoint d'enseignement.

Trois des admissibles sur les quatre qui n'étaient pas encore titulaires d'un certificat ont été dispensés des épreuves théoriques et pratiques et le quatrième des épreuves théoriques seulement du nouveau C.A.P.E.S.

Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques se fait par un concours aux modalités uniques parmi trois catégories de candidats : 1) les élèves des Grandes Ecoles et les Etudiants non encore dans les cadres ; 2) les stagiaires d'enseignement recrutés par le nouveau C.A.P.E.S. ; 3) les professeurs et adjoints d'enseignement qui occupent déjà un poste, soit dans l'enseignement du Second Degré, soit dans l'enseignement technique ou dans les écoles normales, éventuellement même dans l'Enseignement Supérieur.

Les nombres que nous donnerons ci-dessous ne concernent que les premiers. L'institution récente du nouveau C.A.E.P.E.S. a eu pour premier résultat d'attirer vers l'agrégation 21 candidats, dont deux ont été reçus ; il est trop tôt pour savoir

s'il est opportun de décompter ces deux agrégés dans le premier groupe ou dans le troisième. Notons au passage que cet apport de vingt et un candidats nouveaux est un événement heureux auquel est due la stabilisation de 1952 à 1953 du nombre des candidats à l'agrégation.

Les agrégés du troisième groupe étaient déjà professeurs en exercice ; leur succès à l'agrégation, s'il modifie le nombre des professeurs de mathématiques agrégés dans l'Enseignement du Second Degré, ne diminue cependant pas le nombre des postes vacants. Nous nous réjouissons vivement que le niveau du concours en 1953 ait permis de reclasser 13 professeurs certifiés dans le cadre des agrégés ; ce brillant résultat témoigne de la constante valeur du corps enseignant et des qualités des meilleurs de ses maîtres. Il ne modifie cependant pas les données du problème qui nous préoccupe.

Le bilan de l'agrégation au 1^{er} octobre 1953 nous paraît être le suivant. Neuf agrégés de la première catégorie — anciens élèves des Ecoles Normales Supérieures ou étudiants non encore dans les cadres — ont reçu une première nomination, en octobre 1953 : ils proviennent, un de l'agrégation de 1949, huit autres à raison de deux par années des agrégations de 1950, 1951, 1952, 1953. L'agrégation de 1953 nous donne quatorze agrégés de cette même catégorie ; deux ont reçu une première nomination, cinq sont appelés au service militaire, cinq font une quatrième année d'Ecole Normale.

Ces nombres méritent réflexion. Constatons d'abord qu'à la suite du concours de 1953, trente candidats ont été déclarés agrégés, mais que quatorze seulement de ceux-ci constituent l'apport entièrement neuf des élèves des Grandes Ecoles et des étudiants non encore dans les cadres. Notons, avant de poursuivre cette méditation, que l'allongement de la liste de reçus à l'agrégation que nous entendons proposer si souvent comme un remède à la crise de recrutement en agrégés dont nous souffrons, ne modifierait pour ainsi dire pas le résultat précédent. Si la liste des agrégés de 1953 avait comporté 46 noms au lieu de trente, le nombre des professeurs déjà en exercice comme licenciés ou certifiés devenus agrégés aurait augmenté de quatorze unités, mais le nombre des étudiants devenus agrégés n'aurait augmenté, lui, que de deux unités. L'allongement, d'ailleurs impossible, des listes de reçus à l'agrégation compromettrait la valeur de l'examen et le prestige du titre sans apporter grande modification au nombre de ces éléments neufs puisés dans la catégorie des étudiants parmi lesquels se recrutent ceux qui vont assurer la relève des professeurs qui nous quittent et le rajeunissement de nos cadres.

Ces nouveaux venus pourraient être quatorze : ils sont neuf (9) ; cinq d'entre eux, un tiers par conséquent, en 1953, n'occuperont pas de postes dans l'Enseignement du Second Degré. Ce déficit de un tiers, prélevé sur l'apport neuf des étudiants et des élèves des Grandes Ecoles, est extrêmement lourd pour deux raisons ; il porte sur un effectif très mince, en regard des besoins actuels de la Métropole, et, ne l'oublions pas, des territoires de l'Union Française, et, d'autre part, il est effectué sur les meilleurs, sur ceux auxquels nous pourrions faire appel, pour enseigner dans une de nos deux cents préparations aux Grandes Ecoles.

Nous n'ignorons, ni les besoins, ni les séductions de l'Enseignement Supérieur ou de la Recherche ; nous constatons, sans amertume, que ces besoins sont pourvus par priorité ; l'autorisation de faire une quatrième année est quasi-automatique ; il est à peu près sans exemple qu'une demande de dérogation soit refusée ; sans doute faut-il qu'il en soit ainsi, en période normale. Tous les agrégés n'ont pas les mêmes aptitudes ; les uns doivent être orientés vers la Recherche, d'autres vers l'Enseignement et ce choix délicat ne peut être réglé par méthode autoritaire ; il est certain qu'une année de réflexion, sous forme de quatrième année, doit faciliter l'orientation. Mais nous ne sommes pas en période normale ; l'Enseignement Secondaire dévore sa propre substance en recrutant un nombre insuffisant d'agrégés neufs, ce qui est déjà passablement inquiétant, mais ce qui l'est bien davantage encore, c'est que le déficit

en éléments de qualité de un tiers compromet le recrutement en professeurs de classes préparatoires aux Grandes Ecoles, donc, par voie de conséquence, celui des Ecoles Normales Supérieures elles-mêmes et partant de l'Université tout entière.

Le rendement du concours dont nous avons la charge atteint son maximum ; on ne peut, sans le détraquer, lui demander davantage ; les remèdes ne dépendent pas du fonctionnement de l'agrégation, et nous ne pouvons, en conclusion de ce rapport, que signaler les problèmes qui nous paraissent les plus urgents à étudier et qui nous dépassent. D'une part, il faudrait augmenter le nombre et la qualité des candidats à l'agrégation ; d'autre part, il faudrait répartir le trop petit nombre des agrégés capables d'enseigner dans les classes préparatoires aux Grandes Ecoles, dans l'Enseignement Supérieur, ou être affectés à la Recherche en tenant compte, certes, de leurs aptitudes, mais surtout de la hiérarchie des besoins.

*
**

Nous terminerons en constatant que l'impression des correcteurs sur les épreuves écrites du concours de 1953 est bonne et que, malgré certaines réserves exprimées dans le cours de ce rapport, sur certaines leçons d'oral, ce concours a été dans l'ensemble satisfaisant. Vingt candidats ont une moyenne supérieure à 10 ; les moyennes des quatre premiers sont 16,7 ; 15,8 ; 14 ; 13,5. Ces résultats sont comparables à ceux des années précédentes. Exprimons le souhait que quelques-uns de ces agrégés, que la qualité de leurs épreuves désignent comme capables d'assurer la préparation aux Grandes Ecoles, se sentent attirés vers cet apostolat, car c'en est un, avec ses servitudes, certes, mais aussi sa grandeur. Concluons enfin, en reprenant les termes mêmes de la conclusion du rapport de 1952 : un titre plein de prestige n'est pas suffisant ; il reste à ceux qui ont fait preuve de leur science et de leur travail qu'ils fassent aussi la preuve de leur désir de communiquer ce qu'ils savent aux élèves qui leur seront confiés. Nous éprouvons à cet égard un grand optimisme.

Certificat d'aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second Degré
Admission dans les Centres Pédagogiques régionaux en 1953
Section F Mathématiques

Rapport de MM. F. DEDRON et L. THIBERGE
Inspecteurs généraux, Présidents des Jurys

En 1953, comme en 1952, les épreuves théoriques furent subies par les candidats et par les candidates devant deux jurys différents, mais elles présentaient de très profondes analogies par leur nature même et par l'esprit dans lequel elles furent conduites : c'est ainsi que les sujets des deux compositions furent communs aux deux sections, et que la double correction fut assurée en faisant appel pour chaque composition à un membre du jury de la section masculine et à un membre du jury de la section féminine.

C'est pourquoi il nous a encore paru opportun de présenter ici un rapport commun facilitant la comparaison des résultats des deux concours et réunissant sans répétitions ou redites inutiles les observations et les suggestions des examinateurs.

COMPOSITION DES JURYS

Un arrêté du 1^{er} avril 1953 a fixé ainsi la composition des deux jurys :

SECTION MASCULINE

M. THIBERGE, Inspecteur général, *Président*.

M. DIXMIER, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

M. EUVRARD, professeur (Centrale) au Lycée Chaptal.
 M. GUAYDIER, professeur (Centrale) au Lycée Saint-Louis (Stanislas).
 M. LEFRANÇOIS, professeur (Institut agronomique) au Lycée St-Louis (Stanislas).

SECTION FÉMININE

M. DEDRON, Inspecteur général, *Président*.
 M. ANGLADE, professeur au Lycée Charlemagne.
 Mlle BARBIER, professeur au Lycée Victor-Duruy.
 M. LESIEUR, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.
 M. RAMIS, professeur (Centrale) au Lycée Louis-le-Grand.

DATES DES ÉPREUVES

Les épreuves écrites eurent lieu les 9 et 10 juin 1953 ; pour Paris elles se passèrent à la Sorbonne sous la surveillance des membres des jurys, sans qu'aucun incident fût à signaler.

Dans une délibération commune, tenue le 30 juin, au Lycée Fénelon, les deux jurys ont arrêté les deux listes d'admissibilité qui furent publiées le lendemain de leur contreseing.

Les épreuves orales eurent lieu, pour les candidats, au Lycée Saint-Louis, du 9 au 20 juillet inclus, et pour les candidates au Lycée Camille-Sée, du 6 au 16 juillet inclus.

Une deuxième session était prévue pour le début d'octobre et devait être réservée à des candidats ou candidates admissibles à l'agrégation en 1953 et dispensés par les jurys d'agrégation des épreuves écrites de la partie théorique du C.A.P.E.S. ; cette disposition n'eut pas à jouer, car les jurys d'agrégation usèrent seulement de la faculté, qui leur était laissée également, soit de n'accorder aucune équivalence, soit d'accorder l'équivalence de toutes les épreuves théoriques (écrites et orales) du C.A.P.E.S., soit enfin d'accorder l'équivalence totale du C.A.P.E.S. (épreuves théoriques et pratiques).

Nos jurys ont reçu le plus aimable accueil dans les établissements où ils étaient appelés à siéger ; nous tenons à remercier ici les chefs d'établissements et le personnel qui leur ont ainsi grandement facilité la tâche.

ÉPREUVES ÉCRITES

	Candidats	Candidates
Nombre des inscrits	110	94
Présents à la 1 ^{re} composition	89	77
Présents à la 2 ^e composition	84	73
Admissibles	57	48

Cinq candidats et cinq candidates ont dû leur admissibilité à la majoration de points prévue pour un Diplôme d'Études Supérieures (D.E.S.), obtenu avec la mention *Passable* (10 points), *Assez bien* ou *Bien* (12 points), ou *Très bien* (14 points).

Ces cinq candidats et deux de ces candidates ont d'ailleurs échoué à l'oral.

34 candidats et 20 candidates, titulaires d'un D.E.S., lui ont dû une simple amélioration de leur moyenne et de leur classement.

Moyenne des notes d'écrit :

	Compte tenu du D.E.S.		Compte non tenu du D.E.S.	
	Candidats	Candidates	Candidats	Candidates
Ensemble des composants	6,70	5,85	6,14	5,33
Admissibles	8,74	7,46	7,99	6,86
Non admissibles	3,07	3,17	2,83	2,80

La répartition des moyennes d'écrit est, *pour les admissibles* :

	Candidats	Candidates
Notes de 10 et au-dessus	15	7
dont, grâce au D.E.S.	6	3
Notes de 7 inclus à 10	28	17
Notes de 5 inclus à 7	14	24

La coupure d'admissibilité s'est faite à 5 (sur 20) pour les deux sections : le candidat classé 1^{er} admissible avait pour moyenne 16,5 (et 17,5 compte tenu de son D.E.S.) ; la 1^{re} des candidates avait elle-même une moyenne de 14,6 (sans D.E.S.).

PROVENANCE DES ADMISSIBLES

Aux 57 candidats et aux 48 candidates déclarés admissibles après les épreuves écrites vinrent se joindre, pour les épreuves orales, cinq élèves de l'Ecole Normale Supérieure (rue d'Ulm) et six élèves de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles (Sèvres).

Dans l'ensemble, tous ces candidats se répartissent ainsi :

	Candidats	Candidates
Maîtres auxiliaires	17	21
Adjoints d'enseignement et maîtres d'internat	16	4
Instituteurs	4	1
Professeurs titulaires d'un cadre extérieur	1	0
Etudiants	18	21
Anciens élèves d'une E.N.S.	1	1
Elèves d'E.N.S.	5	6
	62	54

EPREUVES ORALES

a) *Candidats n'appartenant pas à une E.N.S.*

Tous les candidats admissibles passent leur épreuve orale selon le calendrier préétabli, sauf l'un d'eux qui demande à la subir en A.O.F. où il est adjoint d'enseignement et où il souhaite continuer à exercer, et un autre qui en est dispensé par le jury d'agrégation.

Les 48 candidates admissibles se présentent toutes pour l'oral à la date qui leur avait été individuellement fixée ; l'une d'elles a renoncé à préparer et à exposer la question de géométrie qui lui avait été proposée.

Les notes moyennes ont été les suivantes :

	Candidats	Candidates
Pour les exposés	7,5	11,1
Pour les interrogations complémentaires	9	12,9
En moyenne générale	8,2	12

et ces notes moyennes s'échelonnent ainsi :

	Candidats	Candidates
Pour les exposés	1 à 16	3 à 18
Pour les interrogations complémentaires	1 à 18	8 à 17
En moyenne générale	2 à 15,5	7 à 16

Les jurys ont dû éliminer après les épreuves orales 15 candidats et 9 candidates.

b) *Candidats des E.N.S.*

Les cinq élèves de l'E.N.S. (rue d'Ulm) n'ont pas eu à subir les épreuves orales du C.A.P.E.S., ayant été entre temps admissibles à l'agrégation et dispensés des dites épreuves orales. (Ils furent d'ailleurs tous admis à l'agrégation).

Les six élèves de l'E.N.S. (Sèvres), qui devaient aussi être toutes admises quelques jours plus tard à l'agrégation, ont obtenu les notes moyennes suivantes :

Pour les exposés	12,1
Pour les interrogations complémentaires	14,1
En moyenne générale	13,1

avec l'échelonnement :

Pour les exposés	10,5 à 14
Pour l'interrogation complémentaire	12,5 à 16,5
En moyenne générale	12 à 15

ADMISSION DÉFINITIVE

En laissant à part les élèves des E.N.S., qui jouissent d'un régime spécial pour leur préparation pédagogique, les résultats définitifs des deux concours se présentent ainsi :

	Candidats	Candidates
Nombre des postes offerts dans les C.P.R.	81	50
Candidats présents à l'oral	55	48
Candidats reçus sur la liste normale de juillet	40	35
Candidats reçus sur la liste supplémentaire	0	4

Il est à noter que la liste normale de juillet était destinée à pourvoir 70 % des postes offerts, 20 % étant réservés aux admissibles à l'agrégation dispensés de toutes les épreuves théoriques du C.A.P.E.S. et 10 % aux admissibles à l'agrégation dispensés des seules épreuves écrites et devant éventuellement subir les épreuves orales en octobre.

Parmi les candidats, un seul a obtenu ainsi l'équivalence des épreuves théoriques.

Aucune des candidates admissibles à l'agrégation n'ayant été rangée dans ces deux catégories, il n'y eut aucune difficulté pour admettre définitivement dans un C.P.R. les quatre candidates de la liste supplémentaire.

Les résultats définitifs concernant les 55 candidats et les 47 candidates ayant subi effectivement l'ensemble des épreuves théoriques (écrites et orales) se résument ainsi :

	Candidats		Candidates	
	40 admis	15 ajournés	39 admises	8 ajournées
Moyenne générale	9,46	5,67	9,50	6,50
Echelonnement des notes	16,33 à 6,60	6,23 à 4,33	14,90 à 7,54	6,87 à 5,80

RÉPARTITION DANS LES C.P.R.

A la suite des concours d'agrégation les listes d'admission dans les C.P.R. se sont trouvées quelque peu modifiées.

Un candidat admissible à l'agrégation, et n'ayant pas concouru pour le C.A.P.E.S., a reçu dispense complète des épreuves théoriques du C.A.P.E.S. ; il devait donc être admis dans un C.P.R. Les C.P.R. ont en définitive accueilli 41 candidats, alors qu'ils offraient 81 postes masculins, c'est dire que la plupart des candidats ont vu réaliser leur vœu n° 1 ou 2 : c'est dire aussi que le niveau du concours masculin fut nettement inférieur à ce qu'il est strictement légitime d'en attendre, et cela justifie, comme l'an dernier, l'attribution à certaines candidates de postes laissés vacants par la carence des candidats.

D'autre part, parmi nos 39 candidates figurant sur la liste d'admission aux C.P.R., deux ont été admises à l'agrégation, et deux autres ont, après admissibilité à l'agrégation, obtenu l'équivalence totale du C.A.P.E.S. Une autre candidate a d'ailleurs demandé et obtenu immédiatement un poste d'enseignement dans un collège de Tunisie, en application de l'article 5, 4° du décret du 1^{er} avril 1950. Enfin, une

ancienne élève de l'E.N.S. de Fontenay, a été autorisée à passer une année supplémentaire dans cette école pour s'y préparer à l'agrégation. Il ne restait donc à répartir que 33 candidates entre les divers C.P.R., et il a été possible de leur attribuer, dans la plupart des cas, des postes répondant à leur vœu n° 1 ou 2.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES SUR LA NATURE DES ÉPREUVES

Les observations, les suggestions que nous avons apportées l'an dernier sur le concours d'admission aux Centres Pédagogiques Régionaux en 1952, restent entièrement valables, et le concours de 1953 nous amène encore à souhaiter chez nos candidats une connaissance plus profonde, une aisance plus grande, en même temps que des vues plus générales dans tous les problèmes relevant des Mathématiques Élémentaires.

Les insuffisances en ce domaine ont été constatées, aussi bien dans les épreuves écrites que dans les exposés et les interrogations de l'oral, et nous voulons espérer que, grâce à une préparation plus méthodique et bien adaptée aux conditions mêmes des épreuves théoriques, nos futurs candidats nous rassureront plus complètement sur la qualité et sur la valeur éducative de l'enseignement qu'ils seront bientôt appelés à donner dans des classes importantes comme celle de Mathématiques.

Le stage qu'ils accompliront dans un Centre Pédagogique, sous la direction de maîtres excellents et dans des classes de divers niveaux, les conduira certainement à plus de réflexion, à plus de sûreté et de rigueur dans l'enseignement du programme des lycées, mais ce stage ne saurait remédier à une ignorance foncière des matières essentielles.

Il est à peine besoin de dire qu'en attirant leur attention sur ce point, nous ne croyons nullement détourner les éventuels candidats à l'agrégation de l'objectif plus élevé qu'ils se sont fixé, car les mêmes difficultés peuvent évidemment les y attendre.

ÉPREUVES ÉCRITES

Les observations relatives aux épreuves écrites sont présentées plus loin par les correcteurs des deux compositions; nous rappellerons seulement ici que, si les problèmes posés peuvent parfois paraître un peu longs, ils donnent aux candidats l'occasion de montrer leurs connaissances sous des formes et dans des domaines assez variés; le jury s'est d'ailleurs efforcé de poser des questions de difficulté croissante, et dans l'ensemble, accessibles à de bons bacheliers.

Il nous paraît, d'autre part, utile que des problèmes de quelque envergure apportent aux futurs candidats de précieux éléments pour leur propre préparation au concours.

ÉPREUVES ORALES

I. *L'exposé.* — Nos deux jurys ont marqué cette année, d'une manière un peu plus sensible, la tendance qu'ils désiraient imprimer à l'épreuve: il est entendu qu'il ne s'agit pas d'une « leçon » à traiter devant des élèves de telle ou telle classe, mais qu'on demande d'exposer correctement, — dans la forme comme dans le fond, — une question exigeant des connaissances, de la réflexion et de la culture.

C'est dans ce but que chaque candidat a reçu, en même temps que le texte du sujet à traiter, un avertissement ainsi conçu:

Le candidat s'efforcera de composer et de présenter, dans le délai d'une brève demi-heure, l'exposé, dont il trouvera ci-joint le libellé, relatif au programme des classes secondaires des lycées.

Il se placera en un centre d'intérêt et projettera sa lumière sur les divers aspects du sujet, au niveau de sa propre culture, avec des exemples adaptés.

Il pourra donc, tout en conservant une sage mesure, ne pas se limiter,

comme il le ferait d'une « leçon », au niveau strict d'une classe secondaire déterminée, ni se croire tenu à une progression pédagogique traditionnelle.

Il aura soin d'exprimer ses idées avec justesse et netteté et manifestera par son attitude, son écriture et son dessin, son aptitude à confirmer ensuite son orientation professionnelle dans les C.P.R.

Les candidats n'ont pas tous parfaitement compris ce qu'on attendait d'eux, soit qu'ils aient manifestement débordé du cadre du programme (en mécanique ou en analyse par exemple), soit qu'ils aient restreint leur étude à des cas exagérément particuliers, soit encore qu'ils aient ignoré à peu près complètement le sujet en cause : il est regrettable, par exemple, qu'on n'ait rien à dire de valable sur « les propriétés du cube », ou qu'on abandonne définitivement les épreuves parce qu'on a à parler des « problèmes relatifs à une hyperbole définie par ses asymptotes et un point ». Il y aurait aussi à noter que les questions d'arithmétique de mécanique et surtout de géométrie descriptive, n'obtiennent auprès des candidats qu'un succès assez médiocre, en général.

Nous indiquons ici quelques-uns des exposés qui, à côté de questions plus classiques, ont été proposés aux candidats :

— Diverses formes de la condition d'appartenance de quatre points à un même cercle.

— Exemples de construction de cercles assujettis à des conditions simples (point, droite tangente, cercle tangent, etc...).

— Étude des cercles tangents à un cercle et à une droite donnés.

— Pentagones et décagones réguliers.

— Faisceaux linéaires de cercles et propriétés s'y rattachant.

— Inverse d'un cercle et des régions qu'il détermine.

— Propriétés angulaires de l'inversion.

— Propriétés communes à l'inversion et à la symétrie par rapport à une droite (géométrie plane).

— Produit de deux déplacements (géométrie plane).

— Produit de deux symétries par rapport à deux droites parallèles ou sécantes. Application au produit de deux rotations planes.

II. *L'interrogation.* — La forme particulière donnée en 1952 à l'épreuve orale *unique*, fut encore adoptée cette année : l'interrogation qui doit suivre l'exposé du matin fut reportée à l'après-midi du même jour. Nous évitions ainsi aux candidats, et surtout aux candidates, une fatigue excessive, en ne leur imposant pas une demi-heure d'interrogation immédiatement après un exposé de même durée, précédé lui-même d'une préparation de trois heures. D'autre part, nous réduisions toujours ainsi à une seule journée la présence obligatoire de chaque candidat à Paris pour l'oral.

L'interrogation se rapporte parfois à l'exposé du matin même pour en préciser ou discuter les conclusions, mais elle porte le plus souvent sur des sujets entièrement différents permettant de contrôler les connaissances du candidat dans les diverses parties du programme, et surtout de voir dans quelle mesure il sait réagir aux questions posées par l'un des membres du jury sur un sujet peu classique, parfois délicat ou original : il va sans dire que l'interrogation apporte dans un tel cas des suggestions discrètes, ou, si cela devient nécessaire, plus appuyées, et laisse au candidat, dans toute la mesure possible, l'impression et le plaisir d'avoir gardé quelque initiative et abouti à des conclusions satisfaisantes.

Beaucoup de nos candidats sont encore très lents et assez gauches, souvent timides et tristes : quelques-uns cependant se présentent avec une vivacité, un entrain et une aisance fort sympathiques, ce qui n'implique pas chez le jury la moindre admiration ou approbation devant certaines énormités, comme il en est signalé plus loin, proclamées sur le ton le plus péremptoire.

Un compte rendu plus détaillé des diverses épreuves, que plusieurs membres des jurys ont bien voulu nous préparer et que nous sommes heureux de pouvoir reproduire ici, exprimera mieux encore la physionomie du concours, avec ses faiblesses et ses bons côtés. Les futurs candidats doivent y trouver de précieux enseignements s'ils consentent à y prêter quelque attention et à faire leur profit de tant de remarques pertinentes sur des erreurs ou des maladroites si fréquentes dans tous nos concours.

PREMIÈRE COMPOSITION ÉCRITE

MM. Guaydier et Ramis

Le problème comportait essentiellement l'étude de la figure formée par trois cercles tangents deux à deux et admettant en outre une tangente commune ; les deux premières parties en demandaient l'étude géométrique, avec des recherches de lieux et d'enveloppes dans le cas où la tangente et deux de ses trois points de contact avec les cercles restent fixes ; la troisième était l'étude trigonométrique du triangle formé par les centres de ces trois cercles.

Ces données incitaient à l'emploi de l'inversion. On avait d'ailleurs le choix, pour simplifier la figure, entre plusieurs pôles possibles ; le point P (ou le point Q) était commode ; le cercle (α) devenait en effet une parallèle à Δ , ce qui faisait apparaître très vite plusieurs des propriétés, lieux et enveloppes demandés. D'autres inversions pouvaient être utilisées. Toutefois le problème pouvait aussi se traiter sans jamais faire d'inversion. On avait donc souvent le choix entre plusieurs méthodes, plus ou moins élégantes suivant les questions, si bien que pour obtenir une solution du problème aussi rapide que possible, il était préférable de ne pas être esclave d'une méthode et de savoir au contraire frapper suivant les cas à diverses portes.

Le début du problème se prêtait particulièrement bien à l'emploi de cette inversion de pôle P ; la construction demandée devenait alors immédiate, ainsi que la propriété pour les quatre points $UU'VV'$ d'être cocycliques. On pouvait aussi utiliser l'alignement de trois des centres d'homothétie des cercles pris deux à deux : le point W' , deuxième centre d'homothétie des cercles (α) et (β), situé sur Δ , et connu, était aligné avec U et V, et la relation $\overline{W'V} \cdot \overline{W'U} = \overline{W'T}^2$ permettait la détermination immédiate du point T, d'où découlait la construction de (γ) ; cette méthode donnait, par un calcul assez simple, les relations demandées ensuite. A dire vrai, si la plupart des candidats sont arrivés à établir ces relations, beaucoup ont utilisé des calculs manquant de généralité, et il est probable que si l'énoncé n'avait pas indiqué exactement le résultat, les formules obtenues n'auraient pas souvent été parfaitement justes.

Signalons, pour cette première partie, deux manières d'opérer incorrectes et utilisées assez fréquemment. Tout d'abord, le procédé analytique, nécessitant des calculs trop longs et nettement hors du programme de Mathématiques Élémentaires ; d'ailleurs les candidats qui ont voulu adopter cette méthode (trompés peut-être par un passage de l'énoncé conseillant l'emploi d'un axe pour repérer commodément des points remarquables) s'y sont rapidement noyés et n'ont jamais pu arriver au résultat. Ensuite le procédé ramenant la recherche du point C à l'intersection de deux paraboles (ou bien d'une parabole et d'une hyperbole) ; certes, la présence d'un cercle inconnu tangent à un cercle et à une droite en donnait l'idée, mais alors il fallait indiquer nettement comment la construction pouvait ici être réalisée, et surtout ne pas dire triomphalement, comme l'a fait plus d'une copie : « On sait que deux paraboles ont en général deux points communs !!! »

Dans la deuxième partie, on pouvait également, soit se servir des inversions, soit s'en passer en utilisant diverses propriétés classiques (alignement des centres d'homothétie de trois cercles pris deux à deux, faisceau harmonique ayant deux rayons homologues rectangulaires, etc...). L'inversion de pôle P et de puissance PQ^2 était encore bien commode, surtout pour tout le début ; elle donnait notamment

le lieu de W (d'ailleurs évident sans elle), l'enveloppe des cercles γ et γ' (on obtenait par inversion deux demi-droites issues de Q et faisant avec Δ un angle 2θ donné par $\operatorname{tg} \theta = 1/2$, donc $\operatorname{tg} 2\theta = 4/3$), d'où le lieu de son centre (problème classique : cercle tangent à une droite et à un cercle). Elle donnait encore l'enveloppe du cercle inscrit, cercle qui n'était autre que le cercle UVW (après inversion, deux demi-droites analogues aux précédentes, donc initialement deux arcs de cercles).

Quelques remarques sur ces questions. Trop de candidats oublient de limiter les lieux et enveloppes, ou négligent de préciser les courbes obtenues : il est intéressant de savoir qu'un lieu est par exemple un cercle, mais il faut aussi, autant que possible, en préciser la position. Beaucoup ne semblent guère familiarisés avec le problème pourtant très classique : lieu du centre d'un cercle tangent à deux cercles, ou bien à un cercle et une droite. D'autres pensent que quand ils ont montré qu'un cercle est tangent à une droite, ils ont ainsi toute l'enveloppe, et ne cherchent rien d'autre, oubliant qu'un cercle doit tout de même avoir deux points caractéristiques. Ajoutons que les correcteurs ont été surpris de lire dans plusieurs copies que, si deux cercles sont inverses l'un de l'autre, les centres se correspondent dans l'inversion. Et que dire de la phrase : « dans une inversion de pôle O, le point O est invariant » ?...

La troisième partie n'a été abordée que par peu de candidats. L'équivalence des relations (2) et (3) était évidente à l'aide de la formule $r_k = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; il suffisait donc d'établir au choix l'une de ces deux relations, ce qui pouvait se faire à partir de (1)

par un calcul assez simple, en utilisant les formules $R_1 = p - a = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}$ et en se

rappelant (ou en établissant) que dans un triangle on a la relation $\Sigma \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$; la relation (4) pouvait s'en déduire par un calcul trigonométrique.

Pour obtenir les trois angles d'un triangle (T), le plus simple était de former une équation du troisième degré ayant pour racines $\operatorname{tg} A/2$, $\operatorname{tg} B/2$ et $\operatorname{tg} C/2$; cette équation s'écrivait immédiatement à l'aide des fonctions symétriques élémentaires et donnait $t^3 - 2t^2 + t - k = 0$; on la discutait en coupant la courbe représentative des variations de la fonction $y = t^3 - 2t^2 + t$ par des droites $y = k$; cette discussion graphique, très simple, faisait apparaître automatiquement les angles θ et φ de l'énoncé. Quelques candidats, pour traiter cette question, ont cru bien faire d'éliminer une des tangentes pour n'avoir qu'une équation du second degré ayant pour racines les deux autres tangentes ; ce procédé avait l'inconvénient, d'abord de rompre la symétrie entre les trois angles, ensuite de conduire à une discussion beaucoup plus compliquée.

Le problème étant relativement long, les correcteurs ont adopté un barème assez généreux. Pour l'épreuve masculine, la moyenne des 89 copies effectivement remises a été de 6,2 sur 20. Pour les 57 admissibles, cette moyenne s'élève à 8,07. La note 18 a été donnée à une très bonne copie, la seule à avoir traité correctement presque toute la géométrie, mais sans avoir eu le temps d'achever la troisième partie ; deux copies ont obtenu la note 14, 7 ont eu de 10 à 12, 18 de 8 à 10, 21 de 6 à 8, 16 de 4 à 6, 13 de 2 à 4 et 11 moins de 2. Pour l'épreuve féminine, où la notation était exactement la même, une copie a eu 14, 2 ont eu de 10 à 12, 13 de 8 à 10, 18 de 6 à 8, 23 de 4 à 6, 7 de 2 à 4, et 13 moins de 2, soit un total de 77 copies représentant la moyenne de 5,41 sur 20. Cette moyenne atteint 6,96 pour les 48 candidates admissibles.

Comme on le voit, les notes obtenues sont, dans l'ensemble, assez médiocres. Certes, la faiblesse de ces notes correspond, dans beaucoup de cas, à un manque exagéré de connaissances géométriques, même élémentaires, et en même temps à

une impuissance presque complète à raisonner sur des données simples ou à conduire correctement un calcul trigonométrique. Toutefois, pour un bon nombre de copies, elle semble plutôt indiquer un manque de pratique : beaucoup de candidats, au cours de leurs études de licence, ont dû abandonner pratiquement la géométrie pure et, n'ayant plus l'habitude de ses raisonnements, n'avancent que lentement ; ils semblent capables, avec un peu de réadaptation, de bâtir plus vite des solutions correctes et de faire bientôt des professeurs satisfaisants.

SECONDE COMPOSITION ÉCRITE

M. Anglade. — Le sujet de la deuxième composition se décomposait en trois parties à peu près indépendantes et de difficulté sensiblement égale. Les bons candidats l'ont abordé dans l'ordre proposé, sans se laisser intimider par les questions d'arithmétique introduites dès le début. Les candidats pourvus de moins d'assurance ont préféré porter leur effort presque exclusivement sur la troisième partie de nature géométrique.

La correction a mis en relief quelques bonnes solutions attestant des connaissances sûres et un esprit clair. Mais, hélas ! d'autres copies, trop nombreuses, ont prouvé que certains abordent le concours avec une préparation nettement insuffisante.

I. — Dans la recherche des substitutions linéaires

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

laissant invariante une forme quadratique $px^2 - qy^2$, on obtient, en général, le système homogène en p et q

$$\begin{cases} p(a^2 - 1) - qc^2 = 0, \\ pb^2 - q(d^2 - 1) = 0, \\ pab - cdq = 0, \end{cases}$$

sans réussir à donner aux conditions d'existence de solutions distinctes de $p = 0$, $q = 0$, la forme simple

$$\begin{cases} a = \varepsilon d, \\ bc = \varepsilon(a^2 - 1), \quad (\varepsilon = \pm 1). \end{cases}$$

L'énoncé restreignait ensuite le choix possible des coefficients a, b, c, d , en leur imposant la double condition d'être positifs et entiers, ce qui réduisait le système précédent à

$$(1) \quad \begin{cases} a = d, \\ bc = a^2 - 1. \end{cases}$$

C'est la relation $bc = a^2 - 1$ qui permet de montrer que les nombres a, b, c, d sont premiers entre eux dans leur ensemble. A ce propos, certains candidats ont manifesté une ignorance totale des éléments de l'arithmétique. Voici quelques-unes de leurs affirmations :

« $a = d$, donc a et d sont premiers entre eux. »

« Si un nombre divise un produit, il divise l'un des facteurs. »

« b et c sont premiers avec a , parce qu'ils ne sont pas multiples de a . »

« $a + 1$ et $a - 1$ sont premiers entre eux. »

« Si a, b, c, d sont premiers entre eux dans leur ensemble, a et b sont premiers entre eux. »

« Puisque $a = d$, les nombres a et d ne sont divisibles que par eux-mêmes et par l'unité. »

La détermination des solutions du système (1), telles que $b = c + 7$ se ramène à la recherche des solutions entières de $(2c + 7 - 2a)(2c + 7 + 2a) = 45$ en appliquant une méthode qui réussit fréquemment en arithmétique et qui consiste à écrire une équation sous la forme $AB = m$, les facteurs A et B contenant seuls les éléments inconnus.

Si on donne a , pour obtenir les solutions de (1), il suffit de faire apparaître les

diviseurs de $(a^2 - 1)$ parmi lesquels figurent 1, $(a - 1)$, $(a + 1)$ et $(a^2 - 1)$. Une fois b et c connus, la recherche des coefficients p et q dépend de l'équation classique $bp = cq$. Ainsi, pour $a = 2$, on parvient à la substitution linéaire

$$(2) \quad \begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

à laquelle on peut associer la forme quadratique $x^2 - 3y^2$.

II. — La deuxième partie du problème comportait l'étude des formules de récurrence

$$(F) \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n, \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n, \end{cases}$$

auxquelles il était utile d'associer

$$(F') \quad \begin{cases} u_n = 2u_{n+1} - 3v_{n+1}, \\ v_n = 2v_{n+1} - u_{n+1}. \end{cases}$$

De l'identité, aux notations près, des systèmes (2) et (F) résulte la relation

$$u_{n+1}^2 - 3v_{n+1}^2 = u_n^2 - 3v_n^2,$$

dont le caractère inductif permet d'écrire

$$(3) \quad u_n^2 - 3v_n^2 = u_0^2 - 3v_0^2 = 1.$$

L'équation vérifiée par $x = u_n$ et $y = v_n$ est donc (E) $x^2 - 3y^2 = 1$.

L'égalité (3) prouve que u_n et v_n sont premiers entre eux. Les systèmes (F) et (F') se prêtent à un raisonnement par récurrence qui conduit au même résultat en montrant que u_{n+1} et v_{n+1} admettent les mêmes diviseurs que u_n et v_n .

La formule (ou son analogue en v)

$$(4) \quad u_{n+1} + u_{n+1} = 4u_n$$

se déduit par addition des égalités

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n, \\ u_{n+1} = 2u_n - 3v_n, \end{cases}$$

du type (F) ou du type (F').

De nombreux candidats sont parvenus au résultat par hasard, en combinant les égalités les plus imprévues. Il était pourtant évident que la formule (4) devait se former en exprimant u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

Pour généraliser (4) en lui donnant la forme

$$(5) \quad u_{n+k} + u_{n-k} = m_k u_n,$$

il est encore commode de procéder par récurrence. On doit d'abord s'assurer de l'exactitude de (5) pour $k = 0$ ($m_0 = 2$) et pour $k = 1$ ($m_1 = 4$), puis, après avoir supposé que pour $k = p - 1$ et pour $k = p$ l'on a

$$\begin{cases} u_{n+p-1} + u_{n-p+1} = m_{p-1} u_n, \\ u_{n+p} + u_{n-p} = m_p u_n, \end{cases}$$

il suffit de combiner ces égalités membre à membre, en tenant compte de (4), pour aboutir au résultat en vue $u_{n+p+1} + u_{n-p-1} = (4m_p - m_{p-1}) u_n$.

Rares ont été les candidats ayant nettement vu le lien existant entre (4) et (5). Plus rares encore sont ceux qui ont compris que la relation

$$(6) \quad m_k = 2u_k$$

dérive des égalités $m_0 = 2u_0$, $m_1 = 2u_1$, et du fait que m et u suivent la même loi de formation linéaire homogène.

Il fallait, bien entendu, pour donner une démonstration inductive complète, supposer (6) vérifiée pour $k = p - 2$, $k = p - 1$ et montrer, ce qui n'entraînait aucune complication, que cette relation avait encore lieu pour $k = p$.

En partant de $v_n > 2v_{n-1}$, $u_n > v_n$ et $v_n^2 - 3 = \frac{1}{v_n^2}$, beaucoup de candidats ont trouvé les limites vers lesquelles tendent v_n , u_n et v_n , quand n devient infini. Par contre, seuls les meilleurs parviennent aux limites de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et de f_n en notant que

$$f_1 = \frac{1}{4}, \quad z_1 = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{4}$$

puis en établissant les formules
$$z_n = \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{1}{4 - z_{n-1}}, \quad f_n = \frac{1}{4 - f_{n-1}}$$

qui prouvent que
$$f_n = z_n = \frac{1}{2 + w_n}.$$

Après avoir donné, à l'aide de la formule du binôme ou d'un raisonnement par récurrence, à $(r + s\sqrt{t})^n$ l'expression $\alpha_n + \beta_n \sqrt{t}$, on peut établir les formules analogues à (F)

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = r\alpha_n + st\beta_n \\ \beta_{n+1} = s\alpha_n + r\beta_n \end{cases}$$

en notant que si t n'est pas carré parfait et si m, n, p, q sont entiers, une égalité telle que $m + n\sqrt{t} = p + q\sqrt{t}$ entraîne $m = p, n = q$.

Pour $r = 2, s = 1, t = 3$, les systèmes (7) et (F) deviennent identiques. De plus, on observe que $u_0 = \alpha_0 = 1, v_0 = \beta_0 = 0$. Il est alors légitime d'écrire $u_n = \alpha_n, v_n = \beta_n$, c'est-à-dire $u_n + v_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n$.

Les deux égalités conjuguées

$$\begin{cases} u_n + v_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n, \\ u_n - v_n\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^n, \end{cases}$$

permettent ensuite d'exprimer u_n et v_n en fonction de n

De $u_{nk} + v_{nk}\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{nk} = (u_n + v_n\sqrt{3})^k$ on tire les expressions de u_{nk} et de v_{nk} en fonction de u_n et de v_n . Par exemple, pour $k = 2$,

$$\begin{cases} u_{2n} = u_n^2 + 3v_n^2, \\ v_{2n} = 2u_nv_n. \end{cases}$$

On devait ensuite considérer deux nombres $x = a > 1$ et $y = b > 0$ formant une solution entière de l'équation (E), c'est-à-dire tels que

$$(8) \quad a^2 - 3b^2 = 1.$$

Le rapport

$$\frac{a + b\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (a + b\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}),$$

s'écrit sous la forme $i + j\sqrt{3}$ en prenant

$$(9) \quad \begin{cases} i = 2a - 3b, \\ j = 2b - a, \end{cases} \quad \text{et} \quad (10) \quad \begin{cases} a = 2i + 3j, \\ b = i + 2j. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que $i^2 - 3j^2 = a^2 - 3b^2 = 1$, ce qui montre que (E) admet la nouvelle solution $x = i, y = j$.

La plupart des candidats n'ont pas su terminer l'étude et ont préféré utiliser le reste du temps disponible à la recherche de la troisième partie du problème.

Des relations (8), (9) et (10) découlent les inégalités

$$i > 0, j > 0 \text{ si } b > 1, i < a, j < b.$$

En divisant $(a + b\sqrt{3})$ par les puissances successives de $(2 + \sqrt{3})$ on fait apparaître des solutions positives de (E) de plus en plus petites. Il est donc certain que l'on finira, par ce procédé, au bout de $(n - 1)$ opérations, pour aboutir à la plus petite solution positive $x = 2, y = 1$ et que l'on pourra écrire

$$\frac{a + b\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})^{n-1}} = 2 + \sqrt{3}$$

ou $a + b\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n = u_n + v_n\sqrt{3}$,
ce qui implique $a = u_n, b = v_n$.

Ce sont donc les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n]}{2} \\ y = \frac{[(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n]}{2\sqrt{3}} \end{array} \right.$$

qui fournissent toutes les solutions positives et entières de $x^2 - 3y^2 = 1$.

III. — La troisième partie de l'énoncé demandait aux candidats l'étude de la transformation ponctuelle (T) qui associe, à tout point M de coordonnées rectangulaires x, y , le point M' dont les coordonnées x', y' sont données par

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 2y. \end{array} \right.$$

La recherche des coordonnées des points invariants conduit à la résolution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 0, \\ x + y = 0, \end{array} \right.$$

qui n'admet que la solution $x = 0, y = 0$. La transformation (T) laisse invariante l'origine et seulement ce point.

Des candidats ont affirmé que les droites $x + 3y = 0, x + y = 0$ étaient elles-mêmes invariantes. D'autres ont prétendu que l'origine étant invariante, les droites globalement invariantes cherchées devaient passer par O. Il serait bien imprudent d'attribuer la même propriété aux coniques globalement invariantes ! Et pour quel motif ne pas raisonner ainsi à propos de l'inversion positive ? Tout cercle globalement invariant contient-il le cercle d'inversion ? En réalité, il faut toujours soigneusement distinguer les figures invariantes point par point de celles dont les points s'échangent.

Certains candidats ont éprouvé des difficultés pour exprimer que les droites

$$Ax + By + C = 0 \text{ et } (2A - B)x + (2B - 3A)y + C = 0$$

étaient confondues. Faut-il rappeler que la proportionnalité des coefficients traduit cette propriété ?

A plusieurs reprises, au cours de l'étude demandée, on constatait que les hyperboles (H) d'asymptotes (X) et (Y) étaient invariantes globalement. Puis on demandait la détermination de toutes les coniques ayant la même propriété. Les candidats n'ont vu que des solutions algébriques, parfois élégamment présentées, alors qu'une étude géométrique conduisait plus simplement au but.

En effet, soit (G) une conique globalement invariante dans la transformation (T). Par l'un de ses points M, non situé sur (X) ou sur (Y), il passe une hyperbole (H) elle-même globalement invariante. Un produit de p transformations (T) transforme M en M_p commun à (G) et (H). Ce point M_p s'éloigne à l'infini quand p devient infini. Puisqu'il appartient à l'hyperbole (H) sa distance à (Y) tend vers zéro ce qui prouve que la conique (G) admet elle aussi la droite (Y) pour asymptote.

En introduisant la transformation inverse de (T), on montrerait que (X) est la seconde asymptote de (G).

Ainsi, (G) et (H) sont deux hyperboles ayant les mêmes asymptotes et passant par un même point : elles sont confondues. On ne peut donc trouver d'autres coniques invariantes que les hyperboles (H).

Signalons que, pour établir qu'une transformation ponctuelle est une similitude, on procède couramment comme il suit :

On transforme un point fixe A et un point variable M en A' et M', puis on prouve que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'})$ et le rapport $\frac{A'M'}{AM}$ restent constants.

En général, les candidats commettent des fautes graves toutes les fois qu'ils

essaient de préciser la nature d'une correspondance parce qu'ils ignorent les propriétés qui la caractérisent.

Malgré la générosité du barème appliqué pour la correction de cette seconde composition, les notes furent dans leur ensemble peu satisfaisantes et correspondent trop souvent à autant d'ignorance que de maladresse.

Pour les candidats les deux meilleures copies ont obtenu 15 et 14,5.

Pour les candidates les trois meilleures copies ont obtenu 16, 15,5 et 15.

Voici d'ailleurs la répartition plus précise des notes attribuées :

		Candidats	Candidates
au moins	14	2	3
12 inclus à 14 exclu		5	2
10 — 12		8	1
8 — 10		12	7
6 — 8		15	12
4 — 6		17	20
2 — 4		17	24
moins de 2		8	4
		84	73

Les moyennes générales s'établissent à 6,33 pour les candidats et à 5,47 pour les candidates.

Si l'on ne considère que les seuls admissibles ces moyennes sont respectivement portées à 7,87 et à 6,71.

EPREUVES ORALES

M. Dixmier. — Quelques conseils de forme : s'exprimer devant le jury au rythme de sa propre pensée, qui doit être plus prompte que l'aptitude d'une classe moyenne à la suivre.

Eviter de dire « plus petit ou égal », ou bien « ce terme change de signe », alors qu'il est exactement multiplié par -1 : éviter d'écrire $\overline{AA'}$ tant qu'on n'a pas orienté le support du vecteur $\overrightarrow{AA'}$; employer de la craie de couleur dès que c'est opportun ; mettre les barres de fraction *d'abord*, au niveau de la ligne d'écriture et en particulier des signes d'égalité ; ne pas baptiser indices les accents « prime, seconde ».

Apprendre à mettre en forme un raisonnement par l'absurde, ou un raisonnement par récurrence ; éviter le premier si l'on peut s'en passer, il contraint l'esprit plus qu'il ne le satisfait, sans doute parce qu'il procède de l'inconnu présumé vers le connu.

Signaler, en algèbre comme en géométrie, les symétries dans les données d'un problème, et savoir les utiliser ; en particulier, réfléchir aux fonctions symétriques entières de deux variables ou de deux nombres.

Pour résoudre l'équation $2x^2 + (2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$, utiliser un groupement évident de termes et éviter de calculer le discriminant, surtout s'il ne semble pas facile d'y reconnaître le carré d'une irrationnelle du second degré. A propos d'irrationnelles, rester dans le domaine réel et donc éviter de dire que $(x^2 + y^2)^2 = p^2 + q^2$ entraîne $x^2 + y^2 = \pm \sqrt{p^2 + q^2}$.

En trigonométrie, dans l'exposé relatif à l'expression rationnelle de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, il est inutile de reprendre la démonstration de la formule

exprimant $\cos(a + b)$, mais il convient de prévoir l'existence des formules cherchées, comme d'en écarter explicitement le cas $x = \pi + 2k\pi$; cette restriction n'est pas moins nécessaire dans la résolution de $a \cos x + b \sin x + c = 0$. Ne pas dire

que si une équation trigonométrique ne contient que $\sin x$, et si on pose $\sin x = X$, elle se ramène à une équation *algébrique* en X .

En géométrie, mieux réfléchir à la notion d'angle orienté dans le plan ; deux droites admettent deux bissectrices qui jouent le même rôle ; mais deux axes admettent une bissectrice intérieure et une bissectrice extérieure.

Distinguer la part de l'algèbre et celle de l'arithmétique dans les formules de géométrie : ainsi, quand un point variable M se trouve rattaché à un point fixe O par la relation $OM^2 = k$, k étant une constante qui résulte d'un calcul, il faut discuter suivant le signe de k . De même, la formule classique liant les distances de deux couples de points homologues dans une inversion de puissance k , comporte le symbole $|k|$, tant qu'on ne peut en faire une formule d'algèbre pour quatre points alignés.

Pour l'inversion encore, la transformation d'une ligne en ligne est bien étudiée, mais non la transformation d'une région en une région ; si un cercle C est intérieur à un cercle C' et si on les transforme par inversion, on peut obtenir deux cercles extérieurs. Enfin le théorème de Ptolémée doit être énoncé et démontré comme une condition nécessaire et suffisante.

Pour le cercle-lieu des points $\frac{MA}{MB} = k$, il convient de savoir placer son centre et calculer son rayon ; il convient aussi de suivre sa variation quand, A et B restant fixés, k varie.

Pour l'équivalence des deux définitions monofocale et bifocale d'une conique à centre, il est superflu de commencer par parler de la parabole ; quand on part de la définition de l'ellipse par F, D , $e < 1$ et qu'on aboutit à montrer que les points de l'ellipse vérifient $MF + MF' = 2a$, il reste encore à montrer que les points vérifiant cette relation sont tous sur l'ellipse, et il reste enfin à revenir de la définition bifocale à la définition monofocale. Rappelons aussi que le lieu $MF' - MF = 2a$ n'est pas une hyperbole entière, mais seulement une branche.

A propos de la section hyperbolique du cône de révolution, le tracé même de la figure nécessite des démonstrations (points de contact des sphères inscrites, etc...), les soustractions de longueurs nécessitant un examen des cas de figure, enfin il ne suffit pas de démontrer que tout point de l'intersection se trouve sur une hyperbole, on attend la réciproque. Et si l'on définit la conique-section par F, D, e , l'on doit vérifier que l'excentricité e est supérieure à 1 avant d'affirmer qu'il s'agit d'une hyperbole.

Enfin le jury souhaite que les quelques questions où il tient à lier la géométrie pure et la géométrie descriptive soient mieux accueillies ; les symétries du cube et la représentation d'un cube à diagonale verticale constituent un tout qu'on ne doit pas ignorer, plus intéressant et aussi plus facile que la représentation d'un cube placé d'une façon absolument quelconque.

La formule du binôme peut être démontrée par récurrence ; ne pas la faire alors tomber du ciel ; justifier la structure du triangle de Pascal si l'on juge utile de l'évoquer ; de même pour l'interprétation des coefficients du binôme comme dénombrant des combinaisons ; enfin, proposer des applications plus opportunes à ce niveau que la formule de Leibniz, relative à la dérivée n° d'un produit, ou que le développement limité de $(1+x)^n$ pour n fractionnaire.

Dans l'exposé relatif au P.G.C.D. de deux nombres a et b , il ne sert à rien de décréter de prime abord $b < a$. Le candidat peut adopter la méthode consistant à étudier les nombres $u = ax + by$, mais non pas $u = |ax + by|$, ce qui rend douteuses ses démonstrations relatives à la somme de deux nombres u , etc..., ni affirmer que $u \geq 1$, ce qui serait faux ; le candidat ne prouve pas que les diviseurs communs à a et b sont exactement ceux du P.G.C.D. ; il ne prouve pas non plus le théorème $(\lambda a, \lambda b) = \lambda (a, b)$, s'il écrit seulement $(a, b) = |ax + by|$ donc $\lambda (a, b) = |\lambda ax + \lambda by|$.

M. Lefrançois. — Limite de $\frac{\sin x}{x}$ et applications. — Dès le début, x mesure, tan-

tôt l'arc $\widehat{AM}$, tantôt l'angle au centre $\widehat{AOM}$. Le candidat prend l'extrémité M de l'arc x sur le premier quadrant, en tire toutes les conséquences sans poser les conditions

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, puis sur notre objection il semble ne pas imaginer qu'une variable puisse ten-

dre vers zéro par valeurs négatives. L'énoncé précisait que les applications demandées aux formes indéterminées ne comportant pas la dérivation des fonctions circulaires,

il est alors regrettable que le candidat cherche la limite de $\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$ quand x

tend vers x_0 et s'en tienne à ce seul exemple.

Correspondance par inversion entre deux cercles d'un même plan. — Le candidat se borne à « parler » de l'inversion pendant une demi-heure et le sujet proposé passe avec le reste, sans aucune réciprocité valable, dans un fatras désordonné. *In extremis*, le candidat reconnaît qu'il a omis de parler des cercles égaux et des cercles tangents.

Représentation descriptive et propriétés diverses du tétraèdre régulier. — Le jury attendait une définition constructive, puis une représentation descriptive dans une position privilégiée à partir de laquelle bien des propriétés géométriques sauteraient aux yeux. Or, le candidat a fait un long préambule sur le centre de gravité d'un tétraèdre quelconque, sur le tétraèdre orthocentrique, mais il a peu parlé du tétraèdre régulier, pas du tout de ses symétries, guère de sa sphère circonscrite, mal de sa sphère inscrite et une question du jury, sur les autres sphères tangentes aux plans des quatre faces, fut malheureuse ; enfin, il n'a pas présenté d'épure.

La notion de fraction. — Le candidat se sert d'une tarte, la coupe en deux, puis en quatre parts égales, dont il prend une, puis deux parts ; de ce modeste départ, il croit déduire la définition d'une fraction et les règles opératoires. L'instituteur, parlant pour la première fois à des enfants de sept à huit ans, se place probablement sur un plan plus élevé. Sans désirer particulièrement que le candidat s'élève jusqu'aux abstractions de l'axiomatique, nous souhaitons que son exposé nous donne la mesure d'une logique dont il estime lui-même se satisfaire, quel que soit le moyen qu'il mette en œuvre pour sa construction ; de ce point de vue, l'exposé précédent, qui pouvait être si probant, s'est avéré très décevant.

Racine carrée d'un entier à une unité près. — Le candidat n'ignorait pas la question, il en a dit l'essentiel, mais il a recommencé plusieurs fois les mêmes démonstrations faute de dégager les théorèmes fondamentaux ; il a résolu avec peine certaines inégalités et a donné une impression de lourdeur et de confusion ; nous espérons une discrimination entre les propriétés générales, indépendantes du système de numération et établies comme telles, et la technique d'extraction dans le système de base donnée, singulièrement de base 10 ; le candidat ferait au mieux la preuve qu'il a compris cette distinction, s'il achevait son exposé par une extraction de racine dans le système binaire par exemple, qui est à la base de nos machines à calculer.

Etude de $y = \sqrt[n]{x}$. — Après avoir donné une définition correcte à partir de la fonction $Y = X^n$, le candidat pouvait admettre les théorèmes généraux sur les fonctions inverses, les énoncer correctement et les appliquer à ce cas particulier, ou, mieux, étudier directement la fonction puisque c'est ici possible et naturel. Au lieu de faire un choix, le candidat entremêle d'abord les deux méthodes, puis ne pouvant venir à bout de la continuité, il se rabat sur la dérivation. Il se montre peu solide également sur les règles de calcul des radicaux, puis sur celles des exposants fractionnaires qui, d'ailleurs, ne faisaient pas partie de l'exposé demandé.

M. Euvrard. — Progressions géométriques. — Il n'est pas légitime dans cette étude d'écarter les progressions dont la raison q est négative, ni suffisant de dire qu'on se ramènerait à $q > 0$ en changeant le signe de la raison.

Dans l'étude des faisceaux harmoniques, un théorème d'existence, puis une propriété d'invariance précèdent logiquement la définition ; il convient d'utiliser toujours des relations algébriques, donc des triangles qualifiés d'homothétiques et non de semblables ; pour les figures, dessiner des éléments du faisceau qui soient des droites et non des demi-droites ; pour énoncer les quatre droites, les séparer en deux couples ; donner des applications, et en particulier une construction de la quatrième droite connaissant les trois premières, ce qui peut être une occasion de revenir sur le rôle privilégié d'une sécante parallèle à l'une des droites du faisceau, sécante introduite un peu *a priori* dans la démonstration fondamentale.

Dans l'exposé entendu sur la notion de primitive, la définition est bien vague ; le candidat paraît l'appliquer à un intervalle (a, b) , où la fonction est définie, mais n'existe pas nécessairement ; il semble croire qu'on peut toujours partager (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels $f(x)$ est monotone ; il admet que si l'aire $S(x)$ est une primitive dans chacun d'eux, elle le sera dans (a, b) total, alors qu'une portion d'aire entièrement comptée devient une constante additive à l'aire $S_1(x)$ relative à l'intervalle suivant.

Perpendiculaire commune à deux droites, représentation cotée, application. — Il convient de donner une définition de la perpendiculaire commune, d'en faire une recherche méthodique comportant, comme tout problème de construction, une phase d'analyse et une phase de synthèse, avec discussion ; si l'on se borne à donner une recette de construction *a priori*, il est vain de penser qu'on démontre l'unicité de la perpendiculaire commune en constatant que cette recette conduit en effet à une solution unique. Quant à la représentation cotée, elle est destinée à illustrer et concrétiser la construction, et après le cas où le plan de projection est pris parallèle aux deux droites à la fois, on attend au moins le cas où il est perpendiculaire à l'une des droites. Il n'est pas difficile enfin de donner une application d'un réel intérêt.

Etude de la figure formée par deux cercles cosphériques. — Cette étude ne peut sembler creuse à qui l'a vraiment préparée, le candidat ne doit donc pas se complaire à des évidences préliminaires. Si, dans son esprit, les deux axes sont évidemment concourants, mieux vaut le dire explicitement, sous peine d'énoncer une condition inexacte de cosphéricité. De même, dans l'étude des cercles orthogonaux sur une sphère, la remarque essentielle que les cônes, sur lesquels raisonne le candidat, sont de révolution, n'apparaît que bien tard. Le candidat donne d'ailleurs l'impression de ne jamais savoir au juste s'il a énuméré assez d'arguments pour prouver ce qu'il veut prouver. L'étude des inversions échangeant deux cercles est bien écourtée, il ne faut pas minimiser le cas de deux cercles égaux ou tangents.

Vecteur-vitesse et vecteur-accélération dans un mouvement curviligne : application au mouvement circulaire uniforme. — Le candidat n'a pas prononcé dans son étude un véritable mot de mécanique, mouvement, sens du mouvement, etc... Il peine longuement à obtenir analytiquement la limite $\overrightarrow{M_0 N_0}$ du vecteur-vitesse moyenne $\overrightarrow{M_0 N}$ en montrant que $N_0 N^2$ tend vers zéro, mais plus loin il admet sans inquiétude la limite du produit d'un vecteur par un scalaire. Le vecteur-accélération est tout juste défini, le mouvement curviligne uniforme ne l'est point, et le mouvement circulaire uniforme est traité uniquement en coordonnées rectangulaires, la vitesse angulaire étant un simple nom donné à la constante ω , sans signification concrète. A combien de reprises pourtant le candidat est-il censé avoir étudié tout cela, en mathématiques élémentaires (mathématiques et physique) d'abord, puis en mathématiques spéciales, en physique générale et en mécanique rationnelle !

Actions de contact, lois du frottement, équilibre d'un point sur un cercle ou une sphère. — Les lois du frottement sont à peine énoncées pour un point sur une

surface, pas du tout pour un point sur une courbe, dans l'abstrait et sans aucun rattachement au concret par un rappel des expériences classiques qui ont conduit à ces lois. Comment justifier cette assertion, « quand deux solides sont en contact, comme les forces intérieures doivent disparaître, *on en déduit* le principe de l'action et de la réaction » ? Il semble simplement que $\vec{R}$ se décompose en $\vec{T}$ et $\vec{N}$ et que $\vec{T}$ constitue la force de frottement. Les exemples sont pauvres et le candidat a oublié qu'en composant un poids et une force centrale attractive proportionnelle à la distance, on ne fait que déplacer le centre d'attraction. Vraiment la mécanique est appelée à nous décevoir.

M. Guaydier. — Mouvement vibratoire simple. — Leçon de Mécanique encore, et tout aussi décevante que les leçons de Mécanique précitée, malgré sa fantaisie. On y peut apprendre que pour qu'un mouvement soit vibratoire simple, il suffit que le mobile oscille entre deux positions extrêmes, ou encore que y et x soient de signes contraires. Pour que deux sinus soient égaux, il faut et il suffit que les angles diffèrent de $2k\pi$. Pour qu'un mouvement circulaire soit uniforme, il suffit qu'il y ait la proportionnalité $\widehat{AM} = R\theta$, etc...

Fonction logarithmique définie comme primitive de $\frac{1}{x}$ s'annulant pour $x = 1$. — On ne nous dit pas pourquoi $\frac{1}{x}$ a une primitive ; celle-ci est désignée d'une manière fort défectueuse par $F\left(\frac{1}{x}\right)$; on ne sait pas pourquoi Lx n'est pas définie pour $x \leq 0$;

l'étude pour x tendant vers 0 ou vers plus l'infini n'est même pas envisagée ; la courbe représentative n'est pas dessinée ; la propriété fondamentale $Lab = La + Lb$ n'est pas démontrée ; l'existence de logarithmes de bases diverses n'est pas signalée, non plus que les rapports entre la fonction logarithmique ainsi définie et les associations de deux progressions géométrique et arithmétique.

Branches infinies, directions asymptotiques et asymptotes de l'hyperbole. — En libellant ainsi le sujet, le jury souhaite que le candidat marque lui-même trois étapes comme il le fait dans l'étude des courbes $y = f(x)$ et qu'il aborde cette recherche directement à partir de la définition et non pas comme corollaire de l'étude de l'intersection de la courbe avec une droite ou de la tangente en un point. Au contraire, c'est la possession préalable des asymptotes qui permet de mettre de l'ordre dans la discussion de l'intersection de la courbe et d'une droite, ou des tangentes issues d'un point ou parallèles à une direction donnée. Et c'est avec le souci de régulariser certains lieux ou enveloppes, ainsi que certains théorèmes comme les théorèmes de Poncelet, que l'on montre, après coup, que les asymptotes ont toutes les propriétés des tangentes sauf d'avoir un point de contact et qu'on pose la convention commode d'intégrer les asymptotes dans la famille des tangentes, ce qui permet de considérer désormais comme cas de *transition* tout ce qui jusque-là était cas d'*exception*. Tout cela n'a pas été mis en relief par le candidat, qui a en outre tendance à ne raisonner que sur une branche et qui parle des diamètres comme lieux de milieux de cordes, sans en donner une limitation éventuelle.

Les déplacements dans le plan. — Si l'on suppose au départ que la translation et la rotation ont fait préalablement l'objet, non seulement d'une définition, mais d'une étude approfondie avec toutes leurs propriétés caractéristiques, ce qui est soutenable, l'exposé se réduit alors à rappeler proprement la définition de deux figures directement égales et à démontrer que deux telles figures se correspondent par translation ou rotation. Or notre candidat ne recherche même pas cette rotation, il a souvent tendance à mélanger les propriétés et leurs réciproques, il semble même parfois confondre les déplacements, transformations ponctuelles étudiées en géométrie, et les mouvements, étudiés en cinématique. Quant aux applications, dans l'horaire laissé libre par une telle limitation de la leçon, elles pourraient être nombreuses et variées, tout en laissant hors programme les produits de déplacements.

La similitude directe plane, définition, propriétés. — Le candidat part de la définition « produit d'une homothétie et d'une rotation de même centre », c'est son droit, mais il omet d'examiner ensuite le cas où les deux centres sont différents, et, interrogé sur ce point, il paraît ne s'être jamais posé la question. Pour trouver le centre de similitude, il réduit la figure et sa transformée, chacune à un vecteur, ce qui conduirait à démontrer qu'on peut toujours passer d'une figure à une autre par similitude. Les cas particuliers ne sont en général pas mentionnés. Ajoutons que toutes les figures — construction du centre de similitude, transformé d'un vecteur ou d'un cercle, — sont grossièrement fausses, ce qui risquerait fort de donner des idées fausses à un auditoire et l'on en vient même à se demander si certaines de ces idées fausses n'existent pas déjà dans l'esprit du candidat.

La projection stéréographique, définition, propriétés, applications géométriques et cartographiques. — L'exposé présente de grosses lacunes, les propriétés purement géométriques sont fort peu nombreuses, la position d'un point sur une carte d'après sa longitude et sa latitude n'est même pas esquissée, le pôle d'inversion est toujours placé à l'un des pôles géographiques, etc... Des idées fausses apparaissent sur le problème de la représentation plane de la sphère : non seulement on ne signale pas l'impossibilité de conserver les distances, mais on considère même comme possibles des représentations qui conserveraient les distances sans conserver les angles !

M. Lesieur. — Ne pouvant reprendre ici chaque exposé, ni chaque candidate séparément, je vais grouper mes observations autour de quelques idées générales valables pour tout l'enseignement élémentaire des mathématiques.

Il semble superflu d'insister sur l'importance des définitions, et pourtant ! Si l'on parle de la continuité de la fonction $y = \sqrt{-2x^2 + 5x + 3}$ pour $x = x_0$, il faut savoir exactement ce qu'on entend par là. Ce n'était pas le cas d'une candidate, cependant normalienne et maintenant agrégée, qui abordait cette question (qu'on ne lui demandait d'ailleurs pas). La notion de continuité est peut-être difficile à faire comprendre dans les classes élémentaires, et les méthodes employées pour y parvenir peuvent être différentes, mais la définition elle-même de la continuité pour $x = x_0$, ainsi que sa démonstration, doivent toujours être données avec la plus extrême précision et la plus grande clarté, qualités qui sont de rigueur en mathématiques, et surtout en analyse.

Un médiocre exposé sur la fonction $\text{Log } x$ est dû aussi, en grande partie, à l'absence de toute définition claire. Il était précisé cette année que les sujets ne se plaçaient pas dans une classe déterminée de l'Enseignement du Second Degré (Mathématiques Supérieures et Spéciales exclues) et que la candidate avait une grande liberté de composition en adaptant ses connaissances à l'enseignement élémentaire en général. Mais quel que soit le point de vue adopté : définition par une aire, par une primitive, par la fonction inverse de e^x , il y a toujours un ordre logique à respecter, qui consiste à bien préciser ce qui est supposé connu, puis à poser une définition, enfin à étudier l'objet défini.

Un autre exemple d'exposé boiteux pour manque de définition a porté sur la racine carrée approchée à $1/10$ près d'un nombre rationnel, la racine carrée d'un nombre entier étant supposée connue. La candidate part d'emblée en décrivant $\sqrt{78}$, comme s'il s'agissait d'une quantité connue ; elle ne songe pas à introduire une définition *arithmétique* de la racine demandée, c'est-à-dire à poser une définition s'appuyant sur les éléments précisés pourtant par le texte, à savoir : les nombres rationnels, les fractions décimales $\frac{p}{10^n}$, et la racine carrée à 1 près d'un nombre entier.

Lorsque la définition demandée plus ou moins explicitement par le texte n'est pas donnée par la candidate, la note obtenue est certainement inférieure à la moyenne, ce qui fut le cas des deux exemples précédents.

On ne peut devenir un bon professeur de mathématiques sans avoir l'esprit logique, qui se manifeste (entre autres) dans l'étude des *lieux géométriques*. On a mille fois répété, et le futur professeur devra le répéter bien des fois encore : un lieu géométrique est un ensemble de points ayant une propriété P ; pour trouver un lieu géométrique L on démontre d'abord que L est un sous-ensemble de L' (constitué par une droite ou un cercle ou toute autre courbe ou surface), et on conclut $L \subset L'$; on recherche ensuite si tous les points de L' sont des points de L (cas $L = L'$) ou si une partie seulement des points de L' sont des points de L (cas $L \subsetneq L'$) ; dans ce dernier cas, il faut alors préciser cette partie L . Bien entendu, ce schéma, de raisonnement n'est pas le seul : on peut, par exemple, remplacer la propriété P par une propriété équivalente P' , ou ramener la recherche de L à la recherche d'un autre lieu au moyen d'une *transformation*, de même qu'on se dispense souvent d'une *reciproque* en procédant par *conditions nécessaires et suffisantes*, ou par *propriétés caractéristiques*. Toutes ces notions relèvent du bon sens ou de la logique, autant que des mathématiques, mais elles sont fondamentales dans le raisonnement mathématique.

Voici quelques-uns des exemples de lieux entendus dans les exposés : lieu géométrique des sommets des cônes de révolution passant par une conique donnée ; cercle orthoptique d'une conique ; lieu des points dont le rapport des distances à deux droites fixes concourantes en O est constant (noter ici l'invariance du lieu par les homothéties de centre O), lieux des points M d'où l'on voit deux points fixes A et B sous un angle orienté de vecteurs constant ou sous un angle orienté de droites constant (noter ici la connaissance nécessaire des angles orientés de droites et de vecteurs). Les candidates n'ont pas montré, dans ces exposés, une grande aptitude au raisonnement mathématique.

Cette aptitude peut aussi bien se contrôler dans les réponses aux questions posées par le jury, spécialement dans certaines d'entre elles choisies pour faire appel au minimum de connaissances et d'automatisme, par exemple, en arithmétique, étude de l'ensemble A des entiers ma , m étant un entier quelconque et a un entier fixé ; en analyse, étude de certaines propriétés communes aux fonctions x^2 et ax ; en algèbre, recherche des transformations $x' = ax + by$, $y' = bx + cy$, dont le carré est la transformation identique ; en géométrie, recherche du déplacement X tel que l'on ait $A.B = X.B.A$, A et B étant deux déplacements donnés, etc.. Les réponses à ces questions ont été en général assez satisfaisantes.

En ce qui concerne les transformations, il me semble important de souligner certaines erreurs commises, même par de bonnes candidates. Le sujet d'exposé : propriétés communes à l'inversion et à la symétrie par rapport à une droite (géométrie plane), inviterait naturellement à faire jouer un rôle important à la propriété caractéristique suivante : pour qu'une transformation plane soit une inversion ou une symétrie par rapport à une droite, il faut et il suffit qu'un couple de points A, M et le couple de points inverses A', M' soient sur un même cercle, *quel que soit le couple A, M choisi*. Le jury a été étonné de voir la candidate se contenter pour sa démonstration de deux couples A, M et A', M' et affirmer : si la droite MM' coupe la droite AA' en O , la transformation est l'inversion de centre O et de puissance $OA.OA'$. Elle n'a pas songé à montrer que ce point O était un élément fixe indépendant du choix de M , ce qui conduit à introduire un troisième couple B, B' . Les mêmes fautes ou imprécisions se reproduisent quand il s'agit des propriétés caractéristiques d'un déplacement, d'une homothétie ou d'une similitude. Je pense qu'elles seraient évitées si l'on ne perdait pas de vue que toutes ces transformations sont des transformations *ponctuelles* et que, même si la propriété caractéristique dont il s'agit porte sur une figure, il faut toujours, en définitive, utiliser cette propriété pour définir avec précision la transformation ponctuelle, c'est-à-dire pour savoir *construire* le transformé M' d'un point M quelconque donné.

Je n'insisterai pas sur quelques fautes grossières et inattendues qui marquent chez

leurs auteurs une ignorance parfois inconsciente : l'inverse d'un angle serait un angle ! Le cône à directrice circulaire posséderait un axe ! Le cône de frottement a été maltraité d'horrible façon. La discussion de l'intersection d'une droite et d'une parabole a été des plus fantaisistes. Signalons encore une méprise sur la résolution graphique d'une inéquation, demandée pour le premier degré, et qui a été très vaguement esquissée pour le deuxième degré seulement.

M. Anglade. — L'exposé d'une candidate sur l'inverse d'un cercle et des régions du plan qu'il sépare, contenait de multiples erreurs dans sa seconde partie. Il semble utile de préciser cette question.

Un cercle (C) divise le plan en deux régions (A) et (B) ; son homologue (C') le divise lui-même en deux régions (A') et (B'). On conviendra de désigner par (A) la région contenant l'inverse I' d'un point I de (A) et il restera à prouver que (A) et (A') se correspondent dans leur totalité.

Un point quelconque M de (A) peut être relié au point I par un arc de cercle (Σ) n'admettant aucun point commun avec (C) et ne contenant pas le pôle S. (Σ') relie I' à M' sans rencontrer (C'). Cela prouve que M' et I' appartiennent à la même région (A').

Ainsi, tout point de (A) se transforme en un point de (A'). La réciprocity de l'inversion intervient ensuite pour prouver que tout point de (A') a son homologue dans (A) ou est l'homologue d'un point de (A).

Les deux régions (A) et (A') sont donc effectivement associées. Il en résulte que (B) et (B') le sont également.

Une fois ce point établi, il reste à déterminer l'homologue de l'intérieur du cercle (C). Montrons que ce n'est pas toujours l'intérieur de (C'), comme le prétendait la candidate chargée d'exposer ce problème.

Dans une translation, une rotation, une homothétie ou une similitude, le centre du cercle (C) a toujours pour homologue le centre du cercle (C'). L'intérieur du cercle (C) et l'intérieur du cercle associé (C') se correspondent quelle que soit la disposition de la figure initiale.

Envisageons maintenant le cas de l'inversion et supposons le pôle S non situé sur (C). On sait que l'inverse de S est rejeté à l'infini. La région limitée par (C) et contenant S, doit donc être associée à l'extérieur de (C'), tandis que l'intérieur de (C') est l'homologue de la région limitée par (C) qui ne contient pas S.

Quand S se trouve sur (C), (C') partage le plan en deux demi-plans. Celui qui contient S est l'inverse de l'extérieur de (C).

Voici quelques remarques suggérées par un exposé d'arithmétique.

Quand on veut déterminer le reste de la division par n de la différence de deux nombres entiers a et b , on commence par diviser ces nombres, ce qui donne :

$$\begin{cases} a = na_1 + \alpha, & \alpha < n, \\ b = nb_1 + \beta, & \beta < n, \end{cases}$$

Il n'est ensuite permis d'écrire, si $\alpha \geq \beta$, $a - b = n(a_1 - b_1) + (\alpha - \beta)$, qu'une fois l'inégalité $a_1 \geq b_1$ établie.

Dans le cas $\alpha < \beta$ c'est l'inégalité $a_1 > b_1$ qu'il faut justifier avant de poser

$$a - b = n(a_1 - b_1 - 1) + (n + \alpha - \beta).$$

CONCLUSIONS

Les épreuves théoriques du C.A.P.E.S. ne prétendent nullement constater et garantir que les candidats admis dans les Centres pédagogiques régionaux sont aptes à enseigner dans les lycées et collèges ; il manque encore à la plupart d'entre eux la formation nettement pédagogique qu'ils trouveront dans ces Centres, mais ils doivent aussi se convaincre qu'ils ont encore beaucoup à apprendre dans le domaine de leur propre culture, et qu'au cours d'un enseignement, même très élémentaire, ils rencon-

treront de nombreuses occasions de réflexion, de recherche et de perfectionnement. Leur succès aux épreuves théoriques permet seulement d'espérer qu'étant reconnus capables d'un tel effort, ils pourront sans doute devenir assez rapidement des maîtres très honorables et très efficaces.

En terminant, nous sommes très heureux de pouvoir exprimer ici notre profonde reconnaissance pour tous les membres de nos jurys qui ont assumé une lourde charge avec tant de conscience et de distinction.

P. DEDRON et L. THIBERGE.

P.-S. — Le rapport précédent, sur les épreuves théoriques du concours d'admission dans les Centres Pédagogiques Régionaux en 1953, nous paraît devoir être complété par nos observations sur les épreuves pédagogiques subies en mai 1953 par les candidats et candidates admis dans les C.P.R. en 1952.

Nous avons donc réuni dans un deuxième rapport, joint ci-après, nos propres impressions et celles de nos collègues, Présidents des divers jurys régionaux, sur les épreuves pédagogiques de mai 1953, faisant suite aux épreuves théoriques de 1952.

Certificat d'aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second Degré Section F. — Mathématiques

SESSION DE 1952-53

Epreuves pratiques (mai 1953)

La seconde année de fonctionnement du nouveau régime du C.A.P.E.S. voyait s'ouvrir les épreuves pratiques pour la première promotion de stagiaires des C.P.R. Le fonctionnement de ces épreuves pratiques fut, en tout point, parfaitement satisfaisant et a donné lieu aux résultats suivants concernant l'ensemble des stagiaires métropolitains ainsi répartis :

Hommes : Paris : stagiaires, 6 ; E.N.S., 9⁰ ; — Aix, 3 ; — Alger, 0 ; — Bordeaux, 2 ; — Clermont, 1 ; — Grenoble, 1 ; — Lille, 2 ; — Lyon, 0 ; — Montpellier, 2 ; — Nancy, 2 ; — Rennes, 5 ; — Strasbourg, 1 ; — Toulouse, 3.

Femmes : Paris : stagiaires, 4 ; E.N.S., 7 ; — Aix, 2 ; — Alger, 3 ; — Bordeaux, 2 ; — Clermont, 2 ; — Grenoble, 1 ; — Lille, 1 ; — Lyon, 4 ; — Montpellier, 1 ; — Nancy, 4 ; — Rennes, 1 ; — Strasbourg, 3 ; — Toulouse, 1.

Tous les candidats et toutes les candidates, sauf une, ont été définitivement reçus et les mentions obtenues se répartissent ainsi :

Pour les hommes : T.B., 2 ; — B., 15 ; — A.B., 12 ; — P., 8.

Pour les femmes : T.B., 9 ; — B., 16 ; — A.B., 6 ; — P., 4.

Il convient d'ajouter que quatre candidats admis dans les C.P.R. ont préféré enseigner en Tunisie ou en A.O.F., conformément aux dispositions réglementaires, ainsi qu'une candidate au Maroc, et que, déjà, trois d'entre eux, ayant accompli trois ans d'enseignement, et ayant subi une inspection générale favorable en 1953, ont pu être déclarés certifiés et titularisés dans le cadre métropolitain.

Le mécanisme des épreuves concerté entre l'Inspecteur général, président du jury académique, et le Directeur du C.P.R. était d'ordinaire le suivant, d'ailleurs susceptible de quelques variantes d'un centre à l'autre comme de retouches plus importantes pour l'avenir, dans le cadre du règlement :

a) une séance d'une heure dans une classe du second cycle, de préférence une classe de Mathématiques et une séance d'une heure dans une classe du premier cycle ;

b) dans l'une comme dans l'autre, le stagiaire avait à mettre en évidence les activités normales d'une classe, mais, à insister particulièrement, dans l'une, sur le

corrigé d'un devoir, et dans l'autre sur l'élaboration d'une leçon nouvelle ; le devoir était d'ordinaire celui de la semaine, la leçon celle du jour, et pour cette raison il ne convenait pas en général de fixer à l'avance dans laquelle des deux classes -- premier ou second cycle -- aurait lieu l'une ou l'autre de ces épreuves ; de cette façon on évitait au mieux toute solution de continuité, tout caractère artificiel imposé à ces épreuves, tant aux yeux des candidats qu'à ceux des élèves ; en fait, comme ces épreuves survenaient dans le courant de mai, c'est-à-dire au moment où s'achève le cours dans les classes de Mathématiques, c'est assez souvent le corrigé de devoir qui eut lieu dans ces dernières ;

c) un entretien prolongé du jury avec le candidat, qui justifiait au mieux les intentions de ses leçons et présentait ses cahiers de travaux et préparations de l'année.

La composition du jury académique, laissée dans une large mesure par le règlement à l'initiative de son Président, comportait obligatoirement un conseiller pédagogique qui pouvait être ou non l'un de ceux dont le candidat avait été le pupille dans son C.P.R. ; certains jurys ont préféré faire appel à un ou deux des conseillers du candidat ; ceux-là même dans les classes desquels avaient lieu les épreuves, afin de moins désorganiser le service des établissements en cause ; d'autres jurys avaient préféré faire appel à des conseillers extérieurs et, dans ce dernier cas, il va sans dire que les conseillers du candidat ont été soigneusement appelés à donner leur avis sur la valeur et les travaux du candidat. Il est même fort touchant de voir quelle intimité de pensée intellectuelle et de sentiments affectifs, liait les conseillers et leurs pupilles, à la suite d'une coopération active de plusieurs mois, et quels plaidoyers empreints d'une parfaite connaissance de leur cause nos conseillers ont prononcés pour leurs pupilles qui, hâtons-nous de le dire, n'étaient que bien rarement en danger.

D'ailleurs, les cahiers de stage étaient d'ordinaire d'irrécusables témoins du travail intelligent et assidu des candidats, tout au long de leur année scolaire ; d'ordinaire tenus avec lucidité et sobriété, ils mentionnaient d'une part leur propre préparation de leçons, puis avec une fraîcheur d'impression charmante, les réactions de la classe avec ses menus incidents révélateurs, et enfin les retouches qui résultaient de cette expérience vécue et du débat instauré entre les co-stagiaires par leur conseiller. On a vraiment toute sécurité après la lecture de ces cahiers et après les questions posées aux stagiaires à leur sujet : nos stagiaires savent organiser leur travail, préparer une leçon au plan vigoureux, l'exposer clairement, puis consigner les retouches opportunes pour une nouvelle utilisation ultérieure.

Si la plupart de ces cahiers de stage présentaient les précieuses qualités dont nous venons de parler, il faut remarquer cependant que certains de nos stagiaires se sont confinés dans un rôle un peu trop scolaire ; certains cahiers contenaient notamment la rédaction complète, très détaillée, et d'ailleurs très soignée, de plusieurs longs problèmes (proposés par exemple au Concours général) ; un tel travail est très recommandable ; mais il convient de le limiter à un ou deux problèmes bien choisis, si l'on ne veut pas lui consacrer un temps excessif ; pour les autres, il serait plus intéressant et plus instructif d'analyser le texte, d'y chercher le fil directeur, l'articulation et l'interdépendance des divers paragraphes.

Cette même remarque est encore plus valable pour certains comptes rendus de visites, d'études du milieu, ou même de conférences diverses : le stagiaire devrait s'attacher surtout à dégager, à l'occasion de telles activités, les faits essentiels, les idées directrices, la discussion résumée des différents points de vue, plutôt qu'à relater avec minutie le déroulement de la visite ou le détail de la conférence.

Les leçons elles-mêmes, dans le cadre d'une classe vivante que les candidats connaissent bien, ont été professées en général selon les méthodes actives et avec une sûreté mathématique fort acceptable. Nous sommes vraiment loin, surtout pour la classe de Mathématiques, des balbutiements dont nous étions témoins lors du concours d'admission desdits candidats dans les C.P.R. en 1952 et dont la première section de ce rapport a dû faire tristement état pour cette année 1953 encore. Nous

devons ce progrès considérable au fait que nos stagiaires ont tous passé un semestre dans une classe de Mathématiques et qu'ils y ont appris, avec une intelligence mûrie, tout ce qu'ils n'avaient entendu autrefois que comme modestes élèves et que la Faculté, orientée vers un programme totalement divergent, n'a jamais eu la possibilité de reprendre d'un point de vue plus élevé. Nous attachons à ce progrès un prix particulier, car une majorité de nos stagiaires masculins, dès leur admission définitive, se trouvera appelée à exercer d'emblée dans une classe de Mathématiques ; nous nous félicitons en particulier de la renonciation à la formule du C.A.P.E.S. 1 qui, pour confier directement aux stagiaires la responsabilité totale d'une classe, les privait nécessairement de cette fréquentation prolongée d'une classe de Mathématiques, de son programme et de son professeur, pour les cantonner dans les classes du premier cycle où la virtuosité pédagogique prévaut souvent sur le « tonus » de la pensée mathématique.

Quant aux corrigés de devoirs, qui paraissaient moins dangereux aux stagiaires que les leçons, ils ont été, en fait, beaucoup moins réussis et ont déterminé un assez large échelonnement des mentions accordées comme sanction des épreuves. Nous souhaitons d'abord, dans une certaine mesure, que les stagiaires eussent participé à l'élaboration même du problème proposé aux élèves et que ce problème ne fût pas extrait simplement de leur manuel ou de leurs *Annales du Baccalauréat* ; c'est que le devoir nous paraît être le prolongement même de notre enseignement, insistant sur les points où la classe aura manifesté une résistance, complétant ceux où le temps nous aura manqué lors de nos exposés en séance, ouvrant parfois une échappée pour nos meilleurs élèves, etc... ; le devoir n'est donc pas « la confection » d'un numéro ou d'un millésime de baccalauréat, mais le « sur mesure » d'un professeur averti de toutes les lacunes de ses élèves, comme de leurs besoins et de leurs possibilités, et qui compose à leur intention un texte personnel, à l'instar d'un bon médecin qui préfère formuler une ordonnance adaptée au tempérament de son patient, plutôt que de prescrire des spécialités passe-partout.

En outre, nous souhaitons que la séance consacrée au corrigé ne consiste pas en la production d'une solution-type, mais qu'elle prouve la parfaite connaissance que le maître a acquise des copies de ses élèves et qu'elle soit un compte rendu organisé de tout ce qu'il a pu y rencontrer de bon et de varié ; citant à l'ordre du jour les auteurs de ces initiatives heureuses et les appelant quelques instants au tableau pour s'exprimer eux-mêmes à leur sujet, donnant à tous les élèves confiance dans l'efficacité de leur cours envisagé comme outil de recherche pour leur devoir, et montrant qu'en moyenne, à ce niveau, tout démarrage leur est bon, et que l'essentiel est qu'ils persévèrent dans leur effort jusqu'à ce que, portant leur attention sur certains indices, ils se trouvent amenés à rectifier leur voie.

Quant aux observations individuelles, d'ordinaire plus critiques que constructives, elles nous paraissent trouver meilleure place dans les annotations marginales des copies, qu'oralement, en classe même, à moins qu'une même observation concerne la grande majorité de la classe, ce qui oblige naturellement à remettre en cause avec insistance un passage particulier de l'enseignement antérieur.

Disons à ce sujet que la correction personnelle apportée aux copies par les stagiaires nous a paru fort soignée, dépassant parfois le soin matériel apporté par les élèves à leur rédaction ; nous ne saurions nous montrer, dès le début, trop exigeants pour la perfection formelle des copies, c'est une discipline nécessaire et facile à obtenir d'ailleurs, si nous savons réduire à une juste mesure l'ampleur de nos devoirs.

Nos jeunes gens ont d'ailleurs témoigné de qualités très variées : les uns, qui s'étaient montrés peu brillants aux épreuves théoriques, ont fait preuve d'une véritable vocation pédagogique et ont en particulier, fort bien réussi dès leurs débuts dans le premier cycle ; d'autres se sont moins bien adaptés aux auditoires les plus jeunes et étaient nettement plus à l'aise dans une classe de Première ou de Mathématiques ; mais tous, ou presque tous, ont apporté beaucoup de dévouement et de conviction

dans l'accomplissement de leur tâche, et nous voyons là une excellente garantie de leur succès futur.

En définitive, nous devons féliciter nos stagiaires pour leurs progrès, certes, mais surtout pour le goût du travail et pour l'esprit d'équipe qu'ils ont manifestés pendant leur année de stage : dès cette première année de fonctionnement des C.P.R., il nous a paru qu'en ce qui concerne les mathématiques, une mise au point a été réussie, et une tradition créée ; cet effort a même pu être orienté sans peine vers l'agrégation, à laquelle ont été reçus, dès cette année, quatre stagiaires masculins et une stagiaire féminine ; c'est sans doute en 1954 que se fera sentir complètement l'heureux effet de cette orientation.

Nous devons surtout exprimer notre gratitude aux Directeurs des Centres Pédagogiques Régionaux, à leurs collaborateurs et à nos conseillers pédagogiques qui ont accepté avec ferveur une lourde charge, dans leur désir de former pleinement nos stagiaires et de leur éviter les difficultés qu'ils avaient pu connaître eux-mêmes à leurs débuts ; les uns et les autres, ainsi que les membres de nos jurys académiques, ont apporté également une expérience pleine de soin, de bon sens et de dévouement à l'organisation parfois laborieuse de nos épreuves pratiques ; nous devons enfin des remerciements particuliers aux chefs d'établissements qui, tout au long d'une première année, que sans doute bien d'autres suivront, ont accepté d'assouplir leurs horaires et leurs consignes traditionnelles en faveur des stagiaires nombreux, ressortissant à toutes les disciplines, accaparant l'activité des conseillers pédagogiques, et faisant converger sur eux, dans la première quinzaine de mai, des jurys nombreux aussi et bien désorganisés.

P. DEDRON et L. THIBERGE.

DEUXIÈME PARTIE

A propos de la notion de grandeur (1)

Sous le nom de *grandeurs*, on se propose ici de définir axiomatiquement certains symboles, en s'inspirant du contenu intuitif et des propriétés que la notion de grandeur paraît présenter en physique classique.

Nous concevons immédiatement l'existence de diverses *espèces* de grandeurs. La construction projetée s'annonce donc comme une construction à deux étages : l'*intraspécifique* et l'*interspécifique*. Dans le cadre de l'espèce, une distinction primordiale entre grandeurs *orientées* et grandeurs *inorientées* s'impose spontanément. Ces données préalables tracent le plan de notre étude.

I. Structure intraspécifique

Nous visons directement la notion de grandeur *mesurable*, sans nous assigner, par exemple, le *repérable* comme objectif intermédiaire. La lettre U désigne l'espèce envisagée ; un indice distingue chaque échantillon qu'on y prélève.

A) GRANDEURS SPECIFIQUES ORIENTÉES MESURABLES (G.S.O.M.)

Ces grandeurs sont notées $\vec{U}_i, \vec{U}_j, \vec{U}_k, \dots$

(1) Cette conférence a été faite au groupe d'Axiomatique et de Redécouverte dirigé par M. CROZES, dans une séance tenue le 26 novembre 1953 au Lycée Henri-IV.

AXIOMES DE L'ÉGALITÉ GRANDORIELLE. — On pose une relation d'équivalence grandorielle

I-1	$\tilde{U}_i = \tilde{U}_i$	réflexivité
I-2	$\tilde{U}_i = \tilde{U}_j \rightarrow \tilde{U}_j = \tilde{U}_i$	symétrie
I-3	$\tilde{U}_i = \tilde{U}_j \text{ et } \tilde{U}_j = \tilde{U}_k \rightarrow \tilde{U}_i = \tilde{U}_k$	transitivité
I-4	$\exists \tilde{U}_i \exists \tilde{U}_j \quad \tilde{U}_i \neq \tilde{U}_j$	discernabilité

$\exists$ figure le signe d'existence ; affecté d'un astérisque il signifiera l'existence unique.

AXIOMES DE L'ADDITION GRANDORIELLE. --- On pose une opération d'addition grandorielle ; la somme grandorielle de deux symboles est notée $\tilde{U}_i + \tilde{U}_j$; la somme grandorielle de plusieurs symboles est définie par récurrence.

II-1	$\exists^* \tilde{U}_k \quad \tilde{U}_k = \tilde{U}_i + \tilde{U}_j$	additivité
II-2	$\exists^* \tilde{U}_k \quad \tilde{U}_i = \tilde{U}_j + \tilde{U}_k$	soustractivité
II-3	$\tilde{U}_i + \tilde{U}_j = \tilde{U}_j + \tilde{U}_i$	commutativité
II-4	$(\tilde{U}_i + \tilde{U}_j) + \tilde{U}_k = \tilde{U}_i + (\tilde{U}_j + \tilde{U}_k)$	associativité

Le II-2 permet d'introduire la grandeur orientée nulle d'espèce U , notée $\tilde{O}_u$, qui vérifie $\tilde{U}_i = \tilde{U}_i + \tilde{O}_u$ et la grandeur orientée opposée à $\tilde{U}_i$, notée $(-\tilde{U}_i)$, qui vérifie

$$\tilde{O}_u = \tilde{U}_i + (-\tilde{U}_i).$$

A noter que $(-(-\tilde{U}_i)) = \tilde{U}_i$ $\tilde{O}_u = (-\tilde{O}_u)$

La différence grandorielle $\tilde{U}_i - \tilde{U}_j$ étant définie par $\tilde{U}_k = \tilde{U}_i - \tilde{U}_j \leftrightarrow \tilde{U}_i = \tilde{U}_j + \tilde{U}_k$ la soustraction se ramène à l'opposition et l'addition suivant la règle

$$\tilde{U}_i - \tilde{U}_j = \tilde{U}_i + (-\tilde{U}_j).$$

On introduit alors la somme grandorielle généralisée, par exemple

$$\tilde{U}_i - \tilde{U}_j - \tilde{U}_k + \tilde{U}_h.$$

AXIOMES DE LA MULTIPLICATION MIXTE. — On pose une opération de multiplication mixte entre nombres algébriques et grandeurs orientées ; le produit mixte d'un nombre et d'un symbole est noté, soit $a\tilde{U}_i$, soit $\tilde{U}_i a$ (commutativité conventionnelle).

III-1	$\exists^* \tilde{U}_j \quad \tilde{U}_j = a\tilde{U}_i$	multiplicativité
III-2	$\tilde{U}_i \neq \tilde{O}_u \rightarrow \exists^* a \quad \tilde{U}_j = a\tilde{U}_i$	mesurabilité
III-3	$a \neq 0 \rightarrow \exists \tilde{U}_i \quad \tilde{U}_j = a\tilde{U}_i$	divisibilité
III-4	$(ab)\tilde{U}_i = a(b\tilde{U}_i)$	associativité
III-5	$(a+b)\tilde{U}_i = a\tilde{U}_i + b\tilde{U}_i$	distributivité-1

On tire de là les premières propriétés du produit mixte

$$\begin{aligned} 0\tilde{U}_i &= \tilde{O}_u & a\tilde{O}_u &= \tilde{O}_u \\ \tilde{U}_i &= 1\tilde{U}_i & (-\tilde{U}_i) &= (-1)\tilde{U}_i \end{aligned}$$

et la relation importante (3-6) $a(\tilde{U}_i + \tilde{U}_j) = a\tilde{U}_i + a\tilde{U}_j$ distributivité-2.

La mesure de $\tilde{U}_j$ avec $\tilde{U}_i$, notée $\frac{\tilde{U}_j}{\tilde{U}_i}$, étant définie par

$$\frac{\tilde{U}_j}{\tilde{U}_i} = a \leftrightarrow \tilde{U}_j = a\tilde{U}_i \quad \text{et} \quad \tilde{U}_i \neq \tilde{O}_a$$

on obtient sans peine les propriétés classiques des mesures.

S'agissant des multiplicateurs entiers algébriques, la multiplication mixte se ramène à l'addition de termes U_i ou $(-U_j)$. A partir de cette remarque, on pourra chercher à introduire la multiplication mixte comme opération définie, avec le secours d'un axiome de *bipartitivité additive* $\exists^* \tilde{U}_j \quad \tilde{U}_i = \tilde{U}_j + \tilde{U}_j$ qu'on exploitera en donnant une portée suffisante au principe d'induction mathématique.

COHÉRENCE DE L'AXIOMATIQUE. — Le système d'axiomes I, II, III, qu'on vient d'utiliser est vérifié par les *nombre algébriques*, ce qui fournit une garantie satisfaisante de sa cohérence.

STRUCTURE DES G.S.O.M. — On peut faire fonctionner la loi de composition externe III :

— soit sur l'ensemble des *algébriques*, d'où les G.S.O. *mesurables* (G.S.O.M.) ;
— soit sur l'ensemble des *rationnels algébriques*, d'où les G.S.O. *rationnellement mesurables* (G.S.O.M^{*}) ; cette seconde hypothèse signifie qu'on se borne à construire les grandeurs orientées commensurables entre elles.

On voit que l'espace grandoriel spécifique des grandeurs orientées est un espace vectoriel unidimensionnel. Il apparaît même comme l'ancêtre naturel de tous les espaces vectoriels. Pour obtenir la structure d'espace vectoriel sous sa forme accomplie, il suffira de dialectiser l'unidimensionnalité III-2 en une *n-dimensionnalité* ; toutefois, on devra alors poser axiomatiquement le (3-6), dont la déduction ne sera plus assurée.

B) GRANDEURS SPECIFIQUES INORIENTEES MESURABLES (G.S.I.M.)

Ces grandeurs sont notées $U_i, U_j, U_k, \dots$

AXIOMES DE L'ÉGALITÉ GRANDORIELLE. — On pose, comme plus haut, une relation d'équivalence grandorielle

I'-1	$U_i = U_j$	réflexivité
I'-2	$U_i = U_j \rightarrow U_j = U_i$	symétrie
I'-3	$U_i = U_j \quad \text{et} \quad U_j = U_k \rightarrow U_i = U_k$	transitivité
I'-4	$\exists U_i \exists U_j \quad U_i \neq U_j$	discernabilité

AXIOMES DE L'ADDITION GRANDORIELLE. — On pose, comme plus haut une opération d'addition grandorielle : la *somme grandorielle* de deux symboles est notée $U_i + U_j$; la somme de plusieurs symboles est définie par récurrence. Mais l'opération inverse présente cette fois une alternative, qu'on écrit ci-dessous en adoptant *ex* comme digne d'exclusion réciproque

II'-1	$\exists^* U_k \quad U_k = U_i + U_j$	additivité
II'-2a	$\exists^* U_j \quad U_i = U_i + U_j$	semi-soustractivité
II'-2b	$U_i \neq U_j \rightarrow \exists^* U_k \quad U_i = U_j + U_k \text{ ex } U_j = U_i + U_k$	
II'-3	$U_i + U_j = U_i + U_j$	commutativité
II'-4	$(U_i + U_j) + U_k = U_i + (U_j + U_k)$	associativité

Les II'-2 permettent d'introduire la *grandeur inorientée nulle* d'espèce U , notée O_u , qui vérifie $U_i = U_i + O_u$ et de définir une relation d'ordination grandorielle

$$\begin{aligned} U_i > U_j &\leftrightarrow \exists U_k \quad U_k \neq O_u \quad \text{et} \quad U_i = U_j + U_k \\ U_i > U_j &\leftrightarrow \exists U_k \quad U_k \neq O_u \quad \text{et} \quad U_i = U + U_k \end{aligned}$$

dont on établit la *transitivité* ; on définit aussi une relation d'*ordination grandorielle élargie*, soit $U_i \geq U_j$, soit $U_i \leq U_j$, également transitive. Dès lors, la *différence grandorielle* $U_i - U_j$ est définie conditionnellement par

$$U_k = U_i - U_j \leftrightarrow U_i = U_j + U_k \text{ et } U_i \geq U_j.$$

Notons les propriétés $U_i = U_j \text{ ex } U_i > U_j \text{ ex } U_i < U_j$
 $U_i \geq O_u \quad U_i \geq U_j \leftrightarrow U_i - U_j \geq O_u.$

AXIOMES DE LA MULTIPLICATION MIXTE. — On pose, comme plus haut, une opération de *multiplication mixte* entre nombres arithmétiques et grandeurs inorientées ; le *produit mixte* d'un nombre et d'un symbole est noté, soit aU , soit Ua (commutativité conventionnelle).

III'-1	$\exists^* U_j$	$U_j = aU_i$	multiplicativité
III'-2	$U_i \neq O_u \rightarrow \exists^* a$	$U_j = aU_i$	mesurabilité
III'-3	$a \neq 0 \rightarrow \exists U_i$	$U_j = aU_i$	divisibilité
III'-4		$(ab)U_i = a(bU_i)$	associativité
III'-5		$(a+b)U_i = aU_i + bU_i$	distributivité-1

On tire de là les premières propriétés du produit mixte

$$OU_i = O_u \quad aO_u = O_u \quad U_i = 1U_i$$

et la relation importante (3'-6) $a(U_i + U_j) = aU_i + aU_j$ distributivité-2.

La *mesure* de U_j avec U_i , notée $\frac{u_j}{u_i}$, étant définie par

$$\frac{u_j}{u_i} = a \leftrightarrow U_j = aU_i \text{ et } U_i \neq O_u$$

on obtient sans peine les propriétés classiques des mesures.

S'agissant des multiplicateurs entiers arithmétiques, la multiplication mixte se ramène à l'addition de termes U_i . A partir de cette remarque, on pourra chercher à introduire la multiplication mixte comme opération définie, avec le secours d'un axiome de *bipartitivité additive* $\exists^* U_j \quad U_i = U_j + U_j$ exploité comme précédemment ; on en déduira toutes les propriétés primitives du produit mixte, à l'exception de III'-2 ; mais le III'-2, à son tour, deviendra déductible à l'aide d'un axiome d'*encadrabilité supérieure*. $U_i \neq O_u \rightarrow \exists n \quad nU_i > U_j$ où n désigne un entier arithmétique ; cette dernière proposition signifie que les grandeurs envisagées sont *archimédiennes*.

COHÉRENCE DE L'AXIOMATIQUE. — Le système d'axiomes I', II', III' qu'on vient d'utiliser est vérifié par les *nombres arithmétiques*, ce qui fournit une garantie satisfaisante de sa cohérence.

STRUCTURE DES G.S.I.M. — On peut faire fonctionner la loi de composition externe III' :

— soit sur l'ensemble des *arithmétiques*, d'où les G.S.I. *mesurables* (G.S.I.M.) ;

— soit sur l'ensemble des *rationnels arithmétiques* d'où les G.S.I. *rationnellement mesurables* (G.S.I.M.*) ; cette seconde hypothèse signifie qu'on se borne à construire les grandeurs inorientées commensurables entre elles.

C) CORRESPONDANCE ENTRE G.S.O.M. et G.S.I.M.

Si l'on choisit arbitrairement dans l'ensemble des $\tilde{U}_i$ une *grandeur orientée de base* $\tilde{U}_0 \neq \tilde{O}_u$ et dans l'ensemble des U_i une *grandeur inorientée de base* $U_0 \neq O_u$, III-2 et III'-2 permettent d'établir une *correspondance biunivoque* entre le sous-

ensemble des $\tilde{U}_i$, coorientées à $\tilde{U}_0$, c'est-à-dire telles que $\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{U}_0} \geq 0$, et l'ensemble

des U_i ; dans une telle correspondance, qu'on définit en posant $\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{U}_0} = \frac{U_i}{U_0}$

les éléments nuls d'une part, les éléments de base d'autre part, sont homologues.

Dès lors, un couple $\tilde{U}_0, U_0$, de grandeurs de base étant choisi, on appelle *module* de la G.S.O.M. U_i la G.S.I.M. U_i définie par $\left| \frac{\tilde{U}_i}{\tilde{U}_0} \right| = \frac{U_i}{U_0}$

Le module de $\tilde{O}_u$ est O_u ; celui de U_0 est $\tilde{U}_0$.

II. Structure interspécifique

Nous allons présenter deux prolongements axiomatiques qui englobent diversement la structure intraspécifique précédemment décrite. La première construction combinera entre elles des grandeurs qui, toutes, seront orientées ; la seconde portera, plus généralement, sur des grandeurs pourvues ou démunies à volonté du caractère d'orientation. Les lettres $U, V, W, \dots$ désignent les diverses espèces soumises au calcul.

A) GRANDEURS ORIENTÉES MESURABLES NATURELLEMENT n -DIMENSIONNÉES (G.O.M.D *_n)

La construction porte sur les symboles $\tilde{U}_i, \tilde{V}_j, \tilde{W}_k, \dots$

AXIOMES DE LA MULTIPLICATION GRANDORIELLE. — On pose une opération de *multiplication grandorielle* ; le *produit grandoriel* de deux symboles est noté $\tilde{U}_i \tilde{V}_j$, le produit grandoriel de plusieurs symboles est défini par récurrence.

IV-1	$\tilde{V}_i \neq \tilde{O}_v \rightarrow \exists^* \tilde{W}_k \quad \tilde{W}_k = \tilde{U}_i \tilde{V}_j$	multiplicativité
IV-2	$\tilde{V}_i \neq \tilde{O}_v \rightarrow \exists^* \tilde{W}_k \quad \tilde{U}_i = \tilde{V}_j \tilde{W}_k$	divisibilité
IV-3	$\tilde{U}_i \tilde{V}_j = \tilde{V}_j \tilde{U}_i$	commutativité
IV-4	$(a\tilde{U}_i) \tilde{V}_j = (a\tilde{U}_i) \tilde{V}_j$	associativité mixte
IV-5	$(\tilde{U}_i \tilde{V}_j) \tilde{W}_k = \tilde{U}_i (\tilde{V}_j \tilde{W}_k)$	associativité

On tire de là les premières propriétés du produit grandoriel

$$\tilde{O}_u \tilde{V}_j = \tilde{U}_i \tilde{O}_v = \tilde{O}_{uv}$$

$$\tilde{U}_i \neq \tilde{O}_u \quad \text{et} \quad \tilde{V}_j \neq \tilde{O}_v \rightarrow \tilde{U}_i \tilde{V}_j \neq \tilde{O}_{uv}$$

et la relation importante (4-6) $\tilde{U}_i (\tilde{V}_j + \tilde{V}_k) = \tilde{U}_i \tilde{V}_j + \tilde{U}_i \tilde{V}_k$ distributivité
dont la déduction utilise aussi III-2 et III-5.

Le IV-2 permet d'introduire l'*espèce neutre*, notée 1 , telle que $\tilde{U}_i = \tilde{U}_j \tilde{1}_k$
et en particulier $\tilde{1}_i = \tilde{1}_j \tilde{1}_k$, puis la *grandeur orientée unitaire d'espèce neutre*, notée $\tilde{1}_0$, telle que $\tilde{U}_i = \tilde{U}_i \tilde{1}_0$ et en particulier $\tilde{1}_i = \tilde{1}_i \tilde{1}_0 \quad \tilde{1}_0 = \tilde{1}_0 \tilde{1}_0$.

A noter que $\tilde{1}_0 \neq \tilde{1}_1$.

Le IV-2 permet aussi d'introduire la *grandeur orientée inverse* de $\tilde{U}_i \neq \tilde{O}_u$, notée $(\tilde{U}_i^{-1})$ ou plus simplement $\tilde{U}^i$, qui vérifie $\tilde{1}_0 = \tilde{U}_i \tilde{U}^i$.

On a en particulier, si $\tilde{1}_i \neq \tilde{O}_1 \quad \tilde{1}_0 = \tilde{1}_i \tilde{1}^i \quad \tilde{1}_0 = \tilde{1}_0 \tilde{1}^0$.

A noter que $((\tilde{U}_i^{-1})^{-1}) = \tilde{U}_i \quad \tilde{1}_0 = \tilde{1}^0$.

Les deux espèces U et U^{-1} sont dites *espèces inverses* ou *espèces duales*.

Le quotient grandoriel $\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{V}_j}$ étant défini par

$$\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{V}_j} = \tilde{W}_k \longleftrightarrow \tilde{U}_i = \tilde{V}_j \tilde{W}_k \quad \text{e} \quad \tilde{V}_j \neq \tilde{O}_0$$

la division se ramène à l'inversion et à la multiplication suivant la règle

$$\frac{\tilde{U}_i}{\tilde{V}_j} = \tilde{U}_i \tilde{V}_j$$

On introduit alors le produit grandoriel généralisé, par exemple

$$\tilde{U}_i \tilde{V}^i \tilde{V}_j \tilde{W}_k \tilde{S}^m.$$

PROPRIÉTÉS DES PRODUITS GRANDORIELS GÉNÉRALISÉS. — On définit notamment les produits grandoriels généralisés construits sur une espèce U (ou son espèce duale U^{-1}), par exemple $\tilde{U}_{ij}^{khlm} = \tilde{U}_i \tilde{U}_j \tilde{U}^k \tilde{U}^h \tilde{U}^l \tilde{U}^m$ qui

sera dit produit mixte d'ordre 6, deux fois covariant et quatre fois contravariant.

$\tilde{U}_{ijh} = \tilde{U}_i \tilde{U}_j \tilde{U}_k$ sera un produit covariant d'ordre 3 ;

$\tilde{U}^{ij} = \tilde{U}_i \tilde{U}_j$ sera un produit contravariant d'ordre 2.

En identifiant haut et bas un ou plusieurs indices d'un produit généralisé mixte, on introduit une opération de contraction, dont la répétition saturante fournit finalement un produit généralisé, soit covariant, soit contravariant, ou bien un résidu

$$\tilde{I}_0 = \tilde{I}^0 \quad \tilde{U}_{ij}^{khj} = \tilde{U}_i^{khl} \quad \tilde{U}_{ij}^{khij} = \tilde{U}^{kh}.$$

La notion de multiplication contractée en découle.

Plus généralement, on définit les produits grandoriels généralisés construits sur plusieurs espèces $U, V, W, \dots$ (ou leurs espèces duales $U^{-1}, V^{-1}, W^{-1}, \dots$) comme produits généralisés de produits généralisés respectivement construits sur U (ou U^{-1}), sur V (ou V^{-1}), sur W (ou W^{-1}),... ; les notions d'ordre, de covariance, de contravariance, de contraction, de multiplication contractée, s'étendent sans peine.

PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES GRANDORIELLES GÉNÉRALISÉES. — On définit les puissances grandorielles généralisées construites sur une espèce U (ou son espèce duale U^{-1}), notée $(\tilde{U}_i)^p$ où p désigne un entier algébrique, en posant

$$(\tilde{U}_i)^p = \tilde{U}_{ii\dots i} \text{ avec } p \text{ indices inférieurs lorsque } p > 0,$$

$$(\tilde{U}_i)^p = \tilde{U}^{ii\dots i} \text{ avec } -p \text{ indices supérieurs lorsque } p < 0$$

$$\text{et lorsque } p = 0 \quad (\tilde{U}_i)^0 = \tilde{I}_0 = \tilde{I}^0.$$

De là résultent les premières propriétés des puissances généralisées

$$\tilde{U}_i = (\tilde{U}_i)^1 = (\tilde{U}^i)^{-1} \quad \tilde{U}^i = (\tilde{U}^i)^1 = (\tilde{U}_i)^{-1},$$

$$(\tilde{U}_i)^p = (\tilde{U}^i)^{-p} \quad (\tilde{U}^i)^p = (\tilde{U}_i)^{-p}$$

$$(\tilde{I}_0)^p = (\tilde{I}^0)^p = \tilde{I}_0 = \tilde{I}^0,$$

$$(\tilde{U}_i)^p (\tilde{U}_i)^{-p} = \tilde{I}_0 = \tilde{I}^0$$

et les lois générales de l'exponentiation entière,

$$(5-3) \quad (a \tilde{U}_i)^p = a^p (\tilde{U}_i)^p$$

$$(5-4) \quad (\tilde{U}_i)^{pq} = ((\tilde{U}_i)^p)^q$$

$$(5-5) \quad (\tilde{U}_i)^{p+q} = (\tilde{U}_i)^p (\tilde{U}_i)^q$$

$$(5-6) \quad (\tilde{U}_i \tilde{V}_j)^p = (\tilde{U}_i)^p (\tilde{V}_j)^p$$

associativité mixte

associativité

distributivité-1

distributivité-2

AXIOME DE LA n -DIMENSIONNALITÉ NATURELLE. — On dit que m grandeurs orientées non nulles d'espèces non neutres $\tilde{U}_i, \tilde{V}_j, \dots, \tilde{S}_h$ sont *dépendantes* (ou encore qu'elles forment un *système lié* d'ordre m), lorsqu'il existe m entiers algébriques non tous nuls $p_1 p_2 p_3 \dots p_m$ et une grandeur orientée d'espèce neutre $\tilde{I}_\alpha$ tels que $(\tilde{U}_i)^{p_1} (\tilde{V}_j)^{p_2} \dots (\tilde{S}_h)^{p_m} = (\tilde{I}_\alpha)$.

Puisque aucune des m grandeurs n'est nulle, $\tilde{I}_\alpha \neq 0_r$.

Dans le cas contraire, on dit que ces m grandeurs sont *indépendantes* (ou encore qu'elles forment un *système libre* d'ordre m).

Grâce au (5-3), la notion de dépendance ou d'indépendance s'étend aisément à un système de m espèces non neutres $U, V, \dots, S$.

On pose alors l'axiome suivant :

VI_n

Il existe n espèces non neutres indépendantes telles que toute grandeur orientée soit un produit grandoriel généralisé construit sur ces n espèces.

Cela signifie que l'espace grandoriel général des grandeurs orientées a n dimensions naturelles.

Les n espèces non neutres qui se trouvent ainsi privilégiées sont dites *espèces fondamentales*. Tout système (libre) de n grandeurs orientées non nulles $U, V, \dots, S$, respectivement choisies dans ces espèces, constitue un *repère grandoriel*, qu'on note $\{\tilde{U}_i \tilde{V}_j \dots \tilde{S}_h\}$.

DÉCOMPOSITION D'UNE GRANDEUR ORIENTÉE $\tilde{T}_l$ DANS UN REPÈRE GRANDORIEL $\{\tilde{U}_i \tilde{V}_j \dots \tilde{S}_h\}$. — Tout produit grandoriel généralisé construit sur U (ou U^{-1}), si l'on exprime ses facteurs au moyen de $\tilde{U}_i$ en utilisant le III-2, se met sous la forme $a(\tilde{U}_i)^{p_1}$, où a algébrique et p_1 entier algébrique. Il en va de même pour tout produit généralisé construit sur les autres espèces fondamentales (ou leurs espèces duales). Compte tenu de VI_n, il en résulte que toute grandeur orientée $\tilde{T}_l$ se met sous la forme $\tilde{T}_l = t^{(ij\dots h)} (\tilde{U}_i)^{p_1} (\tilde{V}_j)^{p_2} \dots (\tilde{S}_h)^{p_n}$ où $t^{(ij\dots h)}$ algébrique et $p_1 p_2 \dots p_n$ entiers algébriques.

Il est aisé de montrer par l'absurde que cette décomposition (quant aux exposants d'abord, quant au coefficient ensuite) est unique.

$\tilde{T}_l$ est d'espèce neutre ou non neutre suivant que les p_k sont tous nuls ou non tous nuls : elle est nulle ou non nulle suivant que $t^{(ij\dots h)}$ l'est ou ne l'est pas.

$p_1 p_2 \dots p_n$ sont dits *exposants spécifiques* de $\tilde{T}_l$ (ou de T) dans le repère $t^{(ij\dots h)}$ est dit *mesure algébrique* de $\tilde{T}_l$ avec le repère.

SYSTÈMES D'UNITÉS COHÉRENTS. — La grandeur orientée d'espèce T , qui a pour mesure algébrique l'unité, s'appelle *grandeur dérivée d'espèce T associée au repère* ; on la note $\tilde{T}_{(ij\dots h)}$ $\tilde{T}_{(ij\dots h)} = (\tilde{U}_i)^{p_1} (\tilde{V}_j)^{p_2} \dots (\tilde{S}_h)^{p_n}$.

Ainsi $\tilde{T}_l = t^{(ij\dots h)} \tilde{T}_{(ij\dots h)}$

ce qui montre que la mesure algébrique de $\tilde{T}_l$ avec des grandeurs fondamentales $\tilde{U}_i \tilde{V}_j \dots \tilde{S}_h$ est égale à la mesure algébrique de $\tilde{T}_l$ avec la grandeur dérivée de sa propre espèce $\tilde{T}_{(ij\dots h)}$.

On est donc amené à faire une *convention de cohérence des mesures*, en décidant que les grandeurs orientées seront mesurées avec des unités fondamentales choisies dans les espèces de repérage et les unités dérivées qui leur sont associées dans les

autres espèces. L'expression « mesure algébrique » garde alors le même sens dans l'espèce et dans l'ensemble des espèces.

Un tel système d'unités est dit *système d'unités cohérent*.

EQUATION AUX DIMENSIONS D'UNE ESPÈCE T. — Imaginons deux systèmes d'unités cohérents

$$\bar{U}_0 \bar{V}_0 \dots \bar{S}_0 \bar{T}_0 \dots \quad \text{avec} \quad \bar{T}_0 = (\bar{U}_0)^{p^1} (\bar{V}_0)^{p^2} \dots (\bar{S}_0)^{p^n} \dots$$

$$\bar{U}'_0 \bar{V}'_0 \dots \bar{S}'_0 \bar{T}'_0 \dots \quad \text{avec} \quad \bar{T}'_0 = (\bar{U}'_0)^{p^1} (\bar{V}'_0)^{p^2} \dots (\bar{S}'_0)^{p^n} \dots$$

et introduisons les *facteurs de changement*, soit sous leur aspect *matériel*, soit sous leur aspect *formel*.

$$\mathcal{U} = \frac{\bar{U}'_0}{\bar{U}_0} = \frac{u'}{u}, \quad \mathcal{V} = \frac{\bar{V}'_0}{\bar{V}_0} = \frac{v'}{v}, \quad \dots \quad \mathcal{S} = \frac{\bar{S}'_0}{\bar{S}_0} = \frac{s'}{s}, \quad \mathcal{T} = \frac{\bar{T}'_0}{\bar{T}_0} = \frac{t'}{t}, \dots$$

u et u' désignant ici les mesures algébriques d'une même grandeur orientée d'espèce U avec $\bar{U}_0$ et $\bar{U}'_0$, etc... On obtient immédiatement

$$\mathcal{T} = \mathcal{U}^{p^1} \mathcal{V}^{p^2} \dots \mathcal{S}^{p^n}.$$

Cette relation numérique entre les facteurs de changement s'appelle *équation aux dimensions* de l'espèce T relativement aux espèces fondamentales $U, V, \dots, S$.

CHANGEMENT DE REPIÈRE GRANDORIEL. — Le problème du *changement de repère grandoriel*, sous sa forme générale, à partir de

$$\bar{U}_i = \mathcal{U}_i^l \bar{U}_l \quad \bar{V}_j = \mathcal{V}_j^l \bar{V}_l \quad \dots \quad \bar{S}_h = \mathcal{S}_h^l \bar{S}_l$$

conduit aux *formules de transformation* des grandeurs dérivées ou des mesures algébriques, qui illustrent les notions de covariance et de contravariance. Si, par exemple,

$$\bar{T}_{(ijk)} = (\bar{U}_i)^3 (\bar{V}_j)^{-2} (\bar{W}_k)^1$$

on aura

$$\bar{T}_{(ijk)} = (\mathcal{U}_i^l)^3 (\mathcal{V}_j^l)^{-2} (\mathcal{W}_k^l)^1 \bar{T}_{(ljk)}$$

$$t_{(ijk)} = (\mathcal{U}_i^l)^{-3} (\mathcal{V}_j^l)^{-2} (\mathcal{W}_k^l)^1 t_{(ljk)}$$

et $T_{(ijk)}$ sera un symbole quatre fois covariant et deux fois contravariant, tandis que $t_{(ijk)}$ sera un symbole deux fois covariant et quatre fois contravariant.

COHÉRENCE DE L'AXIOMATIQUE. — Le système d'axiomes Π_v (I, II, III)_v, IV, VI_n qu'on vient d'utiliser est vérifié par les *fonctions de n variables algébriques* x_i du type $a x^{p^1}_1 x^{p^2}_2 \dots x^{p^n}_n$ où les paramètres sont assujettis aux conditions *a algébrique, p_i entiers algébriques*; cette remarque fournit une garantie satisfaisante de sa cohérence.

STRUCTURE DES G.O.M.D.*_n. — On voit que l'espace grandoriel général des grandeurs orientées est un espace tensoriel construit sur des espaces vectoriels unidimensionnels, à savoir ceux que constituent certains espaces grandoriels spécifiques privilégiés. Il apparaît même comme l'ancêtre naturel de tous les espaces tensoriels. Toutefois, le produit grandoriel n'introduit ici qu'une structure de produit tensoriel commutatif.

Nous allons reprendre cette construction avec le double dessein :

— de ne plus nous en tenir aux seules grandeurs orientées ;

— d'abolir le privilège des espèces fondamentales.

B) GRANDEURS MESURABLES n -DIMENSIONNEES (G.M.D._n)

La construction porte sur les symboles $U_i, V_j, W_k, \dots$ qui peuvent s'interpréter à volonté, soit comme des G.S.I.M., soit comme des modules de G.S.O.M., déterminés à l'aide de couples de base d'ailleurs quelconques.

AXIOMES DE LA MULTIPLICATION GRANDORIELLE. — On pose une opération de *multiplication grandorielle* ; le *produit grandoriel* de deux symboles est noté $U_i V_j$; le produit grandoriel de plusieurs symboles est défini par récurrence.

IV'-1	$\exists^* W_k \quad W_k = U_i V_j$	multiplicativité
IV'-2	$V_j \neq O_v \rightarrow \exists^* W_k \quad U_i = V_j W_k$	divisibilité
IV'-3	$U_i V_j = V_j U_i$	commutativité
IV'-4	$(a U_i) V_j = a(U_i V_j)$	associativité mixte
IV'-5	$(U_i V_j) W_k = U_i (V_j W_k)$	associativité

On tire de là les premières propriétés du produit grandoriel

$$O_v V_j = U_i O_v = O_{uv}$$

$$U_i \neq O_v \text{ et } V_j \neq O_v \rightarrow U_i V_j \neq O_v$$

et la relation importante

$$(4'-6) \quad U_i (V_j + V_k) = U_i V_j + U_i V_k \quad \text{distributivité}$$

dont la déduction utilise aussi III'-2 et III'5.

Le IV'-2 permet d'introduire l'*espèce neutre*, notée I , telle que

$$U_i = U_j I_k$$

$$I_i = I_j I_k$$

et en particulier

puis la *grandeur unitaire d'espèce neutre*, notée I_0 telle que

$$U_i = U_i I_0$$

et en particulier

$$I_i = I_i I_0 \quad I_0 = I_0 I_0$$

A noter que

$$I_0 \neq O_i$$

Le IV'-2 permet aussi d'introduire la *grandeur inverse* de $U_i \neq O_v$, notée (U_i^{-1}) , qui vérifie

$$I_0 = U_i (U_i^{-1}).$$

On a en particulier si $I_i \neq O_i \quad I_0 = I_i (I_i^{-1}) \quad I = I_0 (I^{-1}_0)$.

A noter que $((U_i^{-1})^{-1}) = U_i \quad I_0 = (I^{-1}_0)$

Les deux espèces U et U^{-1} sont dites *espèces inverses*.

Le *quotient grandoriel* $\frac{U_i}{V_j}$ étant défini par

$$\frac{U_i}{V_j} = W_k \leftrightarrow U_i = V_j W_k \text{ et } V_j \neq O_v$$

la division se ramène à l'inversion et à la multiplication suivant la règle

$$\frac{U_i}{V_j} = U_i (V^{-1}_j)$$

On introduit alors le *produit grandoriel généralisé*.

AXIOMES DE L'EXPONENTIATION. — On pose une opération d'*exponentiation* entre nombres algébriques et grandeurs ; la *puissance* ayant pour exposant le nombre algébrique p d'un symbole U_i est notée U_i^p .

V'-1	$\exists^* V_j \quad V_j = U_i^p$	exponentialité
V'-2	$p \neq 0 \rightarrow \exists V_j \quad V_j = U_i^p$	extractivité
V'-3	$(a U_i)^p = a^p U_i^p$	associativité mixte
V'-4	$U_i^{pq} = (U_i^p)^q$	associativité
V'-5	$U_i^{p+q} = U_i^p U_i^q$	distributivité-1
V'-6	$(U_i V_j)^p = U_i^p V_j^p$	distributivité-2

On tire de là les premières propriétés des puissances

$$\begin{aligned} U_i^0 &= I_0 \\ U_i &= U_i^1 & (U_i^{-1}) &= (U_i)^{-1} \\ U_i^p &= (U_i^{-1})^{-p} & (U_i^{-1})^p &= U_i^{-p} \\ I_0^p &= I_0 & U_i^p U_i^{-p} &= I_0 \end{aligned}$$

S'agissant des exposants entiers algébriques l'exponentialité se ramène à la multiplication de facteurs U_i ou (U_i^{-1}) . A partir de cette remarque, on pourra chercher à introduire l'exponentiation comme opération définie, avec le secours d'un axiome de *bipartitivité multiplicative* $\exists^* V_i U_i = V_i V_i$ qu'on exploitera en donnant une portée suffisante au principe d'induction mathématique ; on en déduira toutes les propriétés primitives des puissances.

AXIOME DE LA n -DIMENSIONNALITÉ. — On dit que m grandeurs non nulles d'espèces non neutres $U_i, V_j, \dots, S_h$, sont *dépendantes* (ou encore qu'elles forment un *système lié* d'ordre m) lorsqu'il existe m nombres algébriques non tous nuls $p_1 p_2 p_3 \dots p_m$ et une grandeur d'espèce neutre I_α tels que $U_i^{p_1} V_j^{p_2} \dots S_h^{p_m} = I_\alpha$. Puisque aucune des m grandeurs n'est nulle, $I_\alpha \neq O_i$.

Dans le cas contraire, on dit que ces m grandeurs sont *indépendantes* (ou encore qu'elles forment un *système libre* d'ordre m).

Dès lors, deux cas sont possibles :

- ou bien il existe des systèmes libres d'ordre aussi grand qu'on voudra ;
- ou bien l'ordre des systèmes libres est borné.

Posons alors un axiome qui nous place dans ce second cas :

VI' n Il existe un système de n grandeurs non nulles d'espèces non neutres indépendantes, et il n'existe pas de système de $n + 1$ grandeurs non nulles d'espèces non neutres indépendantes.

Cela signifie que *l'espace grandoriel général a n dimensions*. (En adoptant, au contraire, la première hypothèse, nous construirions un espace grandoriel général doué d'un nombre infini de dimensions).

Tout système (libre) de n grandeurs non nulles d'espèces non neutres indépendantes $U_i, V_j, \dots, S_h$, constitue un *repère grandoriel*, qu'on note $\{U_i V_j \dots S_h\}$.

DÉCOMPOSITION D'UNE GRANDEUR T_l DANS UN REPÈRE GRANDORIEL $\{U_i V_j \dots S_h\}$ — Soit d'abord T_l une grandeur non nulle d'espèce non neutre ; les $n + 1$ grandeurs $U_i, V_j, \dots, S_h, T_l$ formant un système lié, il existe $q_1 q_2 \dots q_n q$ non tous nuls et a arithmétique non nul tels que $U_i^{q_1} V_j^{q_2} \dots S_h^{q_n} T_l^q = a I_0$ où $q \neq 0$, puisque $U_i, V_j, \dots, S_h$ forment un système libre.

Si T_l est une grandeur non nulle d'espèce neutre, cette relation est encore vérifiée avec $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ et $q = 1$.

On peut donc écrire dans les deux cas

$$T_l^q = a U_i^{-q_1} V_j^{-q_2} \dots S_h^{-q_n}$$

et, puisque $q \neq 0$,

$$T_l = a \frac{1}{q} U_i^{-q_1} V_j^{-q_2} \dots S_h^{-q_n}$$

c'est-à-dire enfin, en posant $t = a \frac{1}{q}$, $p_1 = -\frac{q_1}{q}$, $p_2 = -\frac{q_2}{q}$, ..., $p_n = -\frac{q_n}{q}$

$$T_l = t U_i^{p_1} V_j^{p_2} \dots S_h^{p_n}$$

où $t > 0$.

Si maintenant T est la grandeur nulle 0 , cette relation est encore vérifiée avec $t = 0$.

En résumé, toute grandeur T se met sous la forme

$$T_l = t^{(ij\dots h)} U_i^{p_1} V_j^{p_2} \dots S_h^{p_n}$$

où $t^{(ij\dots h)}$ arithmétique et $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ algébriques.

Il est aisé de montrer par l'absurde que cette décomposition (quant aux exposants d'abord, quant au coefficient ensuite) est unique.

T_l est d'espèce neutre ou non neutre suivant que les p_k sont tous nuls ou non tous nuls ; elle est nulle ou non nulle suivant que $t^{(ij\dots h)}$ l'est ou ne l'est pas.

$p_1 p_2 \dots p_n$ sont dits *exposants spécifiques* de T_l (ou de T) dans le repère $t^{(ij\dots h)}$ est dit *mesure* de T_l avec le repère.

SYSTÈMES D'UNITÉS COHÉRENTS. — La grandeur d'espèce T qui a pour mesure l'unité s'appelle *grandeur dérivée d'espèce T associée au repère* ; on la note $T^{(ij\dots h)}$

$$T^{(ij\dots h)} = U_i^{p_1} V_j^{p_2} \dots S_h^{p_n}$$

Ainsi

$$T_l = t^{(ij\dots h)} T^{(ij\dots h)}$$

et l'on est amené, comme plus haut, à la *convention de cohérence des mesures*, qui assure la stabilité de la signification du mot « mesure » et fonde la notion de *systèmes d'unités cohérents*.

EQUATION AUX DIMENSIONS D'UNE ESPÈCE T . — Les *facteurs de changement* (matériels ou formels) étant définis comme précédemment, lorsqu'on passe d'un système d'unités cohérent à un autre

$$U = \frac{U_0}{U_0} = \frac{u}{u}, \quad V = \frac{V_0}{V_0} = \frac{v}{v}, \quad \dots, \quad S = \frac{S_0}{S_0} = \frac{s}{s}, \quad T = \frac{T_0}{T_0} = \frac{t}{t}$$

on aboutit de la même manière à l'équation aux dimensions de l'espèce T relativement aux espèces de repérage choisies $U, V, \dots, S$

$$T = U^{p_1} V^{p_2} S^{p_n}$$

COHÉRENCE DE L'AXIOMATIQUE. — Le système d'axiomes

$$\Pi \quad (I' \text{ II}' \text{ III}')_U \text{ IV}' \text{ V}' \text{ VI}'_n$$

qu'on vient d'utiliser est vérifié par les *fonctions de n variables arithmétiques* X_i du type $AX^{p_1}_1 X^{p_2}_2 \dots X^{p_n}_n$ où les paramètres sont assujettis aux conditions *A arithmétique, p_i algébriques* ; cette remarque fournit une garantie satisfaisante de sa cohérence.

STRUCTURE DES G.M.D._n. — On peut faire fonctionner la loi de composition externe V'

— soit sur l'ensemble des *algébriques*, d'où les G.M. *n-dimensionnées* (G.M.D._n),

— soit sur l'ensemble des *rationnels algébriques*, en définissant ensuite une indépendance rationnelle entre m grandeurs (exposants p *rationnels algébriques*), qui prend place dans le VI'_n ; la rationalité des exposants se conserve dans les démonstrations ultérieures (exposants spécifiques $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ *rationnels algébriques*) : on obtient alors les G.M. *rationnellement n-dimensionnées* (G.M.D'_n).

Les grandeurs mesurables, auxquelles nous avons ordinairement affaire, sont toujours rationnellement dimensionnées ; mais, suivant le cas, on combinera entre elles des grandeurs toutes inorientées, ou des grandeurs toutes orientées, ou des grandeurs dont les unes seront inorientées et les autres orientées ; on rencontrera donc les trois types généraux suivants

$$\text{G.I.M.D}'_n \quad \text{G.O.M.D}'_n \quad \text{G.(IO).M.D}'_n$$

UTILISATION DES G.M.D'. — C'est un fait que la géométrie, la mécanique et la physique ont coutume de se développer sans dégager explicitement aucune structure grandorielle *interspécifique*. Une fois la structure *intraspécifique* acquise, il suffit, en effet, pour fonder un *calcul général des mesures des grandeurs*, d'introduire une combinatoire qui porte sur un *système particulier de grandeurs unitaires* $U_0, V_0, W_0, \dots$, choisies respectivement dans chacune des espèces $U, V, W, \dots$ qu'on envisage. Un

corps de définitions préalables, *purement grandorielles*, y pourvoit. L'introduction systématique de la multiplication grandorielle généralisée permet d'abord d'organiser l'écriture symbolique de ces définitions liminaires (ainsi la relation grandorielle $V_0 = L_0 T^{-1}_0$ intègre au formalisme la définition d'une vitesse unitaire V_0 en fonction d'une longueur unitaire L_0 et d'une durée unitaire T_0) ; on reconnaît ensuite qu'elle transforme le calcul général des mesures des grandeurs en un *calcul général des grandeurs*, qui s'y trouvait implicitement contenu.

Si l'on met fin à l'occultation accoutumée des opérations grandorielles, on aboutit aux conclusions suivantes :

- 1° En *géométrie*, on utilise des G.O.M.D^r₁ construites sur la longueur L.
- 2° En *cinématique*, on utilise des G.O.M.D^r₂ construites sur la longueur L et le temps T.
- 3° En *dynamique*, on utilise des G.(1c)M.D^r₃ construites sur la longueur L, le temps T et la masse M.
- 4° En *physique*, on utilise habituellement ces mêmes G.(1c)M.D^r₃. Il est naturel de le faire, si l'on adopte la perspective cartésienne, qui traite la physique comme une promotion de la mécanique. Cependant, la question se pose de savoir si l'on doit ici attribuer à n une valeur *a priori*, et, dans le cas de l'affirmative, si 3 s'impose ou est la plus commode (on sait que les valeurs 1, 2, 4 ont été proposées).

Jean CHAUVINEAU,
professeur au Lycée Henri-IV.

Définition de la longueur d'un arc

I. Soient $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ trois fonctions de la variable u définies et continues dans l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, ($\alpha < \beta$), dérivables dans l'intervalle ouvert $] \alpha, \beta [$. Soit K le nombre défini par l'égalité

$$[x(\beta) - x(\alpha)]^2 + [y(\beta) - y(\alpha)]^2 + [z(\beta) - z(\alpha)]^2 - K(\beta - \alpha)^2 = 0.$$

La fonction $\varphi(u)$

$\varphi(u) = [x(u) - x(\alpha)]^2 + [y(u) - y(\alpha)]^2 + [z(u) - z(\alpha)]^2 - K(u - \alpha)^2$ remplissant dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ les conditions du théorème de Rolle, il existe un nombre β_1 au moins tel que l'on ait

$$\varphi'(\beta_1) = 0, \quad \alpha < \beta_1 < \beta,$$

c'est-à-dire :

$$x'(\beta_1)[x(\beta_1) - x(\alpha)] + y'(\beta_1)[y(\beta_1) - y(\alpha)] + z'(\beta_1)[z(\beta_1) - z(\alpha)] - K(\beta_1 - \alpha) = 0, \\ \alpha < \beta_1 < \beta.$$

La fonction $\psi(u)$,

$\psi(u) = x'(\beta_1)[x(\beta_1) - x(u)] + y'(\beta_1)[y(\beta_1) - y(u)] + z'(\beta_1)[z(\beta_1) - z(u)] - K(\beta_1 - u)$. remplit alors dans l'intervalle $[\alpha, \beta_1]$ les conditions du théorème de Rolle ; il existe donc un nombre α_1 au moins tel que l'on ait $\psi'(\alpha_1) = 0$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1$, c'est-à-dire tel que

$$x'(\beta_1)x'(\alpha_1) + y'(\beta_1)y'(\alpha_1) + z'(\beta_1)z'(\alpha_1) - K = 0, \\ \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta.$$

Autrement dit, il existe deux nombres au moins α_1 , β_1 de l'intervalle ouvert $] \alpha, \beta [$ tels que l'on ait

$$(I) \quad [x(\beta) - x(\alpha)]^2 + [y(\beta) - y(\alpha)]^2 + [z(\beta) - z(\alpha)]^2 = \\ (\beta - \alpha)^2 [x'(\alpha_1)x'(\beta_1) + y'(\alpha_1)y'(\beta_1) + z'(\alpha_1)z'(\beta_1)].$$

II. Soient x , y , z trois fonctions de la variable t définies, continues, dérivables dans un intervalle fermé $[a, b]$, $a < b$. A une valeur t de cet intervalle correspond un point M de coordonnées x , y , z par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$ et un vecteur $\vec{V}$ de coordonnées x' , y' , z' ; aux valeurs a et b correspondent les points A et B. Nous supposons en outre que le vecteur $\vec{V}$ n'est nul en aucun point M, sauf peut-être en A et B ; nous admettrons, comme on le fait dans les classes où sont

enseignées les applications du calcul intégral, que le point M décrit dans ces conditions un arc AB d'une courbe dans un sens précisé par le vecteur V et comme on dit, le parcourt toujours dans le même sens.

Soit $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ une suite croissante de nombres distincts (et distincts de a et b) arbitrairement choisis dans l'intervalle $]a, b[$. Il correspond à cette suite une ligne polygonale $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ que nous appellerons régulièrement inscrite dans l'arc AB.

Le problème est d'étudier l'ensemble (L) des nombres L égaux aux longueurs des lignes polygonales régulièrement inscrites dans l'arc AB.

Soit u une fonction définie, continue, croissante de la variable t ayant une dérivée dans l'intervalle $[a, b]$. Soient u_0 et u_n les valeurs de cette fonction correspondantes aux valeurs a et b de t ; t est une fonction définie, continue, croissante de la variable u dans l'intervalle $[u_0, u_n]$, ayant une dérivée dans cet intervalle. Nous appellerons cette fonction $f(u)$. Un point M de l'arc de courbe AB est défini par ses coordonnées x, y, z , mais celles-ci, ou bien sont des fonctions données de t , ou bien sont des fonctions de u définies comme fonctions de fonctions par $t = f(u)$. Le remplacement de t par u et des valeurs $a, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, b$ par les valeurs correspondantes $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$ ne change pas les sommets A, $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, B$ de la ligne polygonale et par conséquent sa longueur L. Par contre, ce changement de variable conduit à remplacer le vecteur $\vec{V}$ par un vecteur $\vec{W}$ défini par

$$\vec{W} = \frac{du}{dt} \vec{V}.$$

III. On néglige, en général, dans les études classiques des nombres L, ce changement de variable. Nous désirons indiquer, en publiant cette note, qu'on pourrait l'utiliser dans l'espoir de simplifier les exposés traditionnels. Reprenons, en effet, le résultat établi à la fin du paragraphe I. Donnons α et β deux valeurs $\alpha = t_i$, $\beta = t_{i+1}$ choisies parmi les valeurs de t qui définissent deux sommets consécutifs M_i, M_{i+1} de la ligne polygonale. L'égalité (1) s'écrit

$$(M_i M_{i+1})^2 = (t_{i+1} - t_i)^2 [x'(\alpha_1)x'(\beta_1) + y'(\alpha_1)y'(\beta_1) + z'(\alpha_1)z'(\beta_1)].$$

Les nombres α_1 et β_1 sont des nombres de l'intervalle t_i, t_{i+1} et par suite de l'intervalle (a, b) ; les vecteurs $x'(\alpha_1), y'(\alpha_1), z'(\alpha_1)$ et $x'(\beta_1), y'(\beta_1), z'(\beta_1)$ sont donc des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ et la quantité entre crochets est le produit scalaire de ces vecteurs. Il en résulte que si nous remplaçons la variable t par la variable u , ce produit scalaire sera remplacé par le produit scalaire $\vec{W}_1 \cdot \vec{W}_2$. Si donc il était possible de choisir la fonction $f(u)$ de telle sorte que les vecteurs $\vec{W}$ aient, quel que soit t dans l'intervalle $[a, b]$, la longueur 1, ce produit scalaire serait inférieur ou égal à 1 et nous pourrions écrire

$$M_i M_{i+1} \leq U_{i+1} - U_i.$$

Ce choix de u est évidemment possible, par exemple en posant

$$u = \int_t^a \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

IV. Effectuons donc sur la variable t le changement de variable défini par l'égalité précédente; x, y, z sont désormais des fonctions de u et les vecteurs W ont pour longueur 1. Les inégalités $M_i M_{i+1}, U_{i+1} - U_i$ entraînent $L \leq u_n - u_0$.

L'ensemble (L) des nombres L égaux aux longueurs des lignes polygonales inscrites régulièrement dans l'arc AB est donc borné; il admet une borne supérieure précise l que nous appellerons longueur de l'arc AB. Le symbole : arc AB, quand aucune confusion n'est possible, représente ce nombre. Ainsi, par exemple, nous écrirons

$$\text{arc AB} \leq u_n - u_0.$$

V. Il reste à calculer le nombre ainsi défini. Nous n'allongerons pas cette note destinée seulement à appeler l'attention sur un mode d'exposition de la définition de la longueur d'un arc de courbe assez différent des expositions traditionnelles en effectuant ce calcul. Soit un point de l'arc AB ; la démonstration de l'égalité

$$\text{arc AB} = \text{arc AM} + \text{arc MB}$$

est encore un peu délicate, mais n'exige que du soin ; lorsqu'elle est faite, le calcul de arc AM, en fonction de u , est sans difficultés.

R. DONTOT,

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Information

La note « Théorèmes et formules parallèles du triangle », par M. EHRHART, publiée au n° 160 du *Bulletin*, avait déjà paru dans les *Humanités scientifiques*, éditions A. Hatier, ce dont nous nous excusons.

Le Facteur X

Ce n'est pas le titre d'un roman policier, mais celui d'une petite revue de récréations scientifiques, qui paraît chaque mois, depuis octobre dernier, à l'intention des élèves de 15 à 20 ans.

On y trouve, certes, des problèmes curieux et amusants. Mais l'équipe de rédaction du Facteur X, qui comprend des collègues de l'Enseignement Supérieur, du Second Degré et du Technique, s'est surtout proposé comme but une véritable vulgarisation scientifique. La devise qu'ils ont choisie : « Observation prime raison », traduit bien leur intention : donner aux jeunes gens, et naturellement en particulier aux élèves, une plus juste idée de la science et de ses méthodes. Et la devise du « Facteur » n'est-elle pas valable aussi en géométrie élémentaire, où il faut observer la figure avant de raisonner ?

L'équipe du Facteur X exprime l'espoir que les nombreux collègues qui se sont déjà abonnés voudront bien présenter la revue à leurs élèves, contribuant ainsi (du moins l'équipe l'espère-t-elle) à créer chez ces derniers un meilleur climat de compréhension de la science, où l'étonnement ne soit point un réflexe de crainte devant le mystérieux.

Ajoutons encore que la même équipe du Facteur a été chargée de l'émission « Les mille et une récréations scientifiques », qui a lieu tous les samedis à 19 h. 15 sur la chaîne parisienne, émission qui est faite, naturellement, dans l'esprit même de la revue.

A. H.

Citons, des numéros déjà parus :

Récits d'histoire des sciences ; conseils pratiques, illustrés d'exemples vécus, pour la recherche des problèmes de géométrie ; études grammaticales précisant le vocabulaire scientifique et l'emploi des mots courants dans la rédaction des solutions ; étude du phénomène Doppler-Fizeau à partir de la variation de la pétarade d'une motocyclette à un croisement ; de l'alchimie à la chimie avec Van Helmut, etc...

L'éditeur consent des conditions particulières pour les groupes d'élèves et pour les boursiers :

Abonnement individuel annuel	400 fr.
Groupe de 5 au moins : abonnement réduit à	350 fr.
Groupe de 10 au moins : abonnement réduit à	300 fr.
Boursiers	240 fr.

Adresser les commandes à : Editions du Levier, 15, rue du Louvre, Paris, 1^{er}, C.C.P. Paris 10020-06.

Le Gérant : L. PARAZINES.

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

V. LESPINARD et R. PERNET

A PARAÎTRE MAI 1954 :

MATHEMATIQUES : classe de **SECONDE A', C, M** (Géométrie 1 vol., Algèbre 1 vol.),
classe de **SECONDE A, B** (1 volume).

L'introduction des éléments orientés (vecteurs, angles) a été faite avec tout le soin nécessaire. Un plan nouveau du cours permet de rénover de nombreux exercices classiques.

SPECIMEN GRATUIT SUR DEMANDE

Tous les ouvrages de la collection, rédigés avec clarté et précision, facilitent la tâche des Professeurs par le grand nombre d'exercices classés par ordre de difficulté et rattachés aux différents paragraphes du cours.

L'ouvrage de Troisième, surtout celui destiné au Cours Complémentaire permet une excellente préparation aux examens : B.E.P.C., E.N., etc...

PREMIER CYCLE

Lycées et Collèges

Classe de 6 ^e , 1 vol.	Br. : 235 f., cart. : 330 f.
— 5 ^e , 1 vol.	Br. : 300 f., cart. : 380 f.
— 4 ^e , 1 vol.	Br. : 420 f., cart. : 520 f.
— 3 ^e , 1 vol.	Br. : 450 f., cart. : 550 f.

Cours Complémentaires (cours complet)

Classe de 6 ^e , 1 vol.	Br. : 255 f., cart. : 350 f.
— 5 ^e , 1 vol.	Br. : 315 f., cart. : 410 f.
— 4 ^e , 1 vol.	Br. : 450 f., cart. : 550 f.
— 3 ^e , 1 vol.	Br. : 470 f., cart. : 570 f.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHEMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique, Cosmographie).

Tout le programme se trouve réuni en un volume qui donne aux élèves des méthodes pratiques ; les questions sont traitées avec le maximum de simplicité, sans toutefois sacrifier l'essentiel de l'esprit mathématique Br. : 815 f., cart. : 915 f.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGEBRE ET COSMOGRAPHIE Br. : 340 f., cart. : 415 f.

Classe de MATHÉMATIQUES :

COURS COMPLET

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE	Br. : 690 f., cart. : 790 f.
» — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTEE	Br. : 275 f.
» — ARITHMETIQUE	Br. : 285 f.
» — MECANIQUE	Br. : 245 f., cart. : 335 f.
LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE,	Br. : 330 f., cart. : 425 f.
LESPINARD et PERNET. — ALGEBRE	Br. : 595 f., cart. : 695 f.
» — TRIGONOMETRIE	Br. : 375 f., cart. : 470 f.
» — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 2 ^e partie, classe de Mathématiques	335 f.

Classe de Première C. et M.

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
1^{re} partie, séries C. et M. 280 f.

Roland MAILLARD et

Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne,
chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

Albert MILLET

Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du second degré

Classe de Sixième

Mathématiques. 192 p., 900 exerc. et probl.

Classe de Cinquième

Mathématiques. 272 p., 900 exerc. et probl.

Classe de Quatrième

Mathématiques. 288 p., 687 exerc. et probl.

Classe de Troisième. Nouvelle édition

Mathématiques. 304 p., 1185 exerc. et probl.

Classes de Seconde Classique A et B

Mathématiques. 320 p., 714 exerc. et probl.

Classes de Seconde Classique C et Moderne

Algèbre. 256 p., 633 exerc. et probl.

Géométrie. 444 p., 724 exerc. et probl.

Classes de Première Classique A et B

Mathématiques. 288 p., 600 exerc. et probl.

Classes de Première Classique C et Moderne

Algèbre et Trigonométrie. 288 p., 634 ex. probl.

Géométrie. 336 p., 528 exerc. et probl.

Classe de Mathématiques

Algèbre. 368 p., 890 exerc. et probl.

Cosmographie. 256 p., 94 exerc. et probl.

Géométrie. 480 p., 693 exerc. et probl.

Géométrie descriptive. 256 p., 414 ex. probl.

Trigonométrie. 192 p., 585 exerc. et probl.

Classe de Mathématiques (Technique)

Géométrie. 496 p., 711 exerc. et probl.

Classes de Philosophie et Sciences expér.

Cosmographie. 208 pages.

Classe de Philosophie

Trigonométrie et Algèbre. 104 p., 158 ex. probl.

► En préparation :

Mathématiques, Cl. de Sciences expérimentales.
Arithmétique, Cl. de Mathématiques.

*Une méthode
efficace*

*Une culture
mathématique*



*Une nouvelle
présentation
typographique*

LIVRES DU MAÎTRE :

Corrigés de 6^e

Corrigés de 5^e

Corrigés de 4^e

Corrigés de 3^e

Corrigés de Géométrie 2^e CM

Corrigés de Géométrie 1^{re} CM

• Ces *Livres du Maître*, hors-commerce, sont exclusivement réservés à MM. les Professeurs de Mathématiques.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

Programmes du 18 avril 1947
Tarif juin 1953

Arithmétique 6°	220	»
Dessin Géométrique 6° et 5°	125	»
Géométrie 5° et 4°	360	»
Arithmétique 5°	295	»
Arithmétique et Algèbre 4°	300	»
Arithmétique et Algèbre 3°	320	»
Géométrie 3°	295	»
Compléments d'Algèbre et de Géométrie Géométrie 3° Moderne court	100	»
Algèbre 2° A.B.C.M.	500	»
Géométrie 2° A.B.C.M.	465	»
Algèbre 1 ^{re} A.B.	180	»
Algèbre et Trigonométrie 1 ^{re} C.M.	440	»
Géométrie 1 ^{re} A.B.C.M.	440	»
Questions de Cours de Mathématiques du Baccalauréat, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	340	»
Nouveauté :		
Géométrie 5°, 4°, 3° (pour les Lycées, Col- lèges et Cours Complémentaires), car- tonné	800	»

DELAGRAVE

Mathématiques

COURS BRACHET DUMARQUÉ

avec la collaboration de **P. COUDERC** et de **R. ROSTOLLAND**

Vient de paraître, pour la classe de **Mathématiques :**

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE

168 pages, 392 figures, 448 exercices et problèmes
NOUVELLE ÉDITION, ENTIÈREMENT RÉFONDUE

Signalé spécialement :

GÉOMÉTRIE, classe de Mathématiques.

Présentation nouvelle des déplacements.

Expose explicite, adapté à la fois à l'étude et à la recherche.

Nombreux exercices intercalés dans le cours : applications ou compléments.

PETITES TABLES TRIGONOMETRIQUES NATURELLES.

(Dépliant à trois volets, sur papier fort).

Modèle commode pour Cours et Examens (Bacc, B. E. P. C.), Mathématiques et Physique.

Cours complet, maintenu au courant.

Longue expérience, au service des idées nouvelles.

Catalogue et Spécimens sur demande : **15, rue Soufflot, PARIS (5^e)**

MASSON & C^{ie}, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

== **COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE** ==

Nouveauté :

Nouveauté :

**ALGÈBRE
ET
TRIGONOMETRIE**

Classe de Mathématiques

par

J. COMMEAU

Professeur de Math. Sup. au Lycée Kléber
à Strasbourg

Un fort volume (15,5×22) de 504 pages, avec figures, exercices
et problèmes, broché fort

1.970 fr.