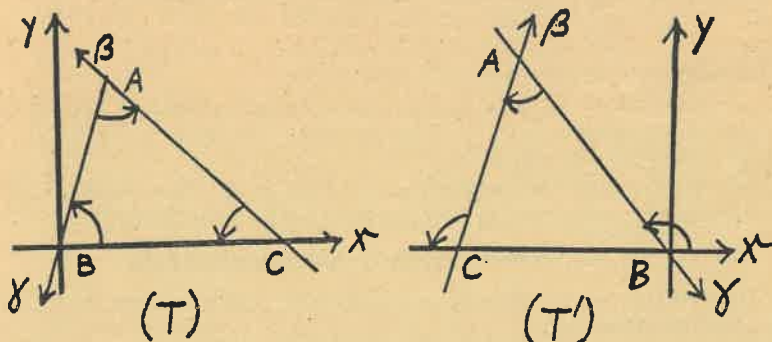


Théorèmes et formules parallèles du triangle

(par E. ELRHART, professeur agrégé au Lycée Kléber, Strasbourg)



1. *Les paramètres.* — Soient donnés un nombre algébrique a , deux nombres positifs B, C , inférieurs à Π et deux axes $\vec{BX}, \vec{BY}$, tels que, dans le plan orienté, $(\vec{BX}, \vec{BY}) = +\frac{\pi}{2}$. Prenons sur $\vec{BX}$ le point C tel que $\overline{BC} = a$ et faisons passer par B et C respectivement deux axes $\vec{\gamma}$ et $\vec{\beta}$ tels que

$$(\vec{BX}, \vec{\gamma}) = B - \Pi, (\vec{CX}, \vec{\beta}) = \Pi - C.$$

Si $a > 0$, $B + C < \Pi$, on obtient la figure (T), si $a < 0$, $B + C > \Pi$, on obtient la figure (T'). (Dans les deux cas $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ se coupent en un point A situé dans le demi-plan des Y positifs). Dans (T) et (T') nous appellerons a, B, C les *paramètres* du triangle orienté.

I. Théorèmes parallèles

2. *Éléments homologues invariants.* — D'après la construction identique des deux figures, il est évident que les coordonnées des sommets A, B, C y ont même expression en fonction des paramètres. On en déduit facilement qu'il en est de même pour les coordonnées des milieux des côtés, du centre de gravité G , de l'orthocentre H , des centres O et O_9 du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

Par suite, en fonction de a, B, C , les équations des médianes, des hauteurs, des cercles O et O_9 sont les mêmes dans les deux figures.

3. *Éléments homologues différenciés.* — Mais l'équation $Y = X \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ représente dans (T) la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{B}$ du triangle ABC et dans (T') sa bissectrice extérieure. De même $Y = -(X - a) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ représente la bissectrice intérieure de $\hat{C}$ dans (T), mais sa bissectrice extérieure dans (T'). Il en résulte que réciproquement les équations qui représentent les bissectrices extérieures de B et $\hat{C}$ dans (T), représentent leurs bissectrices intérieures dans (T'). Par contre, on vérifie

que les bissectrices intérieure et extérieure de $\hat{A}$ ont même équation dans les deux cas de figure.

On en déduit que les coordonnées du centre I du cercle inscrit de (T) (intersection des bissectrices intérieures de $\hat{A}$ et $\hat{B}$) et celles du centre I_a du cercle exinscrit dans $\hat{A}$ de (T') (intersection de la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ et de la bissectrice extérieure de $\hat{B}$) ont la même expression en fonction des paramètres.

4. *Tableau des points homologues.* — Groupons dans un tableau (I) quelques points homologues importants des deux figures, c'est-à-dire des points dont les coordonnées y ont même expression en fonction des paramètres a, B, C .

(I)	INVARIANTS							DIFFÉRENCIÉS								
	(T)	A	B	C	G	H	O	O ₉	I	I _a	I _b	I _c	i	i _a	i _b	i _c
	(T')	A	B	C	G	H	O	O ₉	I _a	I	I _c	I _b	i _a	i	i _c	i _b

i, i_a, i_b, i_c désignent les points qui correspondent à I, I_a, I_b, I_c dans l'homothétie $(G, -\frac{1}{2})$.

5. *Théorèmes parallèles.* — Considérons un théorème sur le triangle faisant intervenir au moins un élément différencié dans les deux figures. Par exemple : « Dans un triangle les droites I_aM_a, I_bM_b, I_cM_c reliant les centres des cercles exinscrits aux milieux des côtés sont concourantes. »

Cela signifie que les équations de ces droites (que nous pouvons écrire uniquement avec a, B, C) ont une solution commune $X=f(a, B, C), Y=g(a, B, C)$. Mais ces trois mêmes équations représentent dans (T') les droites IM_a, I_cM_b, I_bM_c , qui y ont donc le point $X=f(a, B, C), Y=g(a, B, C)$ en commun. D'où le théorème *parallèle* : « Dans un triangle les droites IM_a, I_cM_b, I_bM_c sont concourantes. » Considérons encore le théorème de Feuerbach : « Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent à son cercle inscrit. »

Analytiquement cela signifie que le système des équations des cercles O_9 et I (écrites en a, B, C) a une solution double $X=f(a, B, C), Y=g(a, B, C)$. Mais ces mêmes équations représentent dans (T') les cercles O_9 et I_a . D'où le théorème *parallèle* : « Le cercle des neuf points est tangent aux cercles exinscrits. »

La proposition « i est le centre radical des cercles I_a, I_b, I_c » donne immédiatement la forme parallèle « i_a est le centre radical des cercles I, I_c, I_b ».

Il importe naturellement dans cette *traduction* de théorèmes de bien déterminer les éléments homologues dans (T'). Considérons par exemple l'énoncé : « Si sur les côtés BA, CA d'un triangle ABC on porte des segments BB', CC' égaux à BC, OI est perpendiculaire à B'C' et égal au rayon du cercle circonscrit à AB'C'. » Quels sont dans (T') les homologues de B', C' ?

Dans (T) ils sont définis algébriquement par $\overline{BB'} = -a$ sur $\overrightarrow{\gamma}$, $\overline{CC'} = +a$ sur $\overrightarrow{\beta}$. En leur donnant la même définition dans (T') on trouve le théorème *parallèle* : « Si sur les prolongements des côtés BA, CA d'un triangle ABC on porte des segments BB', CC' égaux à BC, OI_a est perpendiculaire à B'C' et égal au rayon du cercle circonscrit à AB'C'. » Le lecteur pourra chercher ce que devient le même théorème, si dans (T) on porte AC sur les côtés AB et CB.

II. Formules parallèles

6. *Grandeurs algébriques.* — Exprimons dans (T) des grandeurs remarquables du triangle ABC au moyen des paramètres, explicitement comme les côtés

$$b = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)}, \quad c = \frac{a \sin B}{\sin(C+B)},$$

ou implicitement au moyen des grandeurs déjà exprimées précédemment par a, B, C comme le périmètre $2p = a + b + c$. Ainsi l'angle $A = \Pi - B - C$, la surface $S = \frac{bc \sin A}{2}$, les rayons des cercles circonscrit, inscrit, exinscrit $R = \frac{a}{2 \sin(B+C)}$,

$r = \frac{S}{p}$, $r_a = \frac{S}{p-a}$, les hauteurs $h_a = b \sin C$, $h_b = a \sin C$, $h_c = a \sin B$, la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ $d_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$.

Désignons par $b', c', p', A', S' \dots$ les mêmes expressions (implicites ou explicites) en a, B, C , ces paramètres étant pris cette fois dans (T') . Pour éviter la confusion avec les grandeurs remarquables du triangle ABC de (T) (lettres non accentuées) nous désignerons ici les paramètres par $a' B', C'$. Donc $a' = -a$, $B' = \Pi - B$, $C' = \Pi - C$. Nous appellerons les expressions $A', B', C', a', b', c', 2p', S' \dots$ angles, côtés, périmètre, surface... algébriques du triangle orienté (T') .

$$b' = \frac{a' \sin B'}{\sin(B' + C')} = \frac{-a \sin(\pi - B)}{\sin(\pi - B + \pi - C)} = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)} = b,$$

de même $c' = c$, $A' = \Pi - B' - C' = \Pi - (\Pi - B) - (\Pi - C) = -A$,
 $2p' = a' + b' + c' = -a + b + c = 2(p - a)$.

On trouve de même $S' = -S$, $R' = R$, $r' = -r_a$, etc...

7. *Tableau et interprétation des grandeurs algébriques.* — Groupons dans le tableau (II) les valeurs de quelques grandeurs algébriques importantes.

(II)		
(T')	ABC	
A'	-A	Dans (T') a', b', c' sont les valeurs de $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ sur les axes-côtés ; S' est l'aire algébrique classique du triangle ABC (négative, car le parcours ABC est de sens contraire à celui du plan) : h'_a, h'_b, h'_c sont les mesures algébriques $\overline{A'A}, \overline{B'B}, \overline{C'C}$ des hauteurs sur des axes déduits des précédents par rotation de $+\frac{\pi}{2}$; r', r'_a, r'_b, r'_c sont les rayons des cycles tangents respectivement aux axes $(\vec{X}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}), (\vec{X}_1, \vec{\beta}, \vec{\gamma}), (\vec{X}, \vec{\beta}_1, \vec{\gamma}), (\vec{X}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}_1)$ (où $\vec{X}_1, \vec{\beta}_1, \vec{\gamma}_1$ désignent les axes opposés à $\vec{X}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$), le rayon d'un cycle étant négatif quand son sens est contraire à celui du plan (I).
B'	$\pi - B$	
C'	$\pi - C$	
a'	-a	
b'	b	
c'	c	Si on applique ces mêmes définitions algébriques dans (T) , on retombe sur les mesures positives habituelles $a, b, c, S, h_a, h_b, h_c, r, r_a, r_b, r_c$.
S'	-S	
R'	R	
p'	$p - a$	
$p' - a'$	p	
$p' - b'$	$-(p - c)$	Remarquons encore que les relations (II) entre lettres accentuées et celles qui ne le sont pas sont toutes réciproques (ainsi $p' = p - a$ et $p = p' - a'$).
$p' - c'$	$-(p - b)$	
r'	$-r_a$	
r'_a	$-r$	
r'_b	r_c	
r'_c	r_b	
h'_a	h_a	
h'_b	$-h_b$	
h'_c	$-h_c$	
$M'N'^2$	MN^2	

8. *Grandeurs homologues et formules parallèles.* — Prenons une relation quelconque entre des grandeurs remarquables du triangle, par exemple

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (\text{Grelle}).$$

(1) Voir notre article *Sur la géométrie du cycle*, « Bulletin de l'A.P.M. » de novembre 1951.

Cette formule peut être considérée comme une identité entre les paramètres indépendants a, B, C , soit :

$$\frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}} = 4 \frac{a}{2 \sin (B+C)} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

dans laquelle nous pouvons aussi accentuer les lettres. Mais alors (puisque par définition r', R', A' s'expriment par a', B', C' comme r, R, A par a, B, C), elle s'écrit :

$$r' = 4R' \sin \frac{A'}{2} \sin \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2}, \text{ ou, en remplaçant les grandeurs algébriques par leurs}$$

valeurs tirées du tableau II : $-ra = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, ou encore

$$ra = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad (\text{Jacobi}).$$

Appelons *grandeur homologue* d'une grandeur du triangle ABC, la grandeur algébrique qui lui correspond quand on passe de (T) à (T'), c'est-à-dire celle qui lui fait face dans le tableau (II), quand on accentue la lettre qui la représente. On obtient alors la règle :

Toute relation dans le triangle donne une *formule parallèle* en remplaçant par leurs homologues les grandeurs qui y figurent.

Nous laissons au lecteur le soin de traduire quelques relations comme :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$S = pr = r^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = r r_a \cot \frac{B}{2} = \frac{r_a r_b r_c}{p}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}, \quad p^2 = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a.$$

9. *Grandeur homologue d'un segment.* — Considérons la formule d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Les coordonnées de O, I dans (T) et leurs homologues O, I_a dans (T') ont même expression en fonction des paramètres a, B, C de leurs figures respectives (§ 2 et § 3). Donc si $OI^2 = f(a, B, C)$ dans (T), $OI_a^2 = f(a', B', C')$ dans (T'). Mais nous avons vu (§ 8) que si

$$R^2 - 2Rr = f(a, B, C), \quad R^2 + 2Rr_a = R' - 2R'r' = f(a', B', C').$$

D'où $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

Donc, si deux points M, N quelconques d'un triangle ont pour homologues M', N', la grandeur homologue de $\overline{MN}^2$ est $\overline{M'N'}^2$. Ceci permet de traduire des formules

telles que $\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ca} + \frac{CI^2}{ab} = 1$ ou $I_b I_c \cdot I_c I_a \cdot I_a I_b = 16R^2 p$.

On voit maintenant aussi pourquoi, au signe près éventuellement, $h'_a, h'_b, h'_c, R', r', r'_a, r'_b, r'_c$ sont égaux à $h_a, h_b, h_c, R, r_a, r, r_c, r_b$: c'est que HA et $I_a T_a$, par exemple, sont homologues de HA et IT (en désignant par T, T_a les pieds des perpendiculaires abaissées de I et I_a sur BX).

10. *Résumé.* — Tout ce qui précède se résume dans l'énoncé :

Tout théorème et toute formule sur le triangle donne une forme parallèle, en y substituant aux éléments géométriques et aux grandeurs leurs homologues (tableaux de substitutions I et II) (1).

(1) La méthode que nous venons d'exposer s'étend facilement à d'autres figures comme le triangle sphérique ou le tétraèdre.

Le présent article résume un passage de : *Le Triangle Orienté* (en vente chez l'auteur,